МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

О.Н. Галажинская

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть I. Случайные события

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

УДК 519.22
ББК 22.172
Г15

Галажинская О.Н.
Г15 Практикум по теории вероятностей. Ч. I: Случайные события : учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2017. – 174 с.

ISBN 978-5-94621-641-8

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении практических заданий в курсе «Теория вероятностей». Предложены в большом количестве разнообразные задачи с подробно разобранными решениями, а также задачи для самостоятельной работы студентов по каждой из тем. Приводятся все необходимые теоретические сведения из курса, для того, чтобы студент мог выполнить задания без обращения к дополнительной литературе.

Для студентов ФПМК и ФТФ, изучающих курс «Теория вероятностей», но может быть полезно широкому кругу читателей, интересующихся решением вероятностных задач.

УДК 519.22
ББК 22.172

Рецензенты:
А.А. Назаров, доктор технических наук, профессор
С.В. Рожкова, доктор физико-математических наук, профессор

ISBN 978-5-94621-641-8

Тема 1. Элементы комбинаторики

Термин «комбинаторика» был введён в математику Готфрид Вильгельмом Лейбницем, всемирно известным учёным, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий, вопрос о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из данных объектов. Это один из самых красивых разделов современной математики. Комбинаторные конструкции лежат в основе очень многих математических приложений. Например, теория алгоритмов, в существенной мере опирается на идеи комбинаторной математики (или иначе говорят дискретной математики), многие современные «высокие технологии» в значительной мере связаны с комбинаторикой: это и интернет технологии, и технологии биоинженерии и многое другое. Комбинаторика активно применяется в таких областях научного знания как генетика, информатика, статистическая физика.

Комбинаторной называется любая задача, в которой нужно ответить на вопрос: <u>*каким числом различных способов можно осуществить необходимое*</u>?

В комбинаторике рассматриваются <u>*конечные множества*</u> и <u>*различные*</u> их <u>*подмножества*</u>.

Каждое конкретное подмножество, составленное из элементов данного конечного множества, будем называть ***выборкой***. Выборки бывают ***упорядоченные*** и ***неупорядоченные***. В упорядоченной выборке важен порядок в котором следуют её элементы, иначе говоря изменив порядок, мы получим уже другую выборку. В неупорядоченной выборке важен только состав элементов выборки, т.е. две неупорядоченные выборки различны, если различен набор входящих в неё элементов.

В основе многих комбинаторных задач лежат два правила: ***правило суммы*** и ***правило произведения***.

Правило суммы

Пусть имеется n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих соответственно $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов. Число способов, которым можно выбрать один элемент из всех множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, равно $m_1 + m_2 + ... + m_n$.

<u>*Или в другой формулировке:*</u> если элемент a_1 может быть выбран m_1 способами, элемент a_2 может быть выбран <u>*другими*</u> m_2 способами, элемент a_3 – m_3 способами, <u>*отличными от*</u>

первых двух и т.д., элемент a_n может быть выбран m_n способами, *отличными от первых* $(n-1)$, то выбор одного из элементов *или* a_1, *или* a_2, …., *или* a_n может быть осуществлён $m_1+m_2+....+m_n$ способами.

В самой ***простой формулировке правило суммы***: если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b - n способами, причём любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор «a *или* b» можно сделать $m+n$ способами.

Пример 1.1. *На столе лежат 3 черных и 5 красных карандашей. Сколькими способами можно выбрать карандаш любого цвета?*

Решение: По правилу сложения выбрать карандаш любого цвета можно 5+3=8 способами. Т.к. имеем 3 варианта выбора чёрного карандаша и 5 вариантов выбора красного, а нам нужен *или* чёрный, *или* красный карандаш.

Пример 1.2. *Из пункта A в пункт B можно добраться самолётом, поездом и автобусом, причём между этими пунктами существуют 2 авиамаршрута, 1 – железнодорожный и 3 – автобусных маршрута. Каким числом способов можно добраться из A в B?*

Решение: Согласно правилу сложения число способов добраться из A в B равно $2+1+3=6$. Так как мы можем добраться *или* на самолёте, *или* на поезде, *или* на автобусе, поэтому складываем все количества вариантов добраться из A в B.

Правило произведения

Пусть имеется n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$, содержащих соответственно $m_1, m_2, ..., m_n$ элементов. Число способов, которым можно выбрать по одному элементу из каждого множества $A_1, A_2, ..., A_n$, равно $m_1 \cdot m_2 \cdot .... \cdot m_n$.

Или в другой формулировке: если элемент a_1 может быть выбран m_1 способами, после каждого такого выбора элемент a_2 может быть выбран m_2 способами и так далее,…, после каждого $n-1$ выбора элемент a_n может быть выбран m_n способами, то выбор всех элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ в указанном порядке может быть осуществлён $m_1 \cdot m_2 \cdot .... \cdot m_n$ способами.

Правило произведения в простейшем своём виде формулируется так:

Если предмет a можно выбрать n способами, а предмет $b-m$ способами, то пару (a,b) (<u>*и*</u> a, <u>*и*</u> b) можно выбрать $n\cdot m-$способами.

<u>Пример 1.3.</u> *В мужском гардеробе имеется 3 вида костюмов и 2 вида ботинок. Каким числом способов можно выбрать комплект из костюма и ботинок?*

<u>Решение:</u> Нам нужно выбрать одновременно пару объектов: <u>*и*</u> костюм, <u>*и*</u> ботинки. Мы считаем, что каждый способ выбора костюма, сочетается с любым способом выбора туфель (эстетика наряда не учитывается), поэтому по правилу умножения:

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать костюм}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать туфли}}} = 6$$

<u>Пример 1.4.</u> *В университетской столовой имеются два первых, пять вторых и четыре третьих блюда. Сколькими способами студент может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюда?*

<u>Решение:</u> Необходимо выбрать 3 объекта одновременно: <u>*и*</u> первое, <u>*и*</u> второе, <u>*и*</u> третье блюда:

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать 1 блюдо}}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать 2 блюдо}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{число способов}\\ \text{выбрать 3 блюдо}}} = 40$$

Итого 40 вариантов обеда из трёх блюд.

Рассмотрим некоторое конечное множество $M=\{x_1,x_2,....,x_n\}$, состоящее из n элементов. Из элементов множества *M*, можем сформировать выборки объёма m, т.е. получить $m-$ элементные подмножества.

Различают 2 способа формирования выборок:

1) ***Бесповторный***, выбранный элемент в исходное множество не возвращается и выборка не содержит повторяющиеся элементы.
2) ***Повторный***, при котором выбранный элемент возвращается обратно в исходное множество и может быть выбран снова.

<u>*Выборки без повторения элементов*</u>

Рассмотрим случай, когда во вновь получаемых выборках элементы множества M не повторяются, т.е. <u>*выборки без повторения*</u>.

В случае выборок без повторений может быть, что:

1) $m = n \neq 0$

2) $0 \leq m \leq n$

Перестановки

1) Когда $m = n \neq 0$, т.е. количество элементов в извлекаемых выборках совпадает с количеством элементов в исходном множестве. Такие выборки могут отличаются друг от друга ***только*** порядком следования элементов. Называются они ***перестановками***. Их число определяется по формуле:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Можно получить эту формулу, используя правило умножения. Так как нам нужна выборка из $m = n$ элементов, то:

$$\underbrace{n}_{\substack{\text{число способов} \\ \text{выбрать } 1-\text{ый элемент}}} \cdot \underbrace{n-1}_{\substack{\text{число других способов} \\ \text{выбрать } 2-\text{ой элемент}}} \underbrace{\cdot}_{\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{число способов} \\ \text{выбрать последний элемент}}} = n!$$

Определение 1: Различные ***упорядочения*** исходного n – элементного множества называются ***перестановками*** из n элементов **.**

Пример 1.5. *Каким числом способов, можно расставить на полке 3 разные книги.*

Решение: 3 разные книги – считаем трёхэлементным исходным множеством $\{K_1K_3K_2\}$. Посмотрим какие упорядоченные трёхэлементные подмножества можем получить расставляя разными способами 3 книги:

$$K_1K_2K_3,\ K_1K_3K_2,\ K_2K_1K_3,\ K_2K_3K_1,\ K_3K_1K_2,\ K_3K_2K_1$$

Наши трёхэлементные подмножества различаются между собой только порядком следования элементов. Поэтому наши выборки (3-х элементные подмножества) будут перестановками без повторений, а их число равно $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Сочетания и размещения

2) Если $0 \leq m \leq n$, т.е. количество элементов в извлекаемой выборке или меньше, или равно, (может быть и так, и так) числа элементов в исходном множестве.

<u>Здесь возможно 2 случая:</u>

❖ Формируемые выборки различаются между собой только составом элементов. Такие комбинации элементов называются ***<u>сочетаниями</u>***. Их число находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

При $m = n$, получаем: $C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$, т.е. количество сочетаний в этом случае равно 1.

При $m = 0$, получаем: $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$, т.е. количество сочетаний и в этом случае равно 1.

Определение 2: Сочетанием из n элементов по m называется ***<u>любое</u>*** $m-$элементное подмножество исходного $n-$элементного множества.

❖ Получаемые выборки различаются между собой и порядком следования элементов, и составом элементов, в этом случае выборки называются ***<u>размещениями</u>***. Число размещений из n элементов по m определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При $m = n$, получаем $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n -$ размещения превращаются в перестановки. Т.е. перестановки - это частный случай размещений из n элементов по m, при $m = n$.

При $m = 0$, получаем $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$.

Определение 3: Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное $m-$ элементное подмножество исходного $n-$элементного множества.

<u>Замечание 1.</u> Величины C_n^m называют ***биномиальными коэффициентами***, это название связано с формулой бинома Ньютона: $(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^m \cdot b^{n-m}$.

<u>Замечание 2.</u> Число размещений A_n^m связано с числом сочетаний C_n^m, формулой:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}$$

<u>Обьяснение формулы:</u> Сочетания, это комбинации, отличающиеся друг от друга только составом элементов, порядок следования в которых не учитывается (т.е. выборки, различающиеся только порядком следования элементов, считаются одинаковыми). Если общее число сочетаний C_n^m умножить на количество перестановок элементов в каждой из выборок P_m, то мы получим как раз количество комбинаций, которые различаются и составом, и порядком следования элементов. А это и есть число размещений.

<u>Пример 1.6.</u> *В студенческой группе 20 человек. Каким числом способов можно выбрать 5 человек на конференцию?*

<u>Решение:</u> Из 20-ти элементного множества (группа), нужно извлечь 5-ти элементные подмножества (5 человек на конференцию). Выборки бесповторные, отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Например, три выборки (три набора пяти студентов на конференцию) считаются одинаковыми, т.к. различаются только порядком следования элементов:

$$\underbrace{\boxed{\text{Иванов}}\quad\boxed{\text{Петров}}\quad\boxed{\text{Сидоров}}\quad\boxed{\text{Гусев}}\quad\boxed{\text{Орлов}}}_{5\ \textit{человек на коференцию}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Сидоров}}\quad\boxed{\text{Петров}}\quad\boxed{\text{Иванов}}\quad\boxed{\text{Гусев}}\quad\boxed{\text{Орлов}}}_{5\ \textit{человек на коференцию}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Гусев}}\quad\boxed{\text{Орлов}}\quad\boxed{\text{Иванов}}\quad\boxed{\text{Сидоров}}\quad\boxed{\text{Петров}}}_{5\ \textit{человек на коференцию}}$$

А три такие уже разные, т.к. набор элементов разный:

$$\underbrace{\boxed{\text{Уткин}}\quad\boxed{\text{Петров}}\quad\boxed{\text{Сидоров}}\quad\boxed{\text{Гусев}}\quad\boxed{\text{Орлов}}}_{5\ \textit{человек на коференцию}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Иванов}}\quad\boxed{\text{Петров}}\quad\boxed{\text{Сидоров}}\quad\boxed{\text{Гусев}}\quad\boxed{\text{Орлов}}}_{5\ \textit{человек на коференцию}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Уткин}}\quad\boxed{\text{Петров}}\quad\boxed{\text{Дятлов}}\quad\boxed{\text{Гусев}}\quad\boxed{\text{Волков}}}_{5\ \textit{человек на коференцию}}$$

Т.е. для нас не «значим» порядок следования элементов в выборке, важен только набор элементов и такие комбинации мы определили, как сочетания. Их число равно: $C_{20}^5 = \dfrac{20!}{5!15!} = 15\,504$.

Пример 1.7. *Каким числом способов можно сшить флаг (три горизонтальных полосы разного цвета и равной ширины), если имеется материал 5 цветов: красный* (K)*, белый* $(Б)$*, голубой* $(Г)$*, зелёный* $(З)$ *и серый* (C).

Решение: Имеется материал 5 разных цветов, т.е. пятиэлементное множество $\{K, Б, Г, З, C\}$. Из этого множества нужно извлечь 3-х элементные подмножества (3 цвета ткани для флагов), которые между собой должны различаться и порядком следования элементов, и составом. Например, выборки $\{KCГ\}$ и $\{CKГ\}$ различаются только порядком следования элементов, но в реальной жизни это разные флаги. Выборки $\{CKЗ\}$ и $\{KCГ\}$ различаются составом элементов и это очевидно тоже разные флаги. Т.е. нас интересуют число комбинаций, различающихся и порядком следования элементов, и составом элементов. Их мы определили как размещения, количество которых равно $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Выборки с повторением элементов

Рассмотрим другой способ формирования выборок из $n-$ элементного множества, когда во вновь получаемых соединениях, элементы могут повторяться. Такие выборки называют *выборками с повторением*.

Размещения с повторением

Пусть дано конечное множество $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, n \geq 1$. Составим из элементов A упорядоченные подмножества следующим образом: произвольно (случайно) выберем первый элемент x_{i1}, зафиксируем его и вернём обратно, затем опять случайно выбираем второй элемент x_{i2} и возвращаем назад и так далее, процедуру выбора повторим k раз. В результате проведения данной процедуры получим выборку из k элементов $\{x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}\}, k \geq 1$, которая называется ***размещением с повторением***.

Пример 1.8.: *Дано множество* $A = \{7,8,9\}$. *Записать размещения с повторением по 3 элемента.*

Решение: Запишем все размещения с повторением по 3 элемента из элементов множества A, количество которых 27:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\text{3 числа могут}\\ \text{быть на 1-ом месте}}} \cdot \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\text{3 числа могут}\\ \text{быть на 2-ом месте}}} \cdot \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\text{3 числа могут}\\ \text{быть на 3-ем месте}}}}^{\text{выборка по 3 элемента}} \underbrace{=}_{\text{итого}} 27 \text{ вариантов}$$

$$\{7,7,7\},\{7,8,8\},\{7,7,8\},\{7,8,7\},\{7,9,9\},\{7,9,7\},\{7,7,9\}\{7,9,8\},\{7,8,9\},$$
$$\{8,8,8\},\{8,7,7\},\{8,7,8\},\{8,8,7\},\{8,9,9\},\{8,9,8\},\{8,8,9\},\{8,9,7\},\{8,7,9\},$$
$$\{9,9,9\},\{9,8,8\},\{9,8,9\},\{9,9,8\},\{9,7,7\},\{9,7,9\},\{9,9,7\},\{9,8,7\},\{9,7,8\}.$$

Определение размещений с повторением может быть записано и в такой формулировке:

Определение 4. Пусть множество $A=\sum_{i=1}^{n} A_i$, и каждое из множеств A_i, $i=1,\ldots,n$, содержит не менее m однотипных элементов. ***Размещениями с повторением из n элементов по m элементов*** называются <u>упорядоченные</u> множества, состоящие из ***m*** элементов множества *A*.

<u>*Число размещений с повторениями*</u> находится по формуле:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

<u>***Пример 1.9.***</u> *Пусть дано множество* A *и подмножества* A_i, *для которых справедливо* $A=\sum_{i=1}^{3} A_i$:

$$\underbrace{\underbrace{(1\quad 1)}_{\substack{\text{подмножество } A_1 \text{ содержит}\\ \text{2 однотипных элемента}}} \quad \text{и} \quad \underbrace{(2\quad 2)}_{\substack{\text{подмножество } A_2 \text{ содержит}\\ \text{2 однотипных элемента}}} \quad \text{и} \quad \underbrace{(3\quad 3)}_{\substack{\text{подмножество } A_3 \text{ содержит}\\ \text{2 однотипных элемента}}}}_{n=3}$$

Выпишем все размещения с повторением для данного множества A, *при* $n=3$ *и* $m=2$ $\tilde{A}_3^2=3^2=9$:

$$(1\quad 1),(2\quad 2),(3\quad 3),(1\quad 2),(2\quad 1),(1\quad 3),(3\quad 1),(2\quad 3),(3\quad 2).$$

Перестановки с повторением

Пусть исходное множество содержит n элементов $A=\{x_1,x_2,....,x_n\}$. При этом:

элемент x_1 – повторяется n_1 раз;

элемент x_2 – повторяется n_2 раза;

………………………………….

элемент x_k – повторяется n_k раз;

Сформируем различные упорядоченные выборки из n элементов множества A:

$$\underbrace{\underbrace{x_1,...x_1}_{n_1\ раз},\underbrace{x_2,..,x_2}_{n_2\ раз},.....,\underbrace{x_k,x_k,x_k,x_k}_{n_k\ раз}}_{n\ элементов},$$

$$\underbrace{\underbrace{x_2,..,x_2}_{n_2\ раз},\underbrace{x_1,...x_1}_{n_1\ раз},.....,\underbrace{x_k,..,x_k,x_k}_{n_k\ раз},\underbrace{x_{k-1},x_{k-1},..,x_{k-1},x_{k-1}}_{n_{k-1}\ раз}}_{n\ элементов},$$

$$\underbrace{x_2,x_2,x_1,x_3.....x_{k-2},x_k,x_k,x_k,x_{k-1},x_{k-4},x_{k-1},x_{k-1}x_2,...x_2,x_1,...x_1}_{n\ элементов}$$

В любой из выборок содержится n элементов, но каждый из этих элементов относится к одному из k типов элементов. Выборки друг от друга отличаются только порядком следования элементов. Такие выборки называются ***перестановки с повторением.***

Определение 5. Перестановками с повторениями из n элементов называют различные упорядочения данного конечного множества, состоящего из n элементов k типов $(k<n)$.

Допустим, что среди n элементов конечного множества находится n_i элементов i - го типа, $i=1,...,k,\ n=\sum_{i=1}^{k}n_i$.

Тогда число перестановок с повторениями из n элементов:

$$N_n(n_1,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!...n_k!}.$$

Замечание 3: При подсчёте числа комбинаций данного вида учитывается то, что при перестановке элементов одного типа местами фактически выборка не меняется. Поэтому чтобы посчитать количество действительно отличающихся друг от друга комбинаций необходимо общее число перестановок с n элементами, разделить на произведение чисел перестановок однотипных элементов.

Пример 1.10. *Дано множество A, состоящее из 7 элементов 3 типов: $A=\{аабббрр\}$. Найти количество перестановок с повторениями из 7 элементов.*

Решение: Найдём количество перестановок с повторениями по формуле: $N_n(n_1,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!...n_k!}$. У нас $N_7(2,3,2)=\dfrac{7!}{2!3!2!}=\dfrac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{4}=210$. Это перестановки вида:

$\{аабббрр\},\{бааббрр\},\{раабббр\},\{абаббрр\},\{ррбабба\},...$ Разными считаются перестановки, когда получаемые «слова» разные, как например $\{раабббр\}$ и $\{бааббрр\}$.

Общее количество всех $7!$ перестановок (из семи элементов), мы разделили на $2!3!2!$, тем самым исключив «качественно» одинаковые перестановки. Поясним на примере. Данную комбинацию $\{аабббрр\}$ можно получить переставив две буквы «$а$» между собой, три буквы «$б$» и 2 буквы «$р$». Проиллюстрируем это и для наглядности занумеруем буквы, наша выборка теперь имеет вид: $\{a_1a_2б_1б_2б_3p_1p_2\}$. Будем переставлять буквы местами:

1.$\{a_1a_2б_1б_2б_3p_1p_2\}$; 2.$\{a_2a_1б_1б_2б_3p_1p_2\}$; 3.$\{a_1a_2б_1б_3б_2p_1p_2\}$; 4.$\{a_2a_1б_1б_3б_2p_1p_2\}$;5.$\{a_1a_2б_2б_1б_3p_1p_2\}$;
6.$\{a_1a_2б_2б_3б_1p_1p_2\}$; 7.$\{a_2a_1б_2б_1б_3p_1p_2\}$; 8.$\{a_2a_1б_2б_3б_1p_1p_2\}$; 9.$\{a_1a_2б_3б_1б_2p_1p_2\}$; 10.$\{a_1a_2б_3б_2б_1p_1p_2\}$;
11.$\{a_2a_1б_3б_1б_2p_1p_2\}$;12.$\{a_2a_1б_3б_2б_1p_1p_2\}$; 13.$\{a_1a_2б_1б_2б_3p_2p_1\}$; 14.$\{a_2a_1б_1б_2б_3p_2p_1\}$;15.$\{a_1a_2б_1б_3б_2p_2p_1\}$;
16.$\{a_2a_1б_1б_3б_2p_2p_1\}$;17.$\{a_1a_2б_2б_1б_3p_2p_1\}$; 18.$\{a_1a_2б_2б_3б_1p_2p_1\}$;19.$\{a_2a_1б_2б_1б_3p_2p_1\}$; 20.$\{a_2a_1б_2б_3б_1p_2p_1\}$;
21.$\{a_1a_2б_3б_1б_2p_2p_1\}$;22.$\{a_1a_2б_3б_2б_1p_2p_1\}$;23.$\{a_2a_1б_3б_1б_2p_2p_1\}$;24.$\{a_2a_1б_3б_2б_1p_2p_1\}$.

Из полученного видно, что «качественно» одна и та же выборка, (одно и то же «слово») $\{аабббрр\}$ присутствует у нас в общем количестве перестановок 7! : *двадцать четыре лишних раза*. И так ***с каждой*** «качественно» отличной от других выборкой. Получается, что реальное количество «качественно» различающихся выборок, умножается «напрасно» на 24, поэтому для получения «истинного» результата и нужно разделить общее число перестановок на $2!3!2!=24$.

Сочетания с повторением

Определение 6. Сочетаниями с повторениями из n элементов по m элементов называются любые множества, содержащие ***m*** элементов, каждый из которых является элементом одного из ***n*** типов.
Число сочетаний с повторениями в предположении, что число элементов каждого типа не меньше ***m***, определяется формулой:

$$\tilde{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} = C_{n+m-1}^{n-1}.$$

Пример 1.11. *На почте имеются новогодние открытки 7 видов. Нужно купить 8 открыток. Каким числом способов это можно сделать?*

Решение: Занумеруем все виды открыток: $\underbrace{O_1 \quad O_2 \quad O_3 \quad O_4 \quad O_5 \quad O_6 \quad O_7}_{\text{7 сортов открыток}}$

Выборки по 8 элементов могут быть например такие:

$O_1 \quad O_2 \quad O_3 \quad O_4 \quad O_5 \quad O_6 \quad O_7 \quad O_7$;

$O_1 \quad O_1 \quad O_1 \quad O_1 \quad O_2 \quad O_2 \quad O_2 \quad O_2$ – купили восемь открыток пополам 1 и 2 вида;

$O_3 \quad O_3 \quad O_3 \quad O_3 \quad O_3 \quad O_3 \quad O_3 \quad O_3$ – купили все восемь открыток третьего вида;

…………………………………………………………......

Очевидно, это выборки с повторением элементов, в которых порядок следования элементов не имеет значение, т.е. в реальной жизни две такие выборки не имеют различия:

$$O_1 \quad O_2 \quad O_3 \quad O_4 \quad O_5 \quad O_6 \quad O_7 \quad O_7$$

и

$$O_2 \quad O_1 \quad O_4 \quad O_3 \quad O_6 \quad O_5 \quad O_7 \quad O_7$$

Составить комбинаций из 7 элементов по 8 с повторением, можно таким числом способов:

$$\tilde{C}_7^8 = C_{7+8-1}^{7-1} = C_{14}^6 = \frac{14!}{6!8!} = 3003.$$

Примеры решения задач по теме 1:

<u>Пример 1.12:</u> *Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры не повторяются?*

<u>Решение:</u> 1 способ. Пятизначное число не может начинаться с цифры 0. Т.е. так быть не может:

$$\boxed{0} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{1}$$

Начнём с того, что посчитаем количество цифровых комбинаций, которые все-таки начинаются с нуля.

Для подсчёта рассуждаем так: на 1 месте может быть только 1 вариант цифры и это ноль:

$$\underbrace{\boxed{0}}_{1\ \textit{вариант}} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

На втором месте может стоять любое число от 1 до 4, (нуля быть не может, т.к. в условии оговорено, что цифры не повторяются), т.е. 4 способа выбора второй цифры.

$$\underbrace{\boxed{}}_{1\ \textit{способ}} \quad \underbrace{\boxed{}}_{4\ \textit{способа}} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

На третью позицию будем выбирать из оставшихся трёх цифр (две забрали и цифры не могут повторяться):

$$\underbrace{\square}_{1\ способ} \quad \underbrace{\square}_{4\ способа} \quad \underbrace{\square}_{3\ способа} \quad \square \quad \square$$

на вторую выбираем из оставшихся двух:

$$\underbrace{\square}_{1\ способ} \quad \underbrace{\square}_{4\ способа} \quad \underbrace{\square}_{3\ способа} \quad \underbrace{\square}_{2\ способа} \quad \square$$

И на последней позиции может быть только 1 вариант:

$$\underbrace{\square}_{1\ способ} \quad \underbrace{\square}_{4\ способа} \quad \underbrace{\square}_{3\ способа} \quad \underbrace{\square}_{2\ способа} \quad \underbrace{\square}_{1\ способ}$$

Используя правило умножения, перемножаем все количества способов выбора цифры для каждой позиции: $P_4 = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Т.е. всего 24 «числа», начинающихся с нуля.

Различных пятизначных чисел из 5 цифр мы можем получить $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способами.

Нам же нужны только обычные «нормальные» пятизначные числа, а их будет ровно:

$$P_5 - P_4 = 96.$$

***__Решение:__* 2 способ.** На первой позиции может быть 4 варианта цифр (все кроме нуля), на второй тоже 4 варианта, одну забрали для 1 позиции, но теперь ноль «в игре», на третьей 3 варианта , на четвертой 2, на пятой 1.

$$\underbrace{\square}_{4\ способа} \quad \underbrace{\square}_{4\ способа} \quad \underbrace{\square}_{3\ способа} \quad \underbrace{\square}_{2\ способа} \quad \underbrace{\square}_{1\ способ}$$

Итого $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ вариантов.

__Пример 1.13:__ *На собрание пришли 3 девушки и 4 юноши. Сколькими способами можно их рассадить, если девушки хотят сидеть рядом?*

__Решение:__ Поскольку девочки желают сидеть рядом, можно рассмотреть их пока как единый «элемент», тогда перестановок с этим «элементом», можно получить: $P_5 = (4+1)! = 120$ (4 парня плюс 3 девушки в одном «элементе»). Но т.к. этот «элемент» у нас все - таки включает трёх девочек, и их можно тоже между собой пересаживать, это можно сделать $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. Далее используем правило умножения: умножаем число способов посадки (4 (парня) $+1$), на число способов рассаживания девочек между собой. Искомое число перестановок: $P_5 \cdot P_3 = 120 \cdot 6 = 720$.

__Пример 1.14:__ *В группе 10 девушек и 8 парней. Нужно выбрать троих дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор, если:*

а) среди них должен быть 1 парень;

б) это могут быть любые 3 студента.

Решение: а) выбрать одного парня из 8 можно - $C_8^1 = 8$ способами, а 2 девушек из десяти: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$ – способами. Таким образом способов выбрать 3 дежурных, среди которых и 1 парень, и 2 девушки: $C_8^1 \cdot C_{10}^2 = 45 \cdot 8 = 360$;

б) любых 3 студентов из 18 можно выбрать $C_{18}^3 = \frac{18!}{3!15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{3!} = 816.$

Пример 1.15. *Определить количество чисел, меньших 100000, которые можно написать с помощью цифр 9,8,7.*

Решение: В данном случае имеется 3 множества разнотипных элементов, одно содержит девятки, другое восьмёрки, третье семёрки, т.е. $n = 3$. Результат любой выборки, $m-$ значное число, $m = 5,4,3,2,1,$ состоящее только из цифр 9,8,7. Количество пятизначных чисел $-\tilde{A}_3^5 = 3^5 = 243$, количество четырёхзначных чисел $-\tilde{A}_3^4 = 3^4 = 81$, трёхзначных чисел $-\tilde{A}_3^3 = 3^3 = 27$, двузначных $-\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$, однозначных очевидно всего 3: $\tilde{A}_3^1 = 3^1 = 3$. Числа меньшие 100000, это *или* пяти, *или* четырёх, *или* трёх, *или* двух, *или* однозначные, поэтому используя правило сложения находим общее количество чисел, меньших 100000, которые записаны только с использованием цифр 9,8,7: 243+81+27+9+3=363.

Пример 1.16. *У мальчика 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Ежедневно в течение 9 дней он съедает по одному фрукту. Каким числом способов он может это сделать?*

Решение: Число фруктов, равно числу дней. Т.е. объем любой выборки, совпадает с объёмом элементов в исходном множестве. Выборки друг от друга могут отличаться только порядком следования элементов, а именно порядком съедаемых фруктов. Очевидно, что выборки являются перестановками с повторением. Всего перестановок из 9 элементов может быть 9!, но в этом количестве, присутствуют комбинации, с одинаковым порядком следования элементов, например:

$$\boxed{Я_1}\ \boxed{Я_2}\ \boxed{Г_1}\ \boxed{Г_2}\ \boxed{Г_3}\ \boxed{А_1}\ \boxed{А_2}\ \boxed{А_3}\ \boxed{А_4}$$

$$\boxed{Я_2}\ \boxed{Я_1}\ \boxed{Г_1}\ \boxed{Г_2}\ \boxed{Г_3}\ \boxed{А_1}\ \boxed{А_2}\ \boxed{А_3}\ \boxed{А_4}$$

Эти 2 выборки будут «зашиты» в 9! как две разные, т.к. 2 элемента $Я_1$ и $Я_2$ поменялись местами, но при этом фактически это два одинаковых способа, при котором съедается сначала 2 яблока.

Поэтому для подсчёта возможных ***различных*** комбинаций, 9! нужно разделить на произведение факториалов значений количеств повторяющихся элементов:

$$N_9(2,3,4)=\frac{9!}{2!3!4!}=1260.$$

Пример 1.17. *Найти число способов, которыми можно разделить 7 одинаковых яблок между тремя девочками. Кому- то из девочек, может быть не дано ни одного яблока.*

Решение: Для решения такого рода задач, используются «перегородки». Так как у нас 3 девочки, то возьмём две одинаковые перегородки: до первой перегородки будут размещаться яблоки, полученные 1 –ой девочкой, от 1-ой до 2-ой перегородки – яблоки второй девочкой, после 2-ой – яблоки третьей девочки. Выборки могут быть такого вида:

$Я\ Я\ Я \mid Я \mid Я\ Я\ Я$ – три яблока у 1-ой, одно у 2-ой и три у 3-ей;

$\mid \mid Я\ Я\ Я\ Я\ Я\ Я\ Я$ – все яблоки у 3-ей девочки;

$Я\ Я \mid Я\ Я\ Я \mid Я\ Я$ – два яблока у 1-ой, три яблока у 2-ой и два яблока у 3-ей девочки;

……………………………………………………………………………………….......

Каждая из комбинаций, дает нам возможный вариант раздела яблок. И в каждой комбинации участвует всегда 9 элементов: 7 яблок и 2 перегородок. Очевидно, что мы имеем перестановки с повторением элементов. Поэтому общее число способов раздела яблок равно:

$$N_9(7,2)=\frac{9!}{7!2!}=36.$$

Пример 1.18. *Пять юношей и три девушки играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке?*

Решение: ***1 способ.*** Назовём две команды ***A*** и ***B***.

1) Найдём вначале общее число способов разделить 8 человек: 5 юношей и 3 девушки, на две команды. Используем для этого правило умножения:

$$\underbrace{C_8^4}_{\substack{\text{число способов набрать в} \\ \text{команду } \boldsymbol{A}-4 \text{ человека}}} \cdot \underbrace{C_4^4}_{\substack{\text{из оставшихся } 4 \text{ набираем в} \\ \text{команду } \boldsymbol{B}}} = \frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$$

2) Найдём число способов, которым можно разделиться на 2 команды по 4 человека, в случае, когда <u>или</u> в A нет девушек, <u>или</u> в B нет девушек:

- *1 вариант* в A нет девушек: $\underbrace{C_5^4}_{\substack{\text{забираем из 5} \\ \text{юношей в } A-4}} \cdot \underbrace{C_3^0}_{\substack{\text{число способов} \\ \text{выбрать 0 девушек}}} = 5$
- *2 вариант* в B нет девушек: $\underbrace{C_3^3}_{\substack{\text{забираем из 3} \\ \text{девушек в } A \text{ всех}}} \cdot \underbrace{C_5^1}_{\substack{\text{число способов} \\ \text{выбрать еще 1 парня}}} = 5$

Итого, получаем всего $C_5^4 \cdot C_3^0 \underset{\text{или}}{+} C_3^3 \cdot C_5^1 = 10$

3) Тогда число способов, когда в каждой команде хотя бы по одной девушке: $70-\left(C_5^4 \cdot C_3^0 + C_3^3 \cdot C_5^1\right) = 60$

Решение: ***2 способ.*** Как сделать, чтобы в каждой команде была хотя бы 1 девушка:

1) В $A-$ одна девушка, тогда в $B-$ 2 девушки, число таких комбинаций: $C_3^1 \cdot C_5^3$.

или

2) В $A-$ две девушка, тогда в $B-$ 1 девушка, число таких комбинаций: $C_3^2 \cdot C_5^2$.

Других вариантов очевидно нет. Общее число способов получаем, используя правило сложения: $C_3^1 \cdot C_5^3 + C_3^2 \cdot C_5^2 = 30+30=60$.

Пример 1.19. *На собрании должны выступать 5 человек:* ***А, Б, В, Г, Д****. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если* ***Б*** *не должен выступать раньше* ***А****?*

Решение: ***1 способ.*** Решим задачу для n =5. Найдём число способов, взаимной расстановки ***А*** раньше ***Б:***

- если ***А*** ставим на 1 место, то для ***В*** остаётся 4 места: $A \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\textbf{места для В и других ораторов}}$
- если ***А*** ставим на 2 место, то для ***В*** остаётся 3 места: $A \underbrace{\qquad\qquad}_{\textbf{места для В}}$
- если ***А*** ставим на 3 место, то для ***В*** остаётся 2 места; $A \underbrace{\qquad}_{\textbf{места для В}}$
- если ***А*** ставим на 4 место, то для ***В*** остаётся 1 место. $A \underbrace{\ }_{\textbf{место для В}}$

Итого $4+3+2+1=10$ способов. Остальные 3 оратора могут выступить $3!$ способами. Общее число вариантов: $10 \cdot 3! = 60$.

Решение: 2 ***способ.*** Решим задачу в общем виде:

- если ***А*** ставим на 1 место, то для ***В*** остаётся $n-1$ место;

- если ***A*** ставим на 2 место, то для ***B*** остаётся $n-2$ места;
- ………
- если ***A*** ставим на $n-1$ место, то для ***B*** остаётся 1 место.

Таким образом для ***B*** после ***A*** имеется $\left[(n-1)+(n-2)+(n-3)+....+1\right]$ способов выступить.

В квадратных скобках $(n-1)$ член арифметической прогрессии, найдем их сумму, используем формулу: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{(n+1)n}{2}$, тогда у нас $S_{n-1}=\frac{a_1+a_{n-1}}{2}\cdot(n-1)=\frac{(n-1+1)(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Всех остальных ораторов можем поставить выступать $(n-2)!$ способами. Общее число способов находим, используя правило умножения: $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2}=\frac{n!}{2}$.

При $n=5$ получаем $\frac{5!}{2}=60$.

<u>Решение:</u> 3 ***способ.*** $A_n^2=\frac{n!}{(n-2)!}=n\cdot(n-1)-$способов расставить двух ораторов на n местах. В этом количестве способов в половине случаев будет ***A*** перед ***B,*** а в половине ***B*** перед ***A***. Поэтому разделив $A_n^2/2$, получим число вариантов выступления, когда ***A*** перед ***B.*** Остальных ораторов можем по-прежнему расставлять $(n-2)!$ способами. Итого общее число $\frac{A_n^2}{2}\cdot(n-2)!=\frac{n!}{2(n-2)!}\cdot(n-2)!=\frac{n!}{2}$. При $n=5$ получаем $\frac{5!}{2}=60$.

<u>Пример 1.20.</u> *Поезду с n пассажирами предстоит сделать m остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между остановками?*

<u>Решение:</u> Закодируем получаемые выборки так: квадрат будет обозначать пассажира, внутри квадрата будем писать номер остановки, на которой пассажир вышел. Могут быть такие реализации:

$$\underbrace{\boxed{1}\quad\boxed{1}\quad\boxed{1}\quad\cdots\quad\boxed{1}\quad\boxed{1}\quad\boxed{1}}_{n\ \text{пассажиров}}-\textit{все вышли на } 1 \textit{ остановке};$$

$$\underbrace{\boxed{2}\quad\boxed{1}\quad\boxed{2}\quad\cdots\quad\boxed{1}\quad\boxed{2}\quad\boxed{1}}_{n\ \text{пассажиров}}-\textit{ половина вышла на } 1 \textit{ остановке, половина на } 2-\textit{ой};$$

$$\underbrace{\boxed{m}\quad\boxed{m-1}\quad\boxed{m-2}\quad\cdots\quad\boxed{3}\quad\boxed{2}\quad\boxed{1}}_{n\ \text{пассажиров}}-\textit{ все вышли на разных остановках.}$$

Теоретически в первом квадрате может оказаться любое число от 1 до $\boldsymbol{m}$, потому что у 1 пассажира может быть $\boldsymbol{m}$ вариантов выхода, во втором квадрате также любое число от 1 до $\boldsymbol{m}$ и так далее, для любого из $\boldsymbol{n}$ пассажиров $\boldsymbol{m}$ вариантов выхода. Используя правило умножения, находим число способов распределения пассажиров между остановками:

$$\underbrace{\boxed{m}\ \cdot\ \boxed{m}\ \cdot\ \boxed{m}\ \cdot\ \ldots..\ \cdot\ \boxed{m}\ \cdot\ \boxed{m}\ \cdot\ \boxed{m}}_{n\ пассажиров} = m^n$$

Можно было сразу классифицировать получаемые выборки как размещения с повторением и используя формулу $\tilde{A}_n^m = m^n$, записать ответ. Как это?: очевидно, глядя на возможные реализации, можем заключить, что любая из комбинаций, получаемая из m элементов (m остановок), является выборкой с повторением элементов, кроме того выборки различаются и составом элементов, и порядком их следования.

<u>Пример 1.21.</u> *Садовник должен в течение трех дней посадить 6 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее 1 дерева в день.*

<u>Решение:</u> 1 ***способ.*** Нужно посадить 6 деревьев в три дня. Используем перегородки, в качестве разделителя для дней. До первой перегородки будет находиться все посаженное в 1 день, от первой до второй − все посаженное во второй день, и после второй − посадки третьего дня. Комбинации деревьев с перегородками могут быть, например, такие:

$$\underbrace{Д}_{\mathbf{1}\ день}\Bigg|\underbrace{Д}_{\mathbf{2}\ день}\Bigg|\ \underbrace{Д\ \ Д\ \ Д\ \ Д}_{\mathbf{3}\ день},$$

$$\underbrace{Д\ Д\ Д}_{\mathbf{1}\ день}\Bigg|\ \underbrace{Д}_{\mathbf{2}\ день}\ \Bigg|\underbrace{Д\ Д}_{\mathbf{3}\ день}$$

Если нужно сажать не менее одного дерева в день, то обе перегородки рядом не могут оказаться, иначе это бы означало, что в один из дней ничего не посажено. Т.е. фактически для выбора постановки перегородок имеется всего 5 позиций в пределах между первым и последним Д. Число способов выбрать два места из 5, можем найти используя формулу для сочетаний: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$;

<u>Решение:</u> 2 ***способ.*** Используем также перегородки, найдем общее число способов посадки деревьев в 3 дня. Оно будет равно числу перестановок с повторением элементов: 2-х перегородок и 6-ти деревьев. При этом считаем возможным, что в один из дней не посажено ни одного дерева:

$$N_8(6,2)=\frac{8!}{6!2!}=28$$

Из этого количества теперь нужно вычесть число тех комбинаций, когда не посажено ни одного дерева. Для удобства введём кодирование: квадрат будет обозначать день, внутри квадрата будем писать количество посаженных деревьев. Рассмотрим реализации, когда не посажено ни одного дерева, они могут быть такими:

$\underbrace{\boxed{0}\ \boxed{6}\ \boxed{0}}_{3\ дня}$, $\underbrace{\boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{4}}_{3\ дня}$, $\underbrace{\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{0}}_{3\ дня}$, $\underbrace{\boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{0}}_{3\ дня}$, и так далее.

По реализациям видно, что ноль может быть только:

- <u>*или на двух позициях*</u>, число таких комбинаций: $C_3^2=3$;
- <u>*или на одной*</u>, их число C_3^1, но в этом случае сумма чисел на оставшихся двух позициях должна быть равна 6. Это возможно только так: $(2,4),(4,2),(5,1),(1,5),(3,3)-$ пятью вариантами. По правилу умножения всего: $5\cdot C_3^1=15$-вариантов.

Теперь, используя правило сложения, находим число вариантов, когда не было посажено ни одного дерева: $C_3^2+5\cdot C_3^1=18$.

Тогда окончательно, число способов, когда сажают не менее 1 дерева в день: $28-18=10$.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1:

1.1. Сколькими способами можно расставить 7 бегунов на 7 дорожках?

1.2. Курьеру поручено разнести пакеты в 6 различных учреждений. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

1.3. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

1.4. В корзине имеются 15 груш и 7 яблок. Нужно выбрать 5 груш и 3 яблока. Сколькими способами это можно сделать?

1.5. В комнате имеется 7 лампочек. Сколько существует различных способов освещения? (*Ответ*: 128)

1.6. Преступники решили ограбить дом, в котором проживает семья из пяти человек: муж, жена, двое детей и мать жены. Сколько различных ситуаций (по количеству людей, находящихся в доме) их может ожидать? (*Ответ*:32)

1.7. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков и все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.8. Сколько словарей надо издать чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, украинского, английского, немецкого, португальского на любой другой из этих 5 языков.

1.9. Сколько существует пятизначных телефонных номеров, в каждом из которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля?

1.10. Сколькими способами можно раздать 36 карт на 4 человека, при условии, что раздаётся сразу по 6 карт.

1.11. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

1.12. В театре 10 актёров и 8 актрис. Сколькими различными способами можно распределить роли в спектакле, в котором 6 мужских и 3 женских ролей.

1.13. Имеется n шаров, из них n_1 – красных, n_2 – черных. Скольким числом способов можно набрать группу из r шаров, из них k красных.

1.14. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? (*Ответ*: 28800)

1.15. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

1.16. Сколькими способами можно разбить группу из 30 студентов на три подгруппы по 7, 8 и 15 человек соответственно?

1.17. Мать купила 3 вида сладостей: Две конфеты «Гулливер», четыре батончика «Сникерс» и пять «Марс». 12 дней подряд она будет давать сыну по 1 штуке. Сколькими способами это возможно сделать?

1.18. Рыбак поймал 3 леща, 2 карася и 4 щуки, посолил их и вывесил на солнце сушиться. Каким числом способов можно развесить рыбу на нитке?

1.19. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «тригонометрия»?

1.20. На узком участке трассы в линию движутся автогонщики. Из них 4 на российских автомобилях, 5 на американских и 3 на немецких. Сколько существует разных комбинаций машин на трассе, если нас интересует только принадлежность автомобиля к конкретной стране.

1.21. Пятеро студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

1.22. В магазине имеются пирожные пяти сортов. Сколькими способами можно купить 9 пирожных? (*Ответ*:715);

1.23. Сколько существует двузначных чисел, кратных либо 2, либо 5, либо тому и другому числу одновременно?

1.24. Десяти студентам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить студентов в два ряда, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

1.25. Сколькими способами 3 черных шара, 3 белых шара и 3 синих шара могут быть разложены в 5 разных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

Тема 2. Алгебра событий. Вероятностное пространство

Теория вероятностей изучает закономерности массовых случайных явлений. Но рассматриваются и исследуются только те случайные явления, которые могут появится в результате проведения случайных экспериментов. К случайным же экспериментам относят такие испытания, которые можно повторять сколько угодно раз, примерно в одинаковых условиях и результат каждого из испытаний предсказать невозможно.

Изучение любого случайного явления начинается с построения формальной математической модели случайного эксперимента, т.е. с построения вероятностного пространства:

1. Сначала выясняется, каково множество всех возможных результатов эксперимента.
2. Затем необходимо решить, какие подмножества этого множества интересуют нас в качестве событий,
3. И в конце определяется степень возможности этих событий.

Поговорим обо всех этих этапах подробно.

Пусть $\Omega = (\omega_1, ..., \omega_n, ...) = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ – множество всех несовместных исходов некоторого случайного эксперимента.

Пространство элементарных исходов

Определение 1. Пространством элементарных исходов называется множество Ω, содержащее все *возможные* *взаимоисключающие результаты* данного случайного эксперимента.

Элементы множества Ω называются ***элементарными событиями*** и обозначаются буквой ω: $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, ..., n, ...$.

<u>Пример 2.1.</u> Опыт: *Выбирают случайным образом одного студента из пронумерованного списка группы, состоящей из 20 человек: 10 девушек и 10 юношей.*

Элементарный исход в данном испытании, это выбор конкретного студента с соответствующим номером. Выбор одного из студентов, исключает одновременный выбор другого, т.е. исходы взаимоисключающие. Можем записать пространство элементарных исходов так: $\Omega = \{\omega_i\}, i = \overline{1,20}$, где ω_i – выбран студент с i – номером в списке.

Определение 2. Любое подмножество $B \subseteq \Omega$, состоящее из элементарных событий, называется ***случайным событием***.

Говорят, что произошло событие ***B***, если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих во множество ***B***.

<u>Пример 2.2</u>. Опыт: *Выбирают случайным образом двух студентов из списка группы, состоящей из 5 человек: 1. Иванова; 2. Петров; 3. Сидоров; 4. Орлова; 5. Лосева.*

Обозначим элементарный исход данного опыта $\omega_{ij},\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,5},$ - это выбор двух студентов из пяти, с номерами i и j, при этом считаем, что $\omega_{ij} = \omega_{ji}$.

Количество элементов в пространстве элементарных исходов равно: $|\Omega| = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10,$ т.е. $\Omega = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{25}, \omega_{34}, \omega_{35}, \omega_{45}\}$, где например, $\omega_{12} = \omega_{21}$ означает, что выбраны Иванова и Петров, а $\omega_{23} = \omega_{32}$ – выбраны Петров и Сидоров.

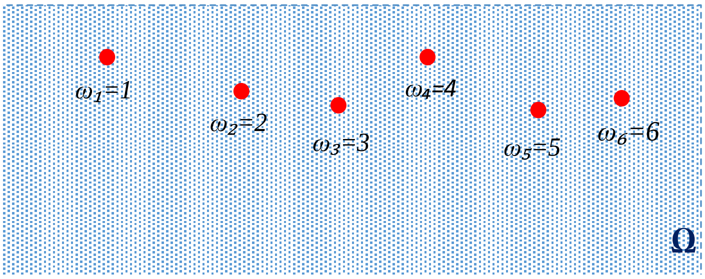
События, которые могут произойти в рамках данного случайного испытания:

$B = \{$ выбраны 2 парня $\} = \{\omega_{23}\}$ – только один исход благоприятствует наступлению события B;

$A = \{$ выбраны парень и девушка $\} = \{\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{24}, \omega_{34}, \omega_{25}, \omega_{35}\}$ – из десяти элементарных исходов шесть благоприятствуют данному событию.

Итак, ***<u>элементарный исход</u>*** - это мельчайший неделимый результат эксперимента, а событие может состоять из одного или сразу нескольких элементарных исходов.

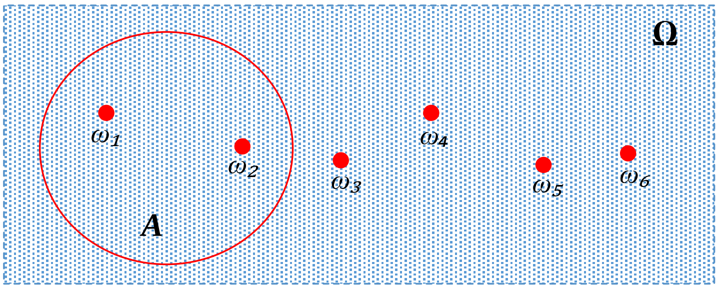
<u>Пример 2.3.</u> ***Опыт:*** *Один раз подбрасывается игральный кубик.* Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}$.



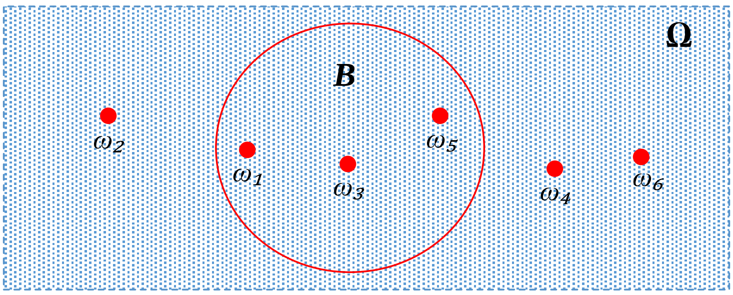
Элементарные исходы здесь соответствуют числу выпавших очков.

Рассмотрим некоторые события, которые могут произойти в рамках данного опыта (случайного эксперимента).

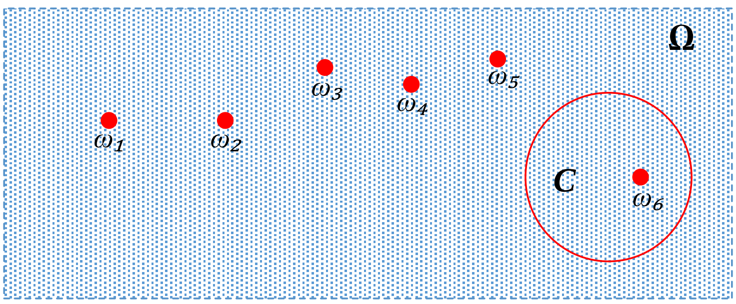
Событие $\boldsymbol{A} = \{1, 2\}$ - произойдёт, если выпадет одно или два очка;



Событие $\boldsymbol{B} = \{1, 3, 5\}$ - наступит, если выпадет нечётное число очков.



Наступлению события $\boldsymbol{C} = \{6\}$ благоприятствует один элементарный исход: появление шести очков.



Достоверное и невозможное события

Согласно ***определению 2*** Ω также является событием, т.к. любое множество является и собственным подмножеством. То есть $\Omega -$ это событие, которое наступает всегда (так как любой из выпавших элементарных исходов в опыте благоприятствует его наступлению), поэтому оно называется ***достоверным*** событием.

Пример 2.4. ***Опыт:*** *Один раз подбрасывается игральный кубик.*

Событие $A = \{$ на верхней грани кубика выпало не более 6-ти очков $\} = \Omega = \{\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 3,\ \omega_4 = 4,\ \omega_5 = 5,\ \omega_6 = 6\} -$ достоверное событие.

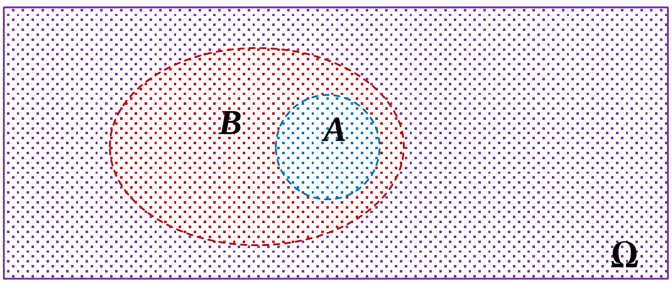
Событие, наступлению которого не благоприятствует ни один элементарный исход, называется ***невозможным*** и обозначается Ø.

Пример 2.5. ***Опыт:*** *Один раз подбрасывается игральный кубик.*

Событие $B = \{$ на верхней грани кубика выпало 9 очков $\} = \{\varnothing\} -$ невозможное событие.

Теоретико- множественные операции над событиями

Определение 3. Говорят, что событие A ***влечёт*** событие B ($A \subset B$), если событие B наступает всегда, когда происходит событие A, т.е. $\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.



Пример 2.6. ***Опыт:*** *Один раз подбрасывается игральная кость.* Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}$.

Рассмотрим события, которые могут произойти в рамках данного случайного эксперимента:

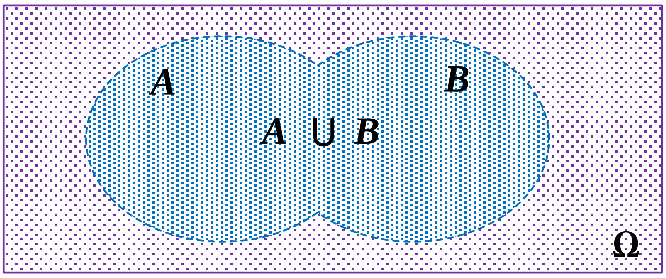
$B = \{2,4,6\} = \{$ выпало чётное число очков $\}$ и $A = \{4\} = \{$ выпало 4 очка $\}$.

Очевидно, что всякий раз, когда будет наступать событие A будет наступать и событие B, т.е. A влечет событие B или $A \subset B$.

Определение 4. События A и B называются ***<u>равносильными</u>*** (или ***эквивалентными***) если $A \subset B$ и $A \supset B$.

Т.е. в каждом опыте два равносильных события A и B всегда либо оба происходят, либо оба не происходят.

Определение 5. ***<u>Суммой событий</u>*** A и B называется событие: $S = A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$, наступающее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий: или событие A, или событие B, или оба вместе.

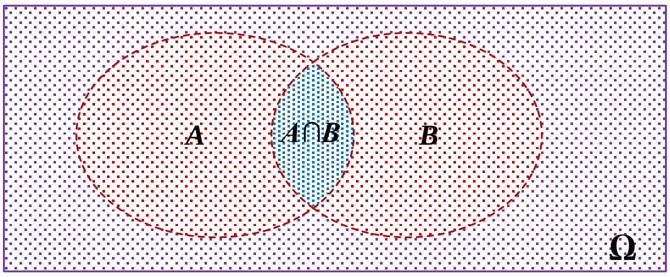


<u>Пример 2.7.</u> ***Опыт:*** *Подбрасывается монета 2 раза.* Пространство элементарных исходов: $\Omega = \{ГГ, РР, ГР, РГ\}$. Возможные события:

$$A = \{выпадение\ двух\ гербов\} = \{ГГ\};\ \ B = \{выпадение\ двух\ решек\} = \{РР\}.$$

Тогда событие $A{+}B = \{\text{выпали или два герба, или две решки}\} = \{\text{ГГ, РР}\}$

Определение 6. ***<u>Произведением событий</u>*** A и B называется событие $M = A \cap B = A \cdot B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$, наступающее тогда, когда наступают и событие A, и событие B.



<u>Пример 2.8</u>. ***Опыт:*** *Подбрасывается игральный кубик 1 раз.* Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Возможные события:

$A = \{выпало\ четное\ число\ очков\} = \{2{,}4{,}6\}$; $B = \{выпало\ число\ очков\ \ больше\ 3\} = \{4{,}5{,}6\}$.

Тогда событие $A \cdot B = \{выпало\ четное\ число\ очков, больше\ 3\} = \{4{,}6\}$.

Говорят, что события A и B ***несовместные***, если $A \cap B = \varnothing$. То есть их произведение является *невозможным событием*. Несовместные события взаимно исключают друг друга, они не могут наступить в опыте одновременно. Например события:

$A = \{$ выпало чётное число очков $\}$ и $B = \{$ выпало нечётное число очков $\}$ несовместны.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются ***попарно несовместными***, если выполняется:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing,\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j;$$

И ***несовместными в совокупности*** если:

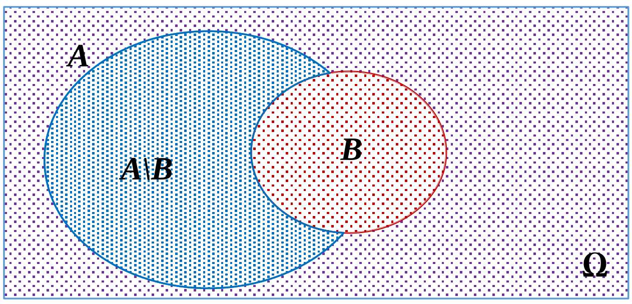
$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \varnothing$$

Определение 7. События $A_1, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу попарно несовместных событий***, если:

1) $A_i \cdot A_j = \varnothing,\ \forall i, j = \overline{1, n},\ i \neq j;$ 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Т.е. события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместимы и в каждом опыте обязательно наступает одно и только одно из этих событий.

Определение 8. ***Разностью событий*** A и B называется событие $C = A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A\ и\ \omega \notin B\}$, наступающее тогда, когда происходит событие A и не происходит событие B.

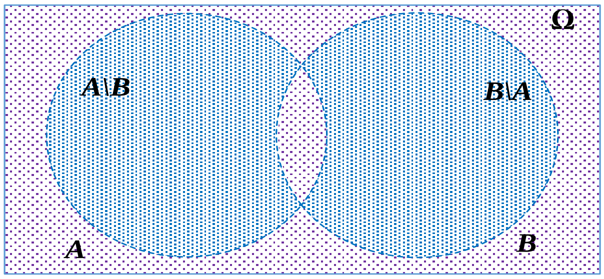


Пример 2.9. ***Опыт:*** *Подбрасывается игральный кубик 1 раз.* Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Возможные события:

$A = \{выпало\ четное\ число\ очков\} = \{2{,}4{,}6\}$; $B = \{выпало\ число\ очков\ \ больше\ 3\} = \{4{,}5{,}6\}$.

Тогда событие $A \setminus B = \{выпало\ два\ очка\} = \{2\}$.

Определение 9: ***<u>Симметрической разностью</u>*** (или ***дизъюнктивной суммой***) событий A и B называется событие $C = A\Delta B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \cup B \text{ и } \omega \notin A \cap B\}$ наступающее тогда, когда наступает или A или B (но не оба вместе), т.е. $C = A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



<u>Пример 2.10.</u> ***Опыт:*** *Подбрасывается игральный кубик 1 раз.* Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

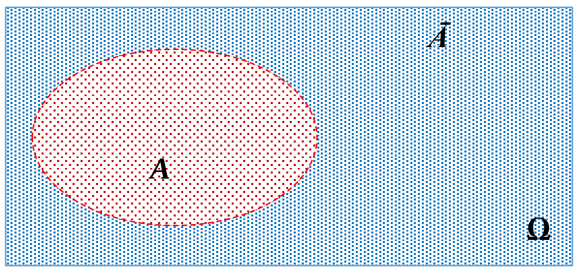
Возможные события:

$A = \{\textit{выпало четное число очков}\} = \{2,4,6\}$;

$B = \{\textit{выпала грань с цифрой больше } 3\} = \{4,5,6\}$.

Тогда событие $A \vartriangle B = \{\textit{выпала грань с цифрой } 2 \textit{ или } 5\} = \{2,5\}$.

Определение 10. Событием, ***<u>противоположным</u>*** событию A, называется событие $\overline{A}$, наступающее тогда, когда событие A не происходит, $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\} = \Omega \setminus A$.



<u>Пример 2.11.</u> ***Опыт:*** *Студент сдаёт экзамен.* Пространство элементарных исходов можем записать так: $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$, где $\omega_1 = 2 -$ получил неудовлетворительно; $\omega_2 = 3 -$ получил удовлетворительно; $\omega_3 = 4 -$ получил хорошо; $\omega_4 = 5 -$ получил отлично.

Если событие $A = \{$ сдал экзамен $\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, то противоположное событие $\overline{A} = \{$ не сдал экзамен $\} = \{\omega_1\}$.

Некоторые полезные ***<u>свойства операций над событиями</u>***:

1) $A \cup B = B \cup A$; ***2)*** $A \cdot B = B \cdot A$; ***3)*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; ***4)*** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

5) $(A\cup B)\cdot C = A\cdot C\cup B\cdot C$; ***6)*** $(A\cdot B)\cup C = (A\cup C)\cdot(B\cup C)$; ***7)*** $A\subset B \Rightarrow \overline{A}\supset\overline{B}$;

8) $\overline{\overline{A}} = A$; ***9)*** $A\cup A = A\cdot A = A$; ***10)*** $A\setminus B = A\cdot\overline{B}$; ***11)*** $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$; ***12)*** $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$;

13) $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n} = \overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap.....\cap\overline{A_n}$; ***14)*** $\overline{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n} = \overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup.....\cup\overline{A_n}$.

Определение 11. ***<u>Нижним пределом</u>*** последовательности событий $\{A_n\}$ называется событие $\underline{\lim} A_n$, наступающее тогда, когда не происходит лишь конечное число событий из $\{A_n\}$, $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Определение 12. ***<u>Верхним пределом</u>*** последовательности событий $\{A_n\}$ называется событие $\overline{\lim}\, A_n$, наступающее тогда, когда происходит бесконечное число событий из $\{A_n\}$, $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

<u>Пример 2.12.</u> *Найти нижний* $\underline{\lim}\, A_n$ *и верхний* $\overline{\lim}\, A_n$ *пределы последовательности событий* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, *если:* $A_i\cap A_j = \varnothing,\ \forall i\neq j.$

<u>Решение:</u>

1) Найдём нижний предел последовательности $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$:

Так как для $\forall i\neq j$: $A_i\cap A_j = \varnothing$, то очевидно, что $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \varnothing$;

2) Найдём верхний предел последовательности событий $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$:

По определению верхний предел последовательности событий – это такое событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает бесконечное число событий последовательности $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

В таком случае должен существовать хотя бы один элементарный исход, который благоприятствует наступлению бесконечного числа событий. То есть должна существовать такая подпоследовательность индексов $k_1, k_2, ..., k_n, ...$, что ω принадлежит одновременно *<u>и</u>* A_{k_1}, *<u>и</u>* A_{k_2}, …, *<u>и</u>* A_{k_n}, …, но по условию задачи такого элементарного исхода нет ни одного, т.к.: $A_i\cap A_j = \varnothing,\ \forall i\neq j,$ следовательно, $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \varnothing$, т.е. это невозможное событие.

Определение 13. Последовательность событий $\{A_n\}$ называется ***монотонно убывающей***, если $\forall n$: $A_{n+1} \subset A_n$.

Например: *Пусть заданы события:*

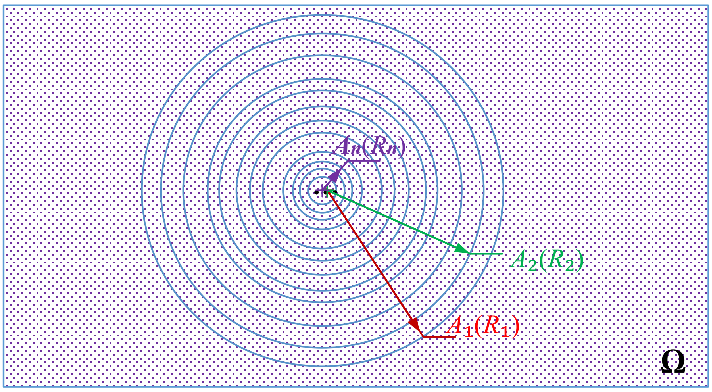
$A_1 - \{$ попадание во внешний круг радиуса $R_1\}$;

$A_2 - \{$ попадание в следующий круг меньшего радиуса $R_2\}$;

……………………………………………………………………

$A_n - \{$ попадание в следующий круг меньшего радиуса $R_n\}$;

………...



То есть $A_1 \supset A_2 \supset A_2 \supset ..... \supset A_n \supset ... -$ монотонно убывающая последовательность событий.

Пример 2.13. *Пусть дана последовательность событий:* $A_n = \left\{\left[-\frac{1}{n};1\right]\right\}, n \in N$. Событие $A_1 = \{[-1;1]\} -$ попадание в интервал $[-1;1]$, событие $A_2 = \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\} -$ попадание в интервал $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, событие $A_3 = \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} -$ попадание в интервал $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ и т.д. Очевидно, что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ..... \supset A_n \supset ...,$ поэтому последовательность событий $\{A_n\} -$ монотонно убывающая. Найдем нижний предел такой последовательности $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$:

$n = 1$: $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = \{[-1;1]\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cap ... = \{[0,1]\}$;

$n = 2$: $\bigcap_{k=2}^{\infty} A_k = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cap ... = \{[0,1]\}$;

$n = 3$: $\bigcap_{k=3}^{\infty} A_k = A_3 \cap A_4 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{4};1\right]\right\} \cap ... = \{[0,1]\}$;

………………………………………………………………………

Очевидно, что $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[0,1]\} = \{[0,1]\}$.

Найдём верхний предел последовательности событий $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$$n=1:\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_k \cup \ldots\ldots = \{[-1;1]\} \cup \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\} \cup \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cup \ldots = \{[-1;1]\};$$

$$n=2:\ \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k = A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_k \cup \ldots\ldots = \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\} \cup \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cup \ldots = \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\};$$

$$n=3:\ \bigcup_{k=3}^{\infty} A_k = A_3 \cup A_4 \cup \ldots\ldots \cup A_k \cup \ldots\ldots = \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cup \left\{\left[-\frac{1}{4};1\right]\right\} \cup \ldots\ldots\ldots = \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\};$$

……………………………………………………………………………………

Тогда $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{[-1;1]\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{2};1\right]\right\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{3};1\right]\right\} \cap \left\{\left[-\frac{1}{4};1\right]\right\} \cap \ldots\ldots = [0,1]$.

Определение 14. Последовательность событий $\{A_n\}$ называется ***<u>монотонно возрастающей</u>***, если $\forall n\ A_{n+1} \supset A_n$

<u>Например:</u> *Пусть заданы события:*

$A_1 - \{$ попадание во внутренний круг радиуса $R_1\}$;

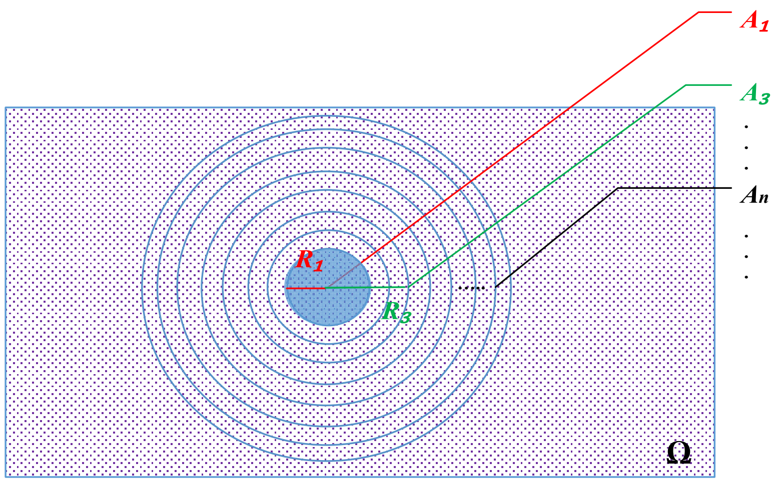
$A_2 - \{$ попадание в следующий круг радиуса $R_2 > R_1\}$;

$A_3 - \{$ попадание в следующий круг радиуса $R_3 > R_2\}$;

……………………………………………………………………..

$A_n - \{$ попадание в следующий круг радиуса $R_n > R_{n-1}\}$;

…………………………………………………………………………………



То есть $A_1 \subset A_2 \subset A_2 \subset ..... \subset A_n \subset ... -$ монотонно возрастающая последовательность событий $\{A_n\}$.

__Пример 2.14.__ *Пусть дана последовательность событий:* $A_n = \left\{\left[1;3-\frac{1}{n}\right]\right\},\ n \in N$.

Событие $A_1 = \{[1;2]\}$ – попадание в интервал $[1;2]$, событие $A_2 = \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\}$ – попадание в интервал $\left[1;2\frac{1}{2}\right]$, событие $A_3 = \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\}$ – попадание в интервал $\left[1;2\frac{2}{3}\right]$ и т.д.

Очевидно, что $A_1 \supset A_2 \supset A_2 \supset ..... \supset A_n \supset ...$, поэтому последовательность событий $\{A_n\}$ – монотонно убывающая. Найдём верхний и нижний пределы последовательности событий.

Нижний предел $\underline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$:

$n=1$: $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = \{[1;2]\} \cap \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\} \cap \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cap ... = \{[1;2]\}$;

$n=2$: $\bigcap\limits_{k=2}^{\infty} A_k = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\} \cap \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cap ... = \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\}$;

$n=3$: $\bigcap\limits_{k=3}^{\infty} A_k = A_3 \cap A_4 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cap \left\{\left[1;2\frac{3}{4}\right]\right\} \cap ... = \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\}$;

………………………………………………………………………………

Очевидно, что $\underline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \{[1;2]\} \cup \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\} \cup \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cup \left\{\left[1;2\frac{3}{4}\right]\right\} \cup .... = [1,3)$.

Верхний предел $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$:

$n=1$: $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_k \cup ..... = \{[1;2]\} \cup \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\} \cup \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cup ... = [1,3)$;

$n=2$: $\bigcup\limits_{k=2}^{\infty} A_k = A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_k \cup ..... = \left\{\left[1;2\frac{1}{2}\right]\right\} \cup \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cup ... = [1,3)$;

$n=3$: $\bigcup\limits_{k=3}^{\infty} A_k = A_3 \cup A_4 \cup ..... \cup A_k \cup ..... = \left\{\left[1;2\frac{2}{3}\right]\right\} \cup \left\{\left[1;2\frac{3}{4}\right]\right\} \cup \left\{\left[1;2\frac{4}{5}\right]\right\} \cup ... = [1,3)$;

………………………………………………………………………………

Тогда $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{[1,3)\} = \{[1,3)\}$.

Определение 15. Событие A является ***пределом последовательности*** событий $\{A_n\}$, если $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = A$.

<u>Пример 2.15.</u> В примере ***2.13***, мы определили, что $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \{[0,1]\}$. То есть предел для данной последовательности событий существует и равен $A = \{[0,1]\}$ – это событие означает попадание в интервал $[0,1]$. Для последовательности событий, рассмотренной в примере ***2.14***, также существует предел равный $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \{[1,3)\}$.

<u>Сигма алгебра событий</u>

В случае ***<u>конечного</u>*** или ***<u>счётного</u>*** пространства элементарных исходов Ω ***<u>любая совокупность исходов</u>*** представляет собой ***<u>событие</u>*** (выше было дано определение).

Но если Ω – несчётно, т.е. имеет мощность континуума, мы можем встретиться с большими трудностями если будем считать событием любое подмножество Ω. Поэтому необходимо выделить специальный класс подмножеств, элементы которого будут считаться событиями.

Рассмотрим порождённую пространством Ω σ (сигма) - алгебру ***F*** случайных событий. σ – алгебра – это класс подмножеств множества Ω (просто говоря множество подмножеств из Ω). Этот класс содержит невозможное и достоверное события и замкнут относительно счётного числа теоретико-множественных операций (т.е. применение операций объединения, пересечения, дополнения событий и пр., не выводит нас за рамки системы подмножеств ***F***, а снова даёт нам событие, которое является элементом ***F***).

Определение 16. Множество ***F***, элементами которого являются подмножества множества Ω, (не обязательно все) называется σ – ***алгеброй F случайных событий,*** если выполняются следующие условия:

1. $\Omega \in F$;
2. $\forall A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$;
3. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in F$, то $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \in F$.

Событиями в любом случайном испытании будем считать ***<u>только</u>*** элементы σ – алгебры.

Пример 2.16. ***Опыт:*** *подбросили монету 2 раза.*

Пространство элементарных исходов: $\Omega = \{$ ***ГГ, ГР, РГ, РР*** $\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

На этом множестве можно задать различные $\sigma-$алгебры событий:

1) Известно, что любое конечное, $n-$ элементное множество, имеет 2^n подмножеств. То есть в случае конечного пространства элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n\text{-}1}, \omega_n\}$, его максимальная $\sigma-$ алгебра (список событий) будет содержать 2^n элементов.

В нашем примере максимальная $\sigma-$ алгебра содержит $2^4 = 16$ элементов и выглядит так:

$$F = \{\{\Omega\}, \{\varnothing\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\}$$
$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}.$$

2) Если в данном испытании нас интересует, например, только наступление или не наступление события:

$$A = \{ \text{ выпал хотя бы один герб } \},$$

то мы можем составить такую $\sigma-$ алгебру событий:

$$F_1 = \{\{\Omega\}, \{\varnothing\}, \{A\}, \{\overline{A}\}\} = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\varnothing\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}\},$$

где событие $\overline{A} = \{$ герб не выпал ни разу $\}$.

В первом случае $\sigma-$алгебра (список событий) состоит из 16 элементов, во втором всего из 4-х.

Покажем, что F_1 действительно является $\sigma-$алгеброй. Сделаем это так: вначале проверим по определению, что наша система подмножеств является ***алгеброй событий***. А любая алгебра событий для конечных множеств является также и $\sigma-$алгеброй, т.е в случае конечного пространства элементарных исходов понятия алгебры и $\sigma-$алгебры событий совпадают.

Определение 17. Множество ***F***, элементами которого являются подмножества множества Ω, (не обязательно все) называется *алгеброй* ***F*** *случайных событий*, если выполняются следующие условия:

1. $\Omega \in F$;
2. $\forall A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$;
3. Если $A_1, A_2, ..., A_n \in F$, *то* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_n \in F$.

Проверим выполнение всех трёх условий для F_1:

1 Условие $\{\Omega\},\{\varnothing\}\in F_1$ – выполняется;

2 Условие $\forall A\in F_1 \Rightarrow \ \overline{A}\in F_1$: $\overline{\Omega}=\varnothing\in F_1; \overline{\varnothing}=\Omega\in F_1; \overline{A}\in F_1; \overline{\overline{A}}=A\in F_1 -$ выполняется;

3 Если $A_1, A_2, ..., A_n \in F_1$, *то* $A_1\cup A_2\cup ....\cup A_n\in F_1$.

$\Omega\bigcup\varnothing=\Omega\in F_1$; $\Omega\bigcup A=\Omega\in F_1$; $\Omega\cup\overline{A}=\Omega\in F_1$; $\varnothing\cup A=A\in F_1$; $\varnothing\cup\overline{A}=\overline{A}\in F_1$; $A\cup\overline{A}=\Omega\in F_1$, $\Omega\bigcup\varnothing\bigcup A=\Omega\in F_1$; $\Omega\bigcup\overline{A}\bigcup A=\Omega\in F_1$; $\varnothing\bigcup\overline{A}\bigcup A=\Omega\in F_1$; $\Omega\bigcup\varnothing\bigcup\overline{A}=\Omega\in F_1$;
$\Omega\bigcup\varnothing\bigcup A\bigcup\overline{A}=\Omega\in F_1$.

Таким образом 3 условие тоже выполняется, следовательно F_1 – является алгеброй событий. А , следовательно, F_1 и сигма-алгебра.

<u>Вероятностная мера</u>

Определение 18. Вероятностной **мерой (**или **вероятностью)** события A на пространстве случайных событий $\{\Omega,\mathrm{F}\}$ называется произвольная функция $P(A)$:

1. Неотрицательная: $\forall\ A\in F,\ P(A)\geq 0$;
2. Счетно-аддитивная: $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i),\ \ A_i\cdot A_j=\varnothing,\ \forall\ i\neq j$
3. Удовлетворяющая условию нормировки $P(\Omega)=1$.

<u>Основные свойства вероятности</u>: 1) $A\subset B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$, 2) $0\leq P(A)\leq 1,\ \forall A\in F$.

Тройка (Ω, F, P) называется ***вероятностным пространством.***

Вероятностное пространство называется ***<u>дискретным</u>***, если его пространство элементарных исходов конечно или счетно.

Примеры решения задач по теме 2:

<u>Пример 2.17.</u> *Доказать равенство событий:* $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.

<u>Решение:</u> 1) Вначале докажем, что событие в левой части равенства влечёт событие в правой его части, т.е. $A\setminus(B\bigcup C)\subset(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$. Пусть $\omega\in A\setminus(B\bigcup C)$, тогда, используя определения суммы, разности и произведения событий, можем записать:

$$\omega\in A \ \boxed{и}\ \omega\notin B\cup C \Rightarrow \omega\in A\ \boxed{и}\ (и\ \omega\notin B\ и\ \omega\notin C)\Rightarrow \left.\begin{matrix}\omega\in A\ и\ \omega\notin B\\ \boxed{и}\\ \omega\in A\ и\ \omega\notin C\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\omega\in A\setminus B\\ \boxed{и}\\ \omega\in A\setminus C\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$

2) Теперь докажем, что событие в правой части равенства влечёт событие в левой, т.е. $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\subset A\setminus(B\cup C)$. Пусть $\omega\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, тогда

$$\omega\in A\setminus B\ \boxed{и}\ \omega\in A\setminus C\Rightarrow\omega\in A\ \boxed{и}\ (и\ \omega\notin B\ и\ \omega\notin C)\Rightarrow\omega\in A\ \boxed{и}\ \omega\notin B\cup C\Rightarrow\omega\in A\setminus B\cup C$$

Равенство событий доказано.

<u>Пример 2.18.</u> *Двое играют в настольный теннис 1 партию. Ничья невозможна. Пусть событие* $A=\{выиграл\ 1\ игрок\}$*, а событие* $B=\{выиграл\ 2\ игрок\}$*. Что означают события:* $A\cup B; A\cap B; A\setminus B; \overline{A}; A\Delta\overline{B}; \overline{A\cdot B}$ *?*

<u>Решение:</u>

1) $A\cup B=\{$ или выиграл первый игрок, или выиграл второй игрок $\}-$достоверное событие;
2) $A\cap B=\{$ выиграл и первый, и второй игрок $\}-$это невозможное событие;
3) $A\setminus B=\{$ выиграл первый игрок $\}$;
4) $\overline{A}=\{$ первый игрок проиграл $\}$, $\overline{A}=B$;
5) $A\Delta\overline{B}-$в этом случае наступает или только A, или только $\overline{B}$.
$$A\Delta\overline{B}=\left\{\omega:\omega\in A\setminus\overline{B}\ или\ \omega\in\overline{B}\setminus A\right\}=\left\{\omega:\omega\in A\ и\ \omega\notin\overline{B}\ или\ \omega\in\overline{B}\ и\ \omega\notin A\right\}=$$
$$=\left\{\omega:\omega\in A\cap B\ или\ \omega\in\overline{A}\cap\overline{B}\right\}=\left\{\omega:\omega\in A\cap B\ или\ \omega\in\overline{A\cup B}\right\}$$

Таким образом видно, что данное событие наступает тогда, когда: или оба выиграли, или оба проиграли, это два невозможных события, объединение которых дает невозможное событие.

6) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}-\{$ или проиграл 1 игрок, или проиграл второй $\}-$достоверное событие.

<u>Пример 2.19.</u> *Монета подбрасывается до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной. Построить вероятностное пространство.*

<u>Решение:</u> Вероятностное пространство, это пространство с заданной на нем вероятностной мерой, или тройка $\{\Omega, F, P\}$, где $\Omega-$множество всех элементарных исходов данного эксперимента, $F-\sigma-$ алгебра событий; $P-$вероятностная мера. Сформируем вначале Ω. Будем обозначать «*Р*» выпадение «решки», «*Г*» выпадение «герба». При проведении указанного в условии опыта, могут наступать следующие события: *ГГ, РР, РГГ, ГРР, РГРР, ГРГГ,….* и так далее. Введём обозначения для элементарных исходов:

$\omega_1 = \{\ ГГ + РР\ \}$ – выпала цепочка длины 2, т.е. выпали или *ГГ,* или *РР;*

$\omega_2 = \{\ РГГ + ГРР\ \}$ – выпала цепочка длины 3, т.е. выпали или *РГГ,* или *ГРР;*

………………………………………………………………………………………

$\omega_k = \{$ выпала цепочка длины $k\}$

Можем записать множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, т.е. пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots\}.$$

Очевидно, что Ω – бесконечное и счётное множество. ***Каждое*** подмножество данного множества является событием, т.е. σ – алгебра событий представляет из себя бесконечный список событий вида:

$$F = \{\Omega, \varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \ldots, \ldots \{\omega_3, \omega_4, \omega_{10}, \omega_{12}\}, \ldots\}.$$

Найдём вероятности элементарных исходов данного опыта. Так как $P(Г) = P(Р) = \frac{1}{2}$, то

$P(\omega_1) = P\{ГГ + РР\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$;

$P(\omega_2) = P\{РГГ + ГРР\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$;

$P(\omega_3) = P\{ГРГГ + РГРР\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$;

……………………………………………………………………

$P(\omega_k) = \frac{1}{2^k}, k \in N$

Проверим условие нормировки, согласно которому должно выполняться: $\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k) = 1$.

У нас:

$\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \ldots$, это ряд геометрической прогрессии, у которого первый член ряда $b_1 = \frac{1}{2}$, и $q = \frac{1}{2} < 1$, очевидно данный ряд сходится, сумму находим по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Пример 2.20. *Монета подбрасывается до тех пор, пока «герб» не выпадет два раза подряд. Построить вероятностное пространство.*

Решение: Вероятностное пространство, это пространство с заданной на нем вероятностной мерой, или тройка $\{\Omega, F, P\}$, где $\Omega-$ множество всех элементарных исходов данного эксперимента, $F-\sigma-$ алгебра событий; $P-$вероятностная мера. Начнём построение по порядку, сформируем вначале Ω. Обозначим: «*Р*» выпадение «решки», «*Г*» выпадение «герба».

1. При проведении указанного в условии задачи опыта, могут наступать следующие события: *ГГ, РГГ, РРГГ, ГРГГ, РГРГГ….* и так далее. Введем обозначения для элементарных исходов:

$\omega_1=\{\quad ГГ \quad\}-$выпала цепочка длины 2*;*

$\omega_2=\{\quad РГГ \quad\}-$выпала цепочка длины 3*;*

$\omega_3=\{\quad РРГГ+ГРГГ \quad\}-$выпала цепочка длины 4, т.е. выпали *РРГГ* или *ГРГГ;*

$\omega_4=\{\quad РГРГГ+ГРРГГ+РРРГГ \quad\}-$выпала цепочка длины 5: *РГРГГ,* или *ГРРГГ,* или *РРРГГ;*

…………………………………………………………………………………

$\omega_k=\{$ выпала цепочка длины $k\}$.

Множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента ω_i, $i=1,2,...$, т.е. пространство элементарных исходов выглядит так:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,....,\omega_k,.....\}.$$

Очевидно, что $\Omega-$бесконечное и счётное множество.

2. ***Каждое*** подмножество такого множества будет являться событием, т.е. $\sigma-$ алгебра событий F, включающая в себя невозможное и достоверное событие, может быть представлена бесконечным списком событий вида:

$$F=\{\Omega,\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2\},...,\{\omega_2,\omega_4\},\{\omega_{14},\omega_{16}\},\{\omega_2,\omega_7,\omega_9\},..,....\{\omega_3,\omega_4,\omega_{10},\omega_{12}\},\{\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10},\omega_{11}\},...\}$$

3. И наконец необходимо определить вероятностную меру. Так как $P(Г)=P(Р)=\dfrac{1}{2}$, то

$P(\omega_1)=P\{ГГ\}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^2}$;

$P(\omega_2)=P\{РГГ\}=\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^3}$;

$P(\omega_3) = P\{РРГГ \ + ГРГГ\} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2^3} = \frac{2}{2^4}$;

$P(\omega_4) = P\{РГРГГ \ + РРРГГ + ГРРГГ\} = 3 \cdot \frac{1}{2^5}$;

$P(\omega_4) = P\{РРГРГГ \ + ГРГРГГ + ГРРРГГ + РРРРГГ + РГРРГГ\} = 5 \cdot \frac{1}{2^6}$;

....

Проверим условие нормировки: $\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k) = 1$. У нас $\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_k) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \frac{5}{2^6} + ...$

Найдём общий член ряда:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \frac{5}{2^6} + ... = \underbrace{1 \cdot \frac{1}{2^2}}_{n=1} + \underbrace{1 \cdot \frac{1}{2^3}}_{n=2} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2^4}}_{n=3} + \underbrace{3 \cdot \frac{1}{2^5}}_{n=4} + \underbrace{5 \cdot \frac{1}{2^6}}_{n=5} + \underbrace{8 \cdot \frac{1}{2^7}}_{n=6} .... \ .$$

Члены нашего ряда представляют собой произведение чисел Фибоначчи: $1,1,2,3,5,8,....$ и $\frac{1}{2^{n+1}}$. Для того чтобы записать общий член ряда нам необходимо знать общий член последовательности чисел Фибоначчи. Получим его, используя аппарат производящих функций. Это будет полезно в дальнейшем при изучении темы «Производящие и характеристические функции».

Последовательность чисел Фибоначчи:

n	0	1	2	3	4	5	6	……
$\{a_n\}$	0	1	1	2	3	5	8	……

1) Запишем первые два члена последовательности и рекуррентное соотношение: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Последнее соотношение отражает характеристическое свойство чисел Фибоначчи: последующий член последовательности $\{a_n\}$ равен сумме двух предыдущих, начиная со второго, т.е. при $n = 2$.

2) Умножим каждое из соотношений $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, с обеих сторон на z в соответствующей степени: $a_0 \cdot z^0 = 0 \cdot z^0$, $a_1 \cdot z^1 = 1 \cdot z^1$, $a_n \cdot z^n = (a_{n-1} + a_{n-2}) \cdot z^n$ и просуммируем все по n:

$$a_0 \cdot z^0 + a_1 \cdot z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n$$

Или:

$$a_0 \cdot z^0 + a_1 \cdot z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n = 1 \cdot z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n \qquad (*)$$

Введём обозначение: $F(z) = a_0 \cdot z^0 + a_1 \cdot z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$, тогда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^{n-1} \cdot z = z\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^{n-1} = z\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot z^n + a_0 \cdot z^0 - a_0 \cdot z^0) = z\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \text{, т.к. } a_0 = 0;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^{n-2} \cdot z^2 = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^{n-2} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = z^2 F(z);$$

Перепишем выражение (*):

$$F(z) = 1 \cdot z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \cdot z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot z^n = z + zF(z) + z^2 F(z);$$

Откуда из $F(z) = z + zF(z) + z^2 F(z)$ следует, что $F(z) \cdot \left(1 - z - z^2\right) = z$ и

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \frac{z}{\left(1 - z - z^2\right)}.$$

Теперь нам необходимо получить разложение функции $\frac{z}{\left(1 - z - z^2\right)}$ в ряд по степеням z.

Сделаем это, и начнём с разложения $\frac{z}{\left(1 - z - z^2\right)}$ на сумму простых дробей. Используем метод неопределённых коэффициентов. Разложим вначале на множители знаменатель дроби: $\left(1 - z - z^2\right)$. Так как корни квадратного уравнения $-z^2 - z + 1 = 0$, $z_1 = \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2$ и $z_2 = \left(-1 - \sqrt{5}\right)/2$, то можем записать:

$$\frac{z}{\left(1 - z - z^2\right)} = \frac{z}{-(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{-z}{(z_1 - z)(z_2 - z)} = \frac{A}{(z_1 - z)} + \frac{B}{(z_2 - z)} = \frac{A(z_2 - z) + B(z_1 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z)} =$$
$$= \frac{-z(A + B) + Az_2 + Bz_1}{(z_1 - z)(z_2 - z)}$$

Для нахождения коэффициентов A и B решаем систему:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ Az_2 + Bz_1 = 0 \end{cases}$$

Откуда $B = \frac{z_2}{z_2 - z_1}$ и $A = \frac{z_1}{z_1 - z_2}$;

Таким образом

$$\frac{z}{\left(1-z-z^2\right)}=\frac{\frac{z_1}{z_1-z_2}}{\left(z_1-z\right)}+\frac{\frac{z_2}{z_2-z_1}}{\left(z_2-z\right)}=\frac{1}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1}{\left(z_1-z\right)}+\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_2}{\left(z_2-z\right)}$$

Разделим $\frac{z_1}{\left(z_1-z\right)}$ в числителе и знаменателе на z_1, а $\frac{z_2}{\left(z_2-z\right)}$ на z_2,получим:

$$\frac{1}{z_1-z_2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)}+\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_2}\right)}.$$

Можем, используя разложение функции $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+z^3+......$ в ряд по степеням z, записать:

$$\left(\frac{1}{1-\frac{z}{z_1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_1}\right)^n z^n.$$

Аналогично для второй: $\left(1\Big/1-\frac{z}{z_2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_2}\right)^n z^n.$

То есть окончательно:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot z^n=\frac{z}{\left(1-z-z^2\right)}=\frac{1}{z_1-z_2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)}+\frac{1}{z_2-z_1}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{z_1^n}+\frac{1}{z_2-z_1}\frac{1}{z_2^n}\right)z^n$$

Откуда $a_n=\left(\frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{z_1^n}+\frac{1}{z_2-z_1}\frac{1}{z_2^n}\right).$

Подставляя значения $z_1=\left(-1+\sqrt{5}\right)\big/2,\;\; z_2=\left(-1-\sqrt{5}\right)\big/2$ и учитывая, что:

$$z_1-z_2=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}-\frac{\left(-\sqrt{5}-1\right)}{2}=\sqrt{5},\qquad z_2-z_1=-\sqrt{5};$$

Получаем:

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z_1^n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z_2^n}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z_1^n}-\frac{1}{z_2^n}\right),$$

Кроме того:

$$\frac{1}{z_1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\qquad \frac{1}{z_2}=\frac{2}{-\sqrt{5}-1}\cdot\frac{-\sqrt{5}+1}{-\sqrt{5}+1}=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}.$$

Поэтому:

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z_1^n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z_2^n}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z_1^n}-\frac{1}{z_2^n}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]$$

Таким образом наш ряд, составленный из вероятностей элементарных исходов, в общем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right].$$

Несложно найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]=\sqrt{5}$, поэтому окончательно $\sum_{k=1}^{\infty}P(\omega_k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]=1$. Т.е. условие нормировки выполняется.

__Пример 2.21.__ *Найти* $\underline{\lim}A_n$ *и* $\overline{\lim}A_n$*, если* $A_{3n-2}=A, A_{3n-1}=B, A_{3n}=C$.

__Решение:__

1) Выясним как выглядит наша последовательность в развёрнутом виде.

При $n=1$ получаем: $A_{3\bullet1-2}=A_1=A, A_{3\bullet1-1}=A_2=B, A_{3\bullet1}=A_3=C$, при $n=2$: $A_{3\bullet2-2}=A_4=A, A_{3\bullet2-1}=A_5=B, A_{3\bullet2}=A_6=C$ и так далее.

2) Закономерность получения членов последовательности ясна, поэтому можем ее записать: $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,......=A,B,C,A,B,C,A,B,C,A,B,C,.........$

3) Найдём верхний предел последовательности событий $\overline{\lim}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

$k=1$: $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup A_3\cup.....\cup A_k\cup.....=A\cup B\cup C\cup A\cup B\cup C\cup A\cup B\cup C\cup...=\{A\cup B\cup C\}$;

$k=2$: $\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k=A_2\cup A_3\cup.....\cup A_k\cup.....=B\cup C\cup A\cup B\cup C\cup...=\{A\cup B\cup C\}$;

$k=3$: $\bigcup_{k=3}^{\infty}A_k=A_3\cup A_4\cup.....\cup A_k\cup.....=C\cup A\cup B\cup C\cup A\cup B\cup C\cup...=\{A\cup B\cup C\}$;

....

Тогда $\overline{\lim}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{A\cup B\cup C\}=\{A\cup B\cup C\}$.

4) Найдём нижний предел последовательности событий $\underline{\lim}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$:

$k=1$: $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = A \cap B \cap C \cap A \cap B \cap C \cap ... = \{A \cap B \cap C\}$;

$k=2$: $\bigcap\limits_{k=2}^{\infty} A_k = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = B \cap C \cap A \cap B \cap C \cap A \cap ... = \{A \cap B \cap C\}$;

$k=3$: $\bigcap\limits_{k=3}^{\infty} A_k = A_3 \cap A_4 \cap ..... \cap A_k \cap ..... = C \cap A \cap B \cap C \cap A \cap B \cap C \cap ... = \{A \cap B \cap C\}$;

……………………………………………………………………………

Тогда нижний предел последовательности событий: $\underline{\lim} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{A \cap B \cap C\} = \{A \cap B \cap C\}$

__Пример 2.22.__ *Доказать, что* $\overline{\overline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \overline{A_n}$.

__Решение:__ Для доказательства равенства событий, необходимо показать, что $\overline{\overline{\lim} A_n} \subset \underline{\lim} \overline{A_n}$ и $\underline{\lim} \overline{A_n} \subset \overline{\overline{\lim} A_n}$.

1. Покажем, что $\overline{\overline{\lim} A_n} \subset \underline{\lim} \overline{A_n}$. Пусть $\omega \in \overline{\overline{\lim} A_n}$, тогда $\omega \in \overline{\overline{\lim} A_n} \Rightarrow \omega \in \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} \Rightarrow$(по формулам двойственности) $\omega \in \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} \Rightarrow \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} \right)$, еще раз используем формулы двойственности:

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \Rightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \right) \Rightarrow \omega \in \underline{\lim} \overline{A_n};$$

2. Покажем, что $\underline{\lim} \overline{A_n} \subset \overline{\overline{\lim} A_n}$. Пусть $\omega \in \underline{\lim} \overline{A_n}$, тогда $\omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \Rightarrow \omega \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega \in \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} \Rightarrow \omega \in \overline{\overline{\lim} A_n}$. Равенство событий доказано.

Задачи для самостоятельного решения по теме 2:

2.1. Пусть *A,B,C* – произвольные события. Записать для эксперимента, в котором могут происходить события *A,B,C*, следующие события:

а) произошло ровно одно событие; ***б)*** ни одно из событий не произошло;

в) произошло хотя бы одно событие; ***г)*** произошло не более двух событий;

д) хотя бы одно событие не произойдёт.

2.2. Пусть $A_i = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le i\}$. Что из себя представляют события $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_4 \cap A_6 \cap A_8 \cap A_{10}$ и $(A_1 \cup A_3) \cap A_6$.

2.3. Двое играют в шахматы. Пусть событие $A = \{$ выиграл 1-ый игрок $\}$, а событие $B = \{$ выиграл 2-ой игрок $\}$. Что означают события: ***а)*** $\overline{B} \setminus A$; ***б)*** $A \cdot B \cup \overline{A}$; ***в)*** $\overline{A} \cdot \overline{B}$?

2.4. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Пусть событие $A = \{$ 1-ый стрелок попал в цель $\}$, а событие $B = \{$ 2-ой стрелок попал в цель $\}$. Что означают события: ***а)*** $A \cup B$; ***б)*** $A \cdot B$; ***в)*** $A + \overline{B}$; ***г)*** $\overline{B} \setminus A$; ***д)*** $\Omega \setminus A \cup B$.

2.5. Пусть события $A = \{$ экзамен сдан $\}$, $B = \{$ экзамен сдан на отлично $\}$. Что означают события: ***а)*** $A \setminus B$; ***б)*** $A \setminus \overline{B}$; ***в)*** $\overline{A \setminus B}$.

2.6. Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) $A = \{$ попадание при одном выстреле $\}$; $B = \{$ промах при одном выстреле $\}$.

б) $A = \{$ выпал хотя бы один герб при подбрасывании двух монет $\}$;

$B = \{$ при подбрасывании двух монет выпали оба герба $\}$.

в) $D_1 = \{$ при трёх выстрелах по мишени ни одного попадания $\}$; $D_2 = \{$ при трёх выстрелах по мишени одно попадание $\}$; $D_3 = \{$ при трёх выстрелах по мишени два попадания $\}$; $D_4 = \{$ при трёх выстрелах по мишени три попадания $\}$.

2.7. Из урны по одному вытаскивают последовательно *n* шаров. Обозначим A_i событие «*i*-ый шар белый». Записать события: ***а)*** все шары белые; ***б)*** хотя бы один шар белый; ***в)*** только один шар белый.

2.8. Доказать, что события $A, \overline{A}B, \overline{A \cup B}$ образуют полную группу попарно несовместных событий.

2.9. Доказать равенства: ***а)*** $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; ***б)*** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2.10. Доказать, что если $A \Delta B = C \Delta D$, то из этого следует, что $A \Delta C = B \Delta D$.

2.11. Упростить выражения: ***а)*** $A \cdot (B - A \cdot B)$; ***б)*** $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$.

2.12. Доказать равенства: ***а)*** $\overline{A \Delta B} = (A \cdot B) \cup (\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}})$; ***б)*** $A \Delta B = \overline{(A \cdot \overline{B})} \Delta \overline{(B \cdot \overline{A})}$.

2.13. Эксперимент состоит в выборе одной из перестановок чисел 1, …, *n*. Обозначим A_{ij} событие, состоящее в том, что в выбранной перестановке число *i* стоит на *j*-ом месте.

Записать следующие события: ***а***) число 1 стоит левее числа 2; ***б***) число 1 стоит не далее j-ого места от начала перестановки.

2.14. Возможно ли, что: ***а***) число элементарных событий в Ω больше числа всех событий в $\sigma-$алгебре F, порождённой Ω? ***б***) число элементарных событий в Ω конечно, а число всех событий в $\sigma-$алгебре F, порождённой пространством Ω, бесконечно?

2.15. Является ли $F=\{\Omega,\varnothing\}$ $\sigma-$ алгеброй?

2.16. Указать минимальное и максимальное значения для числа событий $\sigma-$ алгебры F, порождённой Ω, если число элементарных событий в пространстве Ω равно *n*.

2.17. Из какого минимального числа подмножеств множества Ω состоит алгебра *F*, если в неё входят подмножества A и B, причём $A\cup B\neq\Omega,\ A\cap B\neq\varnothing$?

2.18. Построить вероятностное пространство для эксперимента, в котором кубик подбрасывается 2 раза.

2.19. Построить вероятностное пространство для эксперимента, в котором «идеальная» монета подбрасывается 3 раза.

2.20. Пусть $A_n=\left[0,\dfrac{n}{n+1}\right), B_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$. Определить события $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$

2.21. Найти $\underline{\lim}\,A_n$ и $\overline{\lim}\,A_n$, если:

а) события A_n состоят в том, что координаты точки (x,y) удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\le 1+1/n$;

б) события A_n состоят в том, что координаты точки (x,y) удовлетворяют неравенствам $|x|,|y|\le 2-(1/n)$.

2.22. Найти $\underline{\lim}\,A_n$ и $\overline{\lim}\,A_n$, если $A_n=(-\infty,a_n)$, где a_n- произвольная числовая последовательность.

2.23. Найти $\underline{\lim}\,C_n$ и $\overline{\lim}\,C_n$, где $C_{2n}=B_n,\ C_{2n-1}=A_n$ и $A_n=\left[-\dfrac{1}{n},1\right]$, а $B_n=\left[1-\dfrac{1}{n},2-\dfrac{1}{n}\right]$.

2.24. Доказать, что $\overline{\underline{\lim}A_n}=\overline{\lim}\,\overline{A_n}$.

2.25. Доказать, что $\overline{\lim}(A_n\cup B_n)=\overline{\lim}\,A_n\cup\overline{\lim}\,B_n,\ \underline{\lim}(A_n\cap B_n)=\underline{\lim}\,A_n\cap\underline{\lim}\,B_n$

Тема 3. Классическое определение вероятности

Простейшим пространством элементарных исходов Ω является такое пространство, которое конечно, и все N элементарных событий $\omega_i, i = \overline{1,N}$ некоторого случайного испытания:

1. Равновозможны;
2. Образуют полную группу попарно несовместных событий.

Часто такое пространство называют ***симметричным***. В случае симметричного пространства, вероятности элементарных событий равны между собой, то есть: $P\{\omega_i\} = p, \ \forall i = \overline{1,N}$.

Так как $\sum_{i=1}^{N} P\{\omega_i\} = \sum_{i=1}^{N} p = N \cdot p = 1$, то вероятность элементарного исхода равна:

$$P\{\omega_i\} = p = 1/N;$$

Тогда вероятность любого события $A = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_M\}$ равна:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P\{\omega_i\} = \sum_{\omega_i \in A} p = M \cdot \frac{1}{N} = \frac{M}{N}.$$

Таким образом вероятность любого события, в случае конечного пространства элементарных исходов равна:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|};$$

где $M = |A|$ – число элементарных событий эксперимента, благоприятствующих наступлению событию *A*, $N = |\Omega|$ – общее число исходов в данном эксперименте.

Классическая вероятностная модель $\{\Omega, F, P\}$ ***включает в себя:***

1. Конечное пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$;

2. Максимальную сигма алгебру, которая содержит все подмножества Ω;

3. Равномерную вероятностную меру, приписывающую равные вероятности всем элементарным исходам.

Применять эту модель можно только в тех случаях, когда априори понятно, что все элементарные исходы опыта равновероятны. Заключение о равновероятности обычно основано на умозрительных соображениях.

Примеры решения задач по теме 3:

<u>Пример 3.1.</u> *Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:* ***а****) случайно названное число;* ***б****) случайно названное число, цифры которого различны.*

<u>Решение</u>: ***Опыт:*** Задумывается двузначное число. Тогда $\Omega = \{10, 11, 12, ..., 29, 30, ..., 75, 76, ..., 98, 99\}$. То есть общее число исходов в данном опыте $N = 90$.

а) Найдём число исходов, благоприятствующих событию:

$$A = \{ \text{ случайно названное число, оказалось задуманным } \}.$$

Так как задумано одно число, то $M_A = 1$. Таким образом $P(A) = \dfrac{1}{90}$.

b) Найдём вероятность события:

$$B = \{ \text{ случайно названное число, цифры которого различны, оказалось задуманным } \}$$

Существует 81 двузначное число, цифры которого различны (90 всего чисел и в каждом десятке по одному с одинаковыми цифрами, всего 9 таких чисел). Задуманное число единственное, т.е. $M_B = 1$. Поэтому искомая вероятность равна:

$$P(B) = \frac{1}{81}.$$

<u>Пример 3.2.</u> *На некотором малом предприятии работают 10 человек, в том числе одна семья Петровых - отец, мать и сын. В правление этого предприятия входят: председатель, коммерческий директор и бухгалтер. Предполагается, что никакие две из этих трёх должностей не может занимать один и тот же человек. Какова вероятность того, что в результате случайного выбора правления:* ***а****) в него попадут все члены семьи, причем председателем станет отец, коммерческим директором - сын, а бухгалтером – мать;* ***б****) в него попадут все члены семьи;* ***с****) бухгалтером станет кто-то из членов семьи?*

<u>Решение:</u>

а) ***Опыт:*** выбор из 10 человек правления предприятия в количестве 3 человек.

Любой элементарный исход данного опыта, это комбинация из 3 человек. В каждой из выборок, порядок следования имеет значение, т.к. например 2 выборки в реальной жизни различны:

$$\underbrace{\boxed{\text{Иванов}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сидоров}}}_{\text{бухгалтер}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Иванов}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сидоров}}}_{\text{бухгалтер}}$$

В одной Иванов председатель, а в другой коммерческий директор. С сыном Петровым ситуация аналогична.

Т.е. наши выборки являются размещениями без повторений. Можем записать пространство элементарных исходов:

$\Omega = \{$ (Иванов, Отец Петров, Сидоров); (Волков, Мать Петрова, Иванов); (Волков, Орлов, Иванов); ...$\}$. Мощность пространства элементарных исходов: $|\Omega| = A_{10}^{3} = \dfrac{10!}{7!} = 720 = N -$ это общее число исходов данного опыта.

Найдём число исходов, благоприятствующих наступлению события $A = \{$ в правление попадут все члены семьи, причём председателем станет отец, коммерческим директором - сын, а бухгалтером –мать $\}$. Очевидно, что только один элементарный исход, благоприятствует наступлению события A, а именно:

$$\underbrace{\boxed{\text{Отец Петров}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Мать Петрова}}}_{\text{бухгалтер}}$$

Поэтому $P(A) = \dfrac{1}{720}$;

b) Найдём вероятность события $B = \{$ в правление попадут все члены семьи $\}$. Нас интересует количество выборок вида:

$$\underbrace{\boxed{\text{Отец Петров}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Мать Петрова}}}_{\text{бухгалтер}};$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Отец Петров}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Мать Петрова}}}_{\text{бухгалтер}};$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Мать Петрова}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Отец Петров}}}_{\text{бухгалтер}}$$

....

Ответим на вопрос, сколько таких комбинаций, используя правило умножения:

$$\underbrace{\boxed{3}}_{\text{председатель}} \underbrace{\cdot}_{\text{и}} \underbrace{\boxed{2}}_{\text{коммерческий директор}} \underbrace{\cdot}_{\text{и}} \underbrace{\boxed{1}}_{\text{бухгалтер}} = 6$$

3 варианта для председателя: или отец, или мать, или сын; после такого выбора, для коммерческого директора, у нас остаётся 2 варианта, а после второго выбора только один вариант. Итого 6 вариантов. Таким образом вероятность $P(B)=\frac{6}{720}=\frac{1}{120}$.

c) Найдём вероятность события $C=\{$ бухгалтером станет кто-то из членов семьи $\}$. Нас интересует количество выборок, вида:

$$\underbrace{\boxed{\text{Орлов}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Иванов}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Отец Петров}}}_{\text{бухгалтер}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Орлов}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Волков}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Сын Петров}}}_{\text{бухгалтер}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{Орлов}}}_{\text{председатель}} \quad \underbrace{\boxed{\text{Волков}}}_{\text{коммерческий директор}} \quad \underbrace{\boxed{\text{мать Петрова}}}_{\text{бухгалтер}}$$

……………………………………………………………

На 3-ей позиции, может быть только кто-то из семьи Петровых, т.е. для неё 3 варианта. Сколько остаётся вариантов для остальных позиций после такого выбора?

На 1-ой позиции директора может быть 9 человек: (10 всего минус 1 человек из семьи Петровых, который стал бухгалтером), на 2-ой позиции может быть уже 8 человек:

$$\left(10-\underbrace{1}_{\substack{\textit{из семьи}\\ \textit{Петровых}\\ \textit{бухгалтер}}}-\underbrace{1}_{\substack{\textit{забрали на}\\ \textit{директора}}}\right)=8$$

Итого:

$$\underbrace{9}_{\text{председатель}} \underbrace{\cdot}_{\text{и}} \underbrace{\boxed{8}}_{\text{коммерческий директор}} \underbrace{\cdot}_{\text{и}} \underbrace{\boxed{3}}_{\text{бухгалтер}} = 216$$

То есть вероятность $P(C)=\frac{216}{720}=\frac{3}{10}=0{,}3$.

Пример 3.3. *Из полной колоды карт (52) карты вынимают наугад сразу 3 карты. Найти вероятность того, что этими картами будут: а) тройка, семёрка, дама б) три туза?*

Решение: ***Опыт:*** Из 52 карт извлекают 3. Будем обозначать: *п* - пики; *к* - крести, *б* - буби; *ч* - черви. Запишем пространство элементарных исходов, считая получаемые выборки сочетаниями, в которых не важен порядок следования элементов:

$$\Omega=\left\{(2_п 7_к 8_б),(К_ч К_б В_к),(Д_ч Д_ч Т_к),(Т_ч Д_ч В_к),....,(8_ч 8_б 8_к),...\right\}.$$

Общее число элементарных исходов равно $|\Omega|=N=C_{52}^{3}=22\,100$.

а) Найдём число исходов M_A, благоприятствующих наступлению события $A=\{$ выбранные карты тройка, семёрка, дама $\}$. Указанный набор из 4 карт мы можем выбрать таким числом способов: $M_A=C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1=64$. Тогда вероятность A:

$$P(A)=\frac{64}{C_{52}^{3}}=\frac{64}{22\,100}=\frac{16}{5525}\approx 0,003.$$

b) Найдём число исходов M_B, благоприятствующих наступлению события $B=\{$ выбранные карты три туза $\}$. $M_B=C_4^3=4$. Тогда вероятность B:

$$P(B)=\frac{4}{C_{52}^{3}}=\frac{4}{22100}=\frac{1}{5525}\approx 0,00018.$$

Пример 3.4. *Из букв слова **КОРОБКА** наугад выбирают 5 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить слово: а) кобра б) краб в) бор.*

Решение: ***Представим***, что слово ***КОРОБКА*** − это семиэлементное множество:

$$\left\{К_1\ О_1\ Р\ О_2\ Б\ \ К_2\ А\right\}.$$

Опыт: заключается в выборе 5 букв, т.е. мы извлекаем из семиэлементного множества пятиэлементное подмножество. Будем считать наши выборки сочетаниями, т.е. разными считаем комбинации с разным составом элементов. Общее число исходов:

$$|\Omega|=C_7^5=\frac{7!}{5!2!}=21=N;$$

а) Найдём вероятность события $A=\{$ из выбранных букв можно составить слово кобра $\}$. Число исходов благоприятствующих наступлению события $M_A=C_4^1\cdot C_4^1\cdot C_4^1=64$:

$$\underbrace{}_{\substack{2\,\text{варианта}\\ \text{выбрать } К}}\Big|\underbrace{}_{\substack{2\,\text{варианта}\\ \text{выбрать } О}}\Big|\underbrace{}_{\substack{1\,\text{вариант}\\ \text{выбрать } Б}}\Big|\underbrace{}_{\substack{1\,\text{вариант}\\ \text{выбрать } Р}}\Big|\underbrace{}_{\substack{1\,\text{вариант}\\ \text{выбрать } А}}\Big|$$

По правилу умножения: $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$. То есть $P(A) = \dfrac{4}{21}$,

б) Найдём вероятность события $B = \{$ из выбранных букв можно составить слово краб $\}$.

Мы можем получить слово краб, если выберем таких 5 букв:

$$\underbrace{}_{\text{выбрана } К_1}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } А}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } К_2}\Big| + \underbrace{}_{\text{выбрана } К_1}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } А}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } О_1}\Big| +$$

$$+ \underbrace{}_{\text{выбрана } К_1}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } А}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } О_2}\Big| + \underbrace{}_{\text{выбрана } К_2}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } А}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } О_1}\Big| +$$

$$+ \underbrace{}_{\text{выбрана } К_2}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } А}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } О_2}\Big|$$

Итого 5 благоприятствующих исходов. То есть $P(B) = \dfrac{5}{21}$.

в) Найдём вероятность события $C = \{$ из выбранных букв можно составить слово бор $\}$.

Как можно получить слово бор, выбрав 5 букв:

$$\underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } О_1}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } О_2}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\substack{\text{любая из } 3\text{–х}\\ \text{оставшихся}}}\Big| + \underbrace{}_{\text{выбрана } Б}\Big|\underbrace{}_{\substack{\text{выбрана } О_1\\ \text{или } О_2}}\Big|\underbrace{}_{\text{выбрана } Р}\Big|\underbrace{}_{\substack{\text{любые две}\\ \text{из } К_1, К_2, А}}\Big| +$$

$$= C_1^1 \cdot C_2^2 \cdot C_1^1 \cdot C_3^1 + C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot C_3^2 = 9$$

Итого 9 благоприятствующих исходов. То есть $P(B) = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.

<u>Пример 3.5.</u> *S человек, расположившись случайным образом: а) сидят на скамье; б) водят хоровод. Какова вероятность того, что два определённых лица не окажутся рядом?*

<u>Решение:</u>

а) Опыт: S человек садятся на скамейку. Т.е. любой элементарный исход - это один из вариантов посадки S человек. В любой выборке порядок следования имеет значение и всякий раз мы выбираем S элементов из S, поэтому наши комбинации являются перестановками. Количество которых равно $P_S = S!$ Т.е. общее число элементарных исходов данного опыта $N = S!$

Найдём число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события:

$$A = \{ \text{ два определённых лица не окажутся рядом } \}.$$

Событие $\overline{A} = \{$ два определённых лица оказались рядом $\}-$ является противоположным событию A. Оценим его вероятность.

Будем считать, двух людей, оказавшихся рядом, одним целым, или «монолитом», общее число перестановок остальных элементов выборки (S человек) вместе с этим «монолитом» будет $(S-2+1)! = (S-1)!$ Но внутри монолита, можно также переставить элементы $2!$ способами, т.е. число способов рассадки S человек, когда два определённых человека оказываются рядом, равно $2! \cdot (S-1)! = M$ Теперь можем найти вероятность события $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = \frac{M}{N} = \frac{2!(S-1)!}{S!} = \frac{2}{S}$. Из соотношения $P(\overline{A}) + P(A) = 1$, находим вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{S} = \frac{S-2}{S}$.

b) Опыт: S человек водят хоровод. Т.е. любой элементарный исход - это один из вариантов постановки в хоровод S человек. В любой выборке порядок следования имеет значение и всякий раз мы выбираем S элементов из S, поэтому наши комбинации являются перестановками, количество которых равно $P_S = S!$ Т.е. общее число элементарных исходов данного опыта $N = S!$

Найдём число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события $A = \{$ два определённых лица не окажутся рядом $\}$. Событие $\overline{A} = \{$ два определённых лица оказались рядом $\}-$является противоположным событию A. Оценим вначале его вероятность.

Нам нужно поставить 2 человека, которые окажутся рядом, для первого из них S вариантов встать на любое место в хороводе , а для второго только два варианта: слева и справа от первого, для остальных же остаётся $(S-2)!$ вариантов. Итого общее число благоприятствующих исходов событию $\overline{A}$: $M_{\overline{A}} = 2 \cdot S \cdot (S-2)!$ Теперь можем найти вероятность события $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = \frac{M_{\overline{A}}}{N} = \frac{2 \cdot S \cdot (S-2)!}{S!} = \frac{2}{S-1}$. Из соотношения $P(\overline{A}) + P(A) = 1$, находим вероятность $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{S-1} = \frac{S-3}{S-1}$.

<u>Пример 3.6.</u> *В урне n белых и m черных шаров (m, n>1). Из урны без возвращения извлекают два шара. Найти вероятность того, что: а) шары одного цвета; б) шары разных цветов.*

Решение:* *Опыт: Из урны извлекают два шара. В урне всего $(n+m)-$ шаров. Пусть шары занумерованы: $Б_1, Б_2, ..., Б_n$ и $Ч_1, Ч_2, ..., Ч_m$.

Запишем пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{Б_1Ч_2, Б_2Ч_3, Б_1Ч_5, Б_2Ч_2, ..., Б_nЧ_m, ...\}$$

$|\Omega| = C_{n+m}^2 = \dfrac{(n+m)!}{2!(n+m-2)!} = N$ – общее число исходов данного опыта.

a) Найдём число исходов M_A, благоприятствующих наступлению события

$$A = \{ \text{ выбранные шары одного цвета } \}$$

Шары одного цвета можно взять так: <u>*или*</u> 2 белых, <u>*или*</u> 2 черных. Поэтому используя правило сложения находим: $M_A = C_n^2 + C_m^2$. Тогда вероятность события A:

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_m^2}{C_{n+m}^2}.$$

b) Найдём число исходов M_B, благоприятствующих наступлению события

$$B = \{ \text{ выбранные шары разных цветов } \}$$

Шары разного цвета можно взять так: <u>*и*</u> первый белый, <u>*и*</u> второй чёрный. На самом деле можно взять и наоборот, но так как мы считаем наши выборки сочетаниями, то порядок следования не имеет значения. Поэтому используя правило умножения, находим: $M_B = C_n^1 \cdot C_m^1$. Тогда вероятность события B:

$$P(B) = \frac{C_n^1 \cdot C_m^1}{C_{n+m}^2}.$$

<u>Пример 3.7.</u> *A, B и ещё 8 человек стоят в очереди. Найти вероятность того, что A и B отделены друг от друга тремя лицами.*

Найдём решения для следующих случаев:

1) *A и B отделены 3 лицами, всего в очереди 10 человек;*

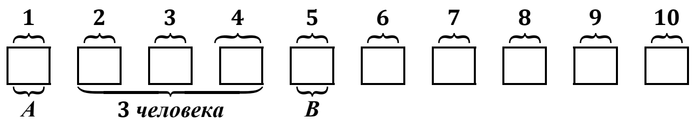
2) *A и B отделены 3 лицами, всего в очереди* **n** *человек;*

3) *A и B отделены* **k** *лицами, всего в очереди* **n** *человек;*

<u>Решение:</u> ***<u>1 случай:</u>*** ***A*** *и* ***B*** *отделены 3 лицами, всего в очереди 10 человек;*

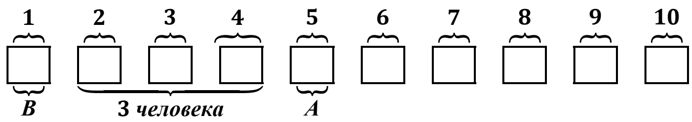
Возможные варианты расстановки:

- ***A*** перед ***B:***



Из рисунка видно, что ***B*** может занимать любую позицию от 5 до 10, соответственно ***A*** может занимать любую позицию от 1 до 6.

- ***B*** перед ***A****:*



Из рисунка видно, что ***A*** может занимать любую позицию от 5 до 10, соответственно ***B*** может занимать любую позицию от 1 до 6. Общее число способов взаимной расстановки ***A*** и ***B***, когда между ними 3 человека: $2 \cdot 6 = 12$.

Остальных «участников очереди» (которых 8 человек), можно расставить $8!$ способами. Каждый способ расстановки из $8!$ комбинируется с каждым способом постановки ***A*** и ***B***. Используя правило умножения, получаем число исходов благоприятствующих наступлению события $F = \{$***A*** *и* ***B*** *отделены друг от друга тремя лицами*$\}$, $m_F = 12 \cdot 8!$

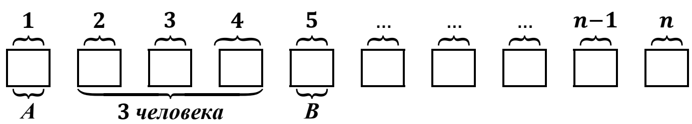
Общее число исходов данного опыта равно $|\Omega| = 10!$ Это число возможных вариантов встать десяти человекам в очередь. Найдём вероятность события F:

$$P(F) = \frac{12 \cdot 8!}{10!} = \frac{12}{9 \cdot 10} = \frac{2}{15}.$$

<u>Решение:</u> ***<u>2 случай:</u>*** ***A*** *и* ***B*** *отделены 3 лицами, всего в очереди* $\mathbf{n}$ *человек;*

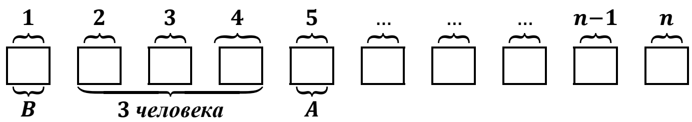
Возможные варианты расстановки:

- ***A*** перед ***B****:*



Из рисунка видно, что ***B*** может занимать любую позицию от 5 до n, соответственно ***A*** может занимать любую позицию от 1 до $n-4$.

- ***B*** перед ***A****:*



Из рисунка видно, что $\boldsymbol{A}$ может занимать любую позицию от 5 до n, соответственно $\boldsymbol{B}$ может занимать любую позицию от 1 до $(n-4)$. Общее число способов взаимной расстановки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, когда между ними 3 человека: $2\cdot(n-4)$.

Число исходов благоприятствующих наступлению события D:

$D=\{$ $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ отделены друг от друга тремя лицами, всего в очереди $\boldsymbol{n}$ человек $\}$, равно:

$m_D=2\cdot(n-4)\cdot n!$ Тогда вероятность события $P(D)=\dfrac{2(n-4)\cdot(n-2)!}{n!}=\dfrac{2(n-4)}{n(n-1)}$.

<u>Решение:</u> <u>3 случай:</u> *$\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ отделены $\boldsymbol{k}$ лицами, всего в очереди $\boldsymbol{n}$ человек;*

Будем искать вероятность события:

$E_k=\{$А и В отделены друг от друга $\boldsymbol{k}$ лицами, всего в очереди $\boldsymbol{n}$ человек$\}$,

Обозначим событие:

$E_1=\{$А и В отделены друг от друга $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$ человеком, всего в очереди $\boldsymbol{n}$ человек$\}$,

Используя рассуждения, приведённые в предыдущих случаях, можем записать, что $m_{E_1}=2\cdot(n-2)\cdot(n-2)!$, тогда $P(E_1)=\dfrac{2\cdot(n-2)\cdot(n-2)!}{n!}=\dfrac{2\cdot(n-2)}{n\cdot(n-1)}$;

Обозначим событие:

$E_2=\{$А и В отделены друг от друга $\boldsymbol{k}=\mathbf{2}$ лицами, всего в очереди $\boldsymbol{n}$ человек$\}$,

$m_{E_2}=2\cdot(n-3)\cdot(n-2)!$, тогда $P(E_2)=\dfrac{2\cdot(n-3)\cdot(n-2)!}{n!}=\dfrac{2\cdot(n-3)}{n\cdot(n-1)}$;

В предыдущей задаче, получили для события $D=E_3$:

$D=E_3=\{$А и В отделены друг от друга $\boldsymbol{k}=3$ лицами, всего в очереди $\boldsymbol{n}$ человек$\}$

$$P(D)=P(E_3)=\frac{2(n-4)\cdot(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-4)}{n(n-1)};$$

Закономерность уже видна, поэтому можем записать в общем виде для произвольного k вероятность события E_k:

$$P(E_k)=\frac{2\cdot(n-(k+1))\cdot(n-2)!}{n!}=\frac{2\cdot(n-k-1)}{n\cdot(n-1)}$$

<u>Пример 3.8.</u> *В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них может выйти равновозможно на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на седьмом этаже; б) все пассажиры выйдут одновременно; в) все пассажиры выйдут на разных этажах.*

<u>Решение:</u> Опыт: Выход трёх человек из лифта. Введём обозначение: Будем изображать символом $\boxed{}$ – человека, а внутри квадрата будем ставить цифру, соответствующую номеру этажа, где он вышел. Наши выборки могут выглядеть так:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{2}}^{1-\text{ый}}\quad\overbrace{\boxed{2}}^{2-\text{ой}}\quad\overbrace{\boxed{2}}^{3-\text{ий}}}_{3\ \text{человека}}\ -\text{все вышли на } 2-\text{ом этаже}$$

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{7}}^{1-\text{ый}}\quad\overbrace{\boxed{8}}^{2-\text{ой}}\quad\overbrace{\boxed{8}}^{3-\text{ий}}}_{3\ \text{человека}}\ -1-\text{ый на 7 этаже, остальные вышли на } 8-\text{ом.}$$

В каждом квадрате может быть любое число от двух до девяти, т.е. 8 вариантов выхода у 1-го пассажира, 8 вариантов у 2-го и 8 вариантов у 3-его, используя комбинаторное правило умножения, находим общее число исходов данного опыта: $|\Omega|=N=8\cdot 8\cdot 8=8^3$;

а) Найдём число исходов, благоприятствующих наступлению события $A=\{$ все пассажиры выйдут на седьмом этаже $\}-$ M_A. Очевидно, что только 1 исход, благоприятствует наступлению данного события:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{7}}^{1-\text{ый}}\quad\overbrace{\boxed{7}}^{2-\text{ой}}\quad\overbrace{\boxed{7}}^{3-\text{ий}}}_{3\ \text{человека}}\ -\text{все вышли на } 2-\text{ом этаже}$$

Поэтому $P(A)=\frac{1}{512}\approx 0{,}002$.

б) Найдём число исходов, благоприятствующих наступлению событию $B=\{$ все пассажиры выйдут одновременно $\}-$ M_B. Одновременно - это значит, что все на одном из этажей: или все на 2-ом, или все на 3-ем, или все на 4-ом, ….., или все на 9-ом. Всего 8 вариантов выйти всем одновременно. Т.е. $M_B = 8$. Тогда $P(B) = \frac{8}{512} \approx 0,016$.

в) Найдём число исходов, благоприятствующих наступлению события $C = \{$ все пассажиры выйдут на разных этажах $\}$ – M_C. Любой исход данного опыта представляет собой набор из трёх цифр:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{6}}^{1-\text{ый}}\quad\overbrace{\boxed{5}}^{2-\text{ой}}\quad\overbrace{\boxed{4}}^{3-\text{ий}}}_{3\ \text{человека}} - \text{все вышли на разных этажах}$$

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{3}}^{1-\text{ый}}\quad\overbrace{\boxed{5}}^{2-\text{ой}}\quad\overbrace{\boxed{9}}^{3-\text{ий}}}_{3\ \text{человека}} - \text{все вышли на разных этажах}$$

На 1-ом месте (в 1-ом квадрате) может быть любое число от 2 до 9 (8 вариантов выхода для 1-го пассажира). Для второго квадрата − количество вариантов 7=8-1, т.к. второй пассажир должен выйти на другом этаже, отличном от этажа выхода первого пассажира. И, наконец, для 3-го пассажира − 6 вариантов выхода, *отличных от вариантов выхода первых* двух пассажиров. Итого: $M_C = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Тогда $P(C) = \frac{336}{512} \approx 0,66$.

Пример 3.9. *Колода из 52 карт раздаётся поровну четверым игрокам. Найти вероятность того, что: а) у каждого из игроков окажется по одному тузу; б) у одного из игроков все карты будут одной масти.*

Решение: Запишем вначале пространство элементарных событий, учитывая проведённый
Опыт: раздача карт 4 игрокам.
Любым элементарным исходом данного опыта будет один из вариантов разделения 52-х карт на 4 части. Нет необходимости перечислять все элементарные исходы, запишем лишь мощность пространства элементарных исходов:

$$|\Omega| = C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} \cdot C_{13}^{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

Как нашли?: C_{52}^{13} − число способов выдать 13 карт первому игроку, второму мы можем выдать только из оставшихся $52 - 13 = 39$ карт, т.е. C_{39}^{13} − числом способов; третьему выдаём из оставшихся 26 карт C_{26}^{13} − числом способов, и наконец для 4 игрока будет только один

Но нам необходимо ***и*** выдать карты одной масти одному из игроков, ***и*** остальным трём игрокам раздать по 13 карт, поэтому используя правило умножения, получаем число способов выдать первому игроку карты одной масти:

$$\underbrace{4}_{4\,масти} \cdot \underbrace{C_{13}^{13}}_{1\,способ\ выдать\ первому} \cdot \underbrace{C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} \cdot C_{13}^{13}}_{число\ способов\ раздать\ остальным}.$$

Но в задаче игрок не конкретизирован, а говорится «у одного из игроков», то есть это может быть <u>*или*</u> первый, <u>*или*</u> второй, <u>*или*</u> третий, <u>*или*</u> четвёртый игрок. Поэтому используя правило сложения, складывая все варианты для каждого игрока в отдельности, окончательно получаем:

$$4\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\cdot C_{13}^{13}+4\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\cdot C_{13}^{13}+4\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\cdot C_{13}^{13}+4\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\cdot C_{13}^{13}=16\cdot C_{39}^{13}\cdot C_{26}^{13}\cdot C_{13}^{13}=\frac{16\cdot 39!}{(13!)^3}$$

Поэтому вероятность $P(B)$:

$$P(B)=\frac{\frac{16\cdot 39!}{(13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}}=\frac{16\cdot 39!}{(13!)^3}\cdot\frac{(13!)^4}{52!}=\frac{16\cdot 39!\cdot 13!}{52!}=\frac{16}{C_{52}^{13}}$$

<u>***Пример 3.10.***</u> *12 человек, среди которых Сидоров и Петров, размещаются в гостинице, в которой есть 4-х местный, два 3-х местных и один 2-х местный номер. Какова вероятность события* A, *состоящего в том, что Сидоров и Петров попадут в 2-местный номер?*

<u>***Решение:***</u> ***Опыт:*** размещение 12 человек по 12 местам в разных номерах. Занумеруем 12 человек. Обозначим $\boxed{}$ – места в номерах, внутри квадрата будем писать порядковый номер жильца (вместо фамилии). Элементарными исходами данного опыта будут комбинации с повторением элементов, например такие:

$$\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{7}\,\boxed{8}}_{\mathbf{4}-\text{местный номер}}\quad\underbrace{\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}}_{\mathbf{1}-\text{ый трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{10}\,\boxed{11}\,\boxed{12}}_{\mathbf{2}-\text{ой трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{6}\,\boxed{9}}_{\text{двухместный}}$$

$$\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{4}}_{\mathbf{4}-\text{местный номер}}\quad\underbrace{\boxed{7}\,\boxed{8}\,\boxed{5}}_{\mathbf{1}-\text{ый трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{10}\,\boxed{11}\,\boxed{12}}_{\mathbf{2}-\text{ой трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{6}\,\boxed{9}}_{\text{двухместный}}$$

Наши выборки являются комбинациями 12 элементов. Комбинации отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Важно понять, что 2 такие комбинации например:

$$\underbrace{\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{7}\,\boxed{8}}_{\textbf{4}-\text{местный номер}}\quad\underbrace{\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}}_{\textbf{1}-\text{ый трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{10}\,\boxed{11}\,\boxed{12}}_{\textbf{2}-\text{ой трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{6}\,\boxed{9}}_{\text{двухместный}}$$

$$\underbrace{\boxed{7}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{8}}_{\textbf{4}-\text{местный номер}}\quad\underbrace{\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{5}}_{\textbf{1}-\text{ый трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{10}\,\boxed{11}\,\boxed{12}}_{\textbf{2}-\text{ой трехместный}}\quad\underbrace{\boxed{6}\,\boxed{9}}_{\text{двухместный}}$$

формально одинаковы, т.к. при смене порядка следования элементов внутри любого номера, в данном случае в 4-местном, ситуация физически не меняется, человек остаётся в том же номере. Нам нужно посчитать количество разных размещений людей, поэтому нужно избавиться от одинаковых перестановок. Фактически в опыте мы получаем перестановки с повторением, количество которых:

$|\Omega| = N = P_{12}(4,3,3,2) = \dfrac{12!}{4!3!3!2!} = 277200 -$ это общее число исходов данного опыта.

Можно было использовать и такой способ нахождения общего числа исходов:

1) набираем в 4-х местный номер: $C_{12}^4 -$ число способов набрать в него;
2) набираем в первый 3-х местный номер из оставшихся 8 человек (после первого выбора): число способов: C_8^3;
3) набираем во второй 3-х местный номер из оставшихся 5 человек, (после первых двух выборов): $C_5^3 -$ число способов;
4) оставшиеся 2 человека попадают в двухместный номер $C_2^2 -$ числом способов;

Итого, находим общее число вариантов, используя комбинаторное правило умножения:

$$N = C_{12}^4 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{12!}{4!3!3!2!}$$

Найдём число благоприятствующих исходов.

Пусть Сидоров и Петров - это 11-ый и 12-ый номер, тогда для последних двух позиций только 1 вариант; для остальных так:

$$\underbrace{\square\,\square\,\square\,\square}_{C_{10}^4}\quad\underbrace{\square\,\square\,\square}_{C_6^3}\quad\underbrace{\square\,\square\,\square}_{C_3^3}\quad\underbrace{\square\,\square}_{\textbf{1}\text{ вариант}}$$

Поэтому $M_A = C_{10}^4 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 \cdot 1 = \dfrac{10!}{4!3!3!} = 4200$

Тогда вероятность события $A = \{$ Сидоров и Петров попадут в 2-местный номер $\}$:

$$P(A) = \frac{C_{10}^4 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 \cdot 1}{C_{12}^4 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2} = \frac{4200}{277200} \approx 0{,}01515$$

Пример 3.11. *В шкафу находятся 10 разных пар ботинок. Случайно берутся 4 ботинка. Какова вероятность того, что среди них не будет парных?*

***Решение:* 1 способ.** Закодируем все ботинки так:

$$[1a1б]-1\text{ пара};\ [2a2б]-2\text{ пара};\ [3a3б]-3\text{ пара};\ \ldots\ldots.;\ [10a10б]-10\text{ пара};$$

Так как опыт заключается в том, что берутся 4 ботинка из 20, то пространство элементарных исходов будет выглядеть так: $\Omega=\{(1a,1б,2б,3a);(4a,10б,2б,5a);(4б,10a,2a,5б);...\}$, мощность $|\Omega|=N=A_{20}^{4}=\dfrac{20!}{16!}=17\cdot18\cdot19\cdot20$, считаем, что наши комбинации являются <u>*размещениями*</u>, т.е. порядок следования и состав выборок значим. Например, две выборки: $(4a,10б,2б,5a)$ и $(5a,2б,10б,4a)$ не одинаковы.

Перейдём к подсчёту благоприятствующих событию $A=\{$ среди 4 выбранных ботинок нет парных $\}$ исходов $-M_A$. Любой исход - это набор из четырёх ботинок:

$$\underbrace{\square}_{1-ый}\quad\underbrace{\square}_{2-ой}\quad\underbrace{\square}_{3-ий}\quad\underbrace{\square}_{4-ый}$$

Первый ботинок мы можем выбрать 20 способами, т.е.:

$$\underbrace{\square}_{20\text{ вариантов}}\quad\underbrace{\square}_{2-ой}\quad\underbrace{\square}_{3-ий}\quad\underbrace{\square}_{4-ый}$$

Для второго ботинка, который должен быть непарным с уже выбранным, у нас остаётся 18 вариантов, т.е.:

$$\underbrace{\square}_{20\text{ вариантов}}\ \underbrace{\cdot}_{и}\ \underbrace{\square}_{18\text{ вариантов}}\quad\underbrace{\square}_{3-ий}\quad\underbrace{\square}_{4-ый}$$

Для третьего ботинка вариантов ещё меньше, а именно 16, от 20 отнимаем два выбранных ботинка и два парных с ними, т.е.:

$$\underbrace{\square}_{20\text{ вариантов}}\ \underbrace{\cdot}_{и}\ \underbrace{\square}_{18\text{ вариантов}}\ \underbrace{\cdot}_{и}\ \underbrace{\square}_{16\text{ вариантов}}\quad\underbrace{\square}_{4-ый}$$

И наконец, для выбора четвёртого ботинка, очевидно 14 вариантов:

$$\underbrace{\square}_{20\text{ вариантов}}\ \underbrace{\cdot}_{и}\ \underbrace{\square}_{18\text{ вариантов}}\ \underbrace{\cdot}_{и}\ \underbrace{\square}_{16\text{ вариантов}}\ \underbrace{\cdot}_{и}\ \underbrace{\square}_{14\text{ вариантов}}$$

По правилу умножения, находим $M_A=A_{20}^{1}\cdot A_{18}^{1}\cdot A_{16}^{1}\cdot A_{14}^{1}=20\cdot18\cdot16\cdot14$. Тогда вероятность события A:

$$P(A) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14} = \frac{19 \cdot 17}{16 \cdot 14} \approx 0,69$$

Решение: ***2 способ.*** Во введённом выше условном обозначении, ботинки разделены на левые и правые: $[i\ a] - i$ - ый правый ботинок; $[j\ б] - j$ - ый левый ботинок; $i, j = \overline{1,10}$. Будем считать получаемые при выборе комбинации *сочетаниями*. Как можно выбрать 4 непарных ботинка? Очевидно так:

1) Взят 1 левый ботинок и 3 правых непарных с первым;

2) Взято 2 левых ботинка и 2 правых непарных с двумя левыми;

3) Взято 3 левых ботинка и 1 правый;

4) Взято 4 левых ботинка;

5) Взято 4 правых ботинка.

Подсчитаем число вариантов для каждого случая:

1) Взят 1 левый ботинок и 3 правых непарных с первым:

$$M_1 = \underset{|\text{вариантов для 1-го левого ботинка}|}{10} \cdot \underset{|\text{три правых выбираем уже из 9}|}{C_9^3}$$

2) Взято 2 левых ботинка и 2 правых непарных с двумя левыми: $M_2 = C_{10}^2 \cdot C_8^2$

3) Взято 3 левых ботинка и 1 правый:

$$M_3 = \underset{|\text{вариантов для 1-го правого ботинка}|}{10} \cdot \underset{|\text{три левых выбираем уже из 9}|}{C_9^3}$$

4) Взято 4 левых ботинка: $M_4 = C_{10}^4$

5) Взято 4 правых ботинка: $M_5 = C_{10}^4$

Используя правило сложения, находим:

$$M_A = \sum_{i=1}^{5} M_i = 2 \cdot 10 \cdot C_9^3 + C_{10}^2 \cdot C_8^2 + 2 \cdot C_{10}^4 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9!}{3!6!} + \frac{10!8!}{2!8!2!6!} + 2 \cdot C_{10}^4 = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10!}{4 \cdot 3!6!} + \frac{4!10!}{4 \cdot 4!6!} + 2 \cdot C_{10}^4 =$$
$$= 8 \cdot C_{10}^4 + 6 \cdot C_{10}^4 + 2 \cdot C_{10}^4 = 16 \cdot C_{10}^4$$

Общее число исходов данного испытания, т.к. мы считаем наши комбинации сочетаниями (набор 4 ботинок из 20): $N = C_{20}^4$. Можем оценить вероятность наступления события A, используя классическое определение вероятности: $P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{16 \cdot C_{10}^4}{C_{20}^4} \approx 0,69$.

Пример 3.12. *30 шаров случайным образом размещаются по 8 ящикам. Для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик. Найти вероятность того, что при этом будет 3 пустых ящика, 2 ящика – с тремя, 2 ящика – с шестью и один ящик – с двенадцатью шарами.*

Решение: ***Опыт:*** наполнение тридцатью шарами восьми ящиков. Попробуем представить получаемые элементарные исходы опыта: различные варианты наполнения 8 ящиков.

Сделаем шары различимыми между собой, занумеруем их от 1 до 30, т.е. каждый шар получает свой номер. Ящики тоже пронумеруем от 1 до 8.

Получим графическое изображение элементарных исходов. Будем изображать символом $\boxed{}$ – шар, а внутри квадрата будем ставить цифру, соответствующую номеру ящика, куда размещен шар. Наши выборки могут выглядеть так:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{1}}^{1-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{1}}^{2-\text{ой шар}} \quad \overbrace{\boxed{1}}^{3-\text{ий шар}} \quad \ldots\ldots \quad \overbrace{\boxed{1}}^{29-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{1}}^{30-\text{ый шар}}}_{30\ \text{шаров}} - \text{все шары в первом ящике}$$

Замечание: В условии сказано, что для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик, т.е. теоретически все шары могут оказаться в каком-то одном ящике, например в 1-ом как изображено на верхней картинке. Варианты размещения могут быть и такие:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{1}}^{1-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{1}}^{2-\text{ой шар}} \quad \ldots \quad \overbrace{\boxed{1}}^{15-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{2}}^{16-\text{ый шар}}\ldots \quad \ldots..\overbrace{\boxed{2}}^{30-\text{ый шар}}}_{30\ \text{шаров}} - \text{половина шаров в } 1-\text{ом ящике,}$$

другая во 2-ом.

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{4}}^{1-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{2}}^{2-\text{ой шар}} \quad \ldots \quad \overbrace{\boxed{8}}^{15-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{6}}^{16-\text{ый шар}}\ldots \quad \ldots..\overbrace{\boxed{7}}^{30-\text{ый шар}}}_{30\ \text{шаров}} - 1-\text{ый шар в } 4-\text{ом ящике}, 2-\text{ой}$$

во 2-ом и т.д.

Из записанных предполагаемых комбинаций очевидно, что в каждом квадрате может оказаться любая цифра от 1 до 8. Используя правило умножения, можем получить общее число исходов данного опыта, или мощность пространства $|\Omega| = N = \underbrace{8\cdot 8\ldots\cdot 8}_{30\ раз} = 8^{30}$.

Этот же результат мы могли записать сразу, используя информацию о том, что наши выборки являются размещениями с повторением. Почему выборки с повторением элементов − это очевидно. Разберёмся, почему наши комбинации являются размещениями, т.е. порядок следования имеет значение. Рассмотрим две выборки:

$\overbrace{\boxed{7}}^{1-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{7}}^{2-\text{ой шар}} \quad \dots \quad \overbrace{\boxed{7}}^{15-\text{ый шар}} \quad \dots\dots \quad \overbrace{\boxed{8}}^{16-\text{ый шар}}\dots \quad \dots\dots\overbrace{\boxed{8}}^{30-\text{ый шар}}$ − первая половина в седьмом, вторая половина в восьмом ящике.

$\overbrace{\boxed{8}}^{1-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{8}}^{2-\text{ой шар}} \quad \dots \quad \overbrace{\boxed{8}}^{15-\text{ый шар}} \quad \dots\dots \quad \overbrace{\boxed{7}}^{16-\text{ый шар}} \quad \overbrace{\boxed{7}}^{17-\text{ый шар}}\dots \quad \dots\dots\overbrace{\boxed{7}}^{30-\text{ый шар}}$ - вторая половина в седьмом, первая половина в восьмом ящике.

Т. е. изменение порядка следования элементов, ведёт к «физически» другой ситуации размещения шаров, поэтому порядок следования для нас ***<u>значим</u>***. Т.е.наши выборки - это размещения с повторением, количество которых находится по формуле: $\tilde{A}_n^m = n^m$, в данном случае: $\tilde{A}_8^{30} = 8^{30}$.

Найдём число исходов, благоприятствующих наступлению события $A = \{$ при наполнении шарами ящиков, будет 3 пустых ящика, 2 ящика – с тремя, 2 ящика – с шестью и один ящик – с двенадцатью шарами $\}$, т.е. M_A.

Мы ранее сделали ящики различимыми между собой, занумеровав их. Пустыми могут быть любые три из 8, например, первый, второй и третий ящики. Ящиком, куда положим 12 шаров, может быть также любой из восьми. Поэтому вначале мы должны посчитать число способов выбрать три пустых ящика; два ящика, где будет по три шара; два ящика с шестью шарами и один ящик с двенадцатью шарами:

$$M_1 = \underbrace{C_8^3}_{\text{выбираем 3 пустых ящика}} \cdot \underbrace{C_5^2}_{\substack{\text{выбираем 2 ящ.,} \\ \text{где по 3 шара}}} \cdot \underbrace{C_3^2}_{\substack{\text{выбираем 2 ящ.,} \\ \text{где по 6 шаров}}} \cdot \underbrace{C_1^1}_{\substack{\text{выбираем ящик,} \\ \text{где 12 шаров}}} = \frac{8!}{3!(2!)^2};$$

Теперь наполним ящики шарами:

C_{30}^{12} − таким числом способов можем выбрать 12 шаров из 30, и положить их в какой-либо из ящиков; после такого выбора осталось 18 шаров, из них выбираем 3 шара, т.е.:

C_{18}^{3} − число способов выбора трёх шаров для первого из двух ящиков с тремя шарами; после этого выбора осталось 15 шаров, из них выбираем 3 шара, т.е.:

C_{15}^{3} – число способов выбора трёх шаров для второго из двух ящиков с 3 шарами; после этого выбора осталось 12 шаров, поэтому:

C_{12}^{6} – число способов выбора шести шаров для первого из двух ящиков с 6 шарами; после этого выбора, оставшиеся 6 шаров автоматически попадают во второй ящик с 6 шарами:

C_{6}^{6} – один способ выбора шести шаров для второго из двух ящиков с 6 шарами. Итого, используя правило умножения:

$$M_2 = C_{30}^{12} \cdot C_{18}^{3} \cdot C_{15}^{3} \cdot C_{12}^{6} \cdot C_{6}^{6} = \frac{30!}{12!(6!)^2(3!)^2}$$

Общее число благоприятствующих событию $A = \{$ при наполнении получится 3 пустых ящика, 2 ящика – с тремя, 2 ящика – с шестью и один ящик – с двенадцатью шарами $\}$ исходов, находим используя правило умножения (число способов выбрать ящики, умножаем на число способов их наполнить определённым образом):

$$M_A = M_1 \cdot M_2 = \frac{8!}{3!(2!)^2} \cdot \frac{30!}{12!(6!)^2(3!)^2} = \frac{8!30!}{12!(2!)^2(6!)^2(3!)^3};$$

И окончательно, находим вероятность события A, используя классическое определение вероятностей:

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{\dfrac{8!30!}{12!(2!)^2(6!)^2(3!)^3}}{8^{30}} = \frac{8!30!}{8^{30} \cdot 12!(2!)^2(6!)^2(3!)^3}$$

Задачи для самостоятельного решения по теме 3:

3.1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность: ***а***) выпадения на двух костях в сумме не менее 9 очков? ***б***) выпадения одного очка хотя бы на одной из костей?

3.2. Деревянный кубик, с окрашенными гранями, распилен на 64 равных кубика, из которых наугад выбирается один. . Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь окрашенных граней: ***а***) ровно одну; ***б***) ровно две; ***в***) ровно три; ***г***) хотя бы одну; ***д***) хотя бы одну неокрашенную?

3.3. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, извлечённого наудачу жетона, не содержит цифры 5.

3.4. Бросаются n игральных костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпало одинаковое количество очков.

3.5. Из последовательности чисел $1,\ldots,n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше, а другое больше k, если $1<k<n$?

3.6. Из последовательности чисел $1,2,\ldots,n$ наугад выбирают сначала одно число, затем второе. Какова вероятность того, что: ***а***) первое число меньше второго; ***б***) оба числа больше $n/2$; ***в***) будут выбраны равные числа; *г*) сумма этих чисел будет меньше n; ***д***) первое число окажется на 2 больше второго; ***е***) первое число окажется меньше 4, а второе больше $n-4$?

3.7. Брошены 5 игральных костей. Найти вероятность следующих событий: а) на всех костях выпало разное число очков; б) сумма выпавших очков равна 7.

3.8. В очередь в кассу стоят 9 человек (трое мужчин, четыре женщины и двое детей). Какова вероятность, что между некоторыми двумя мужчинами будут стоять двое детей и одна женщина?

3.9. На полке случайным образом расставляются 8 книг. Найти вероятность того, что две определённые книги окажутся рядом. (*Ответ:* 0,25)

3.10. Собрание клуба филателистов (20 человек) должно выбрать председателя, его заместителя и казначея. Какова вероятность того, что при случайном выборе председателем станет либо А, либо В, заместителем председателя – либо В, либо С, а казначеем – либо С, либо А?

3.11. Из букв слова ***ОХОТНИК*** наугад выбирают 5 букв. Вычислите вероятность того, что из выбранных букв можно составить слова: а) никто; б) кино; в) кит.

3.12. Сорок участников турнира разбиваются на четыре равные группы. Найти вероятность того, что четыре сильнейших участника окажутся в разных группах.

3.13. В ящике 30 деталей, 4 из них бракованные. Какова вероятность того, что среди наугад взятых 5 деталей, бракованных не будет?

3.14. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

3.15. Найти вероятность того, что 20 студентов одной группы родились:

а) в один день года; ***б***) в разные дни года; ***в***) в разные дни сентября; ***г***) 8 марта; ***д***) в октябре.

3.16. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Участник лотереи покупает k билетов. Найти вероятность того, что он выиграет хотя бы на один билет.

3.17. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что: а) только второй студент взял «хороший» билет; б) оба студента взяли «хорошие» билеты.

3.18. Семь человек вошли в лифт на первом этаже восьмиэтажного дома. Какова вероятность, что на одном этаже вышли два человека?

3.19. В поезде (10 вагонов) случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность того, что они находятся: а) в одном вагоне; б) в соседних вагонах?

3.20. В урне n белых и m черных шаров. Все шары без возвращения извлекаются из урны. Какое из событий более вероятно: а) «первый извлечённый шар оказался белым»; б) «последний извлечённый шар оказался белым»?

3.21. Имеется тщательно перетасованная колода из 52 карт. Найти вероятность того, что: а) первые четыре карты в колоде – тузы; б) первая и последняя карты – тузы.

3.22. На шахматную доску ставятся наудачу две ладьи белого и чёрного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

3.23. Из всех подмножеств множества $X=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ выбирают наугад одно. Какова вероятность того, что оно содержит элемент $\{x_n\}$?

3.24. Имеется 5 шаров, которые случайным образом раскладываются по 7 пакетам. Найти вероятность того, что в первых 3 пакетах, будет ровно по одному шару.

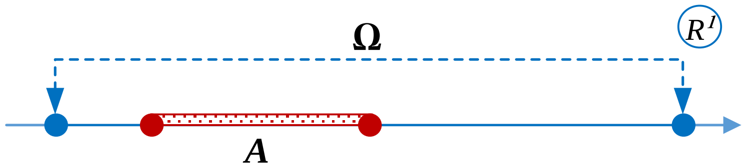
3.25. Имеется M шаров, которые случайным образом раскладываются по N пакетам $(N>M)$. Найти вероятность того, что в первый пакет попадёт ровно K_1 шар, во второй – K_2 шара, …, в N - ый попадёт K_N шаров $\left(\sum_{i=1}^{N} K_i = M\right)$.

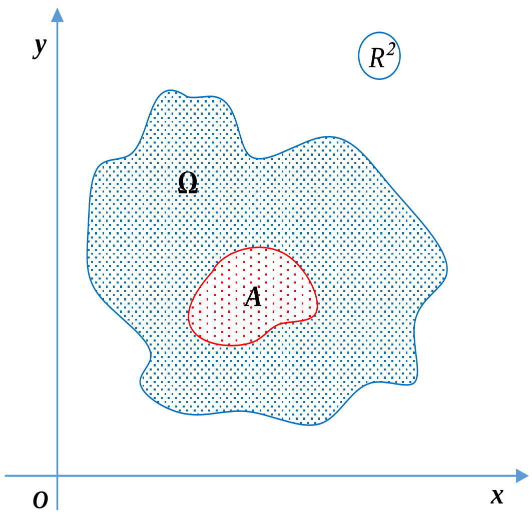
Тема 4. Геометрическое определение вероятности

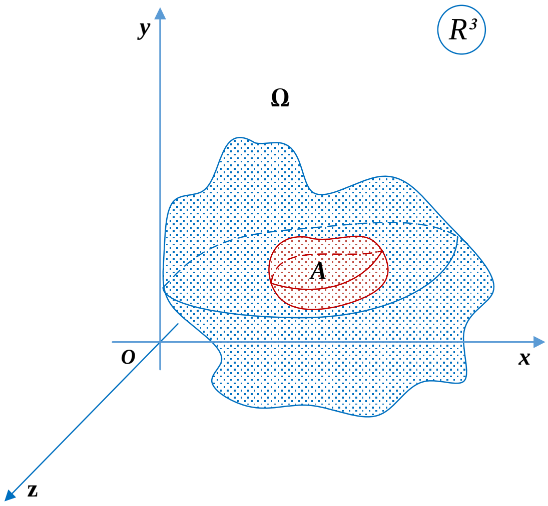
Применение классического определения вероятности события ограничено двумя условиями: число элементарных исходов конечно и все исходы равновозможны.

Геометрическое определение вероятности позволяет применить принцип равновозможности элементарных исходов в случае, когда пространство элементарных исходов имеет мощность континуума.

Рассмотрим некоторые области Ω в пространствах R^1, R^2, R^3, имеющие меры $mes(\Omega)$, а внутри каждой области Ω область A с мерой $mes(A)$:







В область Ω случайно бросается точка, попадание которой в Ω является достоверным событием, а в область A – случайным событием.

Полагается, что все точки области Ω равноправны, т.е. брошенная точка может попасть равновозможно в любую точку области Ω и вероятность $P(A)$ попадания точки в область A не зависит от формы или расположения A внутри Ω, а зависит лишь от меры области A и, следовательно, пропорциональна этой мере:

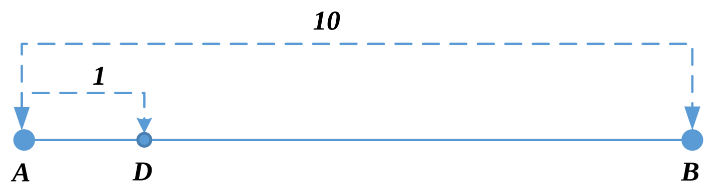
$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Замечание 1: $mes(\,)$ означает меру: длину, площадь, объем областей, в зависимости от размерности «рабочего» пространства.

Примеры решения задач по теме 4:

Пример 4.1. *В точке* ***C****, положение которой на телефонной линии* ***AB*** *длиной 10 км равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка* ***C*** *удалена от точки* ***A****, в которой находится ремонтная станция, на расстояние, не меньшее 1 км.*

Решение: Можем считать, что опыт заключается в бросании точки C, на интервал длиной 10 км. Попадание точки C в данный интервал это достоверное событие. Обозначим событие $F = \{$ точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее 1 км $\}$. Событие F наступит, если точка C попадет в интервал DB:



Искомая вероятность события F, равна отношению длин интервалов AB и DB:

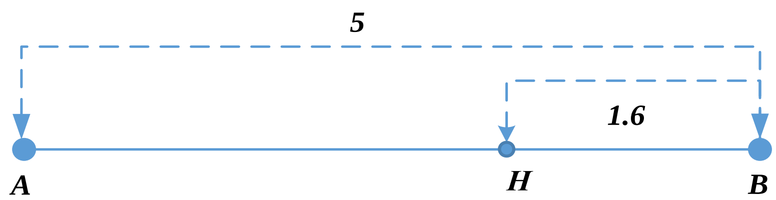
$$P(F) = \frac{mes(F)}{mes(\Omega)} = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{9}{10} = 0,9$$

Пример 4.2. *На отрезке [0, 5] случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.*

Решение: Опыт: Точка C бросается на отрезок $AB = [0,5]$.

Попадание точки C в данный интервал это достоверное событие.

Обозначим событие $F = \{$ точка C удалена от точки B на расстояние, не больше 1, 6 единиц $\}$. Событие F наступит в случае, если точка C попадёт в интервал $HB = [3,4;\ 5]$:

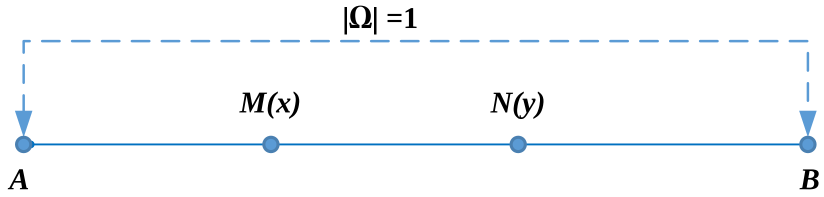


Искомая вероятность события F, равна отношению длин интервалов AB и HB: $P(F) = \frac{1,6}{5} = 0,32$.

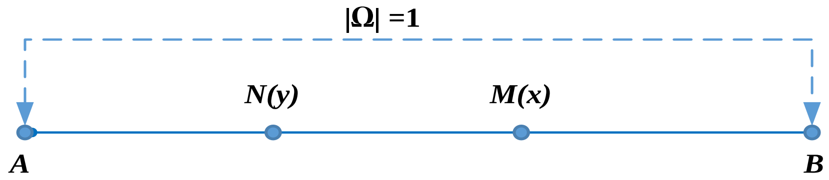
Пример 4.3. *На отрезке AB наугад и независимо друг от друга отмечают две точки M и N. Вычислить вероятность того, что: а)* $|AM|<|AN|$*; б)* $|AM|>|MN|$.

Решение: ***Опыт:*** Случайно выбирается две точки M и N независимо друг от друга.

а) Расположение точек после выбора может быть такое, когда M левее N, назовём это *случай 1*:



Или наоборот когда N левее M, назовём это *случай 2*:



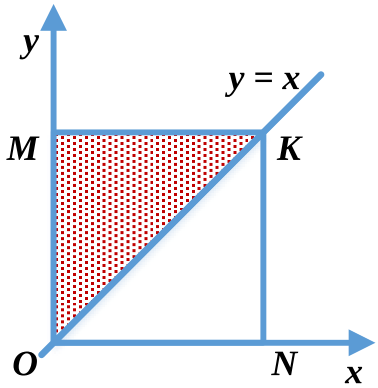
Обозначим событие $F=\{\ |AM|<|AN|\ \}$. Очевидно, что в случае 2 событие F – невозможное. Найдём вероятность F в *случае 1*.

Выберем произвольно размер отрезка $|AB|=1$, (на самом деле можно взять любой размер, например равный a). Попадание в этот отрезок для любой из точек достоверное событие.

Свяжем с каждой из точек координаты: пусть точка M имеет координату x, а точка $N - y$. Тогда очевидно, что величина отрезка $|AM|=x$, а величина отрезка $|AN|=y$.

В силу независимости результатов бросания двух точек, можем эти результаты изобразить на плоскости, где координаты точки $M(x)$ будем отмечать по оси Ox, а координаты $N(y)$ по оси Oy. Тогда достоверным событием в опыте будет попадание точки с координатами (x,y) в квадрат со стороной 1. Определим попадание в какую часть квадрата точки (x,y) благоприятствует наступлению события F.

Событие F наступает в случае если $|AM|<|AN|$, или в принятых нами обозначениях, когда $x<y$. Графическое изображение области на плоскости, описываемой системой неравенств: $y>x,\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1$:

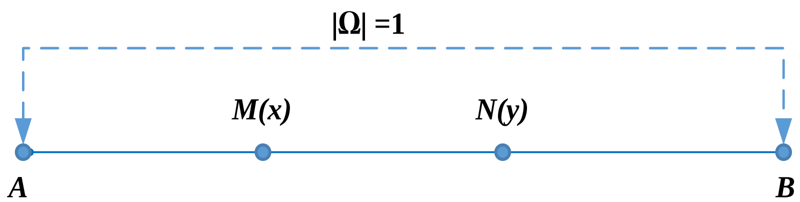


Т.е. попадание в треугольник OMK благоприятствует наступлению события F. И вероятность этого события равна отношению площадей треугольника OMK и единичного квадрата $OMKN$:

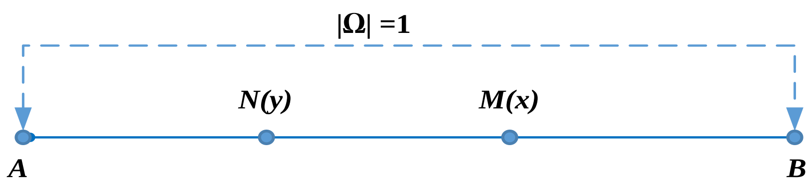
$$P(F) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

б) Далее нам необходимо найти вероятность события $G = \{ \ |AM| > |MN| \ \}$. Результаты бросания могут быть такие:

<u>*Случай 1*</u> $y > x$:



<u>*Случай 2*</u> $y < x$:

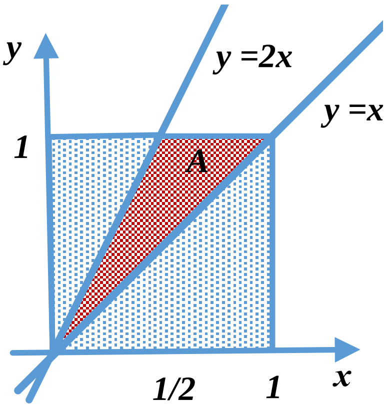


Очевидно, что в случае 2, событие $G = \{ \ |AM| > |MN| \ \}$ является достоверным. Найдём вероятность G в случае 1.

Аналогично предыдущему решению, результаты бросания двух точек будем изображать на плоскости Oxy. Опишем в принятых нами обозначениях событие G. Так как $|AM| = x$, а $|MN| = y - x$, то наступление события $G = \{ \ |AM| > |MN| \ \}$ эквивалентно тому, что

$\{x > y - x\}$. Изобразим графически множество точек плоскости, описываемых системой неравенств:

$$\{x > y - x,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y > x\} = \{y < 2x,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y > x\} \qquad (*)$$



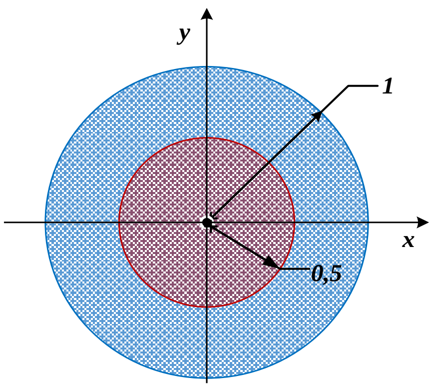
Множество точек плоскости A, удовлетворяющих системе $(*)$, благоприятствуют наступлению события G. Площадь A очевидно равна $1/4$. Тогда вероятность события G равна отношению площадей области A и единичного квадрата:

$$P(G) = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}.$$

<u>Пример 4.4.</u> *Точку бросают наугад в круг* $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. *Какова вероятность того, что: а) расстояние от точки до центра круга не превысит 0,5; б) абсцисса точки будет больше 0,5.*

<u>Решение:</u> Опыт: Точку бросают наугад в круг $R = 1$.

а) Обозначим событие $A = \{$ расстояние от точки до центра круга будет не более 0,5 $\}$. Это событие эквивалентно тому, что точка попала в круг $R = 0.5$, с тем же центром, что и у исходного единичного круга.

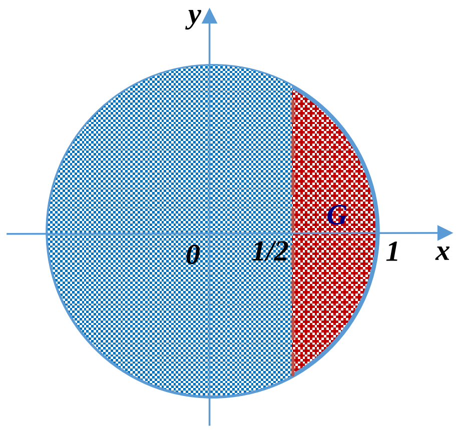


Вероятность такого события равна отношению площадей круга радиуса $R=0{,}5$ и единичного круга:

$$P(A)=\frac{\pi(0{,}5)^2}{\pi}=0{,}25;$$

б) Обозначим событие $B=\{$ абсцисса точки будет больше $0{,}5\}$.

Событие B эквивалентно событию: точка попала в выделенную красным цветом часть единичного круга G.



Найдём площадь области G :

$$S_G=2\int\limits_{1/2}^{1}\sqrt{1-x^2}=\begin{bmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos tdt \end{bmatrix}=2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\cos tdt=2\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\cos^2 tdt=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\pi}{2}-\frac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4};$$

Площадь единичного круга $mes\left(\Omega\right)=S_\Omega=\pi$. Тогда вероятность $P(B)=\dfrac{\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\pi}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}.$

<u>Пример 4.5.</u> *В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причём поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше $t, t<T$. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T, если каждое из устройств пошлёт по одному сигналу.*

<u>Решение</u>: Опыт: в приёмник поступают сигналы от двух устройств.

Введём обозначения: событие $A = \{$ сигнализатор сработал $\}$; $x -$ момент поступления 1-го сигнала; $y -$ момент поступления 2-го сигнала. Так как поступление сигналов от каждого из устройств возможны в промежутке времени длительностью T и моменты поступления сигналов от разных устройств *независимы*, поэтому можем представить Ω как квадрат, лежащий на осях координат Ox и Oy со стороной T. Определим область A, попадание в которую благоприятствует наступлению события A. Так как сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t, $t < T$, то можем записать в принятых нами обозначениях, что сигнализатор сработает, если выполняется:

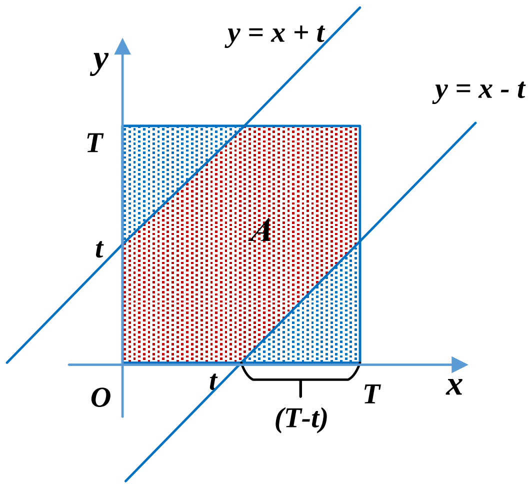
$$|x - y| \le t$$

Расписывая, получаем систему неравенств:

$$x - t \le y \le x + t$$

Графическое изображение множества точек плоскости, описываемого системой:

$$\begin{cases} x - t \le y \le x + t; \\ x, y \in [0, T] \end{cases}$$



Найдём площадь фигуры A, заштрихованной красным цветом:

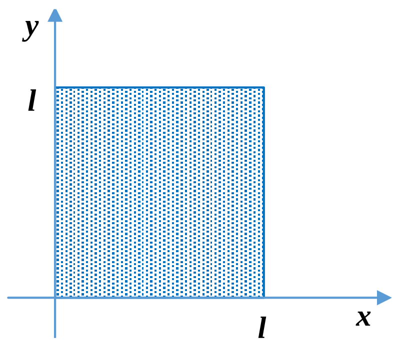
$$mes(A) = T^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (T - t)^2 = T^2 - (T - t)^2;$$

Тогда вероятность события $A = \{$ приёмник сработал $\}$ равна:

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = 1 - \frac{(T - t)^2}{T^2}.$$

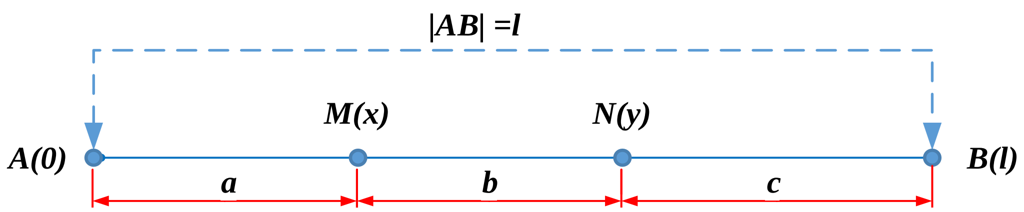
Пример 4.6. *Стержень разломан в двух наугад выбранных точках. Какова вероятность того, что из образовавшихся трёх стержней можно составить треугольник?*

Решение: Опыт: Стержень ломают в двух точках − это эквивалентно тому, что на отрезок определённой длины бросают случайно 2 точки. Выберем произвольную длину стержня, равную например l. Так как точки бросаются независимо, то можем координаты обеих точек откладывать по осям координат Ox и Oy. Тогда пространство элементарных исходов $\Omega -$ это квадрат со стороной l и $mes(\Omega) = l^2$:

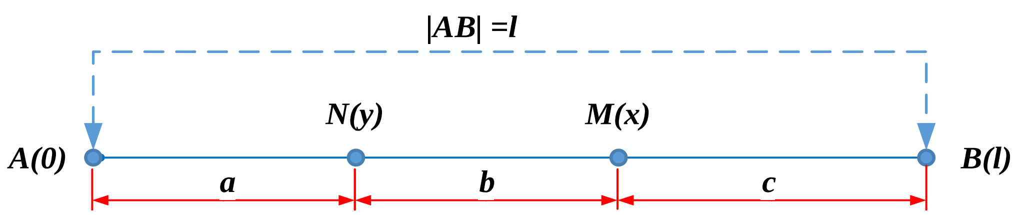


Обозначим точки разлома стержня M с координатой x и N с координатой y. Длины стержней, получаемых при разламывании обозначим a, b, c. При бросании двух точек может быть 2 результата:

1 случай. M находится левее N, т.е. $y > x$:



2 случай. N находится левее M, т.е. $y < x$ ::

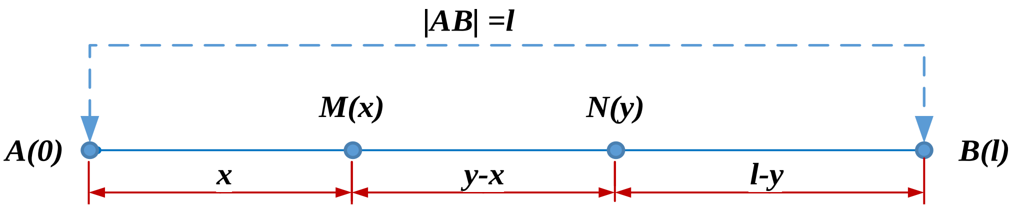


Рассмотрим по порядку оба случая.

Из полученных трех стержней мы сможем составить треугольник, если выполняются 3 условия:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \qquad (*)$$

Перепишем данную систему в принятых нами обозначениях для *1 случая*:



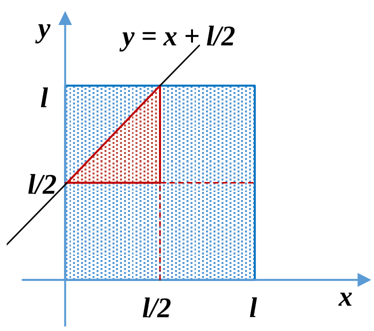
Получаем:

$$\begin{cases} x < (y - x) + (l - y) \\ (y - x) < x + (l - y) \\ (l - y) < x + (y - x) \end{cases}$$

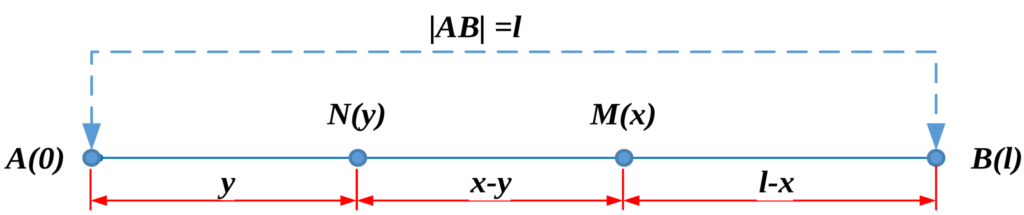
Или после преобразования:

$$\begin{cases} x < l/2 \\ y < x + l/2 \\ y > l/2 \end{cases}$$

Графическое изображение этого множества точек плоскости, если $x, y \in [0, l], \ \ y > x.$:



Для *2 случая*:



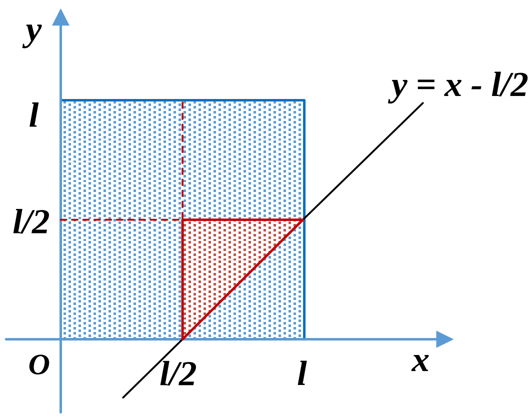
Тогда система неравенств $(*)$ перепишется в виде:

$$\begin{cases} y < (x-y)+(l-x) \\ (x-y) < y+(l-x); \\ (l-x) < y+(x-y) \end{cases}$$

После преобразований:

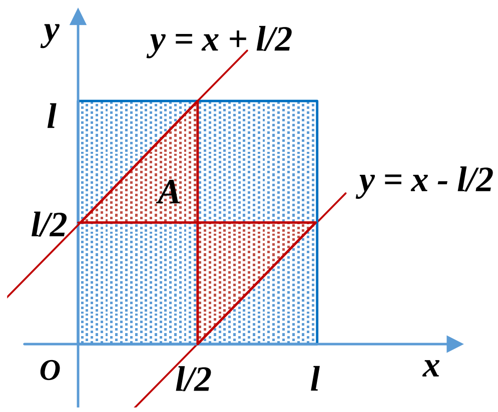
$$\begin{cases} y < l/2 \\ y > x-l/2; \\ x > l/2 \end{cases}$$

Графическое изображение системы когда $x, y \in [0, l], \quad y < x$:



Обозначим событие $A = \{$ из образовавшихся трёх стержней можно составить треугольник $\}$.

Наступлению события A благоприятствует попадание точки с координатами (x, y) в выделенную красным цветом область A:



Мера этой области $mes(A) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}\right) = \frac{l^2}{4}$. Тогда вероятность события A:

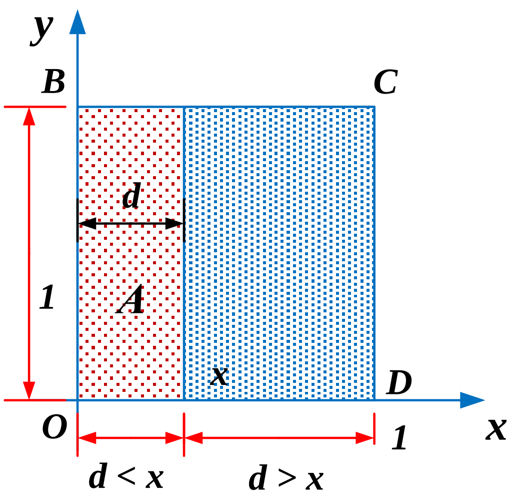
$$P(A) = \frac{l^2/4}{l^2} = \frac{1}{4}.$$

Пример 4.7. *Точка случайно брошена в единичный квадрат. Найти вероятности следующих событий: а) расстояние от точки до фиксированной стороны квадрата не превосходит* x*; б) расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не превосходит* x*; c) расстояние от точки до центра квадрата не превосходит* x*; d) расстояние от точки до заданной вершины квадрата не превосходит* x.

Решение: Опыт: точка случайно бросается в единичный квадрат.

а) Обозначим: событие $A=\{$ расстояние от точки до фиксированной стороны квадрата не превосходит x $\}$, $d-$ расстояние от точки до фиксированной стороны. Выберем некоторое произвольное значение x и предположим, что зафиксирована сторона OB, тогда: 1) в случае если $x\geq 1$, то $P(A)=1$;

2) в случае если $0<x<1$, то:



Из рисунка видно, что попадание в заштрихованную красным область A благоприятствует наступлению события A. Пространство элементарных исходов образует множество точек квадрата со стороной 1. Так как $mes(\Omega)=S_\Omega=1$, а $mes(A)=S_A=x\cdot 1=x,$ то вероятность события A:

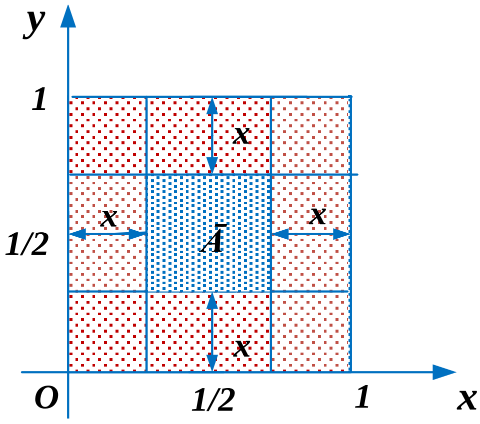
$$P(A)=\frac{x}{1}=x.$$

Так как квадрат единичный, то очевидно, что $0\leq P(A)\leq 1$.

б) Опыт: точка случайно бросается в единичный квадрат. Обозначим событие:

$$A=\{\ \text{расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не превосходит } x\ \}.$$

Выберем некоторое произвольное значение x. Отметим от каждой из сторон это значение:



Рассмотрим 2 случая:

1) если $x \geq 1/2$, то $P(A)=1$;

2) в случае же если $0 < x < 1/2$, как изображено на рисунке выше, то попадание в заштрихованную красным цветом область (единичный квадрат минус область $\overline{A}$) благоприятствует наступлению события A.

Мера этой области равна $mes(A)=1-(1-2x)^2$. Тогда вероятность события A:

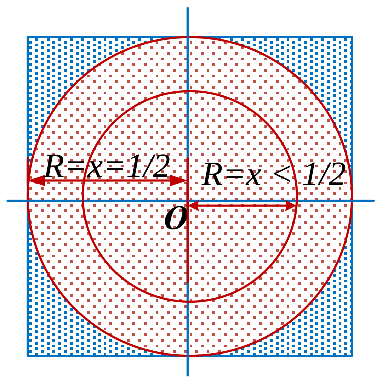
$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{4x(1-x)}{1}=4x\cdot(1-x).$$

*с) **Опыт***: точка случайно бросается в единичный квадрат. Обозначим событие:

$$A=\{\text{ расстояние от точки до центра квадрата не превосходит } x \ \}.$$

Рассмотрим опять несколько вариантов значений x :

1) в случае если $0 < x \leq 1/2$, как изображено на рисунке:



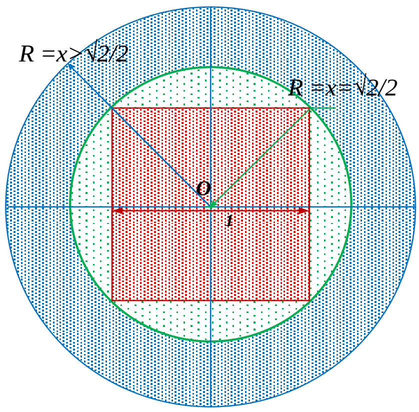
то наступлению события A благоприятствует совокупность точек круга радиуса x Площадь круга равна $mes(A)=S_A=\pi x^2$. Поэтому вероятность события A:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\pi x^2}{1}=\pi x^2.$$

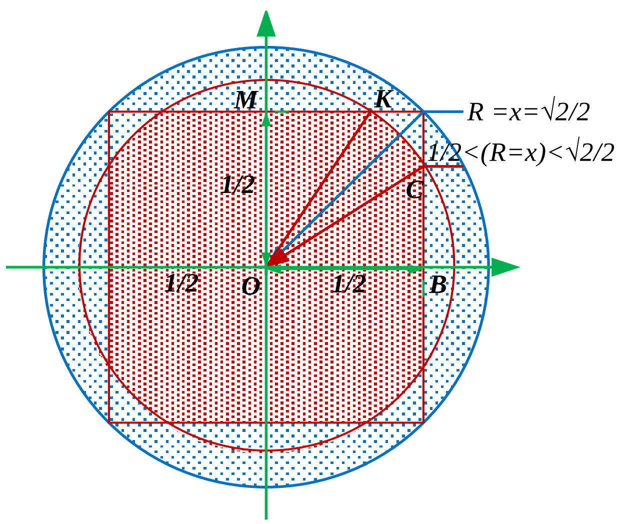
2) если значение $x \geq \sqrt{2}/2$, то $P(A)=1$. Разберёмся почему.

Отложим от центра квадрата расстояние $x=\sqrt{2}/2$, равное половине размера диагонали единичного квадрата. Совокупность всех точек, находящихся на таком расстоянии от центра, образуют *описанную окружность* радиуса $R=\sqrt{2}/2$, она выделена на рисунке зелёным цветом. Если любое из значений $x>\sqrt{2}/2$ отложить в какую угодно сторону от центра квадрата, то такое значение окажется или в выделенной голубым цветом зоне, или далее от неё, другими словами вне *описанной окружности*. Поскольку точка бросается внутрь единичного квадрата, выделенного красным цветом, то попав в любое место этого квадрата она будет находится от его центра на расстоянии, точно не превосходящем $x \geq \sqrt{2}/2$.

Это хорошо видно на рисунке. То есть событие A достоверно.



3) И наконец рассмотрим последний случай когда $1/2<x<\sqrt{2}/2$. Рассмотрим рисунок:



Окружность, выделенная красным цветом, имеет радиус $1/2 < R < \sqrt{2}/2$. Поскольку точки бросаются в квадрат, то пересечение окружности этого радиуса и единичного квадрата, дают нам фигуру, выделенную красным цветом, попадание в которую благоприятствует наступлению события A. Найдём площадь этой фигуры. Обозначим её тоже A. Площадь $\frac{S_A}{4}$ равна сумме площадей равных прямоугольных треугольников OMK и OBC, и площади сектора OKC. Очевидно, что $|OM| = |OB| = 1/2$, $|OK| = |OC| = x$, тогда $|MK| = |BC| = \sqrt{x^2 - 1/4} = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2}$, поэтому $S_{OMK} = S_{OBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4x^2-1}}{2} = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{8}$. Найдём площадь сектора OKC, используя формулу площади через угол: $S_{OKC} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$. Найдём значение α. Обозначим угол $\angle COB = \beta$, тогда

$$\frac{OB}{OC} = \cos\beta;\ \frac{1/2}{x} = \cos\beta;\quad \beta = \arccos\frac{1}{2x};$$

Из рисунка хорошо видно, что $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\beta = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{2x}$. Тогда площадь сектора:

$$S_{OKC} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi x^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{2x}\right)}{2\pi} = \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{2x}\right)$$

Можем найти $\frac{1}{4}\cdot S_A$:

$$\frac{S_A}{4} = S_{OMK} + S_{OBC} + S_{OKC} = 2\cdot\frac{\sqrt{4x^2-1}}{8} + \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{2x}\right)$$

Тогда

$$S_A = 4\cdot\left\{\frac{\sqrt{4x^2-1}}{4} + \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{2x}\right)\right\} = \sqrt{4x^2-1} + x^2\cdot\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x}\right);$$

И окончательно вероятность события A равна:

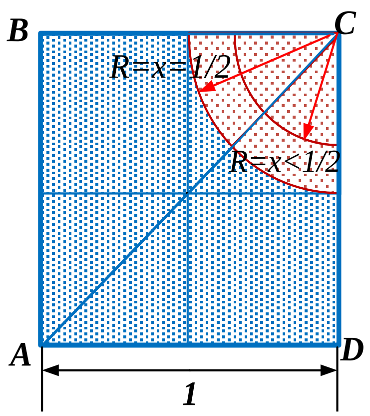
$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\sqrt{4x^2-1} + x^2\cdot\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x}\right)}{1} = \sqrt{4x^2-1} + x^2\cdot\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x}\right).$$

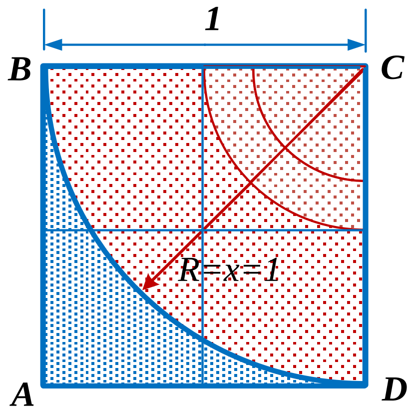
d) Опыт: точка случайно бросается в единичный квадрат. Обозначим событие:

$A = \{$ расстояние от точки до заданной вершины квадрата не превосходит x $\}$.

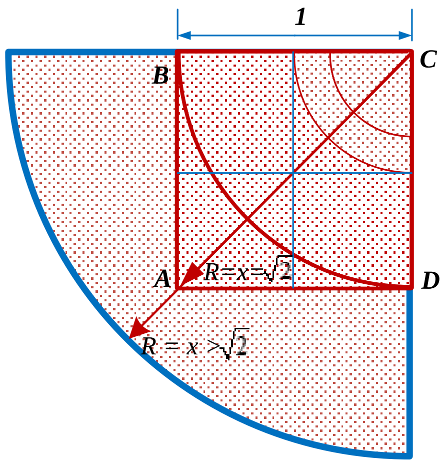
Зафиксируем, например, вершину C. Рассмотрим 3 случая:

1) При $0 < x < 1$, вероятность события A: $P(A) = \frac{1}{4}\pi x^2$.

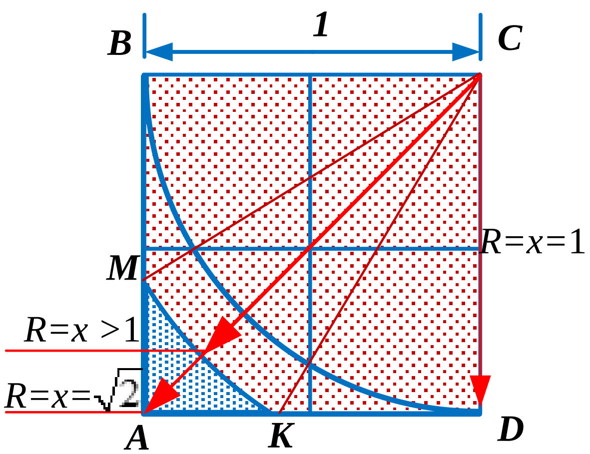




2) Если $x \geq \sqrt{2}$, то $P(A) = 1$. Если заданное значение x больше или равно длине диагонали единичного квадрата, то при бросании точки в этот квадрат, куда бы она ни попала, расстояние от неё до вершины C будет обязательно меньше x. Это хорошо видно на рисунке:



3) И последний случай, когда $0 < x < 1/2$. Рассмотрим рисунок:



При таком значении x, соответствующей событию A будет область, выделенная красным цветом. Аналогичный вариант рассматривался для предыдущего события $\{$ расстояние от точки до центра квадрата не превосходит x $\}$ в случае, если $1/2 < x < \sqrt{2}/2$. Найдём меру заштрихованной красным цветом области.

Площадь S_A равна сумме площадей равных прямоугольных треугольников MBC и KDC, и площади сектора MCK. Так как $|BC| = |CD| = 1$, $|MC| = |KC| = x$, то $|MB| = |KD| = \sqrt{x^2 - 1}$, поэтому:

$$S_{MBC} = S_{KDC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2}.$$

Найдём площадь сектора MCK, используя формулу площади через угол: $S_{MCK} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$.

Найдём значение α величины центрального угла дуги MK. Обозначим угол $\angle KCD = \beta$, тогда:

$$\frac{DC}{KC} = \cos\beta; \;\; \frac{1}{x} = \cos\beta; \quad \beta = \arccos\frac{1}{x}.$$

Из рисунка хорошо видно, что $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2 \cdot \beta = \dfrac{\pi}{2} - 2\arccos\dfrac{1}{x}$.

Тогда площадь сектора:

$$S_{MCK} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi x^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{x} \right)}{2\pi} = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{x} \right) = x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x} \right)$$

Можем найти S_A:

$$S_A = S_{MBC} + S_{KDC} + S_{MCK} = 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2} + x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x} \right) = \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x} \right)$$

И окончательно вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x} \right)}{1} = \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x} \right).$$

Пример 4.8. *Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение $x \cdot y$ будет не больше 1, а частное $\frac{y}{x}$ не больше 2.*

Решение: Опыт: наудачу выбирается два числа $0 < x, y \le 2$.

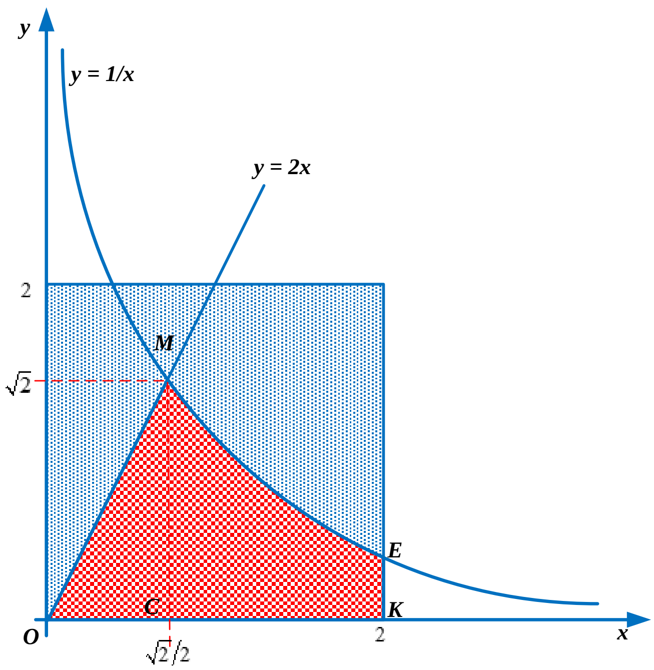
Пространство элементарных исходов квадрат со стороной 2:

$$\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}.$$

Множество точек плоскости, попадание в которое благоприятствует наступлению события

$A = \{$ произведение $x \cdot y$ будет не больше 1, а частное $\frac{y}{x}$ не больше 2 $\} = \left\{x \cdot y \le 1, \frac{y}{x} \le 2\right\} =$

$= \left\{(x, y): y \le \frac{1}{x},\ y \le 2x\right\}$, выделено на рисунке красным цветом:



Для оценки вероятности события A нам необходимо знать площадь фигуры $OMEK$. Найдём точки пересечения прямой и гиперболы: $\frac{1}{x} = 2x,\ x^2 = \frac{1}{2}$. Откуда получаем: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как мы работаем в 1 четверти, то выбираем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, для которого $y = \sqrt{2}$.

Т.е. координаты точки пересечения $M\left(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}\right)$.

Используя эти координаты можем найти площадь треугольника OMC:

$$S_{OMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2};$$

Найдём площадь криволинейной трапеции $CMEK$:

$$S_{CMEK} = \int_{\sqrt{2}/2}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{\sqrt{2}/2}^{2} = \ln 2 - \ln \sqrt{2}/2 = \ln \frac{2}{\sqrt{2}/2} = \ln 2\sqrt{2} \approx 1,04;$$

Общая площадь фигуры $OMEK$:

$$S_{OMEK} = S_{OMC} + S_{CMEK} = \frac{1}{2} + \ln 2\sqrt{2} \approx 1,54;$$

Можем найти вероятность события $A = \left\{ x \cdot y \le 1, \ \frac{y}{x} \le 2 \right\}$:

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\frac{1}{2} + \ln 2\sqrt{2}}{4} \approx 0,385.$$

<u>Пример 4.9.</u> *Два человека B и C условились встретиться в определённом месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждёт другого в течение 10 минут, после чего уходит. Найти вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого.*

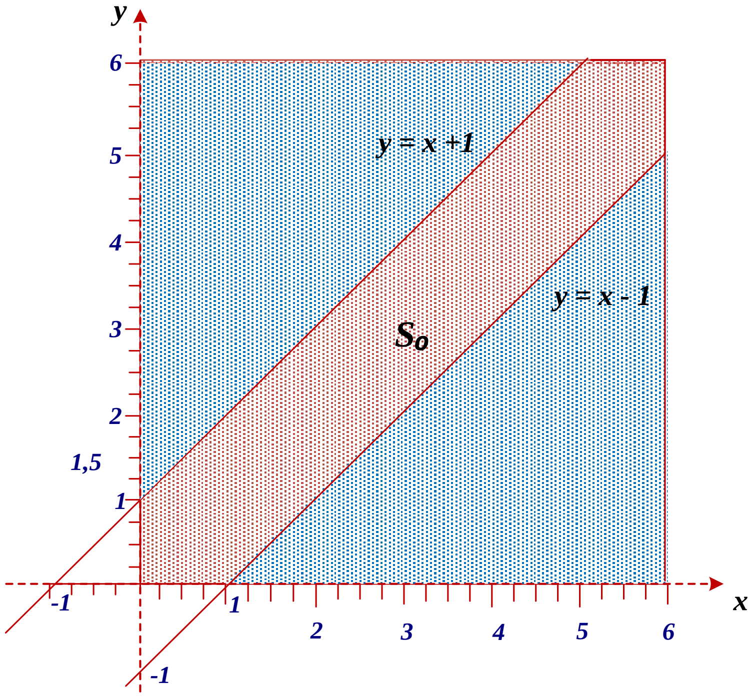
<u>Решение</u>: Будем считать интервал от 14 до 15 часов отрезком длиной в 1 час.

Обозначим независимые моменты прихода лиц B и C соответственно x и y, $x, y \in [0,1]$. Пространство элементарных событий Ω в этом случае – это множество точек единичного квадрата.

Обозначим событие $A = \{$ два человека B и C встретятся $\}$. Этому событию соответствует множество точек плоскости, обозначим его S_0: $S_0 = \left\{ (x, y) : |x - y| < \frac{1}{6} \right\}$.

То есть, для того, чтобы два человека встретились, необходимо чтобы разность между моментами их прихода была меньше 10 минут.

Для удобства изменим масштаб и умножим все на 6, тогда наша область $S_0 = \{(x, y) : |x - y| < 1\}$, выглядит так:



Мера Ω теперь равна площади квадрата со стороной 6, т.е. 36. Найдём меру (площадь) области S_0 Очевидно, что она равна ***__разности__*** площади квадрата и площади двух прямоугольных треугольников, заштрихованных голубым цветом, или: $S_{S_0} = 6\cdot 6 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = 11$.

Тогда вероятность события *A* равна: $P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{S_{S_0}}{S_\Omega} = \frac{11}{36}$.

__Пример 4.10.__ *Три человека договорились встретиться с 12 до 13 часов дня. Пришедший первым ждёт остальных 10 минут и уходит. Найти вероятность встречи всех трех человек.*

__Решение:__ Задача решается аналогично задаче о встрече двух человек. Обозначим независимые моменты прихода трёх человек x, y, z. Каждая из переменных может принимать значения в пределах от 0 до 1, т.е. $x, y, z \in [0,1]$. Пространство элементарных исходов в данном случае $\Omega = \{$ попадание в куб со стороной 1 $\}$.

Событию $A = \{$ все три человека встретятся $\}$, соответствует множество точек, описываемое системой неравенств:

$$|x-y| \le 1/6; \quad |x-z| \le 1/6; \quad |y-z| \le 1/6;$$
$$0 \le x, y, z \le 1.$$

Или иначе, умножив все для удобства на 6:

$$|x-y| \le 1; \quad |x-z| \le 1; \quad |y-z| \le 1;$$
$$0 \le x, y, z \le 6. \qquad (*)$$

В этом случае мера Ω равна: $mes(\Omega) = 6^3 = 216$.

Далее, для нахождения $P(A)$ нам необходимо знать меру той фигуры, которая описывается системой неравенств $(*)$. Для вычисления её объёма, необходимо представление о том, как она выглядит. С этой целью мы рассмотрим сечения фигуры для различных значений z.

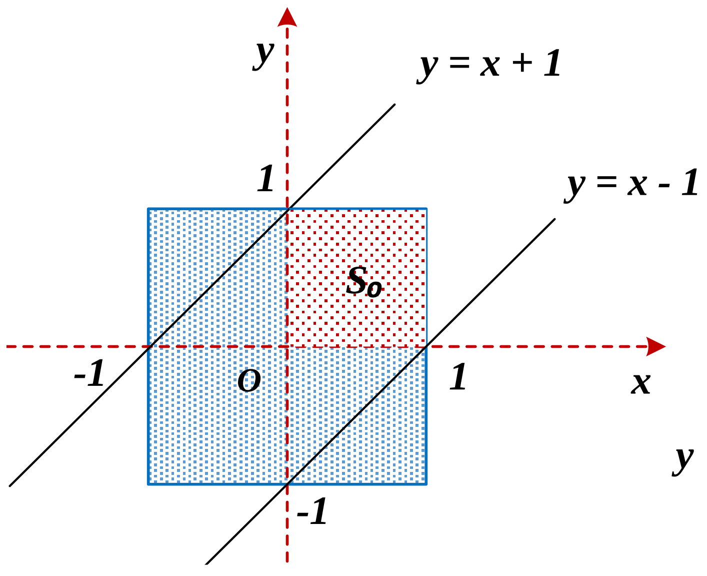
1) Вначале рассмотрим изменение значений переменной z от 0 до 1. Зафиксируем значение $z=0$, наша система $(*)$ примет вид:

$$|x-y| \le 1; \quad |x| \le 1; \quad |y| \le 1;$$
$$0 \le x, y \le 6.$$

Или расписав модули, получим:

$$-1 \le x \le 1; -1 \le y \le 1; \quad y \ge x-1; \quad y \le x+1; 0 \le x, y \le 6.$$

Графически данная область на плоскости, обозначим её S_0, выглядит так:

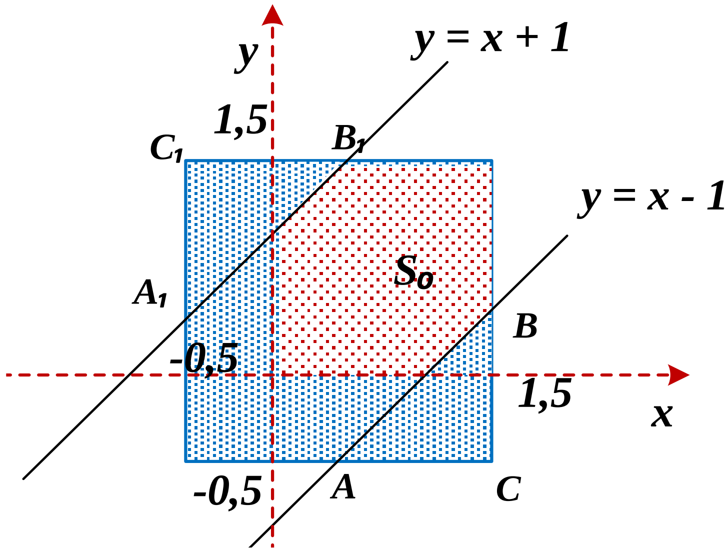


Площадь заштрихованной области S_0 равна: $S(z=0) = 1$.

Положим значение $z = 0,5$, тогда система $(*)$ принимает вид:

$$|x-y|\le 1;\quad |x-0{,}5|\le 1;\quad |y-0{,}5|\le 1;$$
$$0\le x,y\le 6.$$

Графическое изображение S_0, множества точек плоскости, описываемых такой системой неравенств:



Найдём площадь заштрихованной области S_0.

Площадь треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $S_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$, площадь оставшейся части фигуры голубого цвета без треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $S=4\cdot\frac{1}{4}=1.$

Тогда общая площадь фигуры голубого цвета:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=2.$$

И,наконец, площадь выделенной красным фигуры: $S_{S_0}=4-2=2.$

Ее можно было найти и так:

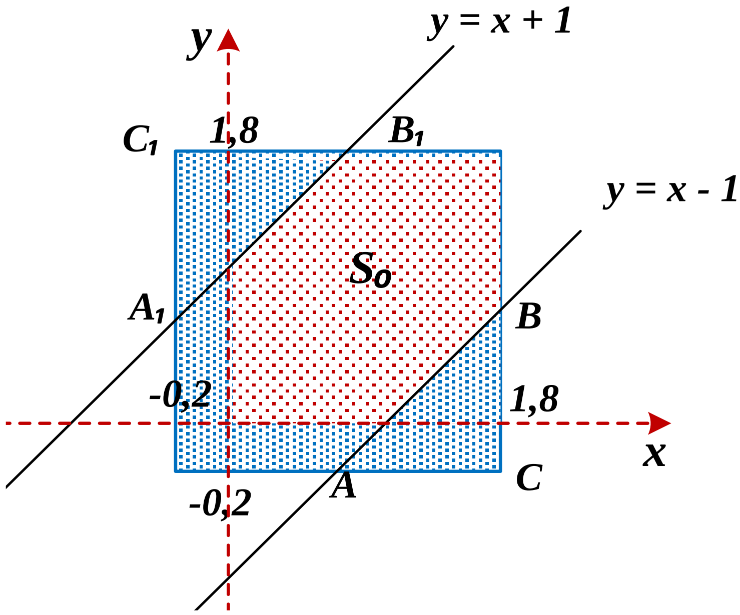
$$S_{S_0}=\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}_{\substack{\text{площадь квадрата}\\ \text{в 1 четверти}}}-2\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\substack{\text{площадь треугольников}\\ \text{в 1 четверти}}}\right)=2$$

То есть площадь заштрихованной области S_0 равна: $S(z=0{,}5)=2.$

И наконец, положим например $z=0{,}8$. Наша система принимает вид:

$$|x-y|\le 1; \quad |x-0{,}8|\le 1; \quad |y-0{,}8|\le 1;$$
$$0\le x, y\le 6.$$

Графическое изображение совокупности точек, удовлетворяющих данной системе:



Площадь треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $S_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

Площадь оставшейся части фигуры голубого цвета без треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $S=10\cdot\frac{1}{25}=\frac{2}{5}$, тогда общая площадь фигуры голубого цвета: $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$.

Площадь, выделенной красным, фигуры S_0: $S_{S_0}=S(z=0{,}8)=4-\frac{7}{5}=\frac{13}{5}=2{,}6$.

Таким образом мы можем подвести промежуточный итог, что при $0\le z\le 1$ имеем:

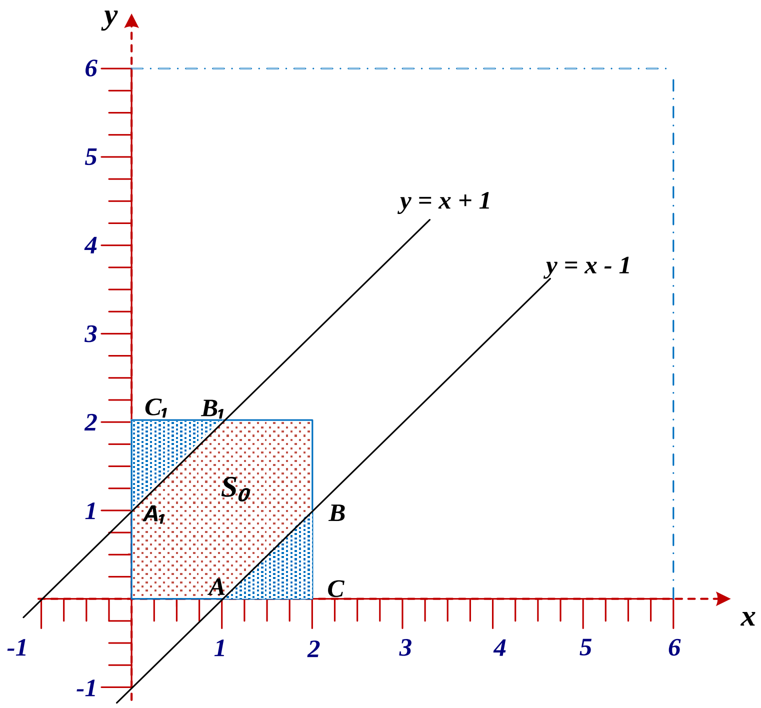
$$S(z=0)=2\cdot 0+1=1;$$

$$S(z=0{,}5)=2\cdot 0{,}5+1=2.$$

$$S(z=0{,}8)=2\cdot 0{,}8+1=2{,}6.$$

Можно проверить и для других z в указанном пределе, что всегда будет получаться результат в виде: $S(z)=2z+1$.

При $z=1$ площадь фигуры S_0 равна $S(z=1)=2\cdot 1+1=3$. Графически:



Из рисунка видно, что действительно площадь S_0 равна площади квадрата со стороной 2, минус площадь двух одинаковых треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $S = 4 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 3.$

2) Рассмотрим изменение значений переменной z от 1 до 5, то есть: $1 < z \le 5$.

Обозначим фигуру, получаемую в сечении при таких значениях z, как S_1.

Система неравенств, описывающая данную область на плоскости, для различных значений z:

При $z = 1{,}5$:

$$|x-y| \le 1;\ \ |x-1{,}5| \le 1;\ \ |y-1{,}5| \le 1;$$
$$0 \le x, y \le 6.$$

Или $|x-y| \le 1;\ 0{,}5 \le x \le 2{,}5;\ 0{,}5 \le y \le 2{,}5;$

При $z = 2$:

$$|x-y| \le 1;\ \ |x-2| \le 1;\ \ |y-2| \le 1;$$
$$0 \le x, y \le 6.$$

Или $|x-y| \le 1;\ 1 \le x \le 3;\ 1 \le y \le 3;$

При $z = 3$:

$$|x-y| \le 1;\ \ |x-3| \le 1;\ \ |y-3| \le 1;$$
$$0 \le x, y \le 6.$$

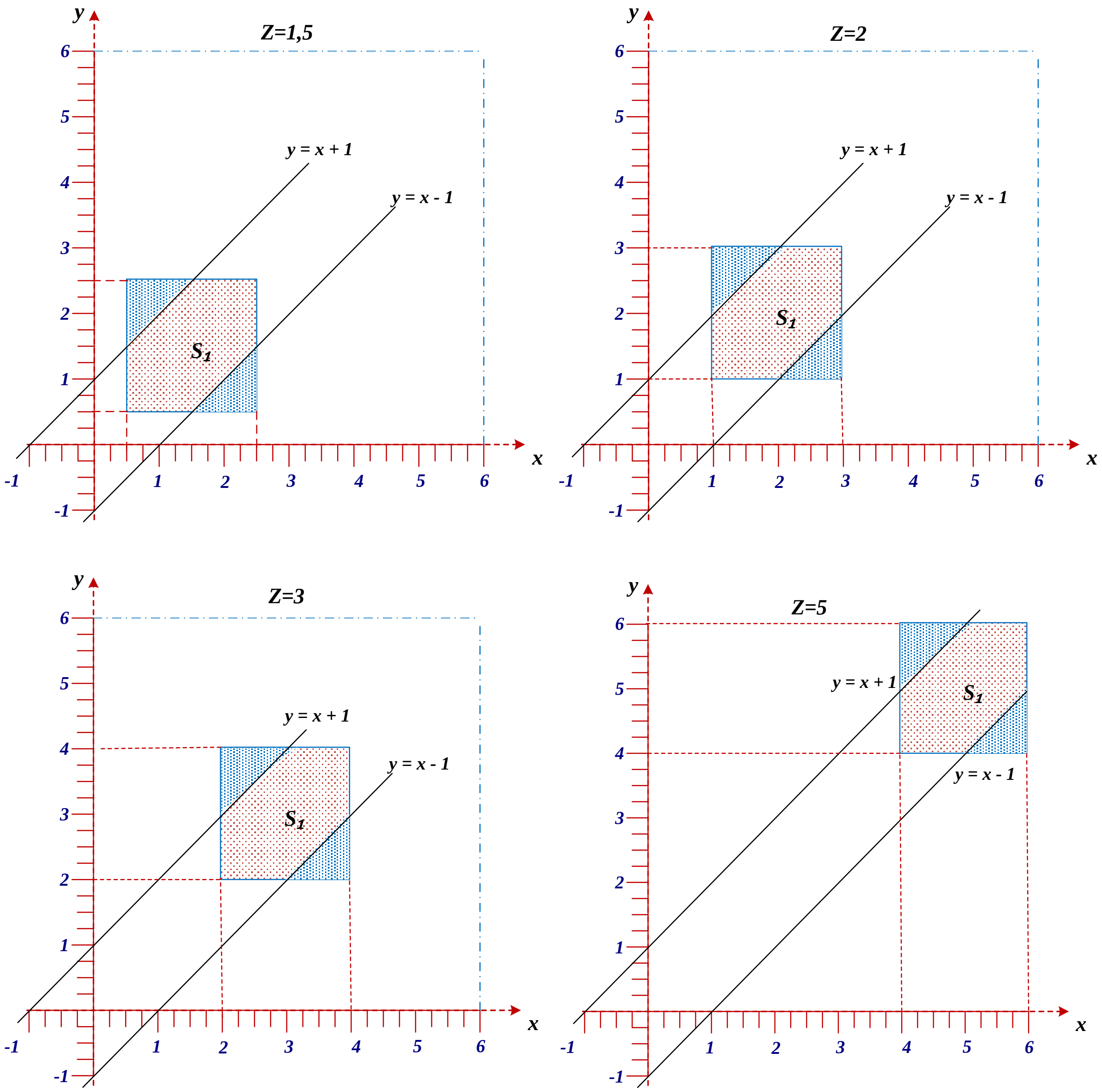
Или $|x-y|\le 1;\ 2\le x\le 4;\ 2\le y\le 4;$

При $z=5$:

$$|x-y|\le 1;\ |x-5|\le 1;\ |y-5|\le 1;$$
$$0\le x,y\le 6.$$

или $|x-y|\le 1;\ 4\le x\le 6;\ 4\le y\le 6.$

Изобразив графически данные системы неравенств для различных значений $z=1{,}5;\ z=2;\ z=3;\ z=5$, окончательно заключаем, что фигура, получаемая в различных сечениях абсолютно одинаковая и имеет площадь, равную площади S_0 при $z=1$. То есть площадь фигуры S_1, обозначим S_{S_1}, равна: $S(1\le z\le 5)=3.$

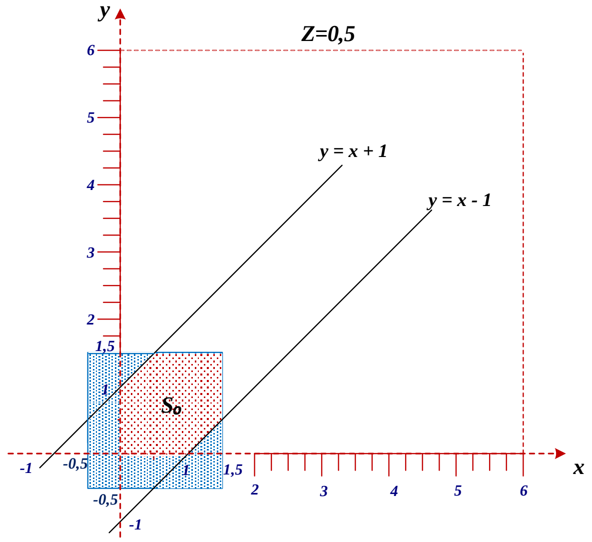


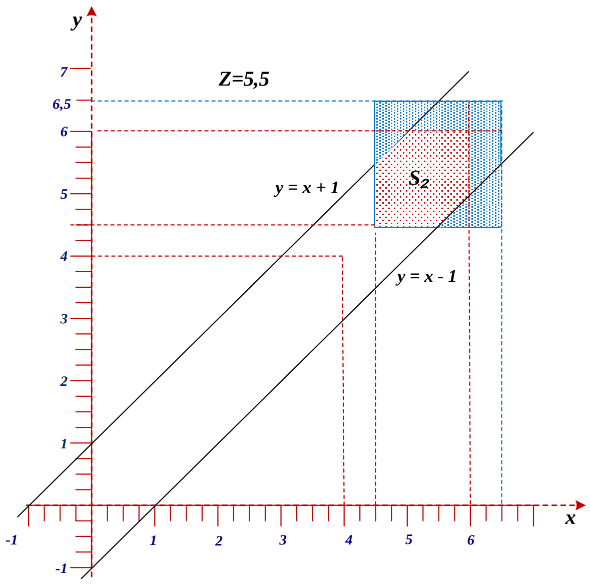
3) Рассмотрим ситуацию на верхнем крае области изменения переменной z: $5 < z \le 6$.

На самом деле объем фигуры, сечения которой мы рассматриваем, в пределах для $0 \le z \le 1$ и $5 \le z \le 6$ будет абсолютно одинаковый.

При $0 \le z \le 1$ площадь фигуры, получаемой в сечениях для разных z растёт от 1 до 3, а при изменении $5 < z \le 6$, наоборот площадь постепенно убывает от 3 до 1.

Рассмотрим графики:





Видно, что наш квадрат размерами 2 на 2, при $0 \le z \le 1$ как бы «въезжает» (как по рельсам) на прямых $y = x - 1$ и $y = x + 1$ в область $0 \le x, y \le 6$, а при $5 \le z \le 6$ «покидает» эту область $0 \le x, y \le 6$.

Система неравенств, например, для $z = 5{,}5$:

$$\begin{matrix} |x-y| \le 1;\ \ |x-5{,}5| \le 1;\ \ |y-5{,}5| \le 1; \\ 0 \le x, y \le 6. \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} y \le x+1;\ \ y \ge x-1;\ \ 4{,}5 \le x \le 6{,}5; \\ 0 \le x, y \le 6; \qquad 4{,}5 \le y \le 6{,}5. \end{matrix}$$

Площадь выделенной области S_2 равна:

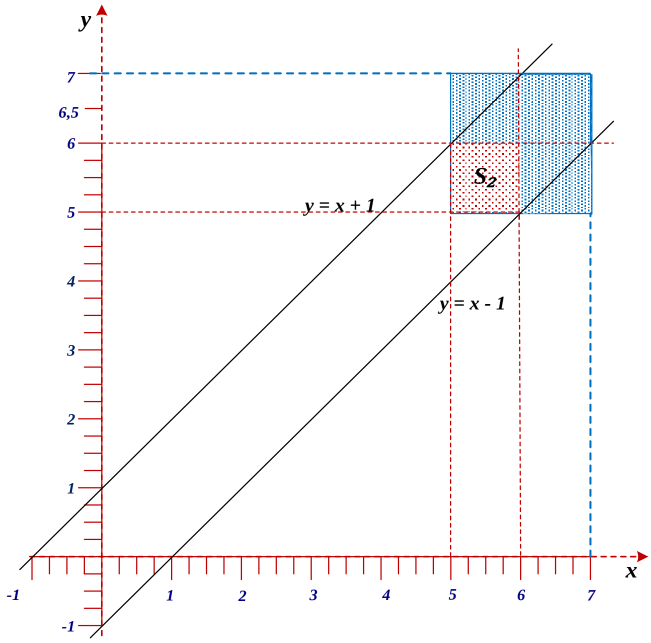
$$S_{S_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ранее при $z = 0{,}5$, мы получили аналогичный результат.

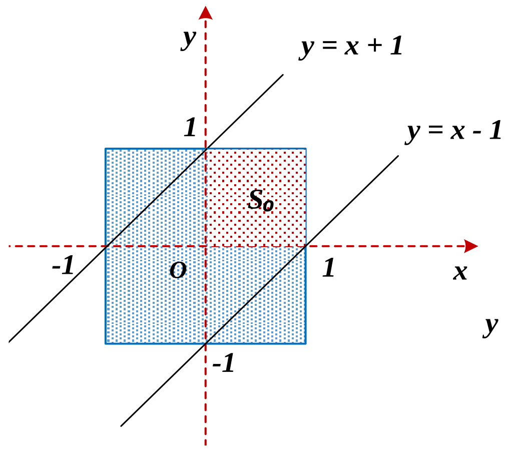
Для $z = 6$ система неравенств:

$$\begin{array}{ccc} |x-y|\le 1;\ \ |x-6|\le 1;\ \ |y-6|\le 1; & \text{или} & y\le x+1;\quad y\ge x-1;\quad 5\le x\le 7; \\ 0\le x,y\le 6. & & 0\le x,y\le 6;\qquad 5\le y\le 7. \end{array}$$

Множество точек плоскости, описываемой данной системой выглядит так:



Можно сравнить с рисунком для значения $z=0$:



Получим закономерность изменения площади $S(z)$, используя имеющиеся результаты:

$$S(z=5)=13-2\cdot 5=3;$$

$$S(z=5,2)=13-2\cdot 5,2=2,6;$$

$$S(z=5,5)=13-2\cdot 5,5=2;$$

$$S(z=6)=13-2\cdot 6=1.$$

Окончательно заключаем, что при $5\le z\le 6$ зависимость площади области S_2 от значения $z: S_{S_2}=S(5<z\le 6)=13-2\cdot z$.

4) Теперь, зная зависимость $S(z)=\begin{cases} 2z+1, & 0\le z\le 1 \\ 3, & 1<z\le 5 \\ 13-2\cdot z, & 5<z\le 6 \end{cases}$, можем проинтегрировать по переменной z и получить объём фигуры, соответствующей первоначальной системе неравенств (сечения которой мы и рассматривали):

$$|x-y|\le 1;\quad |x-z|\le 1;\quad |y-z|\le 1;$$
$$0\le x,y,z\le 6. \qquad (*)$$

$$V_{фигуры}=\int_0^1 (2z+1)\,dz+\int_1^5 3dz+\int_5^6 (13-2z)\,dz=\left(z^2+z\right)\Big|_0^1+\left(3z\right)\Big|_1^5+\left(13z-z^2\right)\Big|_5^6=2+(15-3)+2=16$$

Окончательно, для того, чтобы найти вероятность встречи трёх человек, необходимо рассмотреть отношение мер куба и фигуры. Таким образом вероятность события A:

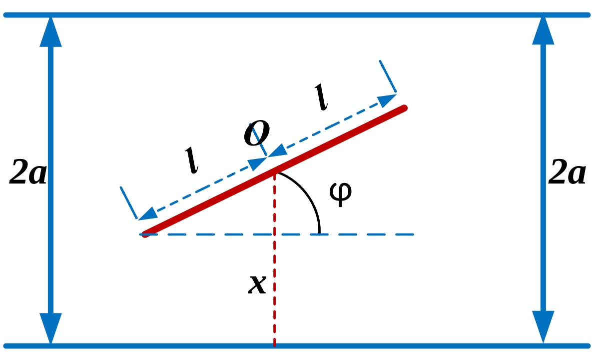
$$P(A)=\frac{16}{216}=\frac{2}{27}\approx 0{,}074.$$

__Пример 4.11.__ *Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии* $2a$. *На плоскость наудачу бросают иглу длины* $2l$, $l<a$. *Найти вероятность того, что игла пересечёт какую-либо прямую (**Задача Бюффона**).*

__Решение:__ ***Опыт:*** На разграфлённую параллельными прямыми плоскость, наудачу бросают иглу.

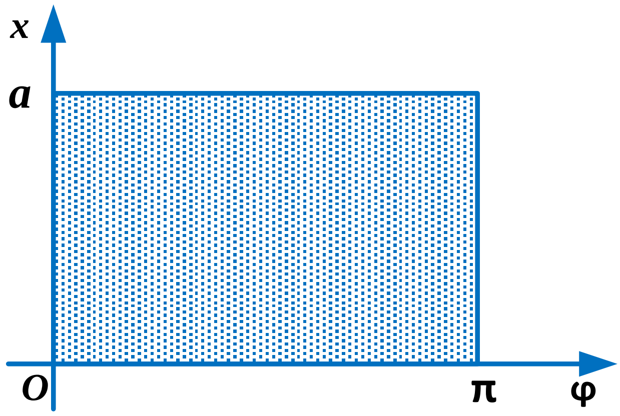
При таком опыте центр иглы (обозначим O) упадёт на «виртуальный» отрезок длины $2a$, а угол между иглой и прямой может принять с одинаковой вероятностью значение в промежутке $[0,\pi]$. На величину угла никак не влияет расстояние от центра иглы до прямой.

Обозначим через $x\in[0,a]-$ расстояние от середины иглы до ближайшей прямой, а через $\varphi\in[0,\pi]$ угол между прямой и иглой:

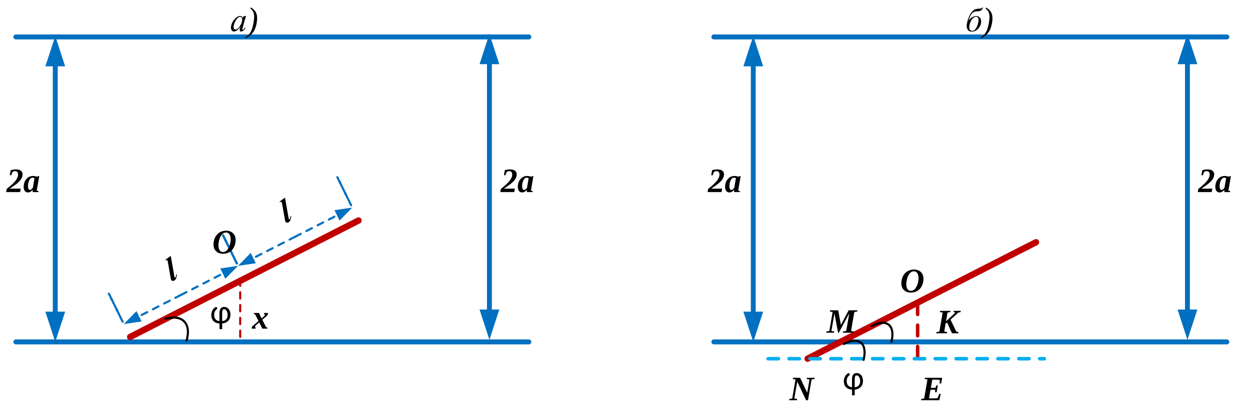


Поскольку возможные положения иглы на плоскости полностью определяются положением середины иглы и углом поворота иглы относительно какого-либо направления. Причём две эти переменные (положение середины иглы и угол поворота) меняются независимо друг от друга.

Можем множество возможных положений иглы Ω, представить в виде прямоугольника: $\Omega=\{(\varphi,x):\varphi\in[0,\pi],x\in[0,a]\}$.



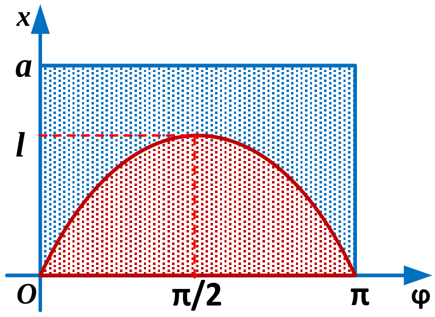
В каком случае игла пересечет прямую? Рассмотрим рисунки:



В случае *а*) из прямоугольного треугольника очевидно, что $x=l\sin\varphi$.

В *б*) видим, что игла пересекла параллельную прямую в точке M и в этом случае $|OK|=x<|OE|=|ON|\sin\varphi=l\sin\varphi$.

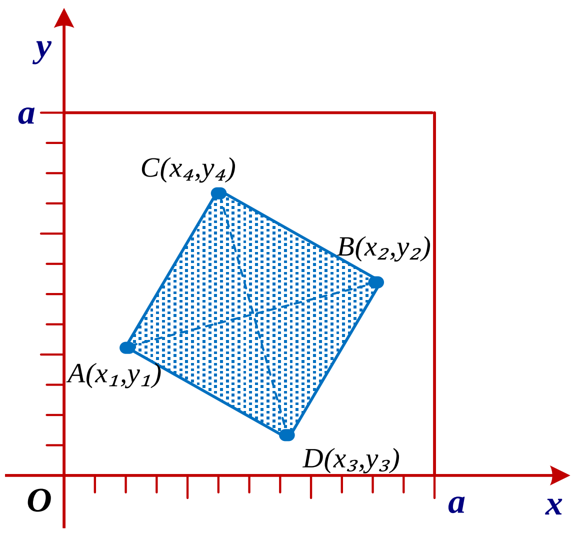
Таким образом путём нехитрых рассуждений заключаем, что игла пересекает ближайшую прямую, если координаты наудачу выбранной точки (φ,x) удовлетворяют неравенству: $x<l\sin\varphi$. Изобразим на рисунке множество точек плоскости, удовлетворяющих данному неравенству:



Найдём площадь заштрихованной красным цветом области, соответствующей событию $A=\{$ игла пересечёт какую-либо прямую $\}$: $S_A = l\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 2l$. Тогда вероятность события A равна: $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{2l}{\pi a}$.

<u>Пример 4.12.</u> *В квадрат наудачу брошены точки А и В. Найти вероятность того, что квадрат с диагональю АВ целиком содержится в исходном квадрате.*

<u>Решение:</u> Обозначим сторону исходного квадрата через a. Зафиксируем внутри этого квадрата некоторую точку A с координатами (x_1, y_1) и определим множество всех возможных исходов бросания точки $B(x_2, y_2)$ таких, что квадрат с диагональю AB не выйдет за пределы исходного квадрата.



Из школьной математики известно, что координаты квадрата $ABCD$ связаны соотношениями:

$$x_3 + x_4 = x_1 + x_2;$$
$$x_3 - x_4 = y_2 - y_1;$$
$$y_3 + y_4 = y_1 + y_2;$$
$$y_3 - y_4 = x_2 - x_1.$$

Откуда получаем:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_2 - y_1);\\
x_4 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2);\\
y_3 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + x_2 - x_1);\\
y_4 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + x_1 - x_2).
\end{aligned} \qquad (*)$$

Для того, чтобы квадрат с диагональю AB целиком содержался в исходном квадрате, должно выполняться:

$$\begin{cases}
0 \le x_3 \le a;\\
0 \le y_3 \le a;\\
0 \le x_4 \le a;\\
0 \le y_4 \le a.
\end{cases} \qquad (**)$$

То есть точки C и D должны также находиться внутри квадрата со стороной a.

Подставляя соотношения $(*)$ в систему неравенств $(**)$, получаем:

$$\begin{cases}
0 \le x_1 + x_2 + y_2 - y_1 \le 2a;\\
0 \le y_1 + y_2 + x_2 - x_1 \le 2a;\\
0 \le x_1 + x_2 + y_1 - y_2 \le 2a;\\
0 \le y_1 + y_2 + x_1 - x_2 \le 2a.
\end{cases} \qquad (***)$$

Переобозначим для удобства координаты точки $A(x_A, y_A)$.

Нам необходимо определить множество всех возможных исходов бросания точки $B(x, y)$ таких, что квадрат с диагональю AB не выйдет за пределы исходного квадрата.

Перепишем систему неравенств, используя вновь введённые обозначения:

$$\begin{cases}
0 \le x_A + x + y - y_A \le 2a;\\
0 \le y_A + y + x - x_A \le 2a;\\
0 \le x_A + x + y_A - y \le 2a;\\
0 \le y_A + y + x_A - x \le 2a.
\end{cases}$$

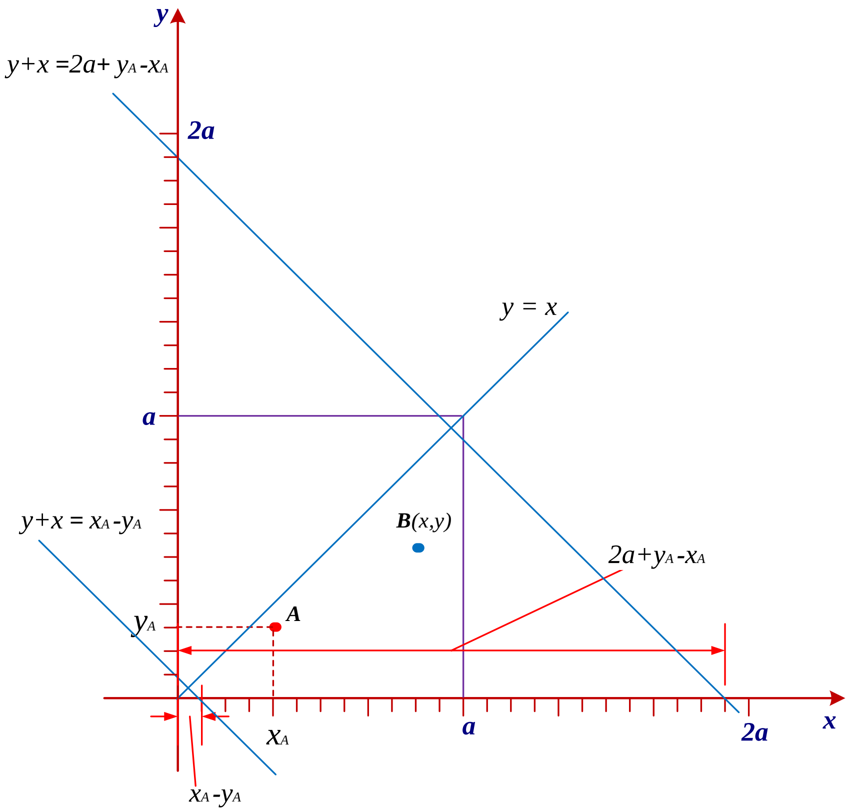
Или так:

$$\begin{cases} y_A - x_A \le y + x \le 2a + (y_A - x_A); \\ -(y_A - x_A) \le y + x \le 2a - (y_A - x_A); \\ y_A + x_A - 2a \le y - x \le y_A + x_A; \\ -(y_A + x_A) \le y - x \le 2a - (y_A + x_A). \end{cases}$$

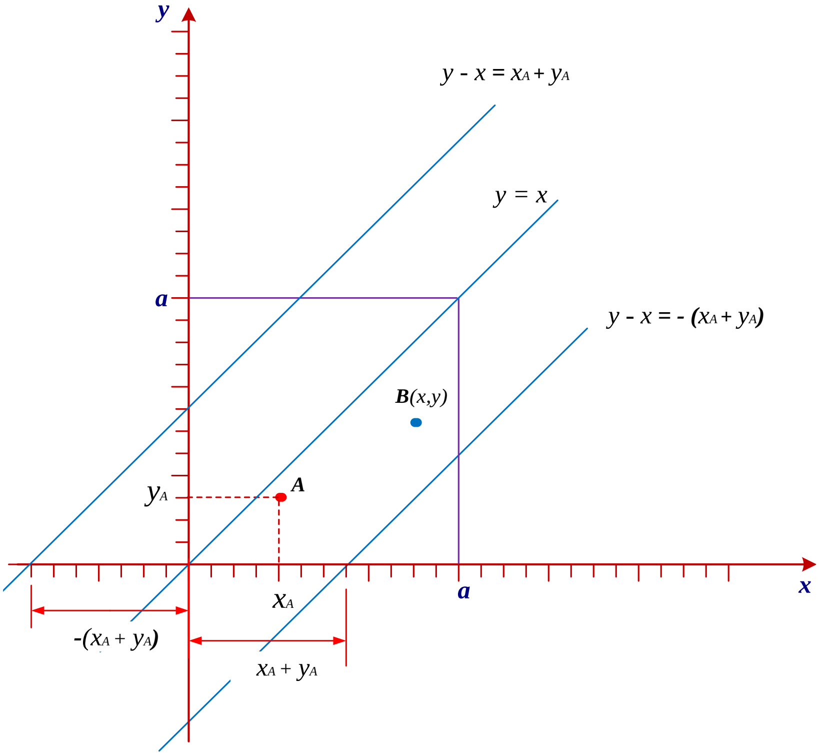
<u>Рассмотрим вначале случай,</u> когда $y_A \le x_A$. Тогда система неравенств, описывающая множество всех точек B, таких, что квадрат с диагональю AB не выходит за пределы исходного квадрата, выглядит так:

$$\begin{cases} -(y_A - x_A) \le y + x \le 2a + (y_A - x_A); \\ -(y_A + x_A) \le y - x \le y_A + x_A. \end{cases}$$

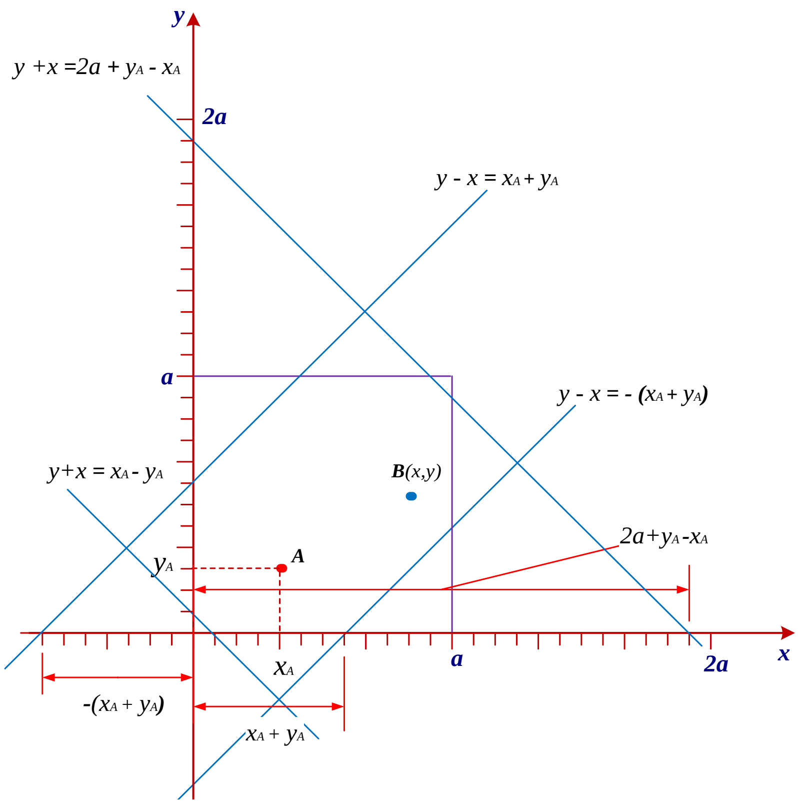
Получим ее графическое изображение. Прямая $y + x = -(y_A - x_A)$ отсекает от координатного угла отрезки величиной $(x_A - y_A)$, а прямая $y + x = 2a + (y_A - x_A)$ отсекает от первого координатного угла отрезки величиной $(2a + y_A - x_A)$.



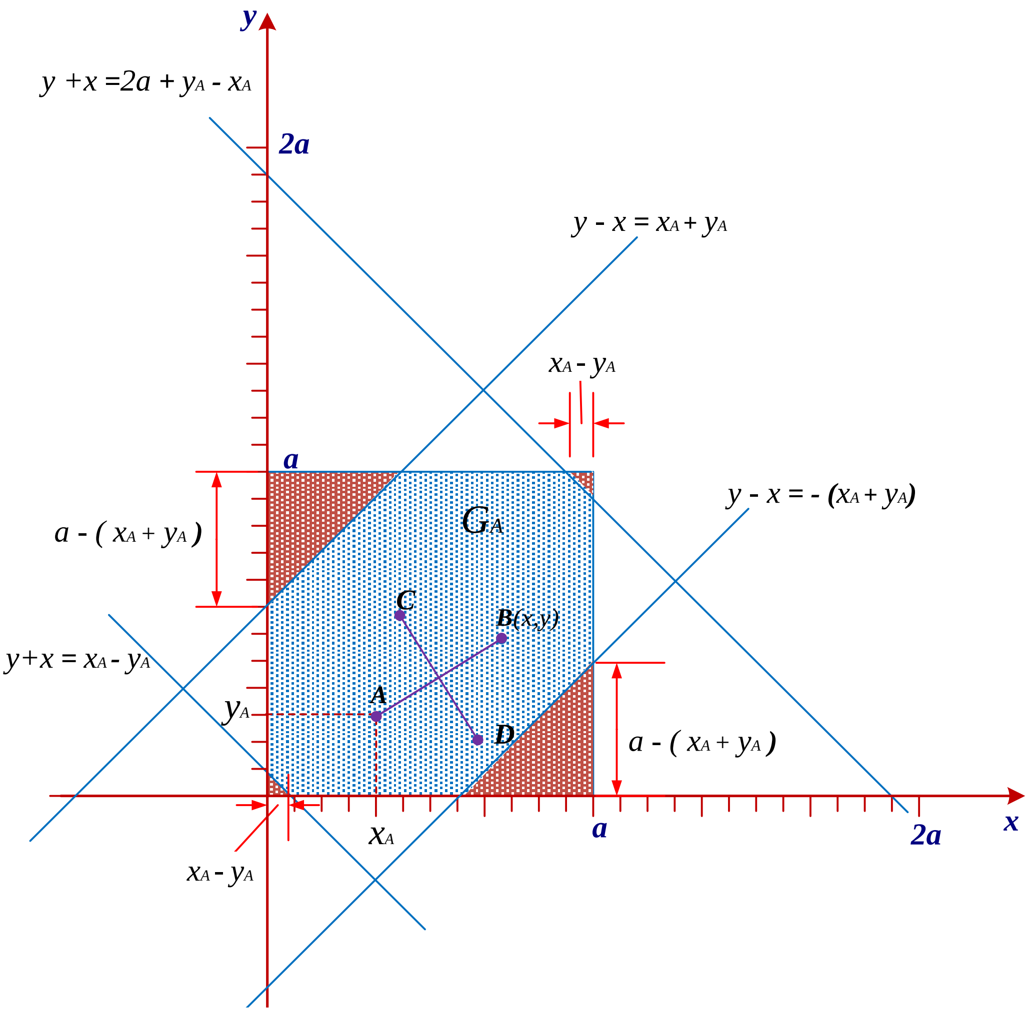
Прямая $y - x = y_A + x_A$ отсекает от второго координатного угла отрезок величиной $(y_A + x_A)$. Параллельная ей прямая $y - x = -(y_A + x_A)$, отсекает от четвёртого координатного угла отрезки равные величине $y_A + x_A$. Графически это имеет вид:



Объединив два рисунка, получим графическое изображение множества точек плоскости, описываемых системой неравенств $\begin{cases} -\left(y_A - x_A\right) \leq y + x \leq 2a + \left(y_A - x_A\right) \\ -\left(y_A + x_A\right) \leq y - x \leq y_A + x_A \end{cases}$:



Нам необходимо найти площадь фигуры G_A, заштрихованной голубым цветом:



Суммарная площадь четырёх прямоугольных треугольников, выделенных красным цветом:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x_A-y_A)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(a-x_A-y_A)^2=2y_A^2+2x_A^2+a^2-2ax_A-2ay_A$$

Тогда площадь фигуры G_A:

$$S_A=a^2-2y_A^2-2x_A^2-a^2+2ax_A+2ay_A=2ax_A+2ay_A-2y_A^2-2x_A^2$$

<u>Замечание:</u> Исходя из соображений симметрии, мы не будем рассматривать случай, когда $y_A \ge x_A$, потому что очевидно получим тот же результат для точки A, расположенной в этой части квадрата.

Итак, мы определили для ***<u>фиксированной точки</u>*** $A(x_A, y_A)$ площадь фигуры G_A - геометрического места всех точек B, при которых выполнено заданное условие: квадрат с диагональю AB не выйдет за пределы исходного квадрата.

Обозначим события:

$A=\{$ точка A имеет координаты (x_A, y_A) $\}$;

$B=\{$ квадрат с диагональю AB не выходит за пределы исходного квадрата $\}$;

$\Omega=\{$ попадание в квадрат со стороной $a\}$.

Тогда условная вероятность наступления события B, при условии, что произошло событие A:

$$P(B|A)=\frac{S_{G_A}}{S_\Omega}=\frac{2ax_A+2ay_A-2y_A^2-2x_A^2}{a^2}$$

Мы нашли вероятность того, что случайно брошенная в квадрат точка B попадет в область G_A для ***<u>фиксированной точки</u>*** $A(x_A, y_A)$.

Координаты точки A: x_A и y_A- независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0,a]$, плотности распределения которых:

$$p_{x_A}(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & x\in[0,a]\\ 0, & else\end{cases} \qquad \text{и} \qquad p_{y_A}(y)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & y\in[0,a]\\ 0, & else\end{cases}$$

Воспользуемся обобщением формулы полной вероятности: $P(B)=\sum P(B|A)\cdot P(A)$, точнее ее непрерывным аналогом:

$$P(B)=\int_0^a p(x_A)dx_A\int_0^a p(y_A)\cdot P(B|A)dy_A=\int_0^a\frac{1}{a}dx_A\int_0^a\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{2ax_A+2ay_A-2y_A^2-2x_A^2}{a^2}\right)dy_A=$$

$$=\frac{2}{a^4}\int_0^a dx_A\int_0^a\left(ax_A+ay_A-y_A^2-x_A^2\right)dy_A=\frac{2}{a^4}\int_0^a dx_A\left(ax_Ay_A+a\frac{y_A^2}{2}-\frac{y_A^3}{3}-x_A^2y_A\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{2}{a^4}\int_0^a\left(a^2x_A+\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}-ax_A^2\right)dx_A=\frac{2}{a^4}\left(a^2\frac{x_A^2}{2}+\frac{a^3}{6}x_A-a\frac{x_A^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2}{a^4}\left(\frac{a^4}{2}+\frac{a^4}{6}-\frac{a^4}{3}\right)=\frac{2}{a^4}\cdot\frac{2a^4}{6}=\frac{2}{3}$$

Таким образом, вероятность того, что квадрат с диагональю AB целиком содержится в исходном квадрате, равна $2/3$.

Задачи по теме 4:

4.1. Поезда в метро идут в данном направлении с интервалом 1 мин. Какова вероятность того, что пассажиру придётся ждать поезда, не больше 20 сек.

4.2. На отрезок AB длины α наудачу нанесена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков AC и CB имеет длину, большую чем $\alpha/6$?

4.3. На отрезке [0, 5] случайно выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от нее до правого конца отрезка не превосходит 1,6 единиц.

4.4. Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого часа нужно преодолеть этот опасный участок шоссе. С какой вероятностью можно избежать налёта, если время преодоления опасного участка 5 минут?

4.5. На отрезке OA длиной 8 см наудачу выбрана точка B. Найти вероятность того, что отрезки OB и BA имеют длину, большую 2см.

4.6. В круг радиуса R вписаны: а) квадрат; б) правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в круг, окажется внутри вписанной области.

4.7. Минное заграждение состоит из мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 м одна от другой. Ширина корабля 20 м. Какова вероятность того, что корабль благополучно пройдёт через заграждение?

4.8. Испытание состоит в выборе на отрезке AB длиной l двух случайно выбранных точек C и D. Найти вероятность того, что средняя часть отрезка меньше левой части.

4.9. Пусть пол выложен: 1) треугольной, 2) четырёхугольной плиткой правильной формы со стороной 20 см, и на него с большой высоты падает монета радиуса 1 см. Найти вероятность того, что монета после падения будет полностью лежать на одной из плиток.

4.10. В прямоугольник со сторонами 2 и 4 случайно бросают точку. Найти вероятность того, что расстояние ее до любой вершины прямоугольника больше 1.

4.11. В квадрат со стороной 1 случайно брошена точка. Пусть $x > 0$. Найти вероятность того расстояние от точки до каждой из диагоналей квадрата не превосходит x.

4.12. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что: а) точка, брошенная внутрь круга, попадёт в квадрат; б) из пяти брошенных точек одна окажется внутри квадрата и по одной внутри сегментов.

4.13. Кусок проволоки длиной 20 см был согнут наудачу в выбранной точке. После этого, перегнув проволоку ещё в двух местах, сделали прямоугольную рамку. Найти вероятность того, что площадь прямоугольника не превосходит 21 см.

4.14. На землю параллельно плоскости экватора падает поток метеоритов. Найти вероятность того, что упавший метеор попадёт между 15° и 45° северной широты.

4.15. Спутник Земли движется по орбите, заключённой между 60° северной и 60° южной широты. Считая падение спутника в любую точку земной поверхности в указанной полосе равновозможным, найти вероятность его падения выше 30° северной широты.

4.16. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Моменты времени прихода обоих пароходов независимы и равновозможны в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – 1 час, а второго – 2 часа.

4.17. На отрезке $[0,3]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти два числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 3y \le 3x$.

4.18. Наудачу выбирают два числа из промежутка $[0,1]$. Какова вероятность того, что их сумма заключена между $1/4$ и 1?

4.19. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $(x+y)$ не превышает единицы, а произведение $(x \cdot y)$ не меньше $0{,}09$.

4.20. Две точки a и b выбираются наудачу на отрезке $[-1,1]$. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2+ax+b=0$ имеет действительные корни.

4.21. На окружность радиуса R наудачу поставлены три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник $ABC-$ остроугольный.

4.22. Расстояние от пункта A до пункта B пешеход проходит за 20 минут, а автобус - за 2 минуты. Интервал движения автобусов 30 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из A в B. Какова вероятность

4.23. того, что его в пути догонит автобус?

4.24. На плоскость, разграфлённую параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние a, брошена монета радиусом r, $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одну из проведённых прямых.

4.25. На окружности радиуса R наудачу выбираются 2 точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды больше $R\sqrt{3}$.

4.26. В круге радиуса R выбирается точка. Эта точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведённому через неё диаметру. Найти вероятность того, что полученная хорда превзойдёт по длине $R\sqrt{3}$.

Тема 5. Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

При проведении случайных опытов часто появляется дополнительная информация, которая существенно влияет на шансы наступления событий, связанных с этим опытом. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие эти соображения.

***Пример 5.1*: Опыт:** *Подбрасывается игральный кубик 1 раз.* Введем события :

$$A = \{\text{ выпало одно очко }\};\ B = \{\text{ выпало три очка }\};$$

Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда безусловная вероятность события A равна $P(A) = 1/6$; а условная $P(A \setminus B) = 0$.

Действительно, если при подбрасывании кубика выпадет 3 очка (произойдет событие B), то выпасть одно очко (появится событие A) в том же самом подбрасывании уже не может, поэтому вероятность появления события при условии появления события B равна 0.

***Пример 5.2:* Опыт:** *Подбрасывается игральный кубик 2 раза.* Введём события:

$A = \{$ сумма выпавших очков равна 10 $\}$; $B = \{$ при первом броске выпало 5 очков $\}$

Оценим вероятности данных событий. Всего исходов в данном опыте $N = 36$, благоприятствующие A: $(4,6),(6,4),(5,5)$, благоприятствующие B: $(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$, т.е. безусловные вероятности равны: $P(A) = 3/36 = 1/12$, $P(B) = 6/36 = 1/6$. Условная вероятность события $P(A \setminus B) = 1/36$. Почему ? Если выпала пятёрка при первом броске, то только в одном случае, а именно $(5,5)$, сумма будет равна 10.

Т.е. наступление события B понижает шансы A.

***Пример 5.3*: Опыт:** *Подбрасывается игральный кубик 1 раз.* Введём события:

$$A = \{\text{ выпало чётное число очков }\} = \{2, 4, 6\},$$

$$B = \{\text{ выпало число очков, больше, чем 3 }\} = \{4, 5, 6\}.$$

Общее число исходов данного опыта $N = 6$. Поэтому безусловные вероятности обоих событий: $P(A) = 3/6 = 1/2$, $P(B) = 3/6 = 1/2$.

Оценим условные вероятности событий: $P(A \setminus B) = 2/3$, $P(B \setminus A) = 2/3$.

Из трёх случаев, к которым сводится событие $B = \{4,5,6\}$, событию $A = \{2,4,6\}$ будут благоприятствовать два; поэтому если считать наступившим событие B, то шансы события A будут $2/3$. Таким образом наступление события B повышает шансы наступления события A. Аналогичные рассуждения и заключение для условной вероятности события B: наступление события A повышает шансы наступления события B.

Таким образом из приведённых примеров хорошо видно, что изменение условий ведёт к изменению вероятности одного и того же события.

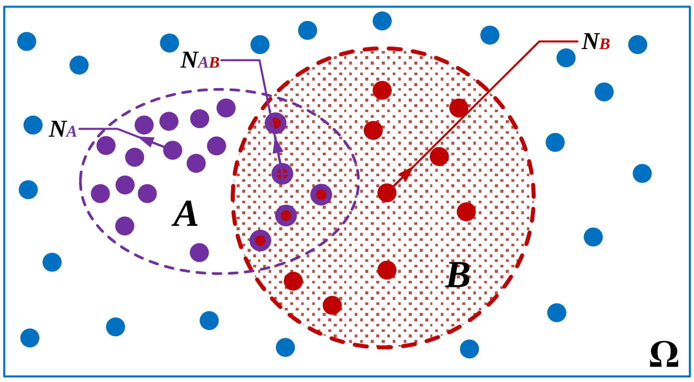
Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие ***условной вероятности***.

Условная вероятность

Определение 1: Пусть A и B – два случайных события по отношению к некоторому пространству Ω, причём $P(B) \neq 0$. Равенство $P(A \setminus B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ определяет вероятность события A при условии, что наступило событие B, или ***условную вероятность*** события A.

Смысл $P(A \setminus B)$ как вероятности события A при условии, что наступило событие B, в следующих рассуждениях: пусть опыт имеет N равновероятных исходов, из которых N_A – благоприятны событию A, N_B – событию B и N_{AB} событию $A \cdot B$.

Если известно, что в результате опыта наступило событие B, то число возможных исходов сокращается до N_B, из них ровно N_{AB} исходов будут такими, при которых наступает и событие A.



Таким образом, вероятность A при условии наступления B будет, согласно классическому способу подсчёта вероятности, равна отношению $\dfrac{N_{AB}}{N_B}$ или $\dfrac{N_{AB}}{N_B} = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Теорема умножения вероятностей

Из равенства $P(A \backslash B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, являющегося определением условной вероятности, следует:

$$P(A \cdot B) = P(A \backslash B) \cdot P(B);$$

То есть вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из этих событий при условии другого, умноженной на вероятность самого условия.

Запишем обобщение этого утверждения для n событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ в виде теоремы:

<u>Теорема 1:</u> ***<u>(теорема умножения вероятностей).</u>*** Вероятность произведения произвольного числа n событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ равна:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1});$$

***<u>Пример 5.4</u>*:** *У нас имеется 4 карточки, на каждой из которых наклеена одна из букв: Д, О, М, А. Карточки перемешиваются и выкладываются по одной на стол. Какова вероятность того, что при этом появится слово «МОДА».*

<u>Решение:</u> ***Опыт***: извлекается карточка-буква. Необходимо найти вероятность события $A = \{$ сложилось слово «*МОДА*» $\}$. Обозначим события:

$$A_1 = \{\text{ достали букву } M \}; \; A_2 = \{\text{ достали букву } O \};$$

$$A_3 = \{\text{ достали букву } Д \}; \; A_4 = \{\text{ достали букву } A \}.$$

Очевидно, что слово «*МОДА*» может появиться в результате одновременного наступления событий и A_1, и A_2, и A_3, и A_4, т.е. $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$.

Найдём вероятность данного события, с использованием теоремы умножения:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$

$P(A_1) = 1/4$, (всего 4 буквы из них одна *М*), $P(A_2 | A_1) = 1/3$, (после наступления события A_1, осталось 3 буквы, из них одна *О*), $P(A_3 | A_1 \cdot A_2) = 1/2$, (наступили и A_1, и A_2, осталось 2 буквы, одна из них *Д*), $P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 1$, (наступило событие $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, после этого осталась только одна и нужная буква *А*, т.е. событие A_4 становится достоверным).

Итак вероятность события $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 1/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/24$$

Независимые события

Ранее мы убедились на примерах, что числа $P(A)$ и $P(A \setminus B)$ вообще говоря, различны. В связи с этим введём следующее определение:

Определение 2: ***С***обытие A не зависит от B, если выполняется равенство: $P(A \setminus B) = P(A)$.

Таким образом, A не зависит от B, если наступление B не оказывает влияния на вероятность A (или, говоря проще, наступление B не меняет шансов A).

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий

Теорема 2: Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B);$$

Очевидно, что в случае независимости двух событий A и B, выполняется $P(A \setminus B) = P(A)$ поэтому из равенства $P(A \cdot B) = P(A \setminus B) \cdot P(B)$ следует, что $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Независимость событий всегда взаимна, если A не зависит от B, то и B также не зависит от A.

Теорема умножения для произвольного числа n независимых событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$

Теорема 3: Вероятность произведения произвольного числа n ***независимых*** событий: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ равна:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Пусть имеется n событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Определение 3: Если для любых двух событий A_i и A_j $\left(1 \le i, j \le n;\ i \ne j\right)$ выполняется $P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, то события $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***попарно независимыми событиями***.

Определение 4: События $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если для любой группы индексов $1 \le i_1 < i_2 < i_3 < .... < i_m \le n$ выполняется равенство:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} P\left(A_{i_k}\right).$$

Например, три события A_1, A_2, A_3 будут независимы в совокупности, если они попарно независимы и выполняется равенство:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Четыре события A_1, A_2, A_3, A_4 будут независимы в совокупности, если любые три из них независимы в совокупности:

$$A_1, A_2, A_3,\ A_1, A_2, A_4,\ A_2, A_3, A_4,\ A_1, A_3, A_4$$

И выполняется $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)$.

Пример 5.5. *Привести пример событий* A, B, C *попарно независимых, но не являющихся независимыми в совокупности.*

Решение: ***Опыт:*** Монету подбрасывают дважды. Тогда пространство элементарных исходов $\Omega = \{ГГ, РР, РГ, ГР\}$.

Рассмотрим события:

$$A = \{ \text{ на первой монете выпал герб } \};$$

$$B = \{ \text{ на второй монете выпал герб } \};$$

$$C = \{ \text{ на обеих монетах выпали или 2 герба, или 2 решки } \}.$$

Очевидно $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим событие $A \cdot B = \{$ и на первой, и на второй монете выпали гербы $\}$, вероятность этого события $P(A \cdot B) = 1/4$, всего исходов 4, один из них благоприятствует $(A \cdot B)$. То есть A и B независимы, так как выполняется:

$$P(A \cdot B) = 1/4 = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2;$$

Рассмотрим событие $A \cdot C = \{$ на первой выпал герб, и на обеих монетах выпали или 2 герба, или 2 решки $\} = P\{ГГ\}$, т.е. $P(A \cdot C) = 1/4$.

$P(A \cdot C) = 1/4 = P(A) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 -$ выполняется.

Рассмотрим событие $B\cdot C=\{$ на второй монете выпал герб и на первой, и на второй монетах выпали или 2 герба, или 2 решки $\}=P\{ГГ\}$; $P(B\cdot C)=1/4$.

Равенство $P(B\cdot C)=1/4=P(B)\cdot P(C)=1/2\cdot 1/2=1/4-$ выполняется.

Из полученного ***заключаем***, что события A,B,C попарно независимы.

Для независимости в совокупности должно выполняться, кроме попарной независимости:

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Событие $A\cdot B\cdot C=\{$ и на первой монете выпал орёл, и на второй монете выпал орёл, и на обеих монетах выпали или 2 орла, или 2 решки $\}=\{ГГ\}$.

Его вероятность: $P(A\cdot B\cdot C)=P(ГГ)=1/4$.

Тогда как $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=1/2\cdot 1/2\cdot 1/2=1/8$.

То есть $P(A\cdot B\cdot C)=1/4\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=1/8$, поэтому события не независимы в совокупности.

Теорема сложения вероятностей

***Теорема сложения вероятностей*.** $\forall\ A,B\in F$ вероятность суммы равна:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

***Обобщённая теорема сложения вероятностей*.** Для любых случайных событий $A_1,A_2,A_3,....,A_n\in F$ выполняется равенство:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cdot A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cdot A_j\cdot A_k)-.....+(-1)^{n-1}P(A_1\cdot A_2\cdot.....\cdot A_n)$$

Определение 5. События A_i,A_j называются ***несовместными***, если выполняется:

$$A_i\cdot A_j=\varnothing,\ i\neq j.$$

Просто говоря когда наступление одного события исключает появление другого, события являются несовместными.

Для несовместных событий $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ теорема сложения вероятностей принимает простой вид:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)$$

Примеры решения задач по теме 5:

<u>Пример 5.6.</u> *Для двух случайных событий* A, B *известны вероятности:* $P(A) = 0{,}8$; $P(A + B) = 0{,}9$; $P(B/A) = 0{,}6$. *Найти* $P(B), P(A\,/\,B), P(A \cdot B)$ *и выяснить, зависимы ли события* A и B?

<u>Решение:</u> Из формулы $P(B/A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$; известно, что $P(A) = 0{,}8$, $P(B/A) = 0{,}6$, откуда находим $P(B \cdot A) = P(A \cdot B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$. По теореме сложения вероятность суммы двух событий равна: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Тогда из условия задачи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + P(B) - 0{,}48 = P(B) + 0{,}32;$$

Известно, что $P(A + B) = 0{,}9$; тогда $P(B) = 0{,}9 - 0{,}32 = 0{,}58$.

Можем найти условную вероятность события A : $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}48}{0{,}58} \approx 0{,}828$.

Из полученных результатов заключаем, что события A и B зависимы, т.к. $P(A/B) \neq P(A)$;

$P(B/A) \neq P(B)$ и, наконец $P(A \cdot B) = 0{,}48 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}58 = 0{,}464$**.**

<u>Пример 5.7.</u> Монету бросают 3 раза. Зависимы ли события:

$$A = \{\text{ при первом бросании выпал герб }\} \text{ и } B = \{\text{ решка выпала хотя бы 1 раз }\}?$$

<u>Решение:</u>

1) Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся теоремой умножения. Согласно которой для двух независимых событий выполняется:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B);$$

2) Найдём вероятности $P(A), P(B), P(A \cdot B)$, используя классическое определение вероятности.

Пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{\; ГГГ, РРР, ГРР, ГРГ, ГГР, РГГ, РРГ, РГР \;\},$$

т.е. общее количество равновозможных исходов в опыте $N = 8$. Найдём благоприятствующие нашим событиям A и B исходы: $M_A = 4$, $M_B = 7$, $M_{A \cdot B} = 3$.

Событие $A \cdot B$:

$A \cdot B = \{\text{ и при первом бросании выпал герб, и решка выпала хотя бы 1 раз }\} = \{ГРР, ГГР, ГРГ\}$.

Теперь можем найти вероятности: $P(A) = 4/8 = 1/2$, $P(B) = 7/8$, $P(A \cdot B) = 3/8$.

Подставив найденные вероятности в: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, получаем:

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}.$$

3) Таким образом указанные события A и B зависимы.

<u>Пример 5.8.</u> *Из полной колоды карт (52) карты вынимают наугад сразу 3 карты. Найти вероятность того, что этими картами будут: а) тройка, семёрка, дама б) три туза?*

<u>Решение:</u> Опыт: Из 52 карт извлекают 3.

Ранее эта задача была решена с использованием классического определения вероятности. Рассмотрим решение с использованием теорем умножения и сложения.

а) Введем события: $K = \{$ достали тройку, семерку и даму $\}$;

$A = \{$ достали тройку $\}$; $B = \{$ достали семерку $\}$; $C = \{$ достали даму $\}$.

Найдем вероятность события $K = A \cdot B \cdot C = \{$ достали и 3-ку, и 7-ку, и даму $\}$. События $A, B, C -$ зависимые. Поэтому по теореме умножения для зависимых событий:

$$P(K) = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B \setminus A) \cdot P(C \setminus A \cdot B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{64}{132600} = \frac{8}{16575};$$

Мы нашли вероятность того, что достали три карты в такой последовательности: сначала 3-ку, затем 7-ку и последней даму, т.е. наступило событие $(A \cdot B \cdot C)$. Но нам не важна последовательность выбора 3-х карт, т.е. какие наступают события $A \cdot B \cdot C$, или $B \cdot C \cdot A$, или $C \cdot B \cdot A$, или $A \cdot C \cdot B$, или $B \cdot A \cdot C$, или $C \cdot A \cdot B$. Все эти события благоприятствуют тому, что мы достали конкретный набор: 3, 7, дама, т.е благоприятствуют событию K. Поэтому:

$$P(K) = P(A \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot B + B \cdot C \cdot A + B \cdot A \cdot C + C \cdot B \cdot A + C \cdot A \cdot B)$$

В силу несовместности всех шести событий, можем по теореме сложения для несовместных событий записать:

$$P(K) = P(A \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot B + B \cdot C \cdot A + B \cdot A \cdot C + C \cdot B \cdot A + C \cdot A \cdot B) = P(A \cdot B \cdot C) + P(A \cdot C \cdot B) +$$
$$+ P(B \cdot C \cdot A) + P(B \cdot A \cdot C) + P(C \cdot B \cdot A) + P(C \cdot A \cdot B) = 6 \cdot \frac{8}{16575} = \frac{48}{16575} = \frac{16}{5525} \approx 0{,}003$$

б) Введем события $B = \{$ выбрали три туза $\}$, $B_1 = \{$ выбрали 1-ый туз $\}$, $B_2 = \{$ выбрали 2-ой туз $\}$, $B_3 = \{$ выбрали 3-ий туз $\}$. Очевидно, что $B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$, тогда

$P(B)=P(B_1\cdot B_2\cdot B_3)$. События $B_i,\ i=\overline{1,3}$ – зависимые. Поэтому по теореме умножения:

$$P(B)=P(B_1\cdot B_2\cdot B_3)=P(B_1)\cdot P(B_2\setminus B_1)\cdot P(B_3\setminus B_1\cdot B_2)=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50}=\frac{24}{132600}=\frac{1}{5525}.$$

<u>Пример 5.9.</u> *В электрическом приборе последовательно подключены два предохранителя. Первый предохранитель выходит из строя с вероятностью равной 0,4, а второй – с вероятностью 0,3. Найти вероятность прекращения питания.*

<u>Решение:</u> Введём события:

$$A_1=\{\text{вышел из строя первый предохранитель}\};$$
$$A_2=\{\text{вышел из строя второй предохранитель}\}.$$

По условию задачи: $P(A_1)=0{,}4$ и $P(A_2)=0{,}3$.

Известно, для последовательного соединения характерно, что при отключении хотя бы одного из предохранителей, тока во всей цепи не будет. Введём дополнительные события: $B=\{\text{ток в цепи есть}\}$; $\overline{B}=\{\text{тока в цепи нет}\}$.

Решим задачу 2 способами.

<u>1 способ.</u>

1) Сформулируем противоположные события к A_1 и A_2:

$\overline{A_1}=\{$ первый предохранитель работает$\}$; $\overline{A_2}=\{$ второй предохранитель работает$\}$,

тогда событие $B=\{\text{ток в цепи есть}\}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}=\{\text{работают оба предохранителя}\}$.

$$P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0{,}6 \quad \text{и} \quad P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=0{,}7$$

2) События $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ независимые, поэтому согласно теореме умножения для независимых событий:

$$P(B)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42;$$

3) Можем найти искомую вероятность события $\overline{B}=\{\text{тока в цепи нет}\}$:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}42=0{,}58$$

<u>2 способ.</u> Событие $\overline{B}=\{\text{тока в цепи нет}\}=A_1\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot A_2+A_1\cdot\overline{A_2}$. Это событие может быть сформулировано так: или не работают оба предохранителя $(A_1\cdot A_2)$, или первый работает, второй не работает $\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right)$, или первый не работает, второй цел $\left(A_1 \cdot \overline{A_2}\right)$. В силу того, что события $A_1 \cdot A_2$, $\overline{A_1} \cdot A_2$, $A_1 \cdot \overline{A_2}$ – несовместные, используя теорему сложения для несовместных событий можем записать:

$$P\left(\overline{B}\right) = P\left(A_1 \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2}\right) = P(A_1 \cdot A_2) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right) + P\left(A_1 \cdot \overline{A_2}\right)$$

И так как все события: A_1 и $\cdot$ A_2 , $\overline{A_1}$ и A_2 , A_1 и $\overline{A_2}$ попарно независимы, используя теорему умножения для независимых событий можем записать:

$$P\left(\overline{B}\right) = P(A_1 \cdot A_2) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right) + P\left(A_1 \cdot \overline{A_2}\right)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right)$$

Подставляя в записанное выражение известные вероятности, получаем:

$$P\left(\overline{B}\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}58$$

<u>Пример 5.10.</u> *В урне 12 красных, 8 зелёных и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?*

<u>Решение:</u> 1 способ:

1) Всего имеется 30 шаров, занумеруем их и сделаем различимыми между собой:

$$\underbrace{K_1, K_2, \dots, K_{12}\ , Z_1, Z_2, \dots Z_8\ , C_1, C_2, \dots C_{10}}_{30\ \text{шаров}}$$

Введём события:

$$K = \{\text{достали красный шар}\};$$

$$Z = \{\text{достали зеленый шар}\};$$

$$C = \{\text{достали синий шар}\}.$$

Опыт заключается в том, что достают 2 различимых шара. Поэтому пространство элементарных исходов: $\Omega = \{K_1K_{12}\ ; K_2Z_2\ ; Z_8\ C_1;\ C_1C_2, \dots\}$. Всего элементов в нашем пространстве (пар шаров) будет:

$$N = \mathrm{A}_{30}^2 = \frac{30!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870.$$

Замечание: На самом деле мы могли считать получаемые выборки в опыте и сочетаниями, т.е. комбинациями, в которых порядок следования элементов не имеет значения. Но мы приняли решение, что любые две комбинации различны, если они различаются или составом элементов, или порядком следования элементов в выборке. Например: K_1K_{12} и $K_{12}\ K_1$ различны.

2) Введём дополнительные события:

$$A = \{\text{вынутые 2 шара разного цвета}\};$$
$$D = \{\text{оба шара не синие}\};$$

Нам нужно найти вероятность того, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар. Так как $D = \overline{C} \cdot \overline{C}$, то по сути необходимо найти вероятность события $P(A|D)$. По определению условной вероятности:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cdot D)}{P(D)} = \frac{P\left(A \cdot \overline{C} \cdot \overline{C}\right)}{P(D)}$$

Рассмотрим событие:

$$A \cdot \overline{C} \cdot \overline{C} = \{\text{ и два выбранных шара разного цвета, и оба не синие}\} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} \text{выбран первый красный шар и второй зеленый, } \underline{\text{или}} \text{ первый зеленый,} \\ \text{а второй красный шар} \end{matrix} \right\} =$$
$$= K \cdot Z + Z \cdot K$$

События $K \cdot Z$ и $Z \cdot K$ несовместные (в опыте одновременно они произойти не могут). Поэтому по теореме сложения:

$$P\left(A \cdot \overline{C} \cdot \overline{C}\right) = P(K \cdot Z + Z \cdot K) = P(K \cdot Z) + P(Z \cdot K)$$

События K и Z зависимые, поэтому согласно теореме умножения:

$$P(K \cdot Z) = P(K) \cdot P(Z|K);$$

Тогда окончательно:

$$P\left(A \cdot \overline{C} \cdot \overline{C}\right) = P(K \cdot Z + Z \cdot K) = P(K \cdot Z) + P(Z \cdot K) = P(K) \cdot P(Z|K) + P(Z) \cdot P(K|Z) =$$
$$= \frac{12}{30} \cdot \frac{8}{29} + \frac{8}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{192}{870}$$

Теперь необходимо найти вероятность условия, т.е. вероятность события $D = \{\text{оба шара не синие}\}$:

$$P(D) = P\left(\overline{C} \cdot \overline{C}\right) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} = \frac{380}{870}$$

Замечание: при нахождении вероятности $P(D)$, рассуждали так: берем первый не синий шар: всего шаров 30 из них не синих 20; когда берем второй не синий шар, то осталось после первого выбора всего 29 шаров, из них не синих 19.

И наконец можем записать искомую вероятность:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cdot D)}{P(D)} = \frac{P\left(A \cdot \overline{C} \cdot \overline{C}\right)}{P(D)} = \frac{192}{870} \cdot \frac{870}{380} = \frac{96}{190} \approx 0{,}5052$$

2 способ: Дано:

$$\underbrace{K_1, K_2, \dots, K_{12}\ , Z_1, Z_2, \dots Z_8\ , C_1, C_2, \dots C_{10}}_{\underbrace{30 \text{ шаров}}_{\underbrace{\Downarrow}_{\text{достают 2 шара}}}}$$

В этом случае $\Omega = \{K_1K_{12}\ ; K_2Z_2\ ; Z_8\ C_1;\ C_1C_2, \dots\}$.

Так как известно, что при проведении опыта наступило событие D:

$$D = \{\text{достали 2 не синих шара}\};$$

Мы можем «сузить» своё пространство элементарных исходов Ω до исходов в опыте, благоприятствующих D.

Будем во втором способе решения считать, что наши выборки, являются сочетаниями, т.е. друг от друга отличаются только составом элементов, тогда:

$$\Omega_1 = \{K_1K_{12}\ ; K_2Z_2\ ; Z_8\ K_1;\ Z_1Z_2, \dots\}$$

$|\Omega_1| = C_{20}^2 = 190 -$ число элементов пространства.

Используем классическое определение вероятности, для нахождения вероятности события A:

$$A = \{\text{вынутые 2 шара разного цвета}\};$$

Очевидно, что $A = K \cdot Z$, тогда $P(A) = P(K \cdot Z)$.

Найдём число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A:

$$M_A = \underbrace{12}_{\text{число красных шаров}} \cdot \underbrace{8}_{\text{число зеленых шаров}} = 96$$

Теперь можем записать вероятность искомого события:

$$P(A) = \frac{96}{190} \approx 0{,}5052$$

Пример 5.11. *Гардеробщица выдала номерки 4 лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала се шляпы, повесив их наугад. Найти вероятность следующих событий:* ***а****) каждому лицу выдадут его собственную шляпу;* ***б****) ровно одно лицо получит свою шляпу;* ***в****) всем выдадут чужие шляпы.*

Решение: ***а*)** Данную задачу можно решить несколькими способами с использованием классического определения вероятностей и теоремы умножения.

1 способ. С использованием теоремы умножения.

Введём события:

$$A_i = \{\ i \text{ лицо получит свою шляпу}\};$$

$$B = \{\text{ каждому лицу выдадут его собственную шляпу}\}.$$

Очевидно, что $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, т.е. событие заключается в том, что и 1 лицо получит свою шляпу, и второе лицо получит свою, и третье, и четвёртое лица.

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4).$$

Нам нужно найти вероятность произведения событий, для её нахождения используем теорему умножения. В силу того, что события A_i −зависимые, вероятность произведения четырёх событий $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$, по тереме умножения такова:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 \backslash A_1) \cdot P(A_3 \backslash A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4 \backslash A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$

При нахождении вероятностей $P(A_i)$ используем классическое определение и рассуждаем так:

1) для $P(A_1) -$ всего шляп 4, из них одна для первого лица своя, т.е. $P(A_1) = \frac{1}{4}$;

2) для $P(A_2 \backslash A_1) -$ когда наступило событие:

$$A_1 = \{\ 1 \text{ лицо получило свою шляпу}\},$$

осталось 3 шляпы, из них, та, что принадлежит второму лицу одна, т.е. $P(A_2 \backslash A_1) = \frac{1}{3}$;

3) для $P(A_3 \backslash A_1 \cdot A_2) -$ после того как наступило событие:

$$A_1 \cdot A_2 = \{\text{и 1 лицо получило свою шляпу, и 2 лицо получило свою шляпу}\},$$

то осталось шляп две, из них своя для третьего лица 1, т.е. $P(A_3 \backslash A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{2}$;

4) для $P(A_4 \backslash A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) -$ после наступления события:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \{\text{три лица получили свои шляпы}\},$$

4 - ый получит обязательно свою шляпу. Т.е. $P(A_4 \backslash A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 1$.

Итак: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$.

2 способ. С использованием классического определения вероятностей.

Опыт: Раздача шляп клиентам. Шляп 4, клиентов тоже 4. Любой способ выдать шляпы, это одна из 4!=24 перестановок. Т.е. общее число исходов в данном опыте $|\Omega| = N = 4! = 24$.

Очевидно, что благоприятствующих исходов будет только один, т.е. $M_B = 1$ и вероятность события $B = \{$ каждому лицу выдадут его собственную шляпу$\}$ равна: $P(B) = 1/24$.

<u>Решение:</u> ***б)*** Обозначим событие

$$A_{ij} = \{\ \textit{\textbf{i}}\text{-ое лицо получит } \textit{\textbf{j}}\text{-ую шляпу}\ \}$$

$$A_i = \{\ \text{только } \textit{\textbf{i}}\text{-ое лицо получит } \textit{\textbf{свою}} \text{ шляпу}\ \}$$

$$G = \{\ \text{ровно одно лицо получит } \textit{\textbf{свою}} \text{ шляпу}\ \}.$$

Событие $G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, события $A_i,\ i = \overline{1,4}$ несовместны.

1) $A_1 = A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{42} + A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43} = \{$ только ***1***-ое лицо получит ***свою*** шляпу $\}$

Найдём вероятность этого события:

$P(A_1) = P(A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{42} + A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43}) = \{$ т.к. события несовместные $\} = P(A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{42}) + P(A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43})$.

Все события, входящие в произведение зависимые, поэтому используя теорему умножения:

$$P(A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{42}) = P(A_{11}) \cdot P(A_{23} \setminus A_{11}) P(A_{34} \setminus A_{11} \cdot A_{23}) \cdot P(A_{42} \setminus A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{34}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}.$$

<u>Как нашли:</u> вероятность взять свою шляпу 1-му лицу $1/4$, (всего шляп 4, из них своя одна). После такого выбора, осталось шляп 3, нам нужна дать второму лицу шляпу третьего, и она одна, поэтому $P(A_{23} \setminus A_{11}) = 1/4$. После наступления события $A_{11} \cdot A_{23}$ шляп осталось две, из них четвёртого лица одна, поэтому $P(A_{34} \setminus A_{11} \cdot A_{23}) = 1/2$. Очевидно, что после таких выборов, 4-ое лицо получит с вероятностью 1 шляпу второго.

Аналогично рассуждая, получим вероятность события $A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43}$:

$$P(A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43}) = P(A_{11}) \cdot P(A_{24} \setminus A_{11}) P(A_{32} \setminus A_{11} \cdot A_{24}) \cdot P(A_{43} \setminus A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}.$$

Тогда вероятность события A_1:

$$P(A_1) = P(A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{34} \cdot A_{42} + A_{11} \cdot A_{24} \cdot A_{32} \cdot A_{43}) = 2 \cdot 1/24 = 1/12.$$

2) События

$A_2 = A_{14} \cdot A_{22} \cdot A_{31} \cdot A_{43} + A_{13} \cdot A_{22} \cdot A_{34} \cdot A_{41} = \{$ только ***2***-ое лицо получит ***свою*** шляпу $\}$

$A_3 = A_{14} \cdot A_{21} \cdot A_{33} \cdot A_{42} + A_{12} \cdot A_{24} \cdot A_{33} \cdot A_{41} = \{$ только ***3***-е лицо получит ***свою*** шляпу $\}$,

$A_4 = A_{13}\cdot A_{21}\cdot A_{32}\cdot A_{44} + A_{12}\cdot A_{23}\cdot A_{31}\cdot A_{44} = \{$ только ***4***-ое лицо получит ***свою*** шляпу $\}$.

3) Рассуждая подобным образом, как и для вероятности $P(A_1)$, можем найти:

$$P(A_2) = P(A_{14}\cdot A_{22}\cdot A_{31}\cdot A_{43} + A_{13}\cdot A_{22}\cdot A_{34}\cdot A_{41}) = P(A_{14}\cdot A_{22}\cdot A_{31}\cdot A_{43}) + P(A_{13}\cdot A_{22}\cdot A_{34}\cdot A_{41}) = \\ = 2\cdot 2/24 = 1/12$$

$$P(A_3) = P(A_{14}\cdot A_{21}\cdot A_{33}\cdot A_{42} + A_{12}\cdot A_{24}\cdot A_{33}\cdot A_{41}) = P(A_{14}\cdot A_{21}\cdot A_{33}\cdot A_{42}) + P(A_{12}\cdot A_{24}\cdot A_{33}\cdot A_{41}) = 1/12.$$

$$P(A_4) = P(A_{13}\cdot A_{21}\cdot A_{32}\cdot A_{44} + A_{12}\cdot A_{23}\cdot A_{31}\cdot A_{44}) = P(A_{13}\cdot A_{21}\cdot A_{32}\cdot A_{44}) + P(A_{12}\cdot A_{23}\cdot A_{31}\cdot A_{44}) = 1/12.$$

4) Ровно одно лицо получит свою шляпу, когда наступит событие $G = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, т.е. получит своё: или только 1-ый, или только 2-ой, или только 3-ий, или только 4-ый. Так как события $A_i,\ i = \overline{1,4}$ несовместны, можем записать, используя теорему сложения для несовместных событий:

$$P(G) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 4\cdot 1/12 = 1/3.$$

<u>Решение:</u> ***в)*** Введём события:

$$A_i = \{\ \textbf{\textit{i}}\text{-ое лицо получит } \textbf{\textit{свою}} \text{ шляпу}\ \};$$
$$F = \{\ \text{всем выдадут чужие шляпы}\ \};$$
$$\overline{F} = \{\ \text{хотя бы один человек получит свою шляпу}\ \};$$

$$P(\overline{F}) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \{\ \text{т.к. события совместные}\ \}$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1\cdot A_2) - P(A_1\cdot A_3) - P(A_1\cdot A_4) - P(A_2\cdot A_3) - P(A_2\cdot A_4) -$$
$$- P(A_3\cdot A_4) + P(A_1\cdot A_2\cdot A_3) + P(A_1\cdot A_2\cdot A_4) + P(A_2\cdot A_3\cdot A_4) + P(A_1\cdot A_3\cdot A_4) - P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)$$

Используя рассуждения предыдущих пунктов несложно найти:

$$P(A_i) = 1/4; \qquad P(A_i\cdot A_j) = 1/4\cdot 1/3 = 1/12;$$
$$P(A_i\cdot A_j\cdot A_k) = 1/4\cdot 1/3\cdot 1/2 = 1/24; \quad P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4) = 1/24.$$

Тогда $P(\overline{F}) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$:

$$P(\overline{F}) = 4\cdot 1/4 - 6\cdot 1/12 + 4\cdot 1/24 - 1/24 = 1/2 + 1/8 = 5/8.$$

Тогда вероятность искомого события $F = \{$ всем выдадут чужие шляпы $\}$ равна:

$$P(F)=1-P(\overline{F})=1-5/8=3/8$$

Пример 5.12. *Пусть события A,B,C независимы в совокупности и их вероятности отличны от нуля и единицы. Могут ли быть события $A\cdot B$, $B\cdot C$ и $A\cdot C$: а) независимыми в совокупности; б) попарно независимыми?*

Решение: По определению события $A\cdot B$, $B\cdot C$ и $A\cdot C$ будут независимыми в совокупности, если:

1) они попарно независимы, т.е. выполняется:

$$P((A\cdot B)\cdot(B\cdot C))=P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C),\ P((A\cdot B)\cdot(A\cdot C))=P(A\cdot B)\cdot P(A\cdot C),$$

$$P((B\cdot C)\cdot(A\cdot C))=P(B\cdot C)\cdot P(A\cdot C),$$

2) и выполняется:

$$P((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C))=P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C)\cdot P(A\cdot C).$$

Очевидно, что если известно, что события независимы в совокупности, то их попарная независимость вытекает автоматически, но обратное неверно.

Проверим вначале попарную независимость.

Из условия известно, что события A,B,C - независимы в совокупности. То есть для данных событий выполняется:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B);\ P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C);\ P(A\cdot C)=P(A)\cdot P(C)$$

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C),$$

Проверим попарную независимость вначале для событий $A\cdot B$ и $B\cdot C$, по определению попарной независимости должно выполняться:

$$P((A\cdot B)\cdot(B\cdot C))=P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C),$$

В силу попарной независимости событий A,B,C можем записать:

$$P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(B)\cdot P(C),$$

Тогда

$$P((A\cdot B)\cdot(B\cdot C))=P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(B)\cdot P(C)=P(A)\cdot P^2(B)\cdot P(C).$$

Рассмотрим событие $(A\cdot B)\cdot(B\cdot C)$, для него справедливо: $(A\cdot B)\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B\cdot C)$, поэтому $P((A\cdot B)\cdot(B\cdot C))=P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$, т.е. если события $A\cdot B$ и $B\cdot C$ попарно независимы, то должно выполняться:

$$P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=P(A)\cdot P^2(B)\cdot P(C).$$

Это равенство возможно только в случаях, когда:

a) Все вероятности равны 0;

b) все равны 1;

c) $P(B)=1$;

d) $P(A)=P(B)=1$;

e) $P(C)=P(B)=1$.

Но в условии задачи сказано, что вероятности всех событий отличны от нуля и единицы, поэтому $A\cdot B$ и $B\cdot C$ не могут быть попарно независимыми событиями.

Аналогично для оставшихся двух пар событий: $A\cdot B$ и $A\cdot C$; $B\cdot C$ и $A\cdot C$, эти события также не могут быть попарно независимыми в данном случае.

<u>Вывод:</u> Полученных результатов достаточно чтобы сделать вывод о невозможности быть независимыми в совокупности событиям $A\cdot B,\ B\cdot C$ и $A\cdot C$, т.к. не выполняется одно из условий определения независимости в совокупности: нет попарной независимости событий.

Просто для интереса посмотрим, что представляет собой $P\big((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C)\big)$. В случае независимости в совокупности событий $A\cdot B,\ B\cdot C$ и $A\cdot C$ должно выполняться:

$$P\big((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C)\big)=P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C)\cdot P(A\cdot C) \qquad (*)$$

Т.к. A,B,C независимы в совокупности, то

$$P(A\cdot B)\cdot P(B\cdot C)\cdot P(A\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(A)\cdot P(C)=P^2(A)\cdot P^2(B)\cdot P^2(C),$$

Т.е. равенство $(*)$ можем переписать:

$$P\big((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C)\big)=P^2(A)\cdot P^2(B)\cdot P^2(C) \qquad (**)$$

Рассмотрим событие $\big((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C)\big)$: $\big((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C)\big)=(A\cdot B\cdot C)$,

Поэтому

$$P\big((A\cdot B)\cdot(B\cdot C)\cdot(A\cdot C)\big)=P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) \qquad (***)$$

То есть с одной стороны в случае независимости в совокупности выполняется $(**)$, с другой стороны выполняется $(***)$. И поэтому:

$$P^2(A)\cdot P^2(B)\cdot P^2(C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Это равенство возможно только в случаях когда:

a) Хотя бы одна из вероятностей $P(A), P(B), P(C)$ равна 0;

b) Или все вероятности равны 1.

Таким образом события $A\cdot B$, $B\cdot C$ и $A\cdot C$ не могут быть независимыми в совокупности и конечно не являются попарно независимыми.

<u>Пример 5.13.</u> *Результаты опроса 1000 случайно выбранных молодых людей таковы: 829 из них работают; 700 проживают в Томске; 405 учатся, 540 работающих томичей; 333 молодых людей работают и учатся одновременно, 360 учащихся томичей, 300 работающих и учащихся томичей. Содержится ли в этой информации ошибка?*

<u>Решение:</u> Введём события:

$A = \{$ случайно выбранный человек работает $\}$;

$B = \{$ случайно выбранный человек проживает в Томске $\}$;

$C = \{$ случайно выбранный человек учится $\}$;

$A\cdot B = \{$ случайно выбранный человек работает и проживает в Томске $\}$;

$A\cdot C = \{$ случайно выбранный человек работает и учится $\}$;

$B\cdot C = \{$ случайно выбранный человек учится и проживает в Томске $\}$;

$A\cdot B\cdot C = \{$ случайно выбранный человек работает. учится и проживает в Томске $\}$.

$$P(A) = \frac{829}{1000}; \quad P(B) = \frac{700}{1000}; \quad P(C) = \frac{405}{1000};$$
$$P(A\cdot B) = \frac{540}{1000}; \qquad P(A\cdot C) = \frac{333}{1000};$$
$$P(B\cdot C) = \frac{360}{1000}; \qquad P(A\cdot B\cdot C) = \frac{300}{1000}.$$

Используя формулу вероятности суммы совместных событий:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

Получим:

$P(A+B+C) = 0{,}829 + 0{,}700 + 0{,}405 - 0{,}540 - 0{,}333 - 0{,}360 + 0{,}300 = 1{,}001$

Вероятность события не может быть больше 1, следовательно в информации где то содержится ошибка.

Пример 5.14. *Шесть пассажиров садятся на остановке в трамвай, состоящий из трех вагонов. Какова вероятность того, что:* ***а****) все пассажиры сядут в один вагон;* ***б****) хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир;* ***в****) в каждый вагон сядут по два пассажира?*

Решение: ***Опыт:*** Шесть пассажиров садятся в 3 вагона.

Введём кодирование: квадрат будет обозначать пассажира:

$$\underbrace{\square}_{1\ \text{пассажир}}\ \underbrace{\square}_{2\ \text{пассажир}}\ \underbrace{\square}_{3\ \text{пассажир}}\ \underbrace{\square}_{4\ \text{пассажир}}\ \underbrace{\square}_{5\ \text{пассажир}}\ \underbrace{\square}_{6\ \text{пассажир}}$$

Внутри квадрата будем записывать номер вагона, в который сел пассажир. Тогда элементарные исходы будут выглядеть так:

$\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$ – все пассажиры в 3 вагоне;

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$ – 1-ый и 3-ий пассажиры в 1-ом вагоне, остальные во 2-ом;

В каждом квадрате может быть 3 числа (номера вагонов), используя правило умножения, можем записать общее число элементарных исходов: $|\Omega| = N = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 729$.

Решение: ***а***) Найдём вероятность события $A = \{$ все пассажиры сядут в один вагон $\}$.

Введём события:

$A_1 = \{$ все пассажиры сядут в первый вагон $\}$;

$A_2 = \{$ все пассажиры сядут во второй вагон $\}$;

$A_3 = \{$ все пассажиры сядут в третий вагон $\}$.

Графическое изображение реализации событий:

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ – все в 1-ом вагоне; $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$ – все во 2-ом вагоне; $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$ – все пассажиры в 3 вагоне.

Тогда вероятность $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3)$, т.к. события A_i – несовместные, и $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{729}$ поэтому:

Тогда вероятность $P(A) = P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = \sum\limits_{i=1}^{3} P(A_i) = \dfrac{3}{729} = \dfrac{1}{243}$.

<u>Решение:</u> ***б)*** Найдём вероятность события $B=\{$ хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир $\}$.

Для оценки вероятности, нам необходимо найти количество выборок вида:

1. $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\,;\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}$ – никого в 1-ом вагоне, обозначим как событие B_1;
2. $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\,;\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ – никого в 2-ом вагоне, обозначим как событие B_2;
3. $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\,;\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{2}$ – никого в 3-ем вагоне, обозначим как событие B_3;
4. $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ – никого нет во 2-ом и 3-ем вагоне, обозначим как событие B_{23};
5. $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$ – никого нет в 1-ом и 3-ем вагоне, обозначим как событие B_{13};
6. $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$ – никого нет в 1-ом и 2-ом вагоне, обозначим как событие B_{12};

Событие $B=B_1+B_2+B_3$, а $B_{23}=B_2\cdot B_3$; $B_{13}=B_1\cdot B_3$; $B_{12}=B_1\cdot B_2$. События B_1, B_2, B_3 – совместные.

По теореме сложения находим вероятность суммы трех совместных событий:

$$P(B)=P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)-P(B_1\cdot B_2)-P(B_1\cdot B_3)-P(B_2\cdot B_3)+$$
$$+P(B_1\cdot B_2\cdot B_3).$$

Оценим вероятности $P(B_i)$.

Рассмотрим на примере $P(B_1)$: ранее мы рассмотрели интересующие нас в этом случае выборки, например $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\,;\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}$,.... в каждом из квадратов может быть любое число или 3 или 2, но 1 быть не может, поэтому по правилу умножения:

$$\underset{2\ варианта}{\square}\cdot\underset{2\ варианта}{\square}\cdot\underset{2\ варианта}{\square}\cdot\underset{2\ варианта}{\square}\cdot\underset{2\ варианта}{\square}\cdot\underset{2\ варианта}{\square}=64 \text{ варианта всего.}$$

Аналогично для $P(B_2),P(B_3)$. Т.е. $P(B_i)=\dfrac{M_{B_i}}{N}=\dfrac{64}{729};\ i=\overline{1,3}.$

Найдём вероятность $P(B_1\cdot B_2),P(B_1\cdot B_3),P(B_2\cdot B_3)$.

Вероятности событий B_{12}, B_{13}, B_{23} были найдены ранее, например $P(B_1\cdot B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)$ – это вероятность события никого нет в 1-ом и 2-ом вагоне, т.е. все в 3-ем вагоне. И эта вероятность равна $P\left(B_1 \cdot B_2\right)=\dfrac{1}{729}$. Аналогично для $P\left(B_1 \cdot B_3\right)=P\left(B_2 \cdot B_3\right)=\dfrac{1}{729}$.

$P\left(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3\right)=0$, т.к. $\left\{B_1 \cdot B_2 \cdot B_3\right\}-$ невозможное событие, никого нет ни в 1-ом, ни во 2-ом, ни в 3-ем вагонах.

Подставляя найденные значения, находим искомую вероятность:

$$P(B)=P\left(B_1+B_2+B_3\right)=P\left(B_1\right)+P\left(B_2\right)+P\left(B_3\right)-P\left(B_1 \cdot B_2\right)-P\left(B_1 \cdot B_3\right)-P\left(B_2 \cdot B_3\right)+$$
$$+P\left(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3\right)=3 \cdot \frac{64}{729}-3 \cdot \frac{1}{729}=\frac{64}{243}-\frac{1}{243}=\frac{63}{243} \approx 0,259$$

<u>Решение:</u> ***в)*** Найдём вероятность события:

$$C=\{\text{ в каждый вагон сядут по два пассажира }\}.$$

Найдём эту вероятность, используя 2 способа рассуждения.

<u>1 способ.</u>

Посчитаем количество вариантов посадки в каждый вагон по 2 человека:

C_6^2- число способов набрать 2-х человек из шести в 1-ый вагон;

C_4^2- число способов набрать из оставшихся 4-х человек, после первого выбора, во 2-ой вагон;

C_2^2- число способов набрать 2-х человек из оставшихся двух в 3-ий вагон.

По правилу умножения: $M_C=C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2=\dfrac{6!}{(2!)^3}=\dfrac{720}{8}=90$, т.к. $N=729$, то

$P(C)=\dfrac{90}{729} \approx 0{,}123$

<u>2 способ.</u>

Введем события: $A_{ij}=\{$ ***i***- пассажир в ***j***-ом вагоне $\}$. Варианты рассадки, схематично можем изобразить так:

$$\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\,;\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\,,\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\,;\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\,,....$$

Например, вариант $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{1}$ – обозначает, что 1-ый и 2-ой пассажиры в 3-ем вагоне; 3-ий и 4-ый пассажиры во 2-ом вагоне; 5-ый и 6-ой пассажиры во 1-ом вагоне.

Вероятность данного события, обозначим его $F_1 = A_{13}\cdot A_{23}\cdot A_{32}\cdot A_{42}\cdot A_{51}\cdot A_{61}$, равна по теореме умножения для независимых событий:

$$P(F_1) = P(A_{13}\cdot A_{23}\cdot A_{32}\cdot A_{42}\cdot A_{51}\cdot A_{61}) = P(A_{13})\cdot P(A_{23})P(A_{32})\cdot P(A_{42})\cdot P(A_{51})\cdot P(A_{61})$$

Вероятность каждого из событий A_{ij}, входящих в произведение, равна $\frac{1}{3}$. Находится с использованием классического определения вероятностей: всего вагонов 3, исходов, благоприятствующих тому, что пассажир сядет в конкретный вагон один. Поэтому:

$$P(F_1) = \frac{1}{3^6}.$$

Очевидно, что $P(C) = P(F_1 + F_2 + ...)$.

Теперь необходимо найти количество событий F_i. Для этого, нам нужно знать количество вариантов рассадки пассажиров, когда в каждом вагоне по 2 человека.

Таких вариантов: $N_6(2,2,2) = \frac{6!}{(2!)^3} = 90$.

Тогда окончательно вероятность события:

$$C = \{ \text{ в каждый вагон сядут по два пассажира } \},$$

Равна:

$$P(C) = P(F_1 + F_2 + ... + F_{90}) = [\text{ т.к. события } F_i \text{ несовместные }] =$$

$$\sum_{i=1}^{90} P(F_i) = 90\cdot\frac{1}{3^6} = \frac{90}{729} \approx 0{,}123$$

<u>Пример 5.15</u> *N элементов размещены по N местам, а затем случайным образом переставлены. Найти вероятность P_N того, что хотя бы один элемент окажется на своём месте, и $\lim\limits_{N\to\infty} P_N$.*

<u>Решение:</u> ***Опыт:*** ***N*** элементов размещаются по ***N*** местам. Пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \left\{ \underbrace{(1,2,3,\ldots,N)}_{N\ элементов};\ \underbrace{(2,5,4,3,\ldots,N-1)}_{N\ элементов};\ldots\ldots,\underbrace{(N,1,4,\ldots..,N-2)}_{N\ элементов};.... \right\}$$

1) Каждый из способов расставить ***N*** элементов по ***N*** местам является перестановкой из ***N*** элементов, количество которых ***N***!, поэтому $|\Omega| = N!$

Введём события:

$$A_i = \{\ i\text{-ый элемент на своём месте}\ \},\ i = \overline{1, N}$$

$$D = \{\ \text{хотя бы один элемент на своём месте}\ \},$$

Очевидно, что $D = A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_N = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$.

Тогда по теореме сложения:

$$P(D) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - ..... + (-1)^{N-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot ..... \cdot A_N)$$

Введём для удобства вспомогательную переменную U_i:

$$U_1 = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_N) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)\ ;$$

$$U_2 = P(A_1 \cdot A_2) + P(A_2 \cdot A_3) + P(A_3 \cdot A_7) + ... + P(A_N \cdot A_1) = \sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j)\ ;$$

$$U_3 = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_2 \cdot A_3 \cdot A_5) + P(A_3 \cdot A_7 \cdot A_4) + ... + P(\cdot A_{N-3} \cdot A_N \cdot A_1) = \sum_{i<j<k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k)\ ;$$

………………………………………………………………………………

$$U_k = P\left(\underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k}_{k\ \text{элементов}}\right) + P\left(\underbrace{A_2 \cdot A_4 \cdot ... \cdot A_{k-1}}_{k\ \text{элементов}}\right) + ...$$

Тогда

$$P(D) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = U_1 - U_2 + U_3 - ..... + (-1)^{N-1} U_N = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} U_k \qquad (*)$$

2) Оценим вероятности, входящие в каждое из U_1:

$P(A_i) = \dfrac{(N-1)!}{N!}$, потому что всего исходов в данном опыте $N!$ (это было найдено ранее), число исходов благоприятствующих $A_i = \{\ i\text{-ый элемент на своём месте}\ \},\ i = \overline{1, N}$ будет $(N-1)!$. Рассмотрим на схеме, пусть 1-ый элемент стоит точно на своём месте:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{1-\text{ый элемент}} \cdot \underbrace{\boxed{5} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{4} \cdot \ ..... \cdot \boxed{N-5} \cdot \boxed{N-2} \cdot \boxed{N-1}}_{N-1\quad \text{мест}}$$

Остальные элементы мы можем расставить на оставшиеся $(N-1)$ место. Всего способов расставить $(N-1)$ элемент на $(N-1)$ место, очевидно, $(N-1)!$. Тогда по правилу умножения: и 1-ый элемент на своём месте и все остальные на $(N-1)$ местах, это:

$1\cdot(N-1)! = M_{A_1}$, тогда вероятность $P(A_1) = \frac{M_{A_1}}{|\Omega|} = \frac{(N-1)!}{N!}$.

Для любого A_i: $P(A_i) = \frac{M_{A_i}}{|\Omega|} = \frac{(N-1)!}{N!}$, $i = \overline{1, N}$.

3) Найдём вероятности, входящие в U_2. Допустим найдём вероятность $P(A_1 \cdot A_2)$. Рассмотрим схему:

$$\underbrace{\boxed{1}}_{1-ый\ элемент} \cdot \underbrace{\boxed{2}}_{2-ой\ элемент} \cdot \underbrace{\boxed{5} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{4} \cdot \ldots\ldots \cdot \boxed{N-5} \cdot \boxed{N-2} \cdot \boxed{N-1}}_{N-2 \quad мест}$$

Два элемента поставили на свои места, это можно сделать только одним способом, остальные $(N-2)$ элемента поставить на $(N-2)$ места можно $(N-2)!$ способами, поэтому всего способов: $1\cdot(N-2)! = M_{A_1 \cdot A_2}$. Аналогично для всех остальных пар событий. Поэтому

$$P(A_i \cdot A_j) = \frac{(N-2)!}{N!},\ i < j,\ i, j = \overline{1, N}$$

4) Рассуждая подобным образом для остальных U_k, можем записать, что вероятность поставить k элементов на свои места равна:

$$P\left(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots . A_{i_{k-1}} \cdot A_{i_k}\right) = \frac{(N-k)!}{N!}.$$

Это справедливо для любого набора индексов $i_k,\ i_1 < i_2 < \ldots . i_{k-1} < i_k$, $k = \overline{1, N}$.

5) Разберёмся, теперь какое количество вероятностей входит в каждое из U_k.

В U_1 складываются вероятности событий, когда один элемент на своём месте, очевидно, что таких вероятностей будет ровно N или C_N^1.

В U_2 суммируются вероятности событий, когда два выбранных элемента из N на своих местах, очевидно, что таких вероятностей будет ровно C_N^2, это число способов выбрать эти 2 элемента, стоящих на своих местах, из имеющихся N.

………………………………………………………………………………………………..

В U_k суммируются вероятности событий, когда k выбранных элементов из N на своих местах, очевидно, что таких вероятностей будет ровно C_N^k, это число способов выбрать эти k элементов из имеющихся N и поставить их на свои места.

Подведём итоги, подставим все найденные величины в выражение $(*)$:

$$P(D) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = U_1 - U_2 + U_3 - ..... + (-1)^{N-1} U_N = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} U_k =$$
$$= C_N^1 \cdot \frac{(N-1)!}{N!} - C_N^2 \cdot \frac{(N-2)!}{N!} + C_N^3 \cdot \frac{(N-3)!}{N!} - .... + (-1)^{N-1} C_N^N \cdot \frac{(N-N)!}{N!} =$$

$$= \frac{N!}{(N-1)!1!} \cdot \frac{(N-1)!}{N!} - \frac{N!}{(N-2)!2!} \cdot \frac{(N-2)!}{N!} + \frac{N!}{(N-3)!3!} \cdot \frac{(N-3)!}{N!} - .... + (-1)^{N-1} \cdot \frac{1}{N!} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ..... + (-1)^{N-1} \cdot \frac{1}{N!} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.$$

6) Найдём $\lim\limits_{N\to\infty} P(D) = \lim\limits_{N\to\infty} P_N$. Вспоминая разложение в ряд экспоненты:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}, \text{ тогда } e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

$$1 - e^{-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ...\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ...... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.$$

Таким образом $P(D) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$ при $N \to \infty$ равна:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = 1 - e^{-1}.$$

<u>Пример 5.16</u> *Доказать, что если* $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, *то события A и B независимы.*

<u>Решение:</u> Пусть $P(A|B) = P(A|\overline{B})$, тогда $\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)} = \dfrac{P(A\cdot \overline{B})}{P(\overline{B})}$, или:

$$P(A\cdot B)\cdot P(\overline{B})=P(A\cdot\overline{B})\cdot P(B),$$

$$P(A\cdot B)\cdot(1-P(B))=P(A\cdot\overline{B})\cdot P(B),$$

$$P(A\cdot B)=P(A\cdot\overline{B})\cdot P(B)+P(A\cdot B)\cdot P(B),$$

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot\left(P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B)\right) \qquad (*)$$

Так как события $A\cdot\overline{B}$ и $A\cdot B$ несовместные: $(A\cdot\overline{B})\cdot(A\cdot B)=A\cdot\underbrace{\overline{B}\cdot B}_{\varnothing}\cdot A=A\cdot\varnothing=\varnothing$, то

можем записать: $\left(P(A\cdot\overline{B})+P(A\cdot B)\right)=P(A\cdot\overline{B}+A\cdot B)=P\left(A\cdot\left(\underbrace{\overline{B}+B}_{\Omega}\right)\right)=P(A\cdot\Omega)=P(A)$

Используя данный полученный результат подставляем его в $(*)$:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A).$$

Получили, что вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятностей. Это справедливо только для независимых событий, то есть A и B независимы.

Задачи для самостоятельного решения по теме 5:

5.1. Из колоды карт (36) вытаскивается наудачу одна. Зависимы ли события $A=\{$ достали даму $\}$ и $B=\{$ достали карту красной масти $\}$?

5.2. Внутри круга радиуса R лежит квадрат с диагональю $a=R/2$. Найти вероятность того, что 3 точки, брошенные в круг, окажутся внутри квадрата.

5.3. В одной комнате находятся 4 девушки и 7 юношей, в другой 10 девушек и 5 юношей. Наудачу выбирают по одному человеку из каждой комнаты. Найти вероятность того, что оба они окажутся юношами или оба девушками.

5.4. Вероятность того, что изготовленный первой бригадой холодильник, будет первосортный, равна 0,8. При изготовлении такого же холодильника второй бригадой, эта вероятность равна 0,9. Первой бригадой изготовлено три телевизора, второй – четыре. Найти вероятность того, что все пять телевизоров первосортные.

5.5. Из букв *Г, А, А, А, К, К, Л, Т, И* разрезной азбуки составляется наудачу слово, состоящее из 9 букв. Какова вероятность того, что получится слово «***ГАЛАКТИКА***»?

5.6. Студент пришёл на зачёт, зная ответы на 24 вопроса из тридцати. С какой вероятностью он сдаст зачёт, если в случае его отказа отвечать на первый заданный вопрос, он получает ещё один вопрос?

5.7. Одновременно бросаются три игральные кости. Найти вероятность выпадения трёх «троек», если известно, что: а) на одной кости выпало три очка; б) по крайней мере на двух костях выпали «тройки»; в) на всех костях выпало одинаковое количество очков; г) на всех костях выпало нечётное количество очков.

5.8. Найти вероятность того, что при бросании трёх игральных костей хотя бы на одной выпадет 4 очка, при условии, что на всех костях выпали грани с чётным числом очков.

5.9. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй - только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят: а) оба студента; б) только первый; в) только один из них; г) хотя бы один из студентов.

5.10. В одном ящике 4 синих и 5 красных шаров, в другом- 3 синих и 7 белых шаров. Из каждого ящика вынуто по одному шару, найти вероятность того, что достали хотя бы один белый шар.

5.11. Гардеробщица выдала номерки 4 лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала се шляпы, повесив их наугад. Найти вероятность события: а) ровно два лица получат свою шляпу; б) ровно три лица получат свою шляпу;

5.12. В лотерее n билетов, из них $l-$ выигрышных. Некто покупает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один выигрышный.

5.13. Монета бросается до первого появления герба. Какова вероятность того, что понадобится чётное число бросков?

5.14. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности того, что: ***а***) опыт окончится до шестого бросания; ***б***) потребуется чётное число бросаний. (*Ответ*: ***а***) 15/16 ***б***) 2/3).

5.15. Уходя из квартиры ***N*** гостей, имеющих одинаковые размеры обуви, надевают калоши в темноте, каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятность событий:

$A=\{$ каждый гость наденет свои калоши $\}$;

$B=\{$ каждый гость наденет калоши, относящиеся к одной паре, но может быть не свои $\}$.

5.16. Из 4 человек ***А***,***Б***,***В***,***Г*** один ***А*** получил информацию в виде сигнала «да», «нет». Он сообщает ее второму ***Б***, второй третьему ***В***, третий сообщает четвёртому ***Г***, а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие. Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трёх. Какова вероятность, что первый сказал правду, если четвёртый сказал правду?

5.17. В электропоезд, состоящий из ***n*** вагонов, входят ***k*** пассажиров $(k \geq n)$, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдёт хотя бы один пассажир.

5.18. Показать, что если $P(A)=0$ или $P(A)=1$, то событие A и любое событие B независимы.

5.19. Доказать, что если события A и B независимы и $P(A \cup B)=1$, то либо A, либо B являются достоверным событием.

5.20. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы вероятность того, что среди них хотя бы одно нечётное, была не меньше 0,99?

5.21. Вероятность того, что двое близнецов будут одного пола, приблизительно равна 0,64, а вероятность рождения в двойне первым мальчика – 0,51. Найти вероятность того, что второй из близнецов будет мальчиком при условии, что первый из них мальчик.

5.22. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков равная 12?

5.23. Найти вероятность того, что при бросании 6 игральных костей выпадет хотя бы одна чётная цифра и хотя бы одна нечётная цифра.

5.24. Из колоды карт (52 листа) двое поочерёдно по схеме с возвращением достают по одной карте. Выигрывает тот, у кого раньше выйдет туз. Определите вероятности победы для каждого игрока. Будет ли игра более справедливой, если требование достать туза заменить требованием достать туза пик? (*Ответ*: а) $13/25$ б) $2/3$).

5.25. 10 единиц, 10 двоек и 10 троек располагаются в ряд в случайном порядке, образуя некоторое тридцатизначное число. Какова вероятность, что это число делится на: а) 2; б) 3; в) 4?

5.26. Пусть $A, B, C, D-$ события, причём A и B не зависят от C и D. Доказать, что если $A \cap B = \varnothing$ и $C \cap D = \varnothing$, то $A \cup B$ не зависит от $C \cup D$.

Тема 6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

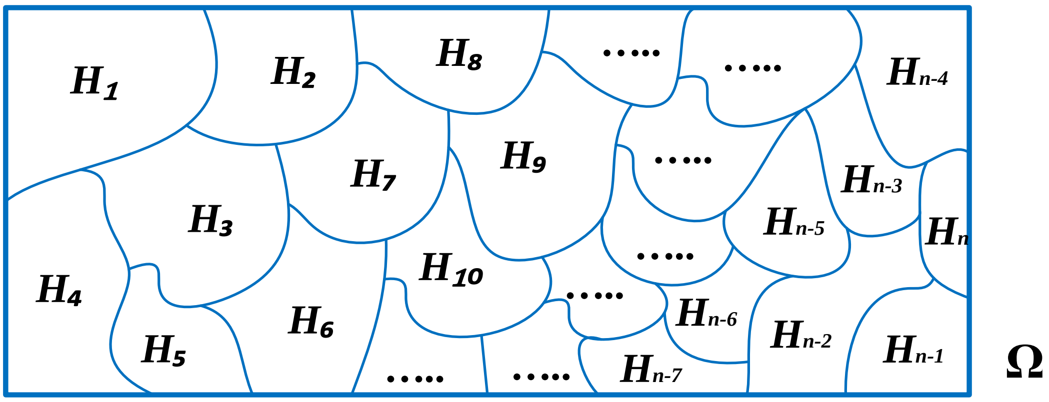
Формула полной вероятности.

Следствием двух основных теорем теории вероятностей - теоремы сложения и теоремы умножения - являются ***формула полной вероятности*** и ***формула Байеса***.

Пусть в результате некоторого опыта может наступить одно из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. $H_i, i=\overline{1,n}-$ образуют полную группу попарно несовместных событий, т.е. для них выполняется:

1) $H_i \cdot H_j = \varnothing,\ \forall i, j = \overline{1,n},\ i \neq j;$ 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

В результате опыта одно из событий $H_i, i=\overline{1,n}$ обязательно произойдёт.



События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют <u>***гипотезами***</u>.

Вероятности $H_1, H_2, \ldots, H_n$ оцениваются до проведения случайного испытания и называются <u>***априорными (доопытными) вероятностями гипотез***</u>:

$$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n).$$

Пусть в данном опыте наряду с $H_1, H_2, \ldots, H_n$, может наступить некоторое событие A, зависящее от $H_i, i=\overline{1,n}$.

При известных условных вероятностях наступления события A:

$$P(A \backslash H_1), P(A \backslash H_2), \ldots, P(A \backslash H_n)$$

ставится задача вычислить безусловную вероятность события A.

Ее можно найти, используя ***формулу полной вероятности***:

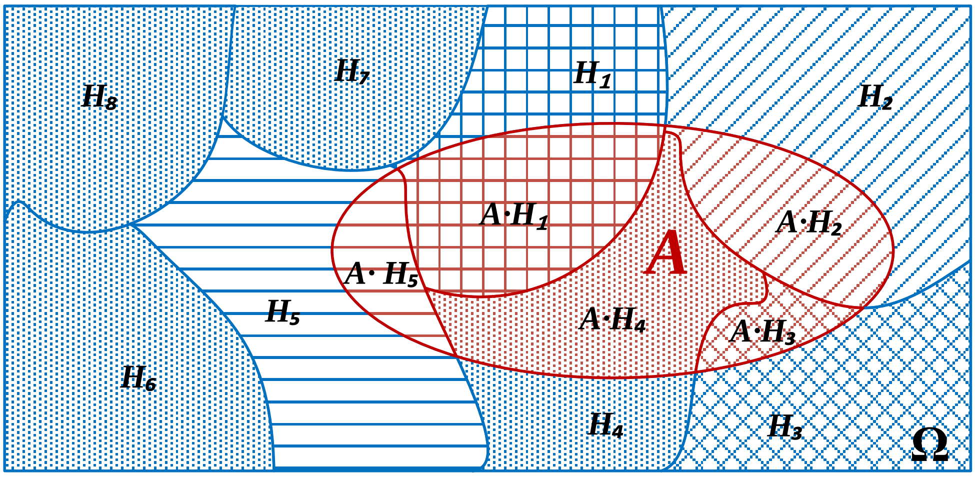
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\backslash H_i)P(H_i).$$

На рисунке ниже графическое изображение вышеизложенного в случае $H_i, i=\overline{1,8}$.

Из рисунка видно, что ненулевыми являются условные вероятности:

$$P(A\backslash H_1), P(A\backslash H_2), P(A\backslash H_3), P(A\backslash H_4), P(A\backslash H_5)\neq 0;$$

Тогда как: $P(A\backslash H_6)=P(A\backslash H_7)=P(A\backslash H_8)=0$



Вероятность события A в данном случае равна:

$$P(A)=P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3)+P(A|H_4)P(H_4)+P(A|H_5)P(H_5)$$

Формула Байеса

Поставим другую задачу. Пусть также в результате некоторого опыта может наступить одно из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с известными вероятностями $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$.

Проводится случайное испытание в результате которого наступило событие A, (т.е. получена дополнительная информация) условные вероятности которого $P(A\backslash H_1), P(A\backslash H_2), \ldots, P(A\backslash H_n)$ известны.

Можно поставить вопрос: Какие вероятности имеют теперь гипотезы в связи с появлением события A?

Ответ даёт ***формула Байеса***, которая позволяет получить апостериорные (послеопытные) условные вероятности гипотез: $P(H_1 \setminus A), P(H_2 \setminus A), \ldots, P(H_n \setminus A)$:

$$P(H_i \setminus A) = \frac{P(A \setminus H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A \setminus H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \setminus H_i) \cdot P(H_i)}, \ i = \overline{1,n}; \quad P(A) \neq 0$$

Примеры решения задач по теме 6:

Пример 6.1. *Студент знает 24 билета из 30. В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идёт сдавать экзамен первым или вторым?*

Решение: Опыт: Сдача экзамена.

1. Обозначим $A = \{$ экзамен сдан $\}$. Найдём вероятность того, что студент сдаст экзамен, если заходит первым.

Используя классическое определение вероятности, находим вероятность A так: всего билетов 30, из них «хороших» 24. Поэтому $P(A) = 24/30$.

2. Найдём вероятность того, что студент сдаст экзамен, если заходит вторым.

По прежнему $A = \{$ экзамен сдан $\}$. До нашего студента кто то зашёл, и мог взять «хороший» билет, или «плохой» билет («хорошесть» или « плохость» билетов рассматривается по отношению к нашему студенту) .

Введём гипотезы:

$$H_1 = \{ \text{ перед нашим студентом взяли хороший билет } \};$$

$$H_2 = \{ \text{ перед нашим студентом взяли плохой билет } \}.$$

Очевидно, что $P(H_1) = 24/30;\ P(H_1) = 6/30.$

Условные вероятности события A: $P(A \setminus H_1) = 23/29$, т.к. если взяли хороший билет, то всего билетов осталось 29 из них хороших 23. $P(A \setminus H_2) = 24/29 -$ если взяли плохой билет, то всего билетов осталось 29 из них хороших по прежнему 24. Окончательно:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(A \setminus H_i) P(H_i) = \frac{23}{29} \cdot \frac{24}{30} + \frac{24}{29} \cdot \frac{6}{30} = \frac{24}{29} \cdot \frac{(23+6)}{30} = \frac{24}{30}.$$

Таким образом вероятность события A не изменилась.

__Пример 6.2.__ В группе 30 студентов: 5 отличников, 10 хорошистов и 15 слабых студентов. Отличник сдаёт зачёт с первого раза с вероятностью $p_1 = 0.90$, хорошист – с вероятностью $p_2 = 0.75$, а слабый студент – с вероятностью $p_3 = 0.45$. Отвечают студенты в случайном порядке. Найти вероятность того, что первый отвечающий получит зачет. Найти вероятность того, что первый отвечавший был хорошист, если известно, что он получил зачет.

__Решение:__ ***Опыт:*** Проводится зачёт.

__1 этап:__ Введём события:

$$H_1 = \{\text{студент отличник}\}; \text{ тогда } P(H_1) = \frac{5}{30};$$

$$H_2 = \{\text{студент хорошист}\}; \; P(H_2) = \frac{10}{30};$$

$$H_3 = \{\text{студент слабый}\}; \; P(H_3) = \frac{15}{30};$$

Очевидно, что события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу попарно несовместных событий и могут быть выбраны в качестве гипотез.

Пусть событие $A = \{\text{первый отвечающий получит зачет}\}$. Это событие наступает только вместе с одним из H_i, $i = 1,2,3$, т.е. может произойти следующее:

$A \cdot H_1 = \{\text{первый отвечающий, получивший зачет, студент отличник}\}$; т.к. отличник с первого раза сдаёт с вероятностью $p_1 = 0{,}9$, то $P(A \setminus H_1) = 0{,}9$;

$A \cdot H_2 = \{\text{первый отвечающий, получивший зачет, студент хорошист}\}$, хорошист с первого раза сдаёт с вероятностью $p_2 = 0{,}75$, поэтому $P(A \setminus H_2) = 0{,}75$;

$A \cdot H_3 = \{\text{первый отвечающий, получивший зачет, студент слабый}\}$, слабый студент с первого раза сдаёт с вероятностью $p_3 = 0{,}45$, поэтому $P(A \setminus H_3) = 0{,}45$.

Используя формулу полной вероятности, можем найти безусловную вероятность события A:

$$P(A) = P(A \setminus H_1) \cdot P(H_1) + P(A \setminus H_2) \cdot P(H_2) + P(A \setminus H_3) \cdot P(H_3) =$$
$$= \frac{90}{100} \cdot \frac{5}{30} + \frac{75}{100} \cdot \frac{10}{30} + \frac{45}{100} \cdot \frac{15}{30} = \frac{450 + 750 + 675}{3000} = \frac{1875}{3000} = 0{,}625;$$

__2 этап:__ Первый отвечавший получил зачёт, т.е. испытание проведено. И мы хотим теперь понять а какова вероятность того, что это был хорошист? Т.е. необходимо переоценить вероятность гипотезы $H_2 = \{$ отвечавший студент хорошист $\}$, найти апостериорную вероятность $P(H_2 \setminus A)$.

Для того чтобы найти данную вероятность, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_2 \setminus A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A \setminus H_2)}{P(A)} = \frac{750}{3000} : \frac{1875}{3000} = \frac{750}{1875} = 0{,}4,$$

Из полученного видно, что безусловная вероятность события $H_2 = \{\text{студент хорошист}\}$ и условная различаются, т.е. $P(H_2) = 0{,}3 \neq P(H_2 \setminus A) = 0{,}4$. События A и H_2 зависимые.

<u>Пример 6.3.</u> *Найти вероятность того, что кровь от случайно выбранного донора подойдёт для переливания нуждающемуся человеку, если в составе населения лица с I-ой группой крови составляют 33%, со II-ой – 37%, с III-ей – 22% и с IV-ой – 8%, а кровь некоторой группы можно переливать только лицам с той же или большей по номеру группой крови.*

<u>Решение:</u> 1) Обозначим события:

$$H_i = \{ \text{ кровь донора } \boldsymbol{i}\text{-ой группы } \},\ i = \overline{1,4};$$

$$B_i = \{ \text{ кровь больного } \boldsymbol{i}\text{-ой группы } \},\ i = \overline{1,4};$$

$$A = \{ \text{ кровь можно переливать } \};$$

Изобразим схематически, как можно переливать кровь:

Донор группа крови	(можно переливать)	Больной группа крови
1	→→→→→→→→→→→→	1,2,3,4
2	→→→→→→→→→→→→	2,3,4
3	→→→→→→→→→→→→	3,4
4	→→→→→→→→→→→→	4

2) Оценим вероятности гипотез $P(H_i)$ и $P(B_i)$:

$$P(H_1) = 0{,}33;\quad P(H_2) = 0{,}37;\quad P(H_3) = 0{,}22;\quad P(H_4) = 0{,}08.$$

$$P(B_1) = 0{,}33;\quad P(B_2) = 0{,}37;\quad P(B_3) = 0{,}22;\quad P(B_4) = 0{,}08.$$

3) Найдём условные вероятности события $A \to \quad P(A \setminus H_i)$:

Вероятность события $P(A\setminus H_1)$- это вероятность того, что кровь можно переливать при условии, что донор 1-ой группы крови. Из схемы видно, что кровь таких доноров подходит всем, то есть её можно переливать с вероятностью единица $P(A\setminus H_1)=1$.

Вероятность события $P(A\setminus H_2)$- это вероятность того, что кровь можно переливать при условии, что донор 2-ой группы крови. По схеме: кровь таких доноров подходит больным со 2-ой, 3-ей, 4-ой группами крови, поэтому можно переливать только им. Поэтому вероятность равна: $P(A\setminus H_2)=P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=0,37+0,22+0,08=0,67$;

Вероятность события $P(A\setminus H_3)$- это вероятность того, что кровь можно переливать при условии, что донор 3-ей группы крови. Из схемы: кровь таких доноров подходит больным с 3-ей, 4-ой группами крови, поэтому можно переливать только если такие пациенты и условная вероятность A равна: $P(A\setminus H_3)=P(B_3)+P(B_4)=0,22+0,08=0,3$;

Аналогично рассуждая и из схемы, получаем условную вероятность $P(A\setminus H_4)=P(B_4)=0,08$.

4) Можем найти безусловную вероятность события $A=\{$ кровь можно переливать $\}$ используя формулу полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\setminus H_i)P(H_i)=P(A\setminus H_1)P(H_1)+P(A\setminus H_2)P(H_2)+P(A\setminus H_3)P(H_3)+$$
$$+P(A\setminus H_4)P(H_4)=1\cdot 0,33+0,67\cdot 0,37+0,3\cdot 0,22+0,08\cdot 0,08=0,6503.$$

<u>Пример 6.4.</u> *Имеются две урны. В первой – 3 белых и 2 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую перекладывают вслепую два шара. Найти вероятность того, что шар, взятый из второй урны после перекладывания, будет белым.*

<u>Решение:</u> Опыт: из первой урны перекладывают во вторую 2 шара.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{1}-\text{ая урна:}\\ \underbrace{3\text{ белых} \;+\; 2\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\mathbf{2}-\text{ая урна:}\\ \underbrace{4\text{ белых} \;+\; 4\text{ черных}}_{\text{шара}}\end{array}}$$

1) Введём гипотезы:

$H_1=\{$ из первой урны во вторую переложили 2 белых шара $\}$;

$H_2=\{$ из первой урны во вторую переложили 2 черных шара $\}$;

$$H_3 = \{\ \text{из первой урны во вторую переложили 1 белый и 1 чёрный шар}\ \}.$$

Рассмотрим схему:

$$\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна было:}\\ 3\text{ белых} \quad + \quad 2\text{ черных}\end{matrix}}_{\text{шара}}\right] \xrightarrow{\textit{перекладываем 2 шара}} \begin{cases} 2\ \textit{белых шара} & \rightarrow \left\{\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{2}\text{ урна стало:}\\ 6\text{ белых} \quad + \quad 4\text{ черных}\end{matrix}}_{\textit{шара}}\right]\right. \\ 2\ \textit{черных шара} & \rightarrow \left\{\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ 4\text{ белых} \quad + \quad 6\text{ черных}\end{matrix}}_{\textit{шара}}\right]\right. \\ 1\ \textit{белый и}\ 1\ \textit{черный} & \rightarrow \left\{\left[\underbrace{\begin{matrix}\textbf{1}\text{ урна стало:}\\ 5\text{ белых} \quad + \quad 5\text{ черных}\end{matrix}}_{\textit{шара}}\right]\right. \end{cases}$$

Найдём вероятности гипотез: $P(H_1)$: нам нужно переложить 2 белых шара, (это все равно, что взять из 1-ой урны 2 белых шара), т.к. всего способов взять 2 шара из $5\ - C_5^2$, белые можем взять C_3^2 способами, по классическому определению вероятности находим $P(H_1) = C_3^2 / C_5^2 = 0{,}3$. Аналогично рассуждая находим остальные вероятности: $P(H_2) = C_2^2 / C_5^2 = 0{,}1$; $P(H_3) = \left(C_3^1 \cdot C_2^1\right) / C_5^2 = 0{,}6$.

Условие нормировки выполняется $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}6 = 1$, значит вероятности гипотез оценены верно.

2) В задаче нужно найти вероятность события:

$$A = \{\ \text{шар, взятый из второй урны после перекладывания, будет белым}\ \};$$

Это можно сделать, используя формулу полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \setminus H_i) P(H_i);$$

Вероятности гипотез уже известны, осталось оценить условные вероятности $P(A \setminus H_i)$:

$P(A \setminus H_1) -$ это вероятность того, что взяли белый шар, при условии, что переложили 2 белых из 1-ой урны. Из схемы видно, что после перекладывания во 2-ой урне стало 6 белых шаров, поэтому взять один можно 6 способами. Всего способов взять любого цвета один шар 10, поэтому $P(A \setminus H_1) = 6/10$.

Аналогично рассуждая находим $P(A \setminus H_2) = 4/10, P(A \setminus H_2) = 5/10$.

Можем записать безусловную вероятность события A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\setminus H_i)P(H_i)=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}=0,52.$$

Пример 6.5. *Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Какова вероятность того, что наудачу взятая из ящика деталь, будет бракованной? Производительность 1-го станка в 2 раза больше, чем второго, а третьего в 3 раза меньше, чем второго.*

Решение: ***Введём*** гипотезы:

$$H_1=\{\text{ деталь произведена на 1-ом станке }\};$$
$$H_2=\{\text{ деталь произведена на 2-ом станке }\};$$
$$H_3=\{\text{ деталь произведена на 3-ем станке }\}.$$

Оценим их вероятности. Известно, что производительность первого станка в 2 раза больше второго, т.е. если вероятность производства детали на втором $P(H_2)=x$, то на первом она будет равна $P(H_1)=2x$, тогда на третьем $P(H_3)=x/3$, по условию нормировки должно выполняться: $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=1$. Поэтому $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=2x+x+\frac{x}{3}=1$, откуда $P(H_2)=x=0,3$, тогда $P(H_1)=0,6$ и $P(H_3)=0,1$. «

Нам нужно найти вероятность события:

$$A=\{\text{ наудачу взятая из ящика деталь, будет бракованной }\}.$$

A наступает совместно с H_i, поэтому необходимо оценить условные вероятности $P(A\setminus H_i)$: $P(A\setminus H_1)=0,01$, т.к. известно, что вероятность брака для первого станка именно такая. Остальные вероятности также из условия задачи: $P(A\setminus H_2)=0,02$ и $P(A\setminus H_3)=0,03$.

Тогда окончательно:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\setminus H_i)P(H_i)=\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{100}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{100}+\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{100}=0,015.$$

Пример 6.6. *В урне первоначально находились n белых и m черных шаров. Один шар был утерян, и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлечены 2 шара, и оба оказались белыми. Найти вероятность того, что потерян белый шар.*

Решение: Введём гипотезы:

$$H_1 = \{\ \text{утерян белый шар}\ \};$$
$$H_2 = \{\ \text{утерян чёрный шар}\ \};$$

Вероятность гипотезы H_1: $P(H_1) = n/(n+m)$.

Рассуждаем так при нахождении: всего шаров в урне $n+m$. Т.е. общее число исходов $N = n+m$.

Какой-то шар был утерян, а для того чтобы потерять, его как минимум нужно взять из урны. Взять белый шар можем n способами.

Аналогично рассуждая получаем вероятность второй гипотезы: $P(H_2) = m/(n+m)$.

Обозначим событие $A = \{$ *из урны без возвращения достали 2 белых шара* $\}$.

$P(A \backslash H_1)-$ это вероятность того, что достали 2 белых шара, при условии, что потеряли белый шар.

$P(A \backslash H_1)-$ это вероятность того, что достали 2 белых шара, при условии, что потеряли чёрный шар.

Оценим эти вероятности: $P(A \backslash H_1) = \dfrac{n-1}{n+m-1} \cdot \dfrac{n-2}{n+m-2}$; $P(A \backslash H_2) = \dfrac{n}{n+m-1} \cdot \dfrac{n-1}{n+m-2}$.

Как нашли $P(A \backslash H_1)$-? При нахождении использовали теорему умножения для зависимых событий.

Обозначим $B_1 = \{$ достали 1-ый белый шар $\}$; $B_2 = \{$ 2-ой белый шар $\}$, тогда

$A \backslash H_1 = B_1 \cdot B_2$ и $P(A \backslash H_1) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \backslash B_1)$. Вероятность B_1 равна: всего исходов после потери одного белого шара $N = n+m-1$, благоприятствующих B_1 исходов

$M_{B_1} = n-1$, т.е. $P(B_1) = \dfrac{n-1}{n+m-1}$. Условная вероятность $P(B_2 \backslash B_1)$: после того как достали 1-ый белый шар, шаров осталось $N = n+m-2$, из них белых $n-2$, поэтому $P(B_2 \backslash B_1) = \dfrac{n-2}{n+m-2}$. Таким образом:

$$P(A \backslash H_1) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \backslash B_1) = \frac{n-1}{n+m-1} \cdot \frac{n-2}{n+m-2}.$$

Аналогично рассуждая нашли условную вероятность события $P(A \backslash H_2)$. У нас есть все необходимое, чтобы оценить безусловную вероятность события A, которая равна:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(A\setminus H_i)P(H_i)=\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{n-2}{n+m-2}\cdot\frac{n}{n+m}+\frac{n}{n+m-1}\cdot\frac{n-1}{n+m-2}\cdot\frac{m}{n+m}=$$
$$=\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}$$

2) Переоценим вероятность $P(H_1)=n/n+m$ с учётом наблюдённого результата опыта: *достали 2 белых шара*.

Это можно сделать используя формулу Байеса:

$$P(H_1\setminus A)=\frac{P(A\setminus H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{n-2}{n+m-2}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{(n+m)(n+m-1)}{n(n-1)}=\frac{n-2}{n+m-2}.$$

То есть вероятность того, что был утерян белый шар, при условии, что при проведении опыта были извлечены 2 белых шара равна $(n-2)/(n+m-2)$.

Пример 6.7. *Для поисков самолёта, пропавшего в одном из двух возможных районов с вероятностями 0,8 и 0,2, для первого и второго районов соответственно, выделено десять независимых вертолётов. Как следует распределить вертолёты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолёта была наибольшей, если каждый вертолёт обнаруживает пропавший самолёт с вероятностью 0,2. Найти вероятность обнаружения самолёта при оптимальной процедуре поиска.*

Решение: ***Введём*** гипотезы:

$$H_1=\{\text{ самолёт пропал в первом районе }\};$$

$$H_2=\{\text{ самолёт пропал во втором районе }\};$$

Из условия известно, что $P(H_1)=0{,}8;\ P(H_2)=0{,}2$.

Обозначим событие $A=\{$ самолёт найден $\}$.

Введём дополнительные обозначения:

$m-$количество самолётов, отправленных в 1-ый район;

$(10-m)-$количество самолётов, отправленных во 2-ой район.

$B_i=\{\ i-$ый вертолёт обнаружил самолёт $\}$; тогда из условия $P(B_i)=0{,}2$, а $P(\overline{B_i})=0{,}8$.

Рассмотрим событие:

$D=\{\overline{B_1}\cdot\overline{B_2}\cdot......\cdot\overline{B_{m-1}}\cdot\overline{B_m}\}=\{$ ни один из m вертолётов, отправленных в 1-ый р-н не нашли самолёт $\}$, т.к. $\{\overline{B_i},\ i=\overline{1,m}\}-$ независимые события, то вероятность D, равна:

$$P(D)=P\left(\overline{B_1}\cdot\overline{B_2}\cdot......\cdot\overline{B_{m-1}}\cdot\overline{B_m}\right)=P\left(\overline{B_1}\right)\cdot....\cdot P\left(\overline{B_m}\right)=0,8^m;$$

Событие $\overline{D}=\left\{\overline{\overline{B_1}\cdot\overline{B_2}\cdot......\cdot\overline{B_{m-1}}\cdot\overline{B_m}}\right\}=\left\{\overline{\overline{B_1}}+\overline{\overline{B_2}}+......+\overline{\overline{B_{m-1}}}+\overline{\overline{B_m}}\right\}=\left\{B_1+B_2+...+B_m\right\}=\{$ самолёт обнаружил хотя бы один из m вертолётов $\}=\{$ самолёт найден в 1-ом районе $\}$

$$P\left(\overline{D}\right)=1-P(D)=P(A\setminus H_1)=1-0,8^m.$$

Аналогично рассуждая можем получить для 2-го района: $P(A\setminus H_2)=1-0,8^{10-m}$.

Теперь, используя формулу полной вероятности, можем записать безусловную вероятность события $A=\{$ самолёт найден $\}$:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(A\setminus H_i)P(H_i)=\left(1-0,8^m\right)\cdot 0,8+\left(1-0,8^{10-m}\right)\cdot 0,2=1-0,8^{m+1}-0,2\cdot 0,8^{10-m};$$

Считая $P(A)$ функцией непрерывного аргумента m, найдём экстремум этой функции.

$$P_m^{'}=-0,8^{m+1}\ln 0,8-0,2\cdot(10-m)^{'}\,0,8^{10-m}\ln 0,8=-0,8^{m+1}\ln 0,8+0,2\cdot 0,8^{10-m}\ln 0,8=$$
$$=\ln 0,8\cdot\left(0,2\cdot 0,8^{10-m}-0,8^{m+1}\right)=0$$

Откуда получаем $0,2\cdot 0,8^{10-m}=0,8^{m+1}$.

Прологарифмируем обе части равенства:

$\lg\left(0,2\cdot 0,8^{10-m}\right)=(m+1)\lg 0,8$, откуда по свойству логарифмов: $\lg 0,2+(10-m)\lg 0,8=(m+1)\lg 0,8$, (положим $\lg 0,2\approx -0,7;\ \lg 0,8\approx -0,1;$) Тогда окончательно: $-0,7+(10-m)(-0,1)=(m+1)(-0,1)$. Откуда $m=8$.

Вероятность обнаружения самолёта в случае если в 1-ый район будет отправлено 8 вертолётов, а во 2-ой район 2 вертолёта равна:

$$P(A)=\left(1-0,8^8\right)\cdot 0,8+\left(1-0,8^2\right)\cdot 0,2=0,738.$$

__Пример 6.8.__ *Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить хороший билет будет меньше, когда он берет билет первым или последним?*

__Решение:__ Введём обозначения:

$n-$ всего билетов; $m-$«хороших» билетов (которые студент знает); тогда $(n-m)-$ «плохих» билетов (которые студент не знает).

Обозначим событие $A=\{$ студент достал счастливый билет $\}$.

Ранее в ***примере 6.1.*** мы нашли вероятности того, что студент возьмёт хороший билет, если зайдёт первым или вторым, обе вероятности равны: $P(A) = m/n$.

Найдём вероятность события A в случае если наш студент зайдёт $(k+1)-$ым, это может быть последним, предпоследним и пр.

Будем считать, что до нашего студента зашло k человек, то есть было взято k билетов. Обозначим:

$$H_{ks} = \{\ k \text{ билетов взяли, из них } s \text{ таких, которые наш студент знал } \}.$$

Если взяли k билетов, из них s «хороших», тогда осталось $(k-s)-$ билетов, которые студент не знает («плохих»).

Найдём вероятность H_{ks}: $P(H_{ks}) = \left(C_m^s \cdot C_{n-m}^{k-s}\right) \Big/ C_n^k$.

<u>*Как нашли?*</u> . Использовали классическое определение вероятности.

Ровно k билетов из n можно взять C_n^k способами, т.е. общее число исходов $N = C_n^k$.

Найдём $M_{H_{ks}}$ – число исходов, благоприятствующих событию:

$$H_{ks} = \{\ \text{взяли } k \text{ билетов из них } s \text{ хороших } \underline{\boldsymbol{и}}\ (k-s) \text{ плохих } \}.$$

Так как всего хороших билетов m, из них взяли, зашедшие до нашего студента $-\ s$, способов так взять: C_m^s. «Плохих» билетов $(n-m)$, из них взяли $(k-s)$, по правилу умножения находим общее число способов: $M_{H_{ks}} = C_m^s \cdot C_{n-m}^{k-s}$.

Найдём условную вероятность $P(A \backslash H_{ks})$. Это вероятность того, что студент сдаст экзамен, при условии что до него взяли k билетов из них s «хороших».

Общее число исходов $N = n-k$, т.е. так как студент заходит $k-$ым, то всего билетов очевидно осталось $n-k$.

И т.к. нас интересует вероятность сдачи экзамена, то благоприятствующими исходами будет количество оставшихся хороших билетов, а их $m-s$. Таким образом условная вероятность равна $P(A \backslash H_{ks}) = \dfrac{m-s}{n-k}$.

Можем найти безусловную вероятность события A с использованием формулы полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{s=0}^{k}P(A\setminus H_{ks})\cdot P(H_{ks})=\sum_{s=0}^{k}\frac{m-s}{n-k}\cdot\frac{C_m^s\cdot C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}=$$

$$=\sum_{s=0}^{k}\frac{m!}{s!(m-s)!}\frac{(n-m)!}{(k-s)!((n-m)-(k-s))!}\frac{(n-k)!k!}{n!}\cdot\frac{m-s}{n-k}=$$

$$=\frac{m}{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{(m-1)!}{s!(m-s-1)!}\frac{(n-m)!}{(k-s)!((n-m)-(k-s))!}\frac{(n-k-1)!k!}{n!}=$$

$$=\frac{m}{n}\sum_{s=0}^{k}C_{m-1}^{s}C_{n-m}^{k-s}\frac{1}{C_{n-1}^{k}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{C_{n-1}^{k}}\underbrace{\sum_{s=0}^{k}C_{m-1}^{s}C_{n-m}^{k-s}}_{C_{n-1}^{k}}=\frac{m}{n}.$$

<u>Замечание:</u> При получении ответа воспользовались биномиальной свёрткой Вандермонда:

$$C_{n_1+n_2}^{n}=\sum_{k=0}^{n_1}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{n-k};$$

Итак, мы получили вероятность события $A=\{$ студент достал счастливый билет $\}$ если заходил $(k+1)-$ым. Таким образом неважно каким заходит студент по счету, первым, вторым или последним, вероятность сдать экзамен абсолютно одинаковая во всех случаях, и равна: $P(A)=\frac{m}{n}$.

<u>Пример 6.9.</u> *В каждом из n экзаменационных билетов 2 вопроса. Студент знает ответы лишь на k вопросов, $k<2n$. Чтобы сдать экзамен, надо ответить либо на оба вопроса взятого билета, либо на один вопрос своего билета и на один вопрос из дополнительного билета. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан.*

<u>Решение:</u> Всего $n-$ билетов, по 2 вопроса. т.е. $2n$ экзаменационных вопросов, из них:

$k-$ «хороших» вопросов;

$(2n-k)-$ «плохих» вопросов.

Введём гипотезы:

$H_1=\{$ студент знает оба вопроса в билете $\}$;

$H_2=\{$ студент не знает оба вопроса в билете $\}$;

$H_3=\{$ студент один вопрос знает в билете, другой нет $\}$.

Событие $A=\{$ экзамен сдан $\}$.

$P(A\setminus H_1)-$ вероятность того, что студент сдаст экзамен, при условии, что он знает оба вопроса. Очевидно, что $P(A\setminus H_1)=1$;

$P\left(A\setminus H_2\right)-$ вероятность того, что студент сдаст экзамен, при условии, что он не знает оба вопроса. В этом случае $P\left(A\setminus H_2\right)=0$.

$P\left(A\setminus H_3\right)-$ вероятность того, что студент сдаст экзамен, при условии, что один вопрос знает, а один нет. Из условия известно, что студент может сдать экзамен, не зная один из основных вопросов, в случае если ответит на один дополнительный вопрос. Оценим эту вероятность. После того, как студент взял один билет, осталось $\left(2n-2\right)$ вопроса, из них $\left(k-1\right)-$«хороших» вопросов. В этом случае $P\left(A\setminus H_3\right)=\dfrac{k-1}{2n-2}$.

Найдём вероятности гипотез:

$$P\left(H_1\right)=\frac{k}{2n}\cdot\frac{k-1}{2n-1}.$$

Использовали при нахождении $P\left(H_1\right)$ теорему умножения и классическое определение вероятности. Пусть $S_i=\{\ i-\text{ый билет хороший}\ \}$, тогда

$$P\left(H_1\right)=P\left(S_1\cdot S_2\right)=P\left(S_1\right)\cdot P\left(S_2\setminus S_1\right)=\frac{k}{2n}\cdot\frac{k-1}{2n-1}.$$

Аналогично для $P\left(H_2\right)=\dfrac{2n-k}{2n}\cdot\dfrac{2n-k-1}{2n-1}$.

Найдём вероятность гипотезы H_3:

$$P\left(H_3\right)=P\left(S_1\cdot\overline{S_2}\right)+P\left(\overline{S_1}\cdot S_2\right)=P\left(S_1\right)\cdot P\left(\overline{S_2}\setminus S_1\right)+P\left(\overline{S_1}\right)\cdot P\left(S_2\setminus\overline{S_1}\right)=$$
$$=\frac{k}{2n}\cdot\frac{2n-k}{2n-1}+\frac{2n-k}{2n}\cdot\frac{k}{2n-1}=\frac{k}{n}\cdot\frac{2n-k}{2n-1}.$$

Можем найти безусловную вероятность события $A=\{\ \text{экзамен сдан}\ \}$ по формуле полной вероятности:

$$P\left(A\right)=\sum_{i=1}^{3}P\left(A\setminus H_i\right)P\left(H_i\right)=1\cdot\frac{k}{2n}\cdot\frac{k-1}{2n-1}+0\cdot\frac{2n-k}{2n}\cdot\frac{2n-k-1}{2n-1}+\frac{k-1}{2n-2}\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{2n-k}{2n-1}=$$
$$=\frac{k}{2n}\cdot\frac{k-1}{2n-1}+\frac{k-1}{2n-2}\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{2n-k}{2n-1}=\frac{k\left(k-1\right)}{2n\left(2n-1\right)}\left(1+\frac{2n-k}{n-1}\right)$$

<u>Пример 6.10.1</u> *В урне 5 шаров, цвет каждого из них равновероятно может быть черным или белым. Из неё извлекаются последовательно с возвращением 3 шара. Какова вероятность того, что в урне вообще все шары белые, если черные шары не извлекались?*

<u>Решение:</u> Сформулируем событие A, вероятность которого нам нужно найти:

$$A = \{\text{из урны достали последовательно с возвращением 3 белых шара}\}$$

1. Шары, находящиеся в урне, делаем различимыми между собой, можем, например, их занумеровать. При проведении опыта, из урны извлечено 3 белых шара, так как известно, что черные шары не извлекались. В данной ситуации, мы могли извлечь один и тот же белый шар (с одним и тем же номером), потому что шары извлекаются с возвращением, а могли извлечь три разных шара (с разными номерами), могли два раза извлечь один и тот же шар, а один раз какой-то другой шар. То есть вариантов достать 3 белых шара с возвращением может быть много, если считать шары различимыми.

В урне неизвестно, сколько белых шаров, но нам понятно, что их не меньше чем 1, так как какой-то как минимум 1 белый шар мы все-таки достаём. Поэтому введём вероятности гипотез так:

$$H_1 - \{\text{в урне находится 1 белый шар}\};$$

$$H_2 - \{\text{в урне находится 2 белых шара}\};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_i - \{\text{в урне находится } \boldsymbol{i} \text{ белых шаров}\}, i = \overline{1,5}.$$

a) Оценим вероятности всех гипотез.

Найдём вероятность гипотезы H_1: $P\left(H_1\right) = C_5^1 / 2^5$

Как получили эту вероятность? Использовали классический способ нахождения вероятности. Рассуждаем так (можно и по другому):

В урне находится 5 различимых шаров, из них один белый. Это может быть шар с номером 1, или шар с номером 2 и т.д. Всего вариантов нахождения одного белого шара пять (на одной из пяти позиций). Таким образом $M = C_5^1$.

Найдём N : Мы интересуемся пятью шарами, находящимися в урне. Если бы мы доставали эти шары, то результатом любого испытания являлся бы набор из 5 шаров, и этот набор мог бы выглядеть, например, так:

$$\underbrace{\begin{matrix}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)\\ \text{ч}&\text{ч}&\text{б}&\text{б}&\text{ч}\end{matrix}}_{\text{5 шаров}} \quad \text{или} \quad \underbrace{\begin{matrix}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)\\ \text{б}&\text{б}&\text{б}&\text{б}&\text{ч}\end{matrix}}_{\text{5 шаров}} \quad \text{или} \quad \underbrace{\begin{matrix}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)\\ \text{ч}&\text{ч}&\text{ч}&\text{ч}&\text{б}\end{matrix}}_{\text{5 шаров}}$$

На каждой из пяти возможных позиций может быть 2 варианта шара: чёрный или белый. Используя правило умножения комбинаторики, находим $N = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$.

b) $P\left(H_2\right) = C_5^2 / 2^5$ Как получили $M = C_5^2$:

Из пяти шаров находящихся в урне, белыми могут быть первый и четвёртый, второй и пятый, третий и пятый и т.д. Всего вариантов номеров для двух белых шаров C_5^2.

Рассуждая абсолютно аналогично, для остальных H_i получаем их вероятности :

$$P(H_3)=C_5^3/2^5;\ P(H_4)=C_5^4/2^5;\ P(H_5)=C_5^5/2^5$$

2. Найдём условные вероятности $P(A\setminus H_i)$:

$$P(A\backslash H_1)=\left\{\begin{matrix}\text{вероятность того, что из урны, где 5 шаров, достали последовательно}\\ \text{с возвращением 3 белых шара, при условии, что в}\\ \text{ней 1 белый шар.}\end{matrix}\right\}$$

……………………………………………………………………………….…………………….

$$P(A\backslash H_i)=\left\{\begin{matrix}\text{вероятность того, что из урны, где 5 шаров, достали последовательно}\\ \text{с возвращением 3 белых шара, при условии, что в}\\ \text{ней } i \text{ белых шаров.}\end{matrix}\right\}$$

a) Найдём $P(A\setminus H_1)$. Используем опять классическое определение вероятности.

<u>Найдём</u> N : Мы достаём 3 шара последовательно (из урны, где всего 5 шаров) и всякий раз, для каждой из позиций нашей выборки с возвращением может быть 5 вариантов.

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix}(1) & (2) & (3)\\ 5\ \cdot & 5\ \cdot & 5\end{matrix}}^{\textbf{3 \textit{шара}}}}_{\textit{число вариантов выбора}}\quad - \quad 5^3=125 \text{ вариантов выборок с возвращением по 3.}$$

Итак $N=5^3$.

<u>Найдём</u> M : В силу того, что шар у нас всего один белый, то из 5^3 вариантов, только один благоприятствует наступлению $A\setminus H_1$:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix}(1) & (2) & (3)\\ 1\ \cdot & 1\ \cdot & 1\end{matrix}}^{\textbf{3 \textit{шара}}}}_{\textit{число вариантов выбора}}\quad - \quad \text{вариантов выборок с возвращением, когда в урне 1 белый шар.}$$

Окончательно $P(A\setminus H_1)=1/5^3$.

b) Оценим $P(A\setminus H_2)$. Очевидно, $N=5^3$. Найдём M :

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix}(1) & (2) & (3)\\ 2\ \cdot & 2\ \cdot & 2\end{matrix}}^{\textbf{3 \textit{шара}}}}_{\textit{число вариантов выбора}}\quad - \quad \text{вариантов выборок с возвращением, когда в урне 2 белых шара.}$$

На первое место может попасть один из двух белых шаров, на второе тоже один из двух, т.к. шары мы возвращаем, для третьего места тоже 2 варианта. По правилу умножения в комбинаторике получаем $M = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$. Тогда $P(A\setminus H_2) = 2^3/5^3$

c) Аналогично находим $P(A\setminus H_i), i=\overline{3,5}$:

$$P(A\setminus H_3) = 3^3/5^3;\ P(A\setminus H_3) = 4^3/5^3;\ P(A\setminus H_3) = 5^3/5^3 = 1$$

3. Теперь можем найти вероятность события:

$$A = \{\text{из урны достали последовательно с возвращением 3 белых шара}\}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A\setminus H_i)\cdot P(H_i) = \frac{1}{5^3}\cdot\frac{C_5^1}{2^5} + \frac{2^3}{5^3}\cdot\frac{C_5^2}{2^5} + \frac{3^3}{5^3}\cdot\frac{C_5^3}{2^5} + \frac{4^3}{5^3}\cdot\frac{C_5^4}{2^5} + \frac{5^3}{5^3}\cdot\frac{C_5^5}{2^5}$$

или

$$P(A) = \frac{1^3\cdot C_5^1 + 2^3\cdot C_5^2 + 3^3\cdot C_5^3 + 4^3\cdot C_5^4 + 5^3\cdot C_5^5}{5^3\cdot 2^5}$$

4. И в заключении, вспомним, что нам нужно было оценить вероятность такого события:

$$B = \left\{\begin{matrix}\text{в урне все 5 белых шаров,}\\ \text{при условии, что последовательно с возвращением достали 3 белых}\\ .\end{matrix}\right\}$$

Событие $B = H_5\setminus A$.

Вероятность $P(H_5\setminus A)$, это апостериорная вероятность, которую мы можем найти, используя формулу Байеса:

$$P(H_5\setminus A) = \frac{P(A\setminus H_5)\cdot P(H_5)}{P(A)} = \frac{5^3\cdot C_5^5}{5^3\cdot 2^5}\cdot\frac{5^3\cdot 2^5}{1^3\cdot C_5^1 + 2^3\cdot C_5^2 + 3^3\cdot C_5^3 + 4^3\cdot C_5^4 + 5^3\cdot C_5^5} = \frac{5^3}{1^3\cdot C_5^1 + 2^3\cdot C_5^2 + 3^3\cdot C_5^3 + 4^3\cdot C_5^4 + 5^3\cdot C_5^5}.$$

Пример 6.10.2. Из урны, где имеется $\boldsymbol{n}$ шаров, причём цвет каждого из них равновероятно может быть черным или белым, извлекаются последовательно с возвращением $\boldsymbol{k}$ шаров. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?

Решение:

1. В данной задаче имеется $\boldsymbol{n}$ шаров, (вместо пяти в предыдущей задаче), последовательно извлекается $\boldsymbol{k}$ шаров, где $\boldsymbol{k \le n}$. Сформулируем событие $\boldsymbol{A}$:

$$A = \{\text{из урны последовательно с возвращением достали } \boldsymbol{k} \text{ белых шаров}\}$$

Очевидно, что гипотезы, в данной задаче могут быть сформулированы так:

$$H_1 - \{\text{в урне находится 1 белый шар}\};$$

$$H_2 - \{\text{в урне находится 2 белых шара}\};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_i - \{\text{в урне находится } \boldsymbol{i} \text{ белых шаров}\}, i = \overline{1, n}.$$

Вероятности гипотез находим, следуя тем же рассуждениям как в предыдущей задаче.

2. Найдём вероятности гипотез $P(H_i)$:

a) $P(H_1) = \frac{C_n^1}{2^n}$. Как получили эту вероятность? Использовали классический способ нахождения вероятности: $P(A) = \frac{M}{N}$. Рассуждали так:

В урне находится n различимых шаров, из них один белый. Это может быть шар с номером 1, или шар с номером 2 и т.д. Всего вариантов для номера белого шара n. Таким образом, $M = C_n^1$.

Найдём N: Мы интересуемся n шарами, находящимися в урне. Если бы мы доставали эти шары, то результатом любого испытания являлся бы набор из n шаров, и этот набор мог бы выглядеть, например, так:

$$\begin{matrix}(1) & (2) & (3)\cdots & (n-1) & (n)\end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix}(1) & (2) & (3)\cdots & (n-1) & (n)\end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix}(1) & (2) & (3)\cdots & (n-1) & (n)\end{matrix}$$
$$\underbrace{\begin{matrix}ч & ч & б\ \cdots & б & ч\end{matrix}}_{n\ шаров} \qquad \underbrace{\begin{matrix}б & б & б\ \cdots & б & ч\end{matrix}}_{n\ шаров} \qquad \underbrace{\begin{matrix}ч & ч & ч\ \cdots & ч & б\end{matrix}}_{n\ шаров}$$

На каждой из n возможных позиций может быть 2 варианта шара: черный или белый. Используя правило умножения комбинаторики, находим $N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{n \text{ раз}} = 2^n$.

b) $P(H_2) = \frac{C_n^2}{2^n}$. Как получили $M = C_n^2$:

Из n шаров находящихся в урне, белыми могут быть первый и n - ый, второй и пятый, третий и десятый и т.д. Всего вариантов двух белых шаров, число способов их выбрать из n, т.е. C_n^2.

Рассуждая абсолютно аналогично, для всех остальных $P(H_i)$, получаем вероятности гипотез:

$$P(H_i) = \frac{C_n^i}{2^n}, i = \overline{1, n}.$$

3. Найдём условные вероятности $P(A \backslash H_i)$:

$$P(A\backslash H_1) = \left\{ \begin{matrix} \text{вероятность того, что из урны, где } \boldsymbol{n} \text{ шаров, достали последовательно} \\ \text{с возвращением } \boldsymbol{k} \text{ белых шара, при условии, что в} \\ \text{ней 1 белый шар.} \end{matrix} \right\}$$

……………………………………………………………………………………

$$P(A\backslash H_i) = \left\{ \begin{matrix} \text{вероятность того, что из урны, где } \boldsymbol{n} \text{ шаров, достали последовательно} \\ \text{с возвращением } \boldsymbol{k} \text{ белых шара, при условии, что в} \\ \text{ней } i \text{ белых шаров.} \end{matrix} \right\}$$

a) Найдём $\boldsymbol{P(A\backslash H_1)}$. Мы достаём $\boldsymbol{k}$ шаров последовательно (из урны, где всего $\boldsymbol{n}$ шаров) и всякий раз, для каждой из позиций нашей выборки с возвращением может быть $\boldsymbol{n}$ вариантов.

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} (1) & (2) & \cdots & (k-1) & (k) \\ n \cdot & n \cdot & \cdots & \cdot n \cdot & n \end{matrix}}^{k \text{ шаров}}}_{\text{число вариантов выбора}} - \ n^k - \text{ вариантов выборок с возвращением по } \boldsymbol{k} \text{ элементов}$$

Итак, $N = n^k$.

Найдём $\boldsymbol{M}$: В силу того, что шар у нас всего один белый, то из n^k вариантов, только один благоприятствует наступлению $A\backslash H_1$:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} (1) & (2) & \cdots & (k-1) & (k) \\ 1 \cdot & 1 \cdot & \cdots & \cdot 1 \cdot & 1 \end{matrix}}^{k \text{ шаров}}}_{\text{число вариантов выбора}} - \ 1^k \quad \text{вариантов выборок с возвращением, когда в урне 1 белый}$$

шар.

Окончательно, $P(A\backslash H_1) = \frac{1^k}{n^k}$.

b) Найдём $\boldsymbol{P(A\backslash H_2)}$. Очевидно, $N = n^k$. Найдем M:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} (1) & (2) & \cdots & (k-1) & (k) \\ 2 \cdot & 2 \cdot & \cdots & \cdot 2 \cdot & 2 \end{matrix}}^{k \text{ шаров}}}_{\text{число вариантов выбора}} - \ 2^k \text{ вариантов выборок с возвращением, если в урне 2 белых}$$

шара.

На первое место может попасть один из двух имеющихся белых шаров, на второе тоже один из двух, (т.к. шары мы возвращаем), и так далее, для n места тоже 2 варианта. По правилу умножения в комбинаторике получаем $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$. Тогда $P(A\backslash H_2) = \frac{2^k}{n^k}$.

c) Аналогично рассуждая, находим $P(A\backslash H_i), i = \overline{3, n}$:

$$P(A\backslash H_i) = \frac{i^k}{n^k};$$

4. Теперь можем найти вероятность события:

$$A = \{\text{из урны последовательно с возвращением достали } \boldsymbol{k} \text{ белых шара}\}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\backslash H_i) \cdot P(H_i) = \frac{1^k}{n^k} \cdot \frac{C_n^1}{2^n} + \frac{2^k}{n^k} \cdot \frac{C_n^2}{2^n} + \dots + \frac{(n-1)^k}{n^k} \cdot \frac{C_n^{n-1}}{2^n} + \frac{n^k}{n^k} \cdot \frac{C_n^n}{2^n}$$

или

$$P(A) = \frac{1^k \cdot C_n^1 + 2^k \cdot C_n^2 + \dots .. + n^k \cdot C_n^n}{n^k \cdot 2^n}$$

5. В задаче нужно найти вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались. Т.е. по сути вероятность того, что если извлечены k –белых шаров с возвращением, то какова вероятность что вообще в урне, где всего $\boldsymbol{n}$ – шаров, находятся только белые.

Гипотеза H_n – {в урне находится $\boldsymbol{n}$ белых шаров};

Событие $A =$ {из урны последовательно с возвращением достали $\boldsymbol{k}$ белых шаров};

Поэтому, оценив вероятность $P\,(H_n\backslash A)$, найдем искомую вероятность. Используем формулу Байеса:

$$P(H_n\backslash A) = \frac{P(A\backslash H_n) \cdot P(H_n)}{P(A)} = \frac{n^k \cdot C_n^n}{n^k \cdot 2^n} \cdot \frac{n^k \cdot 2^n}{1^k \cdot C_n^1 + 2^k \cdot C_n^2 + \dots .. + n^k \cdot C_n^n}$$

Или

$$P(H_n\backslash A) = \frac{n^k}{1^k \cdot C_n^1 + 2^k \cdot C_n^2 + \dots .. + n^k \cdot C_n^n}$$

<u>Пример 6.11.</u> Принимая, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковы, а вероятности рождения мальчика и девочки равны соответственно 0,51 и 0,49, найти вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

<u>Решение:</u> Опыт: рождение близнецов.

1) Введём события:

$M_1 = \{$ первым родился мальчик $\}$;

$M_2 = \{$ вторым родился мальчик $\}$;

$D_1 = \{$ первой родилась девочка $\}$;

$D_2 = \{$ второй родилась девочка $\}$.

$H_1 = M_1 \cdot M_2 = \{$ первым родился мальчик и второй тоже мальчик $\}$;

$H_2 = D_1 \cdot D_2 = \{$ первой родилась девочка и вторая тоже девочка $\}$;

$$H_3 = M_1 \cdot D_2 = \{ \text{ первый мальчик, вторая девочка } \};$$

$$H_4 = D_1 \cdot M_2 = \{ \text{ первая девочка, второй мальчик } \}.$$

При любом испытании может наступить только одно из событий H_i, поэтому:

$$\sum_{i=1}^{4} P(H_i) = 1 \quad (*).$$

2) Распишем $(*)$:

$$P(M_1 \cdot M_2) + P(D_1 \cdot D_2) + P(M_1 \cdot D_2) + P(D_1 \cdot M_2) = 1$$

$$P(M_1 \cdot M_2) + P(D_1 \cdot D_2) = 1 - \left(P(M_1 \cdot D_2) + P(D_1 \cdot M_2)\right)$$

Или: $P(H_1) + P(H_2) = 1 - \left(P(H_3) + P(H_4)\right) \qquad (***)$

3) Из условия задачи известно, что вероятность рождения однополых близнецов, вдвое больше, чем разнополых, поэтому:

$$P(M_1 \cdot M_2 + D_1 \cdot D_2) = 2P(M_1 \cdot D_2 + D_1 \cdot M_2);$$

$$P(H_1 + H_2) = 2P(H_3 + H_4),$$

Т.к. H_i несовместные события, то по теореме сложения:

$$P(H_1) + P(H_2) = 2P(H_3) + 2P(H_4).$$

Из условия задачи также известно, что вероятности рождения разнополых близнецов в любой последовательности равны, т.е. $\{P(H_3) = P(H_4)\}$, поэтому можем записать:

$$P(H_1) + P(H_2) = 4P(H_3)$$

4) Перепишем $(***)$ так: $P(H_1) + P(H_2) = 1 - 2P(H_3)$.

Тогда из $P(H_1) + P(H_2) = 4P(H_3)$ и $P(H_1) + P(H_2) = 1 - 2P(H_3)$ получаем:

$$4P(H_3) = 1 - 2P(H_3); \; P(H_3) = 1/6.$$

Таким образом вероятности $P(H_3) = P(H_4) = 1/6$, или $P(M_1 \cdot D_2) = P(D_1 \cdot M_2) = 1/6.$

5) В задаче нужно найти вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик, т.е. $P(M_2 \setminus M_1)$.

Эта вероятность равна $P\left(M_2 \backslash M_1\right)=\dfrac{P\left(M_2 \cdot M_1\right)}{P\left(M_1\right)}$, так как из условия известно, что $P\left(M_1\right)==0{,}51$, то остаётся найти $P\left(M_2 \cdot M_1\right)$.

б) Нам известны вероятности $P\left(M_1 \cdot D_2\right)=P\left(D_1 \cdot M_2\right)=1/6$, используем эту информацию. Найдём условную вероятность $D_2 \backslash M_1$:

$$P\left(D_2 \backslash M_1\right)=\frac{P\left(M_1 \cdot D_2\right)}{P\left(M_1\right)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{0{,}51}=\frac{100}{306}.$$

И теперь можем найти искомую вероятность:

$$P\left(M_2 \backslash M_1\right)=P\left(\overline{D_2} \backslash M_1\right)=1-P\left(D_2 \backslash M_1\right)=1-\frac{100}{306}=\frac{103}{153}.$$

Задачи по теме 6:

6.1. Известно, что в среднем 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощённая схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью 0.96, если она стандартна, и с вероятностью 0.06, если она нестандартна. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие пройдёт упрощённый контроль.

6.2. Имеются 2 одинаковые урны с шарами. В первой находится 3 белых и 4 черных шара, во второй 2 белых и 3 черных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

6.3. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин страдают дальтонизмом. Найти вероятность того, что случайно выбранный человек – дальтоник, если считать, что число всех мужчин равно числу всех женщин.

6.4. Имеются 2 ящика. В первом ящике четыре белых и три черных шара, во втором - пять белых и семь черных шаров. Из первого и второго ящика перекладывают по одному шару в третий ящик. Наугад из третьего ящика берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

6.5. Из полного набора 28 костей домино наугад извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлечённую кость можно приставить к первой.

6.6. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

6.7. В белом ящике 12 красных и 6 синих шаров. В чёрном – 15 красных и 10 синих шаров. Бросают игральный кубик. Если выпадет количество очков, кратное 3, то наугад берут шар из белого ящика. Если выпадет любое другое количество очков, то наугад берут шар из чёрного ящика. Какова вероятность появления красного шара? (Ответ: $\approx 0{,}62$)

6.8. Урна содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо чёрный с одинаковыми вероятностями. В урну кладут один белый шар, а затем наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что в урне остался белый шар, если был извлечён белый шар.

6.9. Система обнаружения самолёта из-за наличия помех в зоне действия локатора может давать ложные показания с вероятностью 0.05, а при наличии цели в зоне система обнаруживает ее с вероятностью 0.9. Вероятность появления противника в зоне равна 0.25. Определить вероятность ложной тревоги.

6.10. При попытке угона машины сигнализация первого вида подаёт сигнал тревоги с вероятностью 0,84, а сигнализация второго вида – с вероятностью 0,99. Вероятность того, что машина оборудована сигнализацией первого или второго вида соответственно равна 0.7 и 0.3. Какова вероятность подачи сигнала тревоги сигнализации на случайно выбранной машине. Сработала сигнализация на машине, какова вероятность того, что на ней сигнализация второго вида?

6.11. В соревнованиях участвуют 7 спортсменов из Москвы, 9 из городов Поволжья, 13 из городов Сибири. Спортсмен из Москвы попадает в сборную с вероятностью 0.9; из Поволжья - 0.7; а из Сибири – 0.85. Какова вероятность попасть в сборную наугад выбранному спортсмену? Спортсмен попал в сборную, какова вероятность того, что он из Сибири?

6.12. Для сдачи экзамена по правилам дорожного движения слушателям нужно было выучить 45 билетов. Из 30 слушателей 15 выучили все билеты; 8 – 30 билетов; 6 – 20 билетов и 1 – 10 билетов. Слушатель сдал экзамен. Найти вероятность того, что он знал всего 20 билетов?

6.13. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: 1-практически не рискует, 2 – мало рискует, 3 – всегда рискует. Анализ застрахованных водителей предыдущих периодов показал, что 32% водителей принадлежит 1 классу; 48% - 2 классу; 20% - 3 классу. Вероятность попасть в течение года в аварию для водителей 1 класса равна 0.01, 2 класса – 0.015; 3 класса - 0,124; Какова вероятность того, что наугад выбранный водитель за год не попадёт в аварию? Водитель попал в аварию, какова вероятность, что это водитель 3 класса?

6.14. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и два белых шара, а в одной – пять белых и один чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечён из урны, содержащей 5 белых шаров.

6.15. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трёх касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равны: для первой кассы P_1, для второй P_2, для третьей P_3. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрёл билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

6.16. В первой урне 10 белых и 20 черных шаров, во второй 10 белых и 10 чёрных шаров. Из первой урны наугад извлекают 4 шара, из второй - 6 шаров и перекладывают эти шары в третью, пустую урну. Какова вероятность того, что извлечённый наугад из третьей урны шар, окажется белым?

6.17. Имеется N одинаковых урн с m черными и n белыми шарами. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй в третью перекладывается один шар и т.д. Из последней урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что он белый?

6.18. Двое поочерёдно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Определить вероятность выигрыша для каждого игрока.

6.19. Монету бросают до тех пор, пока герб не выпадет дважды подряд. Найдите вероятность того, что монету придётся бросать нечётное число раз.

6.20. Монету бросают до тех пор, пока не будет зафиксирована серия ***ГРГ*** (герб-решка-герб) Какова вероятность того, что монету придётся бросать нечётное число раз?

6.21. У рыбака есть три излюбленных места для рыбалки, равновероятно им посещаемых. Если он закидывает удочку на первом месте, то рыба клюёт с вероятностью p_1, на втором – с вероятностью p_2, на третьем – с вероятностью p_3. Приехав на рыбалку, рыбак закинул удочку трижды, и рыба клюнула лишь один раз. Найти вероятность того, что он ловил рыбу на третьем месте.

6.22. В кошельке лежат 4 монеты. Три монеты обычных, а у четвертой на той и другой стороне изображён герб. Наугад взяли монету и подбросили 3 раза. Все три раза выпал герб. Какова вероятность того, что и при четвёртом подбрасывании выпадет герб?

6.23. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots\ldots, 99, 100\}$ последовательно (без возвращения) извлекают 2 числа. Какова вероятность того, что первое число больше второго: ***а***) на 20; ***б***) не менее чем на 20?

6.24. В альбоме 7 негашёных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекается 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекаются 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.

6.25. Имеются три урны с белыми и черными шарами. Известно, что отношение числа белых шаров к числу черных равно b_1, b_2, b_3 для первой, второй и третьей урн соответственно. Наудачу выбирается урна и из неё вытаскивается шар. Какова вероятность того, что он белый?

Тема 7. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Предельные теоремы Муавра-Лапласа.

Схема и формула Бернулли

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях $P_n(m)$.

Например, необходимо определить вероятность определенного числа попаданий в мишень при нескольких выстрелах, вероятность некоторого числа бракованных изделий в данной партии, вероятность определённого числа клиентов, обратившихся в банк за получением процентов с вкладов и т.д.

Пусть производятся $\boldsymbol{n}$ независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A, с одной и той же вероятностью:

$$P(A) = p$$

Или в каждом из испытаний может наступать противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью:

$$P(\overline{A}) = q = 1 - p$$

По традиции исход опыта, в котором наступает событие A, называют ***успехом***, а не наступление A называют ***неудачей.***

Такого рода схема испытаний называется ***схемой Бернулли***.

Вероятность того, что событие A наступит ровно $\boldsymbol{m}$ раз в $\boldsymbol{n}$ независимых испытаниях, находится по ***формуле Бернулли***:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } m = \overline{1,n}$$

Отсюда в частности следует, что вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$ испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие A наступит:

1) менее m раз равна: $P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(m-1)$;

2) более m раз – равна: $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \cdots + P_n(n)$;

3) хотя бы 1 раз равна: $P_n(m \geq 1) = 1 - q^n$;

4) не менее m_1 раз и не более m_2 раз равна:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \cdots + P_n(m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

Наивероятнейшее число наступлений события A

Определение 1. Число m^* –называется ***наивероятнейшим числом наступлений*** события A (или наиболее вероятным числом успехов) в ***схеме Бернулли***, если:

$$P_n(m^*) \geq P_n(m), \text{ для всех } m = 0,1,\ldots,n.$$

Если вероятности p и q отличны от нуля, то число m^* определяется из двойного неравенства:

$$np - q \leq m^* \leq np + p.$$

Или так:

$$m^* = [(n+1) \cdot p].$$

При $m = m^*$ вероятность $P_n(m)$ достигает своего наибольшего значения.

Формула Пуассона. Предельные теоремы Муавра-Лапласа

В случаях, когда значение числа испытаний n велико, формула Бернулли становится очень сложной для практических расчётов. Например предположим, что мы хотим вычислить вероятность появления события $A -$ 300 раз при большом числе испытаний $n = 500$:

$$P_{500}(300) = C_{500}^{300} \cdot p^{300} \cdot q^{200} = \frac{500!}{300!\,200!} p^{300} \cdot q^{200}$$

Ясно, что в этом случае непосредственное вычисление по формуле Бернулли технически сложно, тем более, если учесть, что сами числа p и q - числа дробные.

Поэтому часто используются приближенные варианты формулы Бернулли:

1. ***Формула Пуассона***: $P_n(m) \approx \frac{(np)^m e^{-np}}{m!}$. Используется в случаях, когда: $n \geq 30;\ p \leq 0{,}1;\ 0{,}1 \leq np \leq 10$ (говоря просто: когда p мало, а n велико). Таблица значений функции $P_{\lambda=np}(m) \approx (\lambda)^m e^{-\lambda} / m!$ в приложении 1.

2. ***Локальная формула Муавра-Лапласа:*** $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right\}$. Используется в случаях когда: $n \geq 30;\ 0{,}1 \leq p \leq 0{,}9;\ npq \geq 9$.

Обозначив $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ и учитывая, что $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} -$ функция Гаусса, значения которой приводятся в таблице приложения 2. Можем переписать формулу в виде:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

При использовании таблицы значений, необходимо иметь в виду свойства функции Гаусса $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \varphi(-x)$; при $x > 4,\ \varphi(x) \approx 0$.

3. В случаях, когда необходимо найти вероятность того, что событие наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, (другими словами определить вероятность попадания числа m наступлений события A в n опытах в заданный промежуток $[m_1, m_2]$ и $n \geq 30;\ 0{,}1 \leq p \leq 0{,}9;\ npq \geq 9$, используется ***интегральная формула Муавра-Лапласа***:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

Или обозначив: $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, можем переписать:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$, находят по таблице (см. приложение 3), учитывая свойства: $\Phi(0) = 0$; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, при $x > 4$, $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Примеры решения задач по теме 7:

Пример 7.1: Стрелок производит 5 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что он попадёт 2 раза, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0.6. Найти вероятность попасть 2 раза из 5 и наивероятнейшее количество попаданий.

Решение: Независимое испытание - это выстрел, их производится 5. Успех в данном случае $-$это попадание, его вероятность при одном выстреле 0.6. Соответственно, вероятность неудачи 0.4.

Найдём искомую вероятность, используя формулу Бернулли:

$$P_5(2) = P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 10 \cdot 0.36 \cdot 0.064 = 0.2304.$$

Таким образом вероятность того, что стрелок попадёт 2 раза из 5 равна 0.2304.

Найдём наивероятнейшее число попаданий: $m^* = [(5+1) \cdot 0.6] = 3$.

Проверим найденное: $P_5(1) = P_{1,5} = C_5^1 \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^4 = 5 \cdot 0.0154 = 0.077$;

$$P_5(2) = P_{2,5} = C_5^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^3 = 10 \cdot 0.36 \cdot 0.064 = 0.2304;$$

$$P_5(3) = P_{3,5} = C_5^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^2 = 10 \cdot 0.216 \cdot 0.16 = 10 \cdot 0.0346 = 0.346;$$

$$P_5(4) = P_{4,5} = C_5^4 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^1 = 5 \cdot 0.0518 = 0.2592;$$

$$P_5(5) = P_{5,5} = C_5^5 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^0 = 1 \cdot 0.0778 = 0.0778.$$

Пример 7.2: В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, найти вероятность того, что в семье не менее трёх и не более восьми мальчиков. Найти наивероятнейшее число мальчиков в семье и вероятность этого числа.

Решение: Введём события:

$$A = \{\text{ родился мальчик }\}, \text{тогда } \overline{A} = \{\text{ родилась девочка }\}.$$

В семье 10 детей, т.е. «проведено» 10 испытаний (рождение ребёнка считаем опытом со случайным исходом) в каждом из которых, с одинаковой вероятностью $p = 0{,}5$ могло наступить, или не наступить с вероятностью $q=0,5$, событие A. Такого рода схема называется схемой Бернулли и для оценки вероятности того, что наступит событие $G=\{$ в семье не менее трёх и не более восьми мальчиков $\}$, можем использовать формулу Бернулли в виде:

$$P(G)=P_{10}(3\le m\le 8)=P_{10}(3)+P_{10}(4)+P_{10}(5)+P_{10}(6)+P_{10}(7)+P_{10}(8)=\sum_{m=m_1}^{m_8}P_{10}(m)=$$

$$=C_{10}^3\cdot\frac{1}{2}^3\cdot\frac{1}{2}^7+C_{10}^4\cdot\frac{1}{2}^4\cdot\frac{1}{2}^6+C_{10}^5\cdot\frac{1}{2}^5\cdot\frac{1}{2}^5+....+C_{10}^8\cdot\frac{1}{2}^8\cdot\frac{1}{2}^2=\sum_{i=3}^{8}C_{10}^i\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0,9346.$$

Наивероятнейшее число мальчиков в семье найдём используя формулу:

$$m^*=\left[(n+1)p\right].$$

При $n=10$ и $p=1/2$ получаем: $m^*=\left[(10+1)\cdot 0,5\right]=5$,

$P_{10}(5)=C_{10}^5\cdot(1/2)^5\cdot(1/2)^5=252\cdot(1/2)^{10}=252/1024=0,2461$.

Пример 7.3: С помощью датчика случайных чисел сгенерировано 200 двузначных чисел. Найти вероятность того, что среди них число 33 встретится три раза.

Решение: Датчик генерирует двузначные числа в таком виде:

$$\underbrace{\begin{matrix}00\ 01\ 02\ 03\ 04\ 05\ 06\ 07\ 08\ 09\\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 90\ 91\ 92\ 93\ 94\ 95\ 96\ 97\ 98\ 99\end{matrix}}_{\text{Все двузначные числа}}$$

Известно, что датчик сгенерировал 200 двузначных чисел. т.е. проведено $n=200$ испытаний.

Обозначим событие $A=\{$ выпало число 33 $\}$. Если наступает событие A, считаем это успехом, а если $\overline{A}=\{$ выпало другое число не 33 $\}-$ неудачей. Т.к. всего двузначных чисел сто, и 33 одно из ста, то $P(A)=p=1/100$, $P(\overline{A})=q=99/100$.

Обозначим событие $B=\{$ число 33 встретится 3 раза в 200-х сгенерированных числах $\}$. Если пытаться находить вероятность B по формуле Бернулли, то необходимо будет посчитать это:

$$P(B)=P_{200}(3)=C_{200}^3(0,01)^3\cdot(0,99)^{197}.$$

Поскольку возводить дробное число 0,99 в степень 197, трудновато в отсутствии компьютера, поэтому воспользуемся одной из асимптотических формул.

Проверим произведение np:

$$np = 200 \cdot 0,01 = 2 < 10.$$

Ранее указывалось, что при $0,1 \le np \le 10$ и $p \le 0,1$ следует использовать приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m e^{-np}}{m!} = \frac{(\lambda)^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Находим значение $\lambda = np = 200 \cdot 0,01 = 2$ и по таблице значений функции Пуассона (см. ***приложение 1***) при $m = 3$, получаем :

$$P(B) = P_{200}(3) \approx 0,1805.$$

Пример 7.4: На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днём рождения одновременно четырёх студентов факультета?

Решение: В данной задаче нас интересует вероятность того, что из 1825 студентов у четырёх день рождения 1 сентября**.**

Переводя на язык схемы Бернулли, нужно найти вероятность того, что из 1825 испытаний в 4-х случаях наступит событие $A = \{$ день рождение человека 1 сентября $\}$.

Вероятность этого события:

$$P(A) = p = 1/365 \approx 0.0028$$

Нашли, используя классическое определение вероятности: всего дней 365, из них один 1 сентября.

Вероятность успеха $p = 0,0028 -$ ***мала***, а $n = 1825 -$ число испытаний, равное числу студентов ***велико***, в таких случаях при $n \ge 30$; $p \le 0,1$; $0,1 \le np \le 10$ рекомендуется использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

В нашем случае $\lambda = n \cdot p = 0,0028 \cdot 1825 = 5,11 < 10$ и $m = 4$ по таблице значений функции Пуассона (***приложение 1***) при $\lambda = 5$, $m = 4$ находим:

$$P_{1825}(4) \approx 0,1755.$$

Пример 7.5: В городе Томск из каждых 100 семей 80 имеют машины. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют свой автомобиль.

Решение: В данном случае наличие автомобиля является успехом, вероятность которого $p = 80/100 = 0,8$; число испытаний $n = 400$, а $npq = 400 \cdot 0,8 \cdot 0.2 = 64$. Ранее были сформулированы условия, когда нужно использовать асимптотическую локальную формулу Муавра-Лапласа при $n \geq 30;\ 0{,}1 \leq p \leq 0{,}9;\ npq \geq 9$.

Рассчитаем $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $x = \frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{64}} = -2{,}5$, учитывая свойство $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5)$, находим по таблице ***приложения 2***: $\varphi(2{,}5) = 0{,}01753$. Тогда окончательно:

$$P_{400}(300) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.01753 \approx 0.0022.$$

<u>Пример 7.6:</u> В одном из поселков Томской области из каждых 100 семей 80 имеют моторные лодки. Найти вероятность того, что от 300 до 360 (включительно) семей из 400 имеют моторные лодки.

<u>Решение:</u> Нам необходимо найти вероятность попадания числа $m-$ наступлений события $A = \{$ семья имеет моторную лодку $\}$, в промежуток $[300, 360]$. Так как $n = 400 \geq 30$, $0{,}1 \leq (p = 80/100 = 0{,}8) \leq 0{,}9$ и $(npq = 400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 64) \geq 9$, будем применять интегральную формулу Муавра- Лапласа:

$$P_n(m_1 \leq m < m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Найдём x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{8} = \frac{-20}{8} = -2{,}5; \quad x_2 = \frac{360 - 400 \cdot 0{,}8}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

Находим по таблице значений функции Лапласа (***приложение 3***): $\Phi(-2{,}5) = 0{,}49379$; $\Phi(5) = 0{,}5$. Подставляя эти значения в интегральную формулу Муавра-Лапласа, получаем:

$$P_{400}(300 \leq m \leq 360) = \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) \approx 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938.$$

<u>Пример 7.7:</u> Некий курящий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке останется *k* спичек, если первоначально в каждой коробке было *n* спичек.

<u>Решение:</u> Из условия известно:

$$\underbrace{\boxed{\text{1 коробка}: \underbrace{\boldsymbol{n}}_{\text{спичек}}} \qquad \boxed{\text{2 коробка}: \underbrace{\boldsymbol{n}}_{\text{спичек}}}}_{\text{Всего } \boldsymbol{2n} \text{ спичек}}$$

Введём события:

$$A=\{\text{ математик достал коробку, которая первая из 2-х станет пустой }\};$$

$$\overline{A}=\{\text{ математик достал коробку, которая не первая из 2-х станет пустой }\};$$

Тогда $P(A)=p=1/2$ и $P(\overline{A})=q=1/2$, т.к. из условия известно, что математик собираясь достать спичку, равновероятно обращается к обеим коробкам.

Обращение к коробке считаем независимым испытанием, которых проведено $2n-k$. Т.к. всего было спичек $2n$ и осталось по условию задачи k.

Коробок спичек останется пустым, если к нему обратиться n раз.

Для того, чтобы найти вероятность события:

$$B=\{\text{ когда математик вынул в первый раз пустую коробку, в другой коробке осталось } k \text{ спичек }\},$$

Нам необходимо найти вероятность $M=n$ успехов в $N=2n-k$ независимых испытаниях:

$$P(B)=P_N(M)=P_{2n-k}(n)=C_{2n-k}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_{2n-k}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Пример 7.8: Вероятность появления на занятиях студента равна 0.2. В семестре всего 385 занятий. Какова вероятность того, что студент будет присутствовать не менее чем на 78 занятиях?

Решение: Проводится $n=385$ независимых испытаний или 385 занятий. Успех, это наступление события:

$$A=\{\text{ студент появился на занятии }\};$$

Вероятность A известна из условия: $P(A)=p=0,2$. Необходимо оценить вероятность события:

$$B=\{\text{ студент присутствовал не менее чем на 78 занятиях }\};$$

Другими словами, оценить вероятность попадания числа m − наступлений события A в промежуток $[78,385]$. Будем использовать интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\sum_{k=m_1}^{m_2}P_n(k)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

У нас $n=385\ge 30,\quad 0,1\le(p=0,2)\le 0,9$ и $(npq=385\cdot 0,2\cdot 0,8=61,6)\ge 9$.

Найдём x_1,x_2: $x_1=\dfrac{78-385\cdot 0,2}{7,85}=\dfrac{1}{7,85}\approx 0,13$; $x_2=\dfrac{385-385\cdot 0,2}{7,85}=\dfrac{308}{7,85}\approx 39$.

Подставляя найденные значения в формулу Муавра-Лапласа и используя таблицу значений функции Лапласа (приложение 3) окончательно получаем:

$$P_{385}(78 \le m \le 385) \approx \Phi(39) - \Phi(0{,}13) = 0{,}5 - 0{,}05117 = 0{,}44883.$$

<u>Пример 7.9:</u> Вероятность появления успеха в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, что с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения частоты появления успеха от его вероятности не превысит ε.

<u>Решение:</u> Из условия известно, что независимых испытаний $n = 400$, вероятность успеха $P(A) = p = 0{,}8;$ вероятность неудачи $P(\overline{A}) = q = 0{,}2$ и $npq = 400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 64$.

Относительная частота появления события A : $\dfrac{m}{n}$, где $n -$ общее число проведённых испытаний, а $m -$ число опытов, в которых появилось событие A (наступил успех).

Вероятность события A обозначается по традиции в схеме Бернулли $P(A) = p$.

Абсолютная величина отклонения частоты появления события A от его вероятности наступления равна: $\left|\dfrac{m}{n} - p\right|$.

Нам необходимо найти такое положительное число ε, при котором вероятность события $\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$ равна 0,9876.

Используя интегральную теорему Муавра - Лапласа, решим поставленную задачу.

Так как $P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 0{,}9876$, то $P\left\{-\varepsilon \le \left(\dfrac{m}{n} - p\right) \le \varepsilon\right\} = 0{,}9876$.

Проведем простые преобразования:

$$P\left\{-\varepsilon \le \left(\frac{m}{n} - p\right) \le \varepsilon\right\} = P\left\{-n\varepsilon \le (m - np) \le n\varepsilon\right\} = P\left\{np - n\varepsilon \le m \le np + n\varepsilon\right\} = 0{,}9876$$

Подставив данные из условия задачи $np = 400 \cdot 0{,}8 = 320$ и $n = 400$, получаем:

$P\left\{\underbrace{(320 - 400\varepsilon)}_{m_1} \le m \le \underbrace{(320 + 400\varepsilon)}_{m_2}\right\} = 0{,}9876$. По интегральной формуле Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Подставляем в формулу значения $m_1 = 320 - 400\varepsilon$, $m_2 = 320 + 400\varepsilon$ и $\sqrt{npq} = 8$:

$$\Phi\left(\frac{320+400\varepsilon-320}{8}\right)-\Phi\left(\frac{320-400\varepsilon-320}{8}\right)=\Phi\left(\frac{400\varepsilon}{8}\right)-\Phi\left(\frac{-400\varepsilon}{8}\right)=2\Phi\left(\frac{400\varepsilon}{8}\right)=0,9876.$$

Тогда $\Phi\left(\frac{400\varepsilon}{8}\right)=\frac{0,9876}{2}=0,4938$.

По таблице значений функции Лапласа находим: $\Phi(2,5)\approx 0,4938$, т.е. $\frac{400\varepsilon}{8}=2,5$. Тогда окончательно: $\varepsilon=0,05$.

Пример 7.10: Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления «герба» от вероятности 0,5 окажется не более 0,01.

Решение: Известно, что вероятность выпадения герба равна 0,5. Тогда как относительная частота выпадения герба при проведении испытаний, может значительно отличаться от 0,5. Чем больше будет проведено испытаний, тем менее вероятно, что относительная частота сильно отклонится от вероятности выпадения герба.

В данной задаче необходимо найти, сколько должно быть проведено независимых испытаний *n*, чтобы с вероятностью 0,6, относительная частота появления герба отклонилась от вероятности появления герба не более, чем на 0,01. Решим поставленную задачу, используя интегральную теорему Муавра – Лапласа.

Из $P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,5\right|\le 0,01\right\}=0,6$, расписывая модуль, находим:

$$P\left\{0,5-0,01\le\frac{m}{n}\le 0,5+0,01\right\}=0,6, \text{ или } P\left\{\underset{m_1}{0,49n}\le m\le \underset{m_2}{0,51n}\right\}=0,6.$$

Так как $P_n(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$, то можем продолжить, учитывая, что $p=q=0,5$ и $\sqrt{pq}=0,5$:

$$P\{0,49n\le m\le 0,51n\}\approx\Phi\left(\frac{0,51n-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{0,49n-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi\left(\frac{n(0,51-p)}{\sqrt{n}\sqrt{pq}}\right)-\Phi\left(\frac{n(0,49-p)}{\sqrt{n}\sqrt{pq}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{0,5}\right)-\Phi\left(\frac{-0,01\sqrt{n}}{0,5}\right)=2\Phi\left(0,02\sqrt{n}\right)=0,6$$

Так как $\Phi\left(0,02\sqrt{n}\right)=0,3$, то по таблице (приложение 3) находим, что $0,02\sqrt{n}=0,84$, тогда окончательно: $\sqrt{n}=42$ и $n=1764$.

Задачи по теме 7:

7.1. Всхожесть семян данного растения равна 80%. Найти вероятность того, что из четырёх посеянных семян взойдут три.

7.2. Какова вероятность, что при 5 подбрасываниях монеты герб выпадет: а) 2 раза; б) более 2 раз; в) не менее 2-х раз.

7.3. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров.

7.4. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы 5 пакетов; 2) будет продано: а) менее 2 пакетов; б) не более двух; в) хотя бы 2; г) наивероятнейшее число пакетов.

7.5. Отрезок AB разделён точкой C в отношении $2:1$. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C, а две – правее.

7.6. В цехе 8 станков. Для каждого станка вероятность того, что он в данный момент работает, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы два станка.

7.7. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из наугад взятых в этом месяце 8-ми дней 3 будут дождливыми? Найти вероятность наивероятнейшего числа дней без дождя.

7.8. Стрелок в тире сделал 12 выстрелов по мишени, вероятность попадания в которую равна 0,4. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

7.9. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

7.10. Определить наиболее вероятное число выпадений герба при 25 подбрасываниях монеты.

7.11. Вероятность попадания в танк при одном выстреле из орудия равна 0,8. Вероятность того, что танк будет подбит при k попаданиях ($k \geq 1$) равна $1-(0,2)^k$.Найти вероятность того, что цель будет поражена, если сделано 2 выстрела.

7.12. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, n раз извлекаются по одному шары и возвращаются обратно в ящик. Найти наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз чёрный шар будет больше 0,5. (*Ответ*: 8)

7.13. Вероятность выхода из строя изделия во время испытания на надёжность равна 0,05. Найти вероятность того, что во время испытаний ста изделий на надёжность выйдут из строя от 5 до 20 изделий.

7.14. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий; в) не менее 480; г) от 480 до 520.

7.15. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 70 раз.

7.16. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна $p=10^{-8}$. В течение рабочей недели через банк проходят $n=7{,}5\cdot 10^{8}$ банкнот. Оценить вероятность встретить в ходе обработки три фальшивые банкноты. (*Ответ*: $\approx$0,039)

7.17. Прядильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,002. Какова вероятность того, что за одну минуту обрыв произойдёт не более чем на трёх веретёнах.

7.18. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года равна 0,001 и не зависит от других элементов. Какова вероятность отказа: а) двух элементов; б) не менее двух элементов за год?

7.19. Найти вероятность того, что хотя бы у трёх из случайно выбранных 300 человек день рождения придётся на 8 марта.

7.20. Вероятность выхода из строя изделия во время испытания на надёжность равна 0,03. Найти вероятность того, что во время испытаний 50 изделий на надёжность выйдут из строя от 7 до 10 изделий.

7.21. Вероятность присутствия студента на лекции равна 0,8. Найти вероятность того, что из 100 студентов на лекции будут присутствовать не меньше 75 и не больше 90. (*Ответ*: $\approx$0,888)

7.22. Какова вероятность того, что из ста монет, случайным образом разбросанных на столе, число монет, лежащих «гербом» вверх, будет от 45 до 55.

7.23. Производство даёт 1% брака. Найти вероятность того, что из наугад взятых 1000 изделий забраковано будет не более 17.

7.24. Французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба по абсолютной величине не более, чем в опыте Бюффона.

7.25. В урне содержится 4 белых и один черный шары. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьше число извлечений $\boldsymbol{n}$, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более, чем 0,01?

7.26. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,001. (*Ответ*: 0,182)

7.27. Сколько нужно провести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать, что частота выпадения герба отклонится от вероятности меньше, чем на 0,01? (*Ответ*: 7656)

Литература

1. *Матальыцкий М.А, Романюк Т.В.* Теория вероятностей в примерах и задачах : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2002.248 с.
2. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Академия, 2004. 448 с.
3. *Назаров А.А., Терпугов А. Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 448 с.
5. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. 3-е изд. М. : Айрис-пресс, 2008. 290 с.
6. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Наука, 1986. 328 с.
7. *Емельянов Г.Е., Скитович В.П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1967. 334 с.
8. *Крупкина Т.В., Пыжев А.И.* Теория вероятностей, случайные процессы : учеб. пособие. Красноярск : Изд-во Сибирского федер. ун-та, 2007. 182 с.
9. *Донской Е.Н.* Курс теории вероятностей с элементами случайных процессов и математической статистики. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 288 с.
10. *Максимов Ю.Д.* Математика. Теория вероятностей и случайных процессов. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2008. 384 с.
11. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. СПб. : Лань, 2007. 448 с.
12. *Крупин В.Г, Павлов А.Л., Попов Л.Г.* Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы : учеб. пособие. М. : Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.
13. *Китаева А.В.* Теория вероятностей (часть 1, случайные события) : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2000. 23 с.
14. *Даммер Д.Д.* Теория вероятностей. (Часть 2. Случайные величины) : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2005. 30 с.
15. *Галажинская О.Н., Марголис Н.Ю., Моисеева С.П., Цой С.А.* Задачник по теории вероятностей : учеб.-метод. пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2009. 79 с.

Приложение 1

Таблица значений функции Пуассона: $P_\lambda(m) \approx (\lambda)^m e^{-\lambda} / m!$

λ / *m*	***0,1***	***02***	***0,3***	***0,4***	***0,5***	***0,6***	***0,7***	***0,8***	***0,9***	***1***
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

m	***λ=2***	***λ=3***	***λ=4***	***λ=5***	***λ=6***	***λ=7***	***λ=8***	***λ=9***	***λ=10***
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

Таблица значений функции Гаусса: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14758	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08330	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07207	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05960	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04492
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03548	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02966	02899
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02240	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01889	01842	01797
2,5	01753	01710	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00910	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00471	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	00443	00327	00238	00172	00123	00084	00061	00043	00029	00020

Приложение 3

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	07776	05117	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07920	08317	08700	09095	09483	09871	10257	10642	11062	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	36371	17003	17365	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	16640	20540	20884	21226	21566	21904	22241
0,6	22575	22907	23237	20194	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	23565	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	26731	29955	302234	30511	30785	31057	31328
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40148
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42634	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43447	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45819	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47671
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48839	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	48202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49491	49506	49520
2,6	49535	49547	49560	49573	49586	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49737
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49865	49819	49825	49830	49836	49841	49846	49851	49897	49861
3,0	00443	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	00348	49899
x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ГАЛАЖИНСКАЯ Оксана Николаевна

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть I. Случайные события

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 25.10.2017 г. Формат 60×84 $^1/_8$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 20,2.
Тираж 130 экз. Заказ № 2802.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-94621-641-8

9 785946 216418