Филиал Кемеровского государственного университета
в г. Анжеро-Судженске

Национальный исследовательский
Томский государственный университет

Кемеровский государственный университет

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Институт вычислительных технологий СО РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ–2015)

Материалы XIV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова

18–22 ноября 2015 г.

Часть 1

Издательство Томского университета

2015

2. Dmitriev Yu., Tarassenko P., Ustinov Yu. On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess / A. Dudin et al. (Eds.) // ITMM. 2014. CCIS 487. P. 82–90.

РЕЛЕЙНО-ГИСТЕРЕЗИСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ МОМЕНТОВ ПРОДАЖИ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

К. И. Лившиц, Е. С. Ульянова

Национальный исследовательский

Томский государственный университет, Томск, Россия

1. Математическая модель задачи

Модели управления запасами с ограниченным сроком годности интенсивно изучаются в последние годы. За это время появилось несколько обзорных статей по данной теме, например, обзоры S. K. Goyal, B. C. Giri [1], M. Bakker, J. Riezebos и R. H. Teunter [2]. Укажем еще, например, на работы V. K. Mishra и L. S. Singh [3], R. Begum, S. K. Sahu, R. R. Sahoo [4].

В настоящей работе задача поступления и сбыта скоропортящейся продукции рассматривается при следующих предположениях. Считается, что продукция поступает с постоянной скоростью c, так что за время t поступает ct единиц продукции. При хранении продукция непрерывно портится. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени t. Тогда потери за малое время Δt равны $kS(t)\Delta t$. Будем считать далее, что величины покупок – независимые случайные величины с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\}=a$ и вторым моментом $M\{x^2\}=a_2$. Моменты продаж образуют пуассоновский поток, интенсивность которого λ зависит от цены продажи b. Считается, что интенсивность потока продаж λ монотонно убывает с ростом цены b.

Предполагается, что управление продажами осуществляется следующим образом. Устанавливается два пороговых значения допустимого запаса продукции S_1 и S_2, причем $S_2 > S_1$. В области $S < S_1$ назначается цена продажи b_0, в области $S > S_2$ назначается цена продажи $b_1 < b_0$. В области же $S_1 \le S \le S_2$ назначается цена $b = b_0$ или $b = b_1$ в зависимости от того как процесс $S(t)$ вошел в эту область. Если он вошел в нее через порог S_1 снизу вверх, то остается $b = b_0$, если же он вошел в эту область через порог S_2 сверху вниз, то остается $b = b_1$. Таким образом, значение $b = b_1$ устанавливается при достижении запасом $S(t)$ значения S_2 и оканчивается при уменьшении запаса до значения S_1. Область $S_1 \le S \le S_2$ и представляет собой область гистерезиса в управлении запасом продукции. В соответствии с этим текущая интенсивность потока моментов продаж имеет вид

$$\lambda(S)=\begin{cases}\lambda_0, S<S_1,\\ \lambda_0 \text{ или } \quad \lambda_1, S_1\le S\le S_2,\\ \lambda_1, S>S_2\end{cases} \tag{1}$$

Естественно считать, что $C-\lambda_0 a>0$ и $C-\lambda_1 a<0$. Наконец, возможна ситуация, когда текущий спрос не может быть удовлетворен полностью. В этом случае считается, что $S(t)<0$. Основная цель настоящей работы состоит в нахождении плотности распределения количества продукции для данной модели при некоторых дополнительных предположениях.

Обозначим

$$P_i(S,t)ds=\Pr\{S\le S(t)<S+dS, \lambda(t)=\lambda_i\}, \quad i=0{,}1. \tag{2}$$

Теорема 1. Если $P_i(S,t)$ дифференцируемы по t, $SP_i(S,t)$ дифференцируемы по S, то функции $P_i(S,t)$ удовлетворяют системе уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P_1(S,t)}{\partial t}=-\lambda_1 P_1(S,t)-\frac{\partial}{\partial S}((c-kS)P_1(S,t))+\lambda_1\int_0^\infty P_1(S+x)\varphi(x)dx, \quad S\ge S_1, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_0(S,t)}{\partial t}=-\lambda_0 P_0(S,t)-\frac{\partial}{\partial S}((c-kS)P_0(S,t))+\\ +\lambda_0\int_S^{S_2} P_0(x,t)\varphi(x-S)dx, \quad S_1<S<S_2,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_0(S,t)}{\partial t}=-\lambda_0 P_0(S,t)-\frac{\partial}{\partial S}((c-kSI(S))P_0(S,t))+\\ +\lambda_0\int_S^{S_2} P_0(x,t)\varphi(x-S)dx+\lambda_1\int_{S_1}^\infty P_1(x)\varphi(x-S)dx, \quad S<S_1,\end{gathered} \tag{5}$$

где $I(x)$ – единичная функция.

Решение системы уравнений (3)–(5) должно, очевидно, удовлетворять условию нормировки

$$\int_{S_1}^\infty P_1(S,t)dS+\int_{-\infty}^{S_2} P_0(S,t)dS=1, \tag{6}$$

и функция $P_0(S,t)$ должна быть непрерывна в точке S_1:

$$P_0(S_1+0,t)=P_0(S_1-0,t). \tag{7}$$

Безусловная плотность распределения $P(S,t)$ количества продукции будет иметь вид

$$P(S,t)=\begin{cases}P_1(\mathrm{S},\mathrm{t}), \quad \mathrm{S}>\mathrm{S}_2,\\ P_1(S,t)+P_0(S,t), S_1\le S\le S_2,\\ P_0(S,t), \quad \mathrm{S}<\mathrm{S}_1.\end{cases} \tag{8}$$

2. Экспоненциальное распределение величины продажи

Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда продажи имеют экспоненциальное распределение $\varphi(S)=\frac{1}{a}\exp(-\frac{S}{a})$. Обозначим

$$P_i(S)=\lim_{t\to\infty}P_i(S,t). \qquad (9)$$

В стационарном режиме при $t\to\infty$ уравнения (3) – (5) принимают вид

$$\lambda_1 P_1(S)+\frac{d}{dS}((c-kS)P_1(S))-\frac{\lambda_1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^\infty P_1(x)e^{-\frac{x}{a}dx}=0,\quad S>S_1, \qquad (10)$$

$$\lambda_0 P_0(S)+\frac{d}{dS}((c-kS)P_0(S))-\frac{\lambda_0}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^{S_2} P_0(x)e^{-\frac{x}{a}}dx=0,\quad S_1\le S\le S_2, \qquad (11)$$

$$\lambda_0 P_0(S)+\frac{d}{dS}((c-kSI(S))P_0(S))-\frac{\lambda_0}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^{S_2} P_0(x)e^{-\frac{x}{a}}dx-\frac{\lambda_1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_{S_1}^{\infty} P_1(x)e^{-\frac{x}{a}}dx=0. \qquad (12)$$

С учетом граничного условия $P_0(-\infty)=0$ в области $S\le 0$ решение уравнения (12) имеет вид

$$P_0(S)=De^{\frac{c-\lambda_0 a}{ca}S}, \qquad (13)$$

а в области $0<S<S_1$ решение уравнения (12)

$$P_0(S)=\left[W_1+W_2\int_0^S e^{-\frac{x}{a}}(c-kx)^{-\frac{\lambda_0}{k}}dx\right]e^{\frac{S}{a}}(c-kS)^{\frac{\lambda_0}{k}-1}. \qquad (14)$$

Условие непрерывности решения в точке $S=0$ дает $D=W_1c^{\frac{\lambda_0}{k}-1}$. Из уравнения (12) следует, что в точке $S=0$ должно выполняться условие

$$cP_0'(0+0)-kP_0(0+0)=cP_0'(0-0).$$

Откуда $W_2=0$. Таким образом, при $0<S<S_1$

$$P_0(S)=De^{\frac{S}{a}}(1-\frac{k}{c}S)^{\frac{\lambda_0}{k}-1}. \qquad (15)$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$P_0(S)=\left[W_1+W_2\int_{S_1}^S e^{-\frac{x}{a}}(1-\frac{k}{c}x)^{-\frac{\lambda_0}{k}}dx\right]e^{\frac{S}{a}}(1-\frac{k}{c}S)^{\frac{\lambda_0}{k}-1}. \qquad (16)$$

Условие непрерывности в точке S_1 (7) дает $W_1=D$. Далее, решение (16) должно удовлетворять исходному уравнению (11). Откуда

$$W_2=-D[ae^{-\frac{S_2}{a}}(1-\frac{k}{c}S_2)^{-\frac{\lambda_0}{k}}+\int_{S_1}^{S_2} e^{-\frac{x}{a}}(1-\frac{k}{c}x)^{-\frac{\lambda_0}{k}}dx]^{-1}. \qquad (17)$$

Наконец, решение уравнения (10) с учетом, что в рассматриваемой модели всегда количество товара $S\le\frac{c}{k}$, имеет вид

$$P_1(S)=Ae^{\frac{S}{a}}(1-\frac{k}{c}S)^{\frac{\lambda_1}{k}-1}. \qquad (18)$$

Связь между постоянными A и D находится из условия, что совокупность построенных решений должна удовлетворять уравнению (12). Откуда

$$A=-ae^{-\frac{S_1}{a}}(1-\frac{k}{c}S_1)^{-\frac{\lambda_1}{k}}W_2. \qquad (19)$$

Последняя неопределенная постоянная D определяется из условия нормировки (6).

Таким образом, плотность распределения количества продукции определяется соотношениями (13), (15), (16), (18), а входящие в эти соотношения постоянные связаны между собой соотношениями (18), (19) и (6).

При $S_2=S_1$ – релейное управление ценой продажи плотность распределения количества продукции $P(S)$ принимает вид

$$P(S)=\begin{cases} De^{\frac{c-\lambda_0 a}{ca}S}, & S<0, \\ D(1-\frac{k}{c}S)^{\frac{\lambda_0}{k}-1}e^{\frac{S}{a}}, & 0\le S\le S_1, \\ D(1-\frac{k}{c}S_0)^{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{k}}(1-\frac{k}{c}S)^{\frac{\lambda_1}{k}-1}e^{\frac{S}{a}}, & S_1<S\le\frac{c}{k}, \end{cases} \qquad (20)$$

где постоянная D определяется условием нормировки.

3. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта при релейном управлении ценой продажи

В общем случае найти решение системы уравнений (3)–(5) не удается даже в стационарном режиме. Поэтому представляет интерес построение приближенных решений уравнений. Рассмотрим, далее, случай релейного управления ценой продажи, когда порог $S_2=S_1$. Будем предполагать, что скорость производства $c=CN$, интенсивности потоков покупок $\lambda_0=\Lambda_0 N, \lambda_1=\Lambda_1 N$, порог $S_1=S_0 N$, где $N\gg 1$. Обозначив $\varepsilon^2=1/N$, введем процесс $\xi(t)=\varepsilon^2 S(t)$. Пусть $h(z,t)=\dfrac{\partial \Pr\{\xi(t)<z\}}{\partial z}$. Можно показать, что при $\varepsilon\ll 1$ плотность распределения $h(z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left[(\mathrm{C}-\Lambda_1 a-kz)h(z,t)\right]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 h(z,t)}{\partial z^2} \qquad (21)$$

в области $z \geq S_0$ и уравнению

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[(c - \Lambda_0 a - kzI(z))h(z,t)\right] + \frac{\Lambda_0 a_2}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h(z,t)}{\partial z^2} \qquad (22)$$

в области $z \leq S_0$. В стационарном режиме при $t \to \infty$ плотность распределения $h(z) = \lim\limits_{t\to\infty} h(z,t)$ имеет вид

$$h(\mathrm{z}) = \begin{cases} Ae^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2 k}} e^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2} z}, & z < 0, \\ Ae^{\frac{(kz+c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2 k}}, & 0 \leq z \leq s_0, \\ Be^{-\frac{(kz+c-\Lambda_1 a)^2}{\Lambda_1 a_2 \varepsilon^2 k}}, & z > s_0, \end{cases} \qquad (23)$$

где постоянные A, B определяются условием нормировки и некоторым дополнительным условием в точке S_0.

Заключение

В работе получены уравнения, определяющие плотность распределения количества скоропортящейся продукции при непрерывном ее поступлении и релейно-гистерезисным управлении интенсивностью потока продаж. Получены решения этих уравнений в случае экспоненциального распределения величин продаж и построена диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта продукции при релейном управлении интенсивностью продаж. Аналогично вышеизложенному могут быть исследованы и другие модели управления производством и сбытом скоропортящейся продукции, например модель с релейно-гистерезисным управлением скоростью производства.

Литература

1. Goyal S. K., Giri B. C. // European Journal of Operational Research. 2001. Vol. 134 (1). P. 1–16.

2. Bakker M., J. Riezebos J., Teunter R. H. // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 221. P. 275–284.

3. Mishra V. K. // Journal of Industrial Engineering and Management. 2013. Vol. 6(2). P. 495–506.

4. Begum R., Sahu S. K., Sahoo R. R. // British Journal of Applied Science & Technology. 2012. Vol. 2(2). P. 112–131.