АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ MMPP|GI|∞ С ЗАЯВКАМИ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА

Потатуева В.В., Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, ekaterina_lisovs@mail.ru

В работе проведено исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема с входящим MMPP-потоком. Получена асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема требований в системе в стационарном режиме.

Ключевые слова: Марковски модулированный пуассоновский поток, бесконечнолинейная система массового обслуживания, заявки случайного объема, асимптотический анализ, растущее время обслуживания.

Введение

Задача исследования систем массового обслуживания (СМО), в которых каждая поступающая в систему заявка имеет случайный объем [2, 5-6], играет важную роль при моделировании работы самых разнообразных технических устройств, в частности современных информационно-вычислительных систем. Актуальными являются исследования систем с непуассоновскими входящими потоками [1, 3].

Настоящая работа посвящена исследованию системы обслуживания с неограниченным числом приборов, входящим марковски модулированным потоком заявок случайного объема и произвольным временем обслуживания (не зависящем от объема заявок).

Математическая модель

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход системы поступает MMPP-поток заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \dots, K$, заданной матрицей инфинитизимальных характеристик $\mathbf{Q}$, и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объемом $\upsilon > 0$, и $G(y) = P\{\upsilon < y\}$ – функция распределения случайной величины υ. Объемы различных требований независимы.

Поступающая заявка занимает любой свободный прибор, где обслуживается в течение случайного времени, имеющую функцию распределения $B(x)$. По окончании обслуживания требование покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок в системе, то есть число приборов, занятых в момент времени t. Обозначим $V(t) = \sum_{i=0}^{i(t)} v_i$ – суммарный объем заявок, находящихся в системе в момент времени t.

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t), V(t)\}$.

Метод динамического просеивания

Зафиксируем некоторый момент времени T. Полагается, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $t > T$ с вероятностью $S(t) = 1 - B(T - t)$ формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ заявка в просеянном потоке не рассматривается.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента t.

Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < T$ система была свободна, то для момента времени T выполняется равенство $P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\}$.

Для распределения вероятностей $P(k,n,z,t)=P\{k(t)=k,n(t)=n,V(t)<z\}$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова в матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{P}(n,z,t)}{\partial t}=\left[\int_0^z \mathbf{P}(n-1,z-y,t)dG(y)-\mathbf{P}(n,z,t)\right]\mathbf{\Lambda}S(t)+\mathbf{P}(n,z,t)\mathbf{Q}\,. \qquad (1)$$

Введем характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1n}\int_0^{\infty}e^{ju_2z}P(n,z,t)$$

с начальным условием $\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0)=\mathbf{r}$, здесь и далее $\mathbf{r}$ – вектор-строка стационарного распределения управляющей цепи Маркова, определяемая системой линейных уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{rQ}=0\\ \mathbf{re}=1\end{cases},$$

здесь и далее $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

Перепишем уравнение (1)

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)\mathbf{\Lambda}S(t)+\mathbf{Q}\right], \qquad (2)$$

где

$$G^*(u_2)=\int_0^{\infty}e^{ju_2y}dG(y)\,.$$

Для решения системы (2) применим метод асимптотического анализа [4] в условии растущего времени обслуживания.

Асимптотический анализ

Обозначим среднее время обслуживания

$$b_1=\int_0^{\infty}xdB(x)=\int_0^{\infty}(1-B(x))dx\,.$$

Тогда асимптотическое условие растущего времени обслуживания имеет вид $b_1\to\infty$, для которого справедлива следующая теорема.

Теорема. *Асимптотическая характеристическая функция второго порядка распределения вероятностей процесса* $\{i(t),V(t)\}$ *в стационарном режиме имеет вид:*

$$h(u_1,u_2)=\exp\left\{j\kappa_1(u_1+u_2a)b_1+\frac{(ju_1)^2}{2}(\kappa_1b_1+\kappa_2b_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{(ju_2)^2}{2}\left(\kappa_1a_1b_1+\kappa_2a_1^{\,2}b_2\right)+(ju_1)(ju_2)(\kappa_1a_1b_1+\kappa_2a_1b_2)\right\}, \qquad (3)$$

где $\kappa_1=\mathbf{r\,\Lambda\,e}$, $a_1=\int_0^{\infty}ydG(y)$, $a_2=\int_0^{\infty}y^2dG(y)$, $b_2=\int_0^{\infty}(1-B(x))^2dx$, *величина* κ_2 *определяется равенством* $\kappa_2=2\mathbf{f}(\mathbf{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}$, *а вектор* $\mathbf{f}$ *является решением системы уравнений*

$$\begin{cases}\mathbf{fQ}=\mathbf{r}(\kappa_1\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda})\\ \mathbf{fe}=1\end{cases}.$$

Из вида функции (3) очевидно, что двумерный процесс $\{i(t),V(t)\}$ является асимптотически гауссовским с вектором математических ожиданий $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}\kappa_1 b_1 & \kappa_1 a_1 b_1\end{bmatrix}$ и ковариационной матрицей

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\kappa_1 b_1+\kappa_2 b_2 & \kappa_1 a_1 b_1+\kappa_2 a_1 b_2\\ \kappa_1 a_1 b_1+\kappa_2 a_1 b_2 & \kappa_1 a_2 b_1+\kappa_2 a_1{}^2 b_2\end{bmatrix}.$$

Выводы

В работе получена асимптотическая характеристическая функция второго порядка распределения вероятностей исследуемого процесса в стационарном режиме. Показано, что она совпадает с характеристической функцией двумерного гауссовского распределения. Найдены числовые характеристики числа занятых приборов в системе и суммарного объема заявок.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

Литература

1. *Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M.* The total capacity of customers in the MMPP/GI/∞ queueing system // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016) материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах. Под общей редакцией В. М. Вишневского и К. Е. Самуйлова. – 2016. – С. 313-325.
2. *Александров А.М., Кац Б.А.* Обслуживание потоков неоднородных требований // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. – №2. – 1973. – С.47-53.
3. *Кононов И.А., Лисовская Е.Ю.* Исследование бесконечнолинейной СМО MAP|GI|∞ с заявками случайного объема /И.А. Коновалов, Е.Ю. Лисовская // ИТММ: Материалы 15-й Международной конференции имени А. Ф. Терпугова: 12-15 сентября 2016 г. –Томск: Изд-во Том. Ун-та. – 2016. – 67-71 с.
4. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ. – 2006. – 112 с.
5. *Ромм Э.Л, Скитович В.В.* Об одном обобщении задачи Эрланга // Автоматика и телемеханика. – №6. – 1971. – С.164-167.
6. *Тихоненко О.М.* Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций / О.М. Тихоненко. – Минск : БГУ, 2008. – 148 с.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE MMPP|GI|∞ QUEUEING SYSTEM WITH RANDOM CUSTOMERS CAPACITY

Potatueva V., Lisovskaya E., Moiseeva S.P.

Tomsk State University, ekaterina_lisovs@mail.ru

In the paper, the infinite-server queueing system with MMPP arrival process and with random customers capacity is studied. The asymptotic characteristic function of the probability distribution of the customers numbers and the total customers capacity in the steady-state regime is obtained..

Key words: Markovian Modulated Poisson Process, infinite-server queueing system, random capacity of customers, asymptotic analysis, growing service time.