АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ PH-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Назаров А.А., Пауль С.В.

Национальный исследовательский Томский государственный университет.
paulsv82@mail.ru

В работе рассматривается аппроксимация распределением фазового типа распределения неотрицательной случайной величины, определяемой произвольной функцией распределения B(x).

Ключевые слова: распределение фазового типа, PH-распределение, аппроксимация.

Введение

При рассмотрении систем массового обслуживания с произвольным распределением времени обслуживания заявок (однолинейные системы [1], бесконечно линейные системы [2], RQ-системы [3]) возникают трудности, связанные с получением основных уравнений для распределения вероятностей процессов, описывающих основные характеристики этих систем. Одним из способов разрешить эту проблему является аппроксимация произвольной функции распределения $B(x)$, фигурирующей в системе, PH-распределением [4]. В работе получены формулы для аппроксимации и приведены численные результаты ее точности.

PH-распределение

Рассмотрим цепь Маркова $k(t)$, начальное распределение вероятностей значений $k = 1, 2, \ldots, \infty$ которой задано вектором $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k, \ldots\}$, где $V_k = P\{k(0) = k\}$. Для всех $k, v = 1, \ldots, \infty$ заданы ее инфинитезимальные характеристики q_{kv} – интенсивности переходов из состояния k в состояние v. Обозначим неполную матрицу $\mathbf{Q} = [q_{kv}]$ инфинитезимальных характеристик. Матрица Q неполная, потому что для этой цепи Маркова существует поглощающее состояние – 0, для которого заданы инфинитезимальные характеристики q_{k0} – интенсивности переходов из состояния k в состояние 0, которые составляют вектор

$$\mathbf{q}^T = \{q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{k0}, \ldots\}.$$

При этом выполняются равенства

$$\mathbf{Qe} + \mathbf{q} = 0 \text{ или } \mathbf{q} = -\mathbf{Qe}.$$

Обозначим τ – длину интервала от момента начала функционирования цепи до момента ее попадания в поглощающее состояние 0. Будем говорить, что величина τ имеет распределение фазового типа или PH-распределение, заданное неразложимым представлением $\{\mathbf{V}, \mathbf{Q}\}$.

Аппроксимирующее PH-распределение

Пусть $k(t)$ – процесс чистой гибели с постоянным параметром μ [5] и начальным распределением v_k в виде

$$v_k = B\left(\frac{k}{\mu}\right) - B\left(\frac{k-1}{\mu}\right), \quad k = \overline{1,\infty},$$

что определяет предлагаемое PH-распределение, характеристическая функция которого имеет вид

$$H(u,\mu) = Me^{ju\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k M\left\{e^{ju\tau} \middle| k(t) = k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left(\frac{\mu}{\mu - ju}\right)^k = \left| v_k = B\left(\frac{k}{\mu}\right) - B\left(\frac{k-1}{\mu}\right)\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu - ju}\right)^k \left[B\left(\frac{k}{\mu}\right) - B\left(\frac{k-1}{\mu}\right)\right]. \quad (1)$$

Найдем предел характеристической функции $H(u, \mu)$ при $\mu \to \infty$:

$$\lim_{\mu\to\infty} H(u,\mu) = \lim_{\mu\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\mu - ju}\right)^{k}\left[B\left(\frac{k}{\mu}\right) - B\left(\frac{k-1}{\mu}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lim_{\mu\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1-\dfrac{ju}{\mu}}\right)^{\mu}\right]^{\frac{k}{\mu}}\right\}\left[B\left(\frac{k}{\mu}\right) - B\left(\frac{k-1}{\mu}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e^{ju\frac{k}{\mu}}\left[B\left(\frac{k}{\mu}\right) - B\left(\frac{k-1}{\mu}\right)\right] = \int_0^{\infty} e^{jux}B(x)\ . \qquad (2)$$

Таким образом, получили равенство

$$\lim_{\mu\to\infty} H(u,\mu) = \int_0^{\infty} e^{jux}B(x)\ . \qquad (3)$$

которое показывает, что характеристическая функция произвольной неотрицательной случайной величины, заданной функцией распределения $B(x)$, можно сколь угодно точно аппроксимировать предлагаемым PH-распределением, в частности это можно сделать и для логарифмически нормальной случайной величины, для которой не существует аналитического выражения характеристической функции.

Нетрудно показать, что функция распределения $F(x,\ \mu)$ предлагаемого PH-распределения имеет вид

$$F(x,\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu x)^k}{k!}e^{-\mu x}B\left(\frac{k}{\mu}\right), \qquad (4)$$

и, следовательно, при $\mu \to \infty$

$$\lim_{\mu\to\infty} F(x,\mu) = B(x)\ .$$

Численные примеры точности аппроксимации

Рассмотрим следующие численные примеры. Для определения точности аппроксимации воспользуемся расстоянием Колмогорова

$$\Delta = \sup_{0\le x<\infty}\left|F(x,\mu) - B(x)\right|\ . \qquad (6)$$

Для удобства и наглядности параметры распределений подобраны таким образом, чтобы среднее значение случайных величин во всех примерах было равно единицы.

1. Равномерное распределение с функцией распределения

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \le 2, \\ 1. & x \ge 2. \end{cases}$$

Точность аппроксимации данного распределения PH-распределением при различных μ принимает следующие значения

Таблица 1.

μ	25	50	100
Δ	0,056	0,040	0,028

2. Гамма-распределение с равными параметрами формы и масштаба

Таблица 2.

α \ μ	25	50	100

0,5	0,044	0,031	0,021
1	0,007	0,004	0,002
5	0,026	0,026	0,007
10	0,046	0,046	0,013

3. Логнормальное распределение с параметрами $a = -0{,}5\ln z$, $\sigma^2 = \ln z$

Таблица 3.

z \ μ	25	50	100
1,2	0,029	0,015	0,007
1,5	0,017	0,009	0,003
2	0,014	0,007	0,003

Выводы

Таким образом, получили, что характеристическая функция PH-распределения, определяемая равенством (1) при $\mu \to \infty$ сходится к характеристической функции $B^*(u)$ распределения $B(x)$, поэтому указанное PH-распределение при достаточно больших значениях μ сколь угодно точно аппроксимирует распределение неотрицательной случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Литература

1. Назаров А.А. Пауль С.В. Исследование системы массового обслуживания с «прогулками» прибора, управляемой Т-стратегией // Международная научная конференция: «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения». 2015. – Минск: РИВШ. С. 202-207.

2. Назаров А.А. Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

3. Моисеева Е. А. Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. №4 (25). С.84-94.

4. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания: учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995. – 5 29 с.

5. Назаров А.А. Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: учебное пособие. – Томск: изд. НТЛ, 2004. – 228 с.

Работа выполнена в рамках государственного заказа № 1.511.2014/К Министерства образования и науки Российской федерации.

APPROXIMATION OF THE DISTRIBUTION OF THE NON-NEGATIVE RANDOM VARIABLE BY PH-DISTRIBUTION

Nazarov A.A., Paul S.V.

National Research Tomsk State University, paulsv82@mail.ru

We consider the approximation of the distribution of the non-negative random variable, which has an arbitrary distribution function B(x), by phase type distribution.

Key words: distribution of phase type, PH-distribution, approximation.