

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С КОНФЛИКТАМИ И ДООБСЛУЖИВАНИЕМ ЗАЯВОК

Поморцева Н.А., Назаров А.А.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
natashafpink@gmail.com, nazarov.tsu@gmail.com*

Для однолинейной RQ-системы с конфликтами и дообслуживанием заявок определяются стационарные вероятности состояний прибора и среднее число заявок в блоках ИПВ.

Ключевые слова: RQ-система, конфликт заявок, дообслуживание заявок, асимптотический анализ.

Введение

В настоящее время внимание к теории массового обслуживания в значительной степени стимулируется необходимостью применения ее результатов для важных практических задач, возникающих в связи с бурным развитием телекоммуникационных, компьютерных, информационно-вычислительных систем.

Исследованию RQ-систем [1,2,5] посвящено огромное количество литературы, однако некоторые задачи все еще остаются нерешенными и интересными для изучения. В настоящей работе рассматриваются однолинейные RQ-системы с конфликтами [3,4]. Исследование таких систем подразумевает, что заявка, поступившая в систему и нашедшая прибор занятым и заявка, находящаяся на обслуживании, вступают в конфликт и обе переходят в источник повторных вызовов. RQ-системы с конфликтами заявок находят широкое применение в реальных системах, например, в компьютерных сетях, управляемых протоколами множественного случайного доступа.

Постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ . Время обслуживания заявки является случайной величиной с двухфазным распределением с интенсивностями μ_1 на первой и μ_2 на второй фазах. Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки попадают в ситуацию конфликта и обе мгновенно переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), состоящий из двух блоков. В первом блоке ИПВ осуществляют случайную задержку заявки, не завершившие обслуживание на первой фазе, а во втором блоке находятся заявки, обслуживание которых было прервано конфликтом на второй фазе. Продолжительность задержки заявки случайная с экспоненциальным распределением с параметрами σ_1 в первом блоке и σ_2 - во втором. После случайной задержки в ИПВ заявка из k -го блока обращается на k -ю фазу обслуживания, что реализует процедуру дообслуживания, в том смысле, что не повторяет завершённой первой фазы.

Пусть $k(t)$ – состояния прибора, $i_1(t)$, $i_2(t)$ - число заявок в первом и втором блоках ИПВ.

Ставится задача исследования трехмерного процесса $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Обозначив

$$P_k(i_1, i_2) = P\{k(t)=k, i_1(t)=i_1, i_2(t)=i_2\}, \quad (1)$$

$$H_k(u_1, u_2) = \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} \exp\{ju_1 i_1 + ju_2 i_2\} P_k(i_1, i_2), \quad k = \overline{0,1,2}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

введем систему дифференциальных уравнений Колмогорова в стационарном режиме частичных характеристических функций $H_k(u_1, u_2)$

$$\begin{cases} -\lambda H_0(u_1, u_2) + \lambda e^{2ju_1} H_1(u_1, u_2) + H_2(u_1, u_2) \left[\mu_2 + \lambda e^{ju_1} e^{ju_2} \right] + \\ + j\sigma_1 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_1 e^{ju_1} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \\ - j\sigma_2 e^{ju_1} \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_2 e^{ju_2} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_2} - j\sigma_1 e^{ju_2} \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} = 0, \\ \lambda H_0(u_1, u_2) - (\lambda + \mu_1) H_1(u_1, u_2) - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\sigma_1 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} = 0, \\ -(\lambda + \mu_2) H_2(u_1, u_2) - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_0(u_1, u_2)}{\partial u_2} + j\sigma_2 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_2} + \\ + j\sigma_1 \frac{\partial H_2(u_1, u_2)}{\partial u_1} + \mu_1 H_1(u_1, u_2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Асимптотический анализ в условии большой задержки

Обозначим

$$\sigma_k = \gamma S_k. \quad (4)$$

Систему (3) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой задержки, то есть при $\gamma \rightarrow 0$.

Сделаем замены

$$\sigma_k = \varepsilon S_k, \quad u_k = \varepsilon w_k, \quad H_k(u_1, u_2) = F_k(w_1, w_2, \varepsilon). \quad (5)$$

Совершая предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем систему вида

$$\begin{cases} -\lambda F_0(w_1, w_2) + \lambda F_1(w_1, w_2) + (\mu_2 + \lambda) F_2(w_1, w_2) + jS_1 \frac{\partial F_0(w_1, w_2)}{\partial w_1} + \\ + jS_2 \frac{\partial F_0(w_1, w_2)}{\partial w_2} - jS_1 \frac{\partial F_1(w_1, w_2)}{\partial w_1} - jS_2 \frac{\partial F_1(w_1, w_2)}{\partial w_2} - \\ - jS_2 \frac{\partial F_2(w_1, w_2)}{\partial w_2} - jS_1 \frac{\partial F_2(w_1, w_2)}{\partial w_1} = 0, \\ \lambda F_0(w_1, w_2) - (\lambda + \mu_1) F_1(w_1, w_2) - jS_1 \frac{\partial F_0(w_1, w_2)}{\partial w_1} + \\ + jS_1 \frac{\partial F_1(w_1, w_2)}{\partial w_1} + jS_2 \frac{\partial F_1(w_1, w_2)}{\partial w_2} = 0, \\ -(\mu_2 + \lambda) F_2(w_1, w_2) - jS_2 \frac{\partial F_0(w_1, w_2)}{\partial w_2} + jS_2 \frac{\partial F_2(w_1, w_2)}{\partial w_2} + \\ + jS_1 \frac{\partial F_2(w_1, w_2)}{\partial w_1} + \mu_1 F_1(w_1, w_2) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (6) будем искать в виде

$$F_k(w_1, w_2) = R_k \exp\{jw_1 a_1 + jw_2 a_2\}, \quad (7)$$

где параметры a_1 и a_2 имеют смысл среднего числа заявок в первом и втором блоках ИПВ соответственно, а R_k - вероятности состояний прибора.

Выполняя ряд преобразований, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -R_0[\lambda + S_1 a_1 + S_2 a_2] + R_1[\lambda + S_1 a_1 + S_2 a_2] + R_2[\lambda + \mu_2 + S_1 a_1 + S_2 a_2] = 0, \\ R_0[\lambda + S_1 a_1] - R_1[\lambda + \mu_1 + S_1 a_1 + S_2 a_2] = 0, \\ S_2 a_2 R_0 + \mu_1 R_1 - R_2[\lambda + \mu_2 + S_1 a_1 + S_2 a_2] = 0, \\ -S_1 a_1 R_0 + R_1[2\lambda + S_1 a_1 + S_2 a_2] + \lambda R_2 = 0, \\ -S_2 a_2 R_0 + R_2[\lambda + S_1 a_1 + S_2 a_2] = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Нетрудно показать, что решение системы (8) имеет вид

$$R_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad R_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad R_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\lambda}{\mu_2}. \quad (9)$$

$$a_1 = \frac{\lambda \{ (2R_1 + R_2)(R_0 - R_2) + R_2 R_1 \}}{S_1 \{ (R_0 - R_1)(R_0 - R_2) - R_2 R_1 \}}, \quad a_2 = \frac{\lambda R_2 \{ (R_0 - R_1) + (2R_1 + R_2) \}}{S_2 \{ (R_0 - R_1)(R_0 - R_2) - R_2 R_1 \}}, \quad (10)$$

таким образом, получены вид стационарных вероятностей R_k состояний прибора и среднего числа заявок a_k в каждом из блоков источника повторных вызовов.

Заключение

Для однолинейной RQ-системы с конфликтами и дообслуживанием заявок методом асимптотического анализа в условии большой задержки были получены стационарные вероятности состояний прибора и среднее число заявок в каждом из блоков ИПВ.

Литература

1. *Artalejo J. R.* Retrial Queueing Systems. / Artalejo J. R., Gomez-Correl. - Springer, 2008.
2. *Falin G. I.* On single-line queue with double connection // All-Union Institute for scientific and Technical Information / Falin G. I., Sukharev Yu. I. - Moscow, 1985.
3. *Choi B. D.* Retrial Queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol // Queueing Systems / Choi B. D., Shin Y. W., Ahn W. C. - 1992, - № 11, - P. 335 - 356.
4. *Krishna Kumar B.* A single server feedback retrial queue with collisions. // Computer and operations research / Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S. - 2010, - № 37, - P. 1247 - 1255.
5. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания: учеб. Пособие. / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. - Томск: Изд-во НТЛ, 2010. - 228 с.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF RETRIAL QUEUEING SYSTEM WITH CONFLICTS AND AFTERSERVICE

Pomortseva N.A., Nazarov A.A.

National Research Tomsk State University, natashajpmk@gmail.com, nazarov.tsu@gmail.com

The stationary probabilities of the states of the device and the average number of requests in the blocks of the orbit are determined.

Key words: retrial queueing system, conflict of requests, afterservice, asymptotic analysis.