ИССЛЕДОВАНИЕ СУММАРНОГО ОБЪЕМА ТРЕБОВАНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВИДА M|GI|∞

Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, ekaterina_lisovs@mail.ru

Для бесконечнолинейной системы массового обслуживания определяется вид характеристической функции двумерного распределения вероятностей числа заявок в системе и суммарного объема требований, находящихся в системе при стационарном режиме.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, требования случайного объема.

Введение

В настоящее время внимание к теории массового обслуживания в значительной степени стимулировалось необходимостью применения результатов этой теории к важным практическим задачам, возникающим в связи с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления.

Системы массового обслуживания (СМО) с заявками случайного объема позволяют решать задачи проектирования информационных систем, объектом преобразования в которых является информация, поступающая порциями в виде дискретных или непрерывных сообщений. Сообщения или заявки обладают различным информационным объемом, который представляет собой случайную величину.

Задача исследования СМО, в которых каждая поступающая в систему заявка наряду со случайной длиной имеет случайный объем, причем суммарный объем всех находящихся в системе заявок ограничен, как было замечено еще в работах [3,4,5], играет важную роль при моделировании работы самых разнообразных технических устройств, в частности современных информационно-вычислительных систем. Однако аналитических решений этой задачи для бесконечнолинейных СМО с произвольной функцией времени обслуживания до сих пор не найдено, поскольку для корректного построения соответствующего марковского процесса, описывающего функционирование СМО, необходимо учитывать объемы всех заявок в системе. В настоящей статье предлагается решать поставленную задачу методом просеянного потока позволяющим учитывать объемы заявок находящихся в системе в момент времени t и не учитывать покинувшие.

Постановка задачи

Рассмотрим СМО с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток с параметром λ. Считаем, что продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов, которую обозначим $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $v>0$. Объемы различных требований независимы.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t, $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t. $G(y)=P\{v<y\}$ – функция распределения случайного процесса v.

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t),V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод просеянного потока.

Зафиксируем некоторый момент времени T. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t<T$ с вероятностью $S(t)=1-B(T-t)$ формирует событие просеянного потока.

Обозначим $n(t)$ – число событий, наступивших в просеянном потоке до момента времени t. Тогда, если в начальный момент $t_0<T$ система обслуживания была свободна, то для момента времени T выполняется равенство $i(T)=n(T)$.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Введем обозначение $P(n,z,t)=P\{n(t)=n, V(t)<z\}$ – распределение вероятностей двумерного Марковского процесса, где $n(t)$ – число событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t, $V(t)$ – суммарный объем требований, находящихся в просеянном потоке к моменту времени t. Для этого распределения можно записать систему [1] дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t}=\lambda S(t)\left[\int_0^z P(n-1,z-y,t)dG(y)-P(n,z,t)\right].$$

Введем характеристическую функцию вида:

$$H(u_1,u_2,t)=M\{\exp(ju_1n(t)+ju_2V(t))\}=\sum_{i=0}^{\infty}e^{ju_1n}\int_0^{\infty}e^{ju_2z}P(n,z,t)dz.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1n}\int_0^{\infty}e^{ju_2z}\int_0^z P(n-1,z-y,t)dG(y)dz=$$

$$=e^{ju_1}\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1(n-1)}\int_0^{\infty}e^{ju_2y}\cdot e^{ju_2(z-y)}\int_0^z P(n-1,z-y,t)dG(y)dz=$$

$$=e^{ju_1}\int_0^{\infty}e^{ju_2y}\left[\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1(n-1)}\int_0^{\infty}e^{ju_2(z-y)}P(n-1,z-y,t)dz\right]dG(y)=$$

$$=e^{ju_1}\int_0^{\infty}e^{ju_2y}H(u_1,u_2,t)dG(y)=e^{ju_1}H(u_1,u_2,t)\int_0^{\infty}e^{ju_2y}dG(y)=$$

$$=e^{ju_1}H(u_1,u_2,t)G^*(u_2),$$

можно записать следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\lambda S(t)H(u_1,u_2,t)\left[e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right].$$

Очевидно, решение имеет вид:

$$H(u_1,u_2,t)=\exp\left\{\lambda\left[e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right]\int_{-\infty}^{t}S(x)dx\right\}=$$

$$=\exp\left\{\lambda\left[e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right]\int_{-\infty}^{t}(1-B(T-x))dx\right\}=$$

$$=\exp\left\{\lambda\left[e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right]\int_{T-t}^{\infty}(1-B(x))dx\right\}.$$

При $t=T$ для характеристической функции двумерного процесса в стационарном режиме получим

$$H(u_1,u_2)=\exp\{\lambda b_1[e^{ju_1}G^*(u_2)-1]\}.$$

Откуда для процесса $i(t)$ в стационарном режиме получим

$$M\{e^{ju_1 i(t)}\}=\exp\{\lambda b_1[e^{ju_1}-1]\},$$

для процесса $V(t)$ в стационарном режиме получим

$$M\{e^{ju_2 V(t)}\}=\exp\{\lambda b_1[G^*(u_2)-1]\}.$$

Заключение

Для бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема была получена характеристическая функция двумерного распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема требований, находящихся в системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

Литература

1. *Гнеденко Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко. И.Н. Коваленко. – М. : Наука, 1987. – 336 с.
2. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания : учеб. Пособие. / А.А. Назаров. А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во НТЛ. 2010. – 228 с.
3. *Тихоненко О.М.* Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций / О.М. Тихоненко. – Минск : БГУ, 2008. – 148 с.
4. *Ромм Э. Л.*, Об одном обобщении задачи Эрланга // Автоматика и телемеханика / Э. Л. Ромм, В. В., Скитович .–1971. –№ 6. –С. 164–167.
5. *Александров А. М.* Обслуживание потоков неоднородных требований // Изв. АН СССР. Технич. Кибернетика. / *А.* М. Александров, Б. А. Кац. – 1973. – №2. – С. 47–53.

STUDY OF THE TOTAL SIZE OF CUSTOMERS IN INFINITE LINEAR QUEUING SYSTEM M|GI|∞

Lisovskaya E., Moiseeva S.

Tomsk State University, ekaterina_lisovs@mail.ru

The characteristic function of the two-dimensional probability distribution of the number of customers in the system and the total size of customers is obtained.

Key words: queuing theory, customers with random sizes.