УДК 519.872

Суммарный объем заявок в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком

В. А. Колбасова, Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева

[*] *Кафедра теории вероятностей и математической статистики, Национальный исследовательский Томский государственный университет, пр. Ленина, д.36, Томск, Россия, 634050*

Аннотация. В данной работе рассматривается бесконечнолинейная система массового обслуживания с входящим рекуррентным потоком требований случайного объема и независящим от этого объема временем обслуживания заявок. Для такой системы методом асимптотического анализа в условии высокой инфенсивности входящего потока была получена асимптотическая характеристическая функция первого порядка двумерного распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема требований, находящихся в системе.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обсдуживания, требования случайного объема, рекуррентный поток, асимптотический анализ, высокоинтенсивный входящий поток.

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) требований случайного объема имеют свое применение при моделировании процессов передачи данных, где информация передается порциями в виде сообщений случайного объема.

В работах [1–3] для наиболее простых СМО с входящим Пуассоновским потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания найдены характеристические функции распределения вероятностей числа заявок в системе и их суммарного объема. Однако адекватными моделями реальных процессов являются более общие модели СМО, а именно с входящим рекуррентным потоком и произвольным временем обслуживания заявок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток, заданный функцией распределения длин интервалов между последовательными моментами поступления заявок в систему $A(x)$. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $\nu > 0$, $G(y) = P\{\nu < y\}$ – функция распределения случайного процесса ν. Объемы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объем.

Пусть $i(t)$ – число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент времени t, $V(t)$ – полная сумма объемов требований, находящихся в системе в момент времени t.

Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t), V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским. Поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания (метод просеянного потока) [4, 5].

Построим просеянный поток для рассматриваемой СМО $GI/GI/\infty$. Для этого зафиксируем некоторый момент времени T. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < T$ с вероятностью

$$S(t) = 1 - B(T - t)$$

формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ эта заявка не рассматривается.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t. Тогда, если в начальный момент $t_0 < T$ система была свободна, то для момента времени T для любых m выполняется равенство

$$P\{i(t) = m\} = P\{n(t) = m\}.$$

Следует отметить, что использование метода просеянного потока позволяет более точно определить характеристики процесса $V(t)$, так как в просеянном потоке присутствуют только те заявки, которые не закончат обслуживание к моменту времени T.

2. Дифференциальное уравнение Колмогорова

Введем обозначение $P(z, n, v, t) = P\{z(t) < z, n(t) = n, V(t) < v\}$ – распределение вероятностей трехмерного марковского процесса, где $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента наступления следующего события в исходном рекуррентном потоке, $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, $V(t)$ – суммарный объем требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t. Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем равенства

$$P\left(z, n, v, t + \Delta t\right) = \left[P\left(z + \Delta t, n, v, t\right) - P\left(\Delta t, n, v, t\right)\right] +$$

$$+P(\Delta t, n, v, t)(1 - S(t))A(z)+ \qquad (1)$$

$$+S(t)A(z)\int_0^v P(\Delta t, n-1, v-y, t)dG(y) + o(\Delta t),$$

$$z > 0,\ n = 0, 1, 2 \ldots,\ v > 0.$$

Из (1) получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,n,v,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,n,v,t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0,n,v,t)}{\partial z}(A(z)-1)+$$

$$+S(t)A(z)\left[\int_0^v \frac{\partial P(0,n-1,v-y,t)}{\partial z}dG(y) - \frac{\partial P(0,n,v,t)}{\partial z}\right],$$

$$z > 0,\ n = 0, 1, 2 \ldots,\ v > 0.$$

с начальным условием

$$P(z,n,v,t_0) = \begin{cases} R(z), & n = 0, v > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь и далее $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$.

Введем частичные характеристические функции вида:

$$H(z,u_1,u_2,t) = M\{exp(ju_1 n(t) + ju_2 V(t))\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju_1 n}\int_0^{\infty} e^{ju_2 v}P(z,n,v,t)dv,$$

$$z > 0,\ n = 0, 1, 2 \ldots,\ v > 0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{ju_1 n}\int_0^{\infty} e^{ju_2 v}\int_0^{v}\frac{\partial P(0,n-1,v-y,t)}{\partial z}dG(y)dv =$$

$$= e^{ju_1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{ju_1(n-1)}\int_0^{\infty} e^{ju_2 y}e^{ju_2(v-y)}\int_0^{v}\frac{\partial P(0,n-1,v-y,t)}{\partial z}dG(y)dv =$$

$$= e^{ju_1}\int_0^{\infty} e^{ju_2 y}\left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{ju_1(n-1)}\int_0^{\infty} e^{ju_2(v-y)}\frac{\partial P(0,n-1,v-y,t)}{\partial z}dv\right]dG(y) =$$

$$= e^{ju_1} \int_0^\infty e^{ju_2 y} \frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z} dG(y) = e^{ju_1} \frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z} \int_0^\infty e^{ju_2 y} dG(y) =$$

$$= e^{ju_1} \frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z} G^*(u_2),$$

где $G^*(u_2)$ обозначено, как

$$G^*(u_2) = \int_0^\infty e^{ju_2 y} dG(y),$$

можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial H(z,u_1,u_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u_1,u_2,t)}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1\right)\right], \qquad (2)$$

с начальным условием

$$H(z,u_1,u_2,t_0) = R(z). \qquad (3)$$

3. Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (2) не представляется возможным, то для решения задачи (2) – (3) воспользуемся методом асимптотического анализа [5] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [4]. Запишем функцию распределения длин интервалов между моментами поступления заявок в систему в виде $A(Nz)$, где $N \to \infty$ – параметр высокой интенсивности потока.

Тогда, выполнив преобразования, уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(z,u_1,u_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u_1,u_2,t)}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial H(0,u_1,u_2,t)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + S(t)A(z)\left(e^{ju_1} G^*(u_2) - 1\right)\right], \qquad (4)$$

с начальным условием

$$H(z,u_1,u_2,t_0) = R(z). \qquad (5)$$

Асимптотический анализ первого порядка проведем в виде доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса $\{z(t), n(t), V(t)\}$ первого порядка имеет вид*

$$H(z, u_1, u_2, t) = R(z) exp \left\{ N\lambda[ju_1 + ju_2 a_1] \int\limits_{t_0}^{t} S(\tau) d\tau \right\},$$

где $\lambda = R'(0)$, a_1 – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$.

Доказательство.

Выполним в выражениях (4) и (5) замены

$$\varepsilon = \frac{1}{N}, u_1 = \varepsilon w_1, u_2 = \varepsilon w_2, H(z, u_1, u_2, t) = F_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon). \quad (6)$$

Тогда задача (4) - (5) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial F_1(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} \left[A(z) - 1 + S(t) A(z) \left(e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1 \right) \right], \quad (7)$$

с начальным условием

$$F_1(z, w_1, w_2, t_0, \varepsilon) = R(z). \quad (8)$$

Найдем асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (7) - (8), то есть $F_1(z, w_1, w_2, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon)$.

Этап 1. Положим в (7) $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial F_1(z, w_1, w_2, t)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0, w_1, w_2, t)}{\partial z} (A(z) - 1) = 0.$$

Можем сделать вывод, что $F_1(z, w_1, w_2, t)$ может быть представлена в виде

$$F_1(w_1, w_2, t) = R(z) \Phi_1(w_1, w_2, t), \quad (9)$$

где $\Phi_1(w_1, w_2, t)$ – некоторая скалярная функция, в силу (8), удовлетворяющая условию $\Phi_1(w_1, w_2, t_0) = 1$.

Этап 2. Выполним в (7) предельный переход при $z \to \infty$. Получим

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(\infty, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_1(0, w_1, w_2, t, \varepsilon)}{\partial z} S(t) \left(e^{j\varepsilon w_1} G^*(\varepsilon w_2) - 1 \right).$$

Подставим сюда выражение (9), воспользуемся разложениями

$$e^{j\varepsilon w_1} = 1 + j\varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2), e^{j\varepsilon w_2} = 1 + j\varepsilon w_2 + O(\varepsilon^2),$$

поделим обе части на ε и произведем предельный переход при $\varepsilon \to 0$. С учетом того, что $R'(0) = \lambda$ [4], получим дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w_1, w_2, t)$

$$\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(w_1, w_2, t) \left[\lambda S(t)(jw_1 + jw_2 a_1)\right], \qquad (10)$$

здесь и далее $a_1 = \int\limits_0^\infty y dG(y)$ – математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объема требований $G(y)$. Решение (10) с учетом начального условия дает

$$\Phi_1(w_1, w_2, t) = exp\left\{\lambda(jw_1 + jw_2 a_1)\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя данное выражение в (9), получаем

$$F_1(w_1, w_2, t) = R(z)exp\left\{\lambda(jw_1 + jw_2 a_1)\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

В силу замен (6) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, приближенное равенство:

$$H(z, u_1, u_2, t) = F_1(z, w_1, w_2, t, \varepsilon) \approx F_1(z, w_1, w_2, t) = R(z)\Phi_1(w_1, w_2, t) =$$

$$= R(z)exp\left\{\lambda\left[jw_1 + jw_2 a_1\right]\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= R(z)exp\left\{N\lambda\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

Теорема доказана.

Функция $H(u_1, u_2, t) = \lim\limits_{z\to\infty} H(z, u_1, u_2, t)$ есть характеристическая функция для процесса $\{n(t), V(t)\}$ – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t, и суммарного объема требований в просеянном потоке к моменту времени t.

Следствие 1. *Полагая $t = T$, $t_0 = -\infty$, для характеристической функции процесса $\{i(t), V(t)\}$ в стационарном режиме получим*

$$H(u_1, u_2) = exp\{N\lambda b_1 \left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\},$$

здесь и далее

$$b_1 = \int\limits_{-\infty}^{T} S(\tau)d\tau = \int\limits_{0}^{\infty} (1 - B(\tau))d\tau$$

определяет математическое ожидание случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Следствие 2. *Асимптотическая характеристическая функция суммарного объема требований в системе первого порядка в стационарном режиме имеет вид:*

$$H(u) = exp\{juN\lambda b_1 a_1\}.$$

Заключение

Для бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объема была получена асимптотическая характеристическая функция первого порядка двумерного распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема требований, находящихся в системе.

Литература

1. *Колбасова В.А., Лисовская Е.Ю.* Исследование суммарного объема требований в СМО вида GI/M/∞ // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XX Всероссийской научно-практической конференции (28-29 апреля 2016 г.) / сост. Ю.А. Наумкина. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. – Ч.1. – с. 97-101.
2. *Лисовская Е.Ю.* Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в системе M/GI/∞ // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016. – с. 108.
3. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.* Исследование суммарного объема требований в бесконечнолинейной системе массового обслуживания вида M/GI/∞ // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 18-22 апреля 2016 г. – Москва : РУДН, 2016. – с. 28-30.

4. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. —Томск: Изд-во. НТЛ, 2015. —240с.
5. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. —Томск: Изд-во. НТЛ, 2015. —112с.

UDC 519.872

Total capacity of customers in infinite-server queueing system with stationary renewal arrivalse

V. Kolbasova, E. Lisovskaya, S. Moiseeva

Department of probability theory and mathematical statistics,
Tomsk State University
Russia, 634050, Tomsk, 36 Lenin Pr.

In the paper, the infinite-server queueing system with a random capacity of customers is considered. In this system, the total capacity of customers is analysed by means of the asymptotic analysis method with high-rate stationary renewal process arrivals.

Keywords: infinite-server queueing system, customer with random capacity, stationary renewal process.