ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ M2|M2|1 С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ

И. А. Кононов, Е. А. Фёдорова
Национальный исследовательский Томский государственный университет

В связи с появлением телефонных систем, call-центров и других коммуникационных систем, моделирование которых классическими системами массового обслуживания не давало результатов, с середины 20-го века стали выделять новый класс систем массового обслуживания – RQ-системы (Retrial Queueing Systems) или системы с повторными вызовами.

RQ-системы характеризуются тем, что если при обращении заявки к обслуживающему прибору прибор был занят, то заявка не теряется и не встает в очередь, а уходит в источник повторных вызовов, откуда она повторно обращается к прибору после некоторой случайной задержки.

Наиболее широкое исследование RQ-систем приведено в работах Г. И. Фалина [1] и Дж. Р. Арталехо [2]. Анализом этих моделей также занимались А. Гомез-Коррел [2], А. Н. Дудин [3], А. А. Назаров [4] и др.

В данной статье будет проводиться численный анализ RQ-системы M2|M2|1 с 2-мя источниками повторных вызовов. Исследование подобных систем было проведено К. Авчаренковым, P. Nain, U. Yechiali [5], Y. W. Shin, D. H. Moon [6] и др.

Описание модели Рассмотрим RQ-систему (рис. 1) с двумя источниками повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступают два простейших потока заявок с интенсивностями 1 и 2. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания, время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметрами $\mu1$ и $\mu2$.

Если прибор занят, то заявка 1-го типа переходит в первый источник повторных вызовов, а заявка 2-го типа – во второй, где они осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметрами 1 и 2 соответственно. Из ИПВ (это может быть как первый, так и второй) после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору. Если прибор свободен, то заявка занимает его для обслуживания, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается в свой ИПВ для реализации следующей задержки.

Рис. 1. RQ-система M2|M2|1

Обозначим i1(t) – число заявок в 1-м источнике повторных вызовов, а

i2(t) – число заявок во 2-м источнике. Случайный процесс k(t) описывает состояние прибора следующим образом:

0, если прибор свободен, k (t) 1, если на приборе находится 1-я заявка, 2, если на приборе находится 2-я заявка.

Очевидно, что трехмерный процесс {k(t), i1(t), i2(t)} является марковским.

Обозначим P {k(t)=k, i1(t)=i1, i2(t)=i2} = Pk (i1, i2, t) – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k, в 1-м источнике повторных вызовов i1 заявок и во 2-м источнике повторных вызовов i2 заявок.

Ставится задача найти совместное распределение вероятностей числа заявок в первом и во втором источниках повторных вызовов.

Для распределения вероятностей Pk (i1, i2, t) состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

_ _ _

2 P2 (i1, i2 1) (1 2 2) P2 (i1, i2) 0.

В работе предлагается решать систему (2) с помощью численного алгоритма.

Численный алгоритм вычисления распределения вероятностей числа заявок в ИПВ Для нахождения распределения вероятностей числа заявок в ИПВ в RQ-системе M2|M2|1 будем использовать метод, основанный на представлении системы алгебраических уравнений (2) в виде матричного уравнения для различных i1, i2 0, N и последующем его решении.

Добавим к системам линейных уравнений условие нормировки N N

_ _ _

Решение матричного уравнения (3) было найдено с помощью обратной матрицы [7].

Алгоритм нахождения Pk (i1, i2) был реализован численно в виде программы в среде MATLAB. Продемонстрируем пример его работы.

В качестве примера возьмем следующие значения параметров системы:

1 0.05, 2 0.1, 1 2, 2 1, 1 0.6, 2 0.5.

На следующем рисунке представлено двумерное распределение вероятностей числа заявок в первом и во втором ИПВ.

_ _ _

На следующих рисунках показаны одномерные распределения вероятностей числа заявок в каждом ИПВ для выбранных параметров.

Рис. 3. Распределение вероятностей числа заявок в 1-м ИПВ Рис. 4. Распределение вероятностей числа заявок в 2-м ИПВ Приведем другой пример, возьмем следующие значения параметров системы 1 0.5, 2 0.1, 1 0.9, 2 0.5, 1 0.6, 2 0.1.

На следующем рисунке представлено двумерное распределение вероятностей числа заявок в первом и во втором ИПВ.

_ _ _

Заключение В работе был предложен численный алгоритм исследования RQсистемы M2|M2|1 с двумя ИПВ в стационарном режиме. В результате были получены совместное распределение вероятностей числа заявок в первом и во втором ИПВ и одномерные распределения вероятностей заявок в каждом ИПВ для различных параметров системы.

Однако, данный алгоритм может быть применим лишь при N100, где N – максимальное количество заявок в каждом ИПВ. Это связано с необходимостью обращения матриц размерностью 3 (N 1) (N 1), а при N100 матрица G имеет размерность больше, чем 30 000 x 30 000. Так что производительных характеристик компьютера (а именно оперативной памяти) недостаточно для выполнения данной операции.

Поэтому при N100 следует использовать другие методы решения поставленной задачи, например, метод асимптотического анализа.

Литература

1. Falin G. L., Templeton J. G. C. Retrial Queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.

2. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.

3. Дудин А.Н., Клименок В. И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Минск: БГУ, 2000. – 221 с.

4. Федорова Е. А., Назаров А. А. Численные методы исследования RQ-систем с входящим MMMP-потоком // Сборник научных статей «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения». – Минск: РиВШ. – 2015. – С.

338-342.

5. Avrachenkov, K., Nain, P., Yechiali, U. A retrial system with two input streams and two orbit queues // Queueing Syst. – 2014. – V. 77. - № 1. – P. 1-31.

6. Yang Woo Shin & Dug Hee Moon. M/M/c Retrial Queue with Multiclass of Customers // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2014. – V. 16. - № 4. – P. 931–949.

7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 280 с.