ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
№ 1 ФИЗИКА 2004

УДК 519.872

А.А. НАЗАРОВ, Н.М. ФЕРОПОНТОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ИХ ОЖИДАНИЕМ В ПУСТОЙ СИСТЕМЕ

В данной работе проводится исследование бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием в пустой системе. Находится распределение вероятностей числа положительных и числа отрицательных заявок. Проводится асимптотический анализ, позволяющий установить асимптотическую эквивалентность рассматриваемой системы с системами с потерей и ожиданием. Указывается область применимости получаемой асимптотики.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, отрицательные заявки, метод асимптотического анализа.*

Введение

Теория массового обслуживания применяется для исследования процессов различной природы. В частности, рассматриваемая модель массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками может описать реальные физические, экономические, телекоммуникационные процессы. Системы с отрицательными заявками впервые рассматривались Геленбе [1], конечнолинейные СМО изучались в работах П. П. Бочарова, Ч. Д'Апиче, Р. Манзо, А. В. Печинкина, Р. В. Разумчика [2]-[4], Yang Woo S. [5], Quan-Lin L., Yiqiang Q. Z. [6]. В данной работе проводится исследование бесконечнолиненйной системы массового обслуживания с экспоненциальным обслуживанием и простейшими входящими потоками положительных и отрицательных заявок. Находятся распределение вероятностей числа положительных и числа отрицательных заявок. Применяется метод асимптотического анализа [7] в условиях высокоинтенсивных входящих потоков. Находятся геометрическое распределение для числа отрицательных заявок и гаусовское распределение для числа положительных. Демонстрируется область применимости асимптотики.

Математическая модель

На вход бесконечнолинейной системы обслуживания с ожиданием в пустой системе поступают два потока: простейший поток положительных заявок с параметром λ^{+} и простейший поток отрицательных заявок с параметром γ^{-}. В системе имеется неограниченное число обслуживающих приборов. Обслуживание экспоненциальное с параметром μ.

Любая положительная заявка, приходящая в систему, сразу начинает обслуживание, выбирая любой из свободных приборов. Отрицательная заявка, приходящая в непустую систему, «убивает» любую положительную заявку, находящуюся в процессе обслуживания, и обе покидают систему. Отрицательная заявка, приходящая в пустую систему, дожидается прихода положительной и они вместе покидают систему.

В системе исследуется 2 процесса: $i(t)$ – число положительных заявок и $l(t)$ – число отрицательных заявок в системе в момент времени t. В параграфе 1 найдем стационарное распределение вероятностей числа положительных и числа отрицательных заявок в системе, и в параграфе 2 и 3 продемонстрируем метод асимптотического анализа для рассматриваемой системы. В асимптотическом условии высокой интенсивности входящих потоков получим первую и вторую асимптотики. Далее сравним их с допредельным распределением и используя расстояния Колмогорова продемонстрируем их близость, найдя область применимости.

Допредельное исследование

Для рассматриваемой системы обслуживания найдем стационарное распределение вероятностей.

Введем следующие вероятности:

$$P^{+}(i)=P\{i(t)=i\},\ P^{-}(l)=P\{l(t)=l\},\ i=\overline{1,\infty},\ l=\overline{1,\infty},$$

а также

$$P(0)=P\{i(t)=0,l(t)=0\}.$$

Изобразим систему с помощью графа.

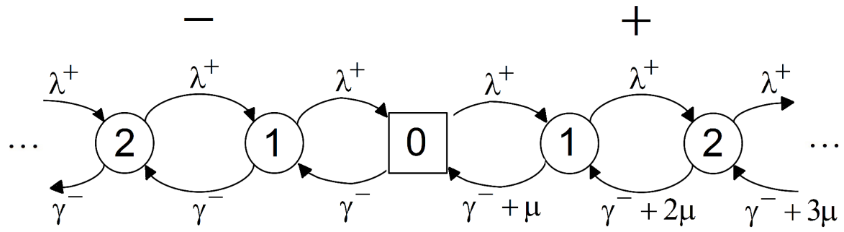

Рисунок 1 Граф для системы с отрицательными заявками и их ожиданием в пустой системе.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова, используя метод сечения графа (рисунок 1).

Для $P^{-}(l)$ система имеет вид:

$$\begin{cases}\lambda P^{-}(1)=\gamma P(0),\\ \lambda P^{-}(l)=\gamma P^{-}(l-1).\end{cases} \tag{1.1}$$

Для $P^{+}(i)$ имеем:

$$\begin{cases}(\gamma+\mu)P^{+}(1)=\lambda P(0),\\ (\gamma+i\mu)P^{+}(i)=\lambda P^{+}(i-1).\end{cases} \tag{1.2}$$

Для $P(0)$ верно следующее соотношение:

$$(\lambda^{+}+\gamma^{-})P(0)=\lambda^{+}P^{-}(1)+(\gamma^{-}+\mu)P^{+}(1). \tag{1.3}$$

Используя (1.1)-(1.3) найдем распределения вероятностей $P^{+}(i)$ и $P^{-}(l)$

$$P^{+}(i)=P(0)\prod_{n=1}^{i}\frac{\lambda^{+}}{\gamma^{-}+n\mu}, \tag{1.4}$$

$$P^{-}(l)=\left(\frac{\gamma^{-}}{\lambda^{+}}\right)^{l}P(0). \tag{1.5}$$

А из условия нормировки найдем значения вероятности $P(0)$:

$$P(0)=\left(\frac{\lambda^{+}}{\lambda^{+}-\gamma^{-}}+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{i}\frac{\lambda^{+}}{\gamma^{-}+n\mu}\right)^{-1}. \tag{1.7}$$

Таким образом, в рассматриваемой системе найдено стационарное распределение числа положительных заявок, определенное в (1.4), и числа отрицательных заявок, определенное в (1.5).

Далее рассмотрим двумерное распределение $P(i,l,t)=P\{i(t)=i,l(t)=l\}$. Используя Δt-метод, получим систему уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме, где $P(i,l,t)=P(i,l)$, имеет вид:

$$\begin{cases} -(\lambda^+ + i\mu + \gamma^-)P(i,0) + \lambda^+ P(i-1,0) + (i+1)\mu P(i+1,0) + \gamma^- P(i+1,0) = 0, \quad i \geq 1 \\ -(\lambda^+ + \gamma^-)P(0,0) + (\mu + \gamma^-)P(1,0) + \lambda^+ P(0,1) = 0, \\ -(\lambda^+ + \gamma^-)P(0,l) + \lambda^+ P(0,l+1) + \gamma^- P(0,l-1) = 0, \quad l \geq 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Введем следующие характеристические функции

$$H_1(u) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{jui} P(i,0), \quad j = \sqrt{-1},$$

$$H_0(u) = \sum_{l=1}^{\infty} e^{jul} P(0,l), \quad j = \sqrt{-1}.$$

Умножим первое уравнение системы (1.8) на e^{jui}, просуммируем по $i = \overline{1,\infty}$ и прибавим второе уравнение. Также заметим, что вероятность $P(0,1) = P^-(1) = \left(\dfrac{\gamma^-}{\lambda^+}\right)P(0)$.

И, аналогично, умножим третье уравнение системы (1.8) на e^{jul} и просуммируем по $l = \overline{1,\infty}$ и прибавим второе. Запишем, $P(1,0) = P^+(1) = \left(\dfrac{\lambda^+}{\gamma^- + \mu}\right)P(0)$.

Тогда система (1.8) после преобразований перепишется в виде

$$\begin{cases} j\mu H_1'(u) + H_1(u)(\lambda^+ e^{ju} - \gamma^-) + \gamma^- P(0,0) = 0, \\ H_0(u)(\gamma^- e^{ju} - \lambda^+) + \lambda^+ P(0,0) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Метод асимптотического анализа

В условиях высокоинтенсивных входящих потоков исследуем нашу систему, определенную уравнением (1.9). Предельное условие определим равенствами

$$\lambda^+ = \lambda N, \gamma^- = \gamma N,$$

где λ, γ - некоторые конечные величины, а $N \to \infty$, тогда систему (1.9) перепишем в виде

$$\begin{cases} j\dfrac{\mu}{N} H_1'(u) + H_1(u)(\lambda e^{ju} - \gamma) = -\gamma P(0,0) = 0, \\ H_0(u)(\gamma e^{ju} - \lambda) + \lambda P(0,0) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Будем также считать, что выполнено условие $\lambda > \gamma$.

Решение второго уравнения системы (1.9) имеет вид:

$$H_0(u) = \frac{\lambda}{\lambda - \gamma e^{ju}} P(0,0) = \frac{P(0,0)}{1 - \dfrac{\gamma}{\lambda} e^{ju}} = P(0,0) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^l e^{jul},$$

то есть $P(0,l) = P(0,0)\left(\dfrac{\gamma}{\lambda}\right)^l$, аналогично (1.5).

Нетрудно показать, что распределение вероятностей числа положительных заявок является нормальным с математическим ожиданием $N\dfrac{\lambda - \gamma}{\mu}$ и дисперсией $N\dfrac{\lambda}{\mu}$, что также было показано в [8] и [9]. Характеристическая функция $H_1(u)$ принимает вид:

$$H_1(u)=\exp\left\{juN\frac{\lambda-\gamma}{\mu}-\frac{u^2}{2}\frac{\lambda}{\mu}N\right\}. \qquad (1.14)$$

Дискретное распределение числа положительных заявок в рассматриваемой системе можно аппроксимировать равенством:

$$P(i)=C\exp\left\{-\left(i-N\frac{\lambda-\gamma}{\mu}\right)^2\Big/2\frac{\lambda}{\mu}N\right\}, \qquad (1.15)$$

где C определим из условия нормировки:

$$C=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\exp\left\{-\left(i-N\frac{\lambda-\gamma}{\mu}\right)^2\Big/2\frac{\lambda}{\mu}N\right\}\right)^{-1}.$$

Аппроксимация. Область применимости асимптотики

Для нахождения области применимости полученного асимптотического распределения вероятностей числа положительных заявок воспользуемся расстоянием Колмогорова, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_{1,2}=\max_{0<i<\infty}\left|\sum_{n=0}^{i}(P^+(i)-P_a(i))\right|$$

где $P_a(i)$ - гауссовская аппроксимация, определенная в (1.15), а $P^+(i)$ - допредельные вероятности того, что число положительных заявок равно i, определенные в (1.4).

Данная асимптотика применима в случае $\lambda>\gamma$ и ниже в таблице 1 представлены значения расстояний Колмогорова между асимптотическим гауссовским и допредельным распределением для одинаковых значений параметров. Величина N, несущая в себе смысл увеличения интенсивности входящего потока, в приведенной таблице изменяется по вертикали. Величина отношения параметров входящих потоков положительных и отрицательных заявок изменяется по горизонтали.

Таблица 1 Область применимости асимптотического распределения вероятностей числа положительных заявок в системе относительно величин расстрояний Колмогорова

N \ λ/γ	1,01	1,05	1,1	1,15	1,20	1,30	1,5	2	2,5
10	0.657	0.367	0.229	0.157	0.114	0.067	0.031	0.015	0.017
20	0.545	0.226	0.108	0.059	0.035	0.016	0.008	0.011	0.012
30	0.469	0.151	0.056	0.025	0.013	0.005	0.007	0.009	0.009
40	0.412	0.104	0.031	0.012	0.006	0.005	0.006	0.007	0.008
50	0.367	0.074	0.018	0.006	0.003	0.005	0.005	0.007	0.007
100	0.225	0.016	0.002	0.003	0.003	0.003	0.004	0.005	0.005

В таблице выделена область значений параметров, в которой расстояния Колмогорова $\Delta\le 0{,}03$.

Для сравнения распределений также часто пользуются величинами относительных погрешностей $\Delta_j=\left|\frac{m_j^+-m_j^N}{m_j^N}\right|$, $j=1{,}2$ таких характеристик, как:

- Математическое ожидание: $m_1^+=\mu^+=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot P^+(i)$ и $m_1^N=\mu^N=N\frac{\lambda-\gamma}{\mu}$.

- Среднеквадратическое отклонение: $m_2^+ = \sigma^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(i-\mu^+)^2 \cdot P^+(i)}$ и $m_2^N = \sigma^N = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}N}$.

В таблице 2 представлены суммарные относительные погрешности математического ожидания и среднеквадратического отклонения $\Delta^{\lambda/\gamma} = \Delta_1^{\lambda/\gamma} + \Delta_2^{\lambda/\gamma}$.

Таблица 2 Область применимости асимптотического распределения вероятностей числа положительных заявок в системе относительно величин суммарных относительных погрешностей характеристик

N \ $\Delta^{\lambda/\gamma}$	$\Delta^{1,01}$	$\Delta^{1,05}$	$\Delta^{1,1}$	$\Delta^{1,15}$	$\Delta^{1,2}$	$\Delta^{1,3}$	$\Delta^{1,5}$	Δ^{2}	$\Delta^{2,5}$
10	0,47	0,32	0,25	0,20	0,16	0,11	0,00	0,02	0,01
20	0,41	0,25	0,16	0,11	0,08	0,04	0,00	0,00	0,00
30	0,37	0,20	0,11	0,06	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00
40	0,35	0,17	0,07	0,03	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
50	0,33	0,13	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
100	0,28	0,05	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Очевидно, что область применимости, соответствующая значениям суммарных погрешностей характеристик $\Delta^{\lambda/\gamma} \le 0{,}05$ совпадает с областью применимости, соответствующей значениям расстояний Колмогорова $\Delta \le 0{,}03$.

Продемонстрируем на рисунке 2 распределения для фиксированной величины отношения параметров $\lambda/\gamma = 1{,}1$, но для изменяющихся N. Сплошной линией изобразим график допредельных вероятностей числа положительных заявок, точками - график асимптотического нормального распределения, являющегося аппроксимирующим для первого.

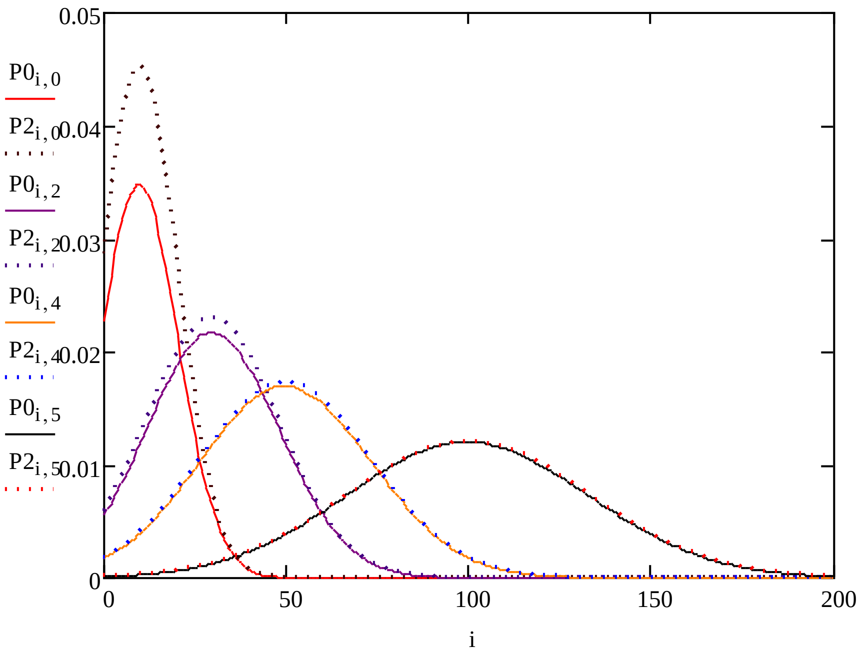

Рисунок 2 Графики допредельных и нормальных распределений для $\lambda/\gamma = 1{,}1$ и $N = 10, 30, 50, 100$.

Заметим, что графики, представленные на рисунке 2, в полной мере отражают область применимости асимптотики, приведенной в таблицах 1 и 2, при изменяющемся N. График нормального распределения с самой острой из представленных вершиной, очевидно, аппроксимирует допредельное относительно плохо, график же наиболее приплюснутого аппроксимирует допредельное наилучшим образом.

Заключение

В данной работе проведено исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с положительными и отрицательными заявками. Найдено стационарное распределение числа положительных и отрицательных заявок в системе с экспоненциальным обслуживанием. Найдено асимптотическое распределение числа положительных заявок. Установлена асимптотическая эквивалентность рассматриваемой системы с ожиданием в пустой системе, системой с ожиданием новой положительной заявки и системой с потерей в пустой системе. Найдена область его применимости, а именно область значений параметров $\frac{\lambda}{\gamma} \geq 1{,}05$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
2. Gelenbe E., Queueing networks with negative and positive customers, J. Appl. Prob., 1991, vol. 28, pp. 656–653
3. А. В. Печинкин, Р. В. Разумчик, Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени, Автомат. и телемех., 2009, выпуск 12, 109–120
4. А. В. Печинкин, Р. В. Разумчик, О временных характеристиках в экспоненциальной системе массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок, Автомат. и телемех., 2011, выпуск 12, 75–90
5. П. П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, Р. Манзо, А. В. Печинкин, Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками, Автомат. и телемех., 2007, выпуск 1, 93–104
6. Yang Woo S. Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. № 55. P. 223-237.
7. Quan-Lin L., Yiqiang Q. Z. A MAP/G/1 Queue with Negative Customers // Queueing Systems. 2004. № 47. P. 5-43.
8. Назаров А. А., Феропонтова Н. М. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их потерей в пустой системе. // Теория вероятностей математическая статистика и приложения: материалы междунар. науч. конф., Минск, 23–26 февраля 2015. Минск: РИВШ, 2015. С. 208-213.
9. Назаров А. А., Феропонтова Н. М. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием. // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014): материалы XIII междунар. науч.-практич. конф. им. А. Ф. Терпугова (20-22 ноября 2014). – Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2015. С. 71-76.

Национальный исследовательский Томский Государственный Университет
г. Томск, Россия
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com; feropontova.natalia@gmail.com

Назаров Анатолий Андреевич, д-р техн.н., профессор, зав. каф. ТВиМС;
Феропонтова Наталья Михайловна, магистрант.

A.A. NAZAROV, N.M. FEROPONTOVA

INFINITE-SERVER QUEUE WITH NEGATIVE CUSTOMERS WITH WAITING AT EMPTY SYSTEM

In this paper the queuing system with the infinite number of devices with negative customers at empty system has been studied. Distribution of the number of positive and negative customers is obtained. The asymptotic analysis method allows to determine the asymptotic equivalence of the considered types of the system, the system with loss and with waiting at empty system. The parameter application area is shown in the paper.

Keywords: *queuing system, negative customers, asymptotic analysis method.*

REFERENCES

1. Nazarov A.A. Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya [Asimptotic analysis methods in the queueing theory] / A. A. Nazarov, S.P. Moiseeva. – Tomsk: Izd-vo NTL [Tomsk: NTL Publ.], 2006. – 112 p. (In Russian)
2. Gelenbe E., Queueing networks with negative and positive customers, J. Appl. Prob., 1991, vol. 28, pp. 656–653
3. Pechinkin A. V., Razumchik R. V., A queueing system with negative claims and a bunker for superseded claims in discrete time, Automation and Remote Control, 2009, vol. 12, pp. 2039-2049.
4. Pechinkin A. V., Razumchik R. V., O vremennykh kharakteristikakh v eksponentsial'noy sisteme massovogo obsluzhivaniya s otritsatel'nymi zayavkami i bunkerom dlya vytesnennykh zayavok [About the time characteristics in the exponential queueing system with negative negative claims and a bunker for superseded claims], Avtomat. i telemekh. [Automation and Remote Control], 2011, vol. 12, pp. 75–90. (In Russian)
5. Bocharov P. P., C. D'apice, Manzo R,, Pechinkin A.V., Analiz mnogolineynoy markovskoy sistemy massovogo obsluzhivaniya s neogranichennym nakopitelem i otritsatel'nymi zayavkami. [Analysis of the multi-server Markov queuing system with unlimited buffer and negative customers], Avtomat. i telemekh. [Automation and Remote Control], 2007, vol. 1, pp. 93–104 (In Russian)
6. Yang Woo S. Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. № 55. P. 223-237.
7. Quan-Lin L., Yiqiang Q. Z. A MAP/G/1 Queue with Negative Customers // Queueing Systems. 2004. № 47. P. 5-43.
8. Nazarov A.A., Feropontova N. M. Issledovaniye beskonechnolineynoy sistemy massovogo obsluzhi-vaniya s otritsatel'nymi zayavkami i ikh poterey v pustoy sisteme [Infinite-server queue with negative customers with loss at empty system] // Teoriya veroyatnostey matematicheskaya statistika i prilozheniya: materialy mezhdunar. nauch. konf, Minsk, 23-26 fevralya 2015 [Probabiliry theory, mathematical statistique and applications, matherials of the international scientific conference, Minsk, 23-26 february 2015] , Minsk RIVSH,215, p. 208-213. (In Russian)
9. Nazarov A.A., Feropontova N. M. Issledovaniye beskonechnolineynoy sistemy massovogo obsluzhi-vaniya s otritsatel'nymi zayavkami i ikh ozhidaniyem [Infinite-server queue with negative customers with waiting] // Informatsionnyye tekhnologii i matematicheskoye modelirovaniye (ITMM-2014): materialy mezhdunar XIII. nauch.-praktich. konf. im. A. F. Terpugova (20-22 noyabrya 2014) [Information technology and mathematical modeling (ITMM 2014): materials of the XIII Intern. scientific-practical. conf named after A.F. Terpugov (20-22 november 2014)] Tomsk, Izd-vo Tom. Un-ta [Tomsk University Publ.] pp. 71-76. (In Russian)

National Research Tomsk State University
Tomsk, Russia
E-mail: nazarov.tsu@gmail.com; feropontova.natalia@gmail.com