BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE A L'UNIVERSITÉ KOUYBYCHEFF DE TOMSK

Vol I. Fasc. I.

MITTEILUNGEN DES FORSCHUNGS-INSTITUTS FÜR MATHEMATIK UND MECHANIK AN DER KUJBYSCHEW-UNIVERSITÄT TOMSK.

Bd. I. Heft I.

ИЗВЕСТИЯ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. КУЙБЫШЕВА В. В.

ТОМ ПЕРВЫЙ
ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

Отредактировали:
Ф. Э. Молин.
С. Б. Бергман.

Redigiert von:
Rédigé par:
Th. Molien.
St. Bergmann.

ТОМСК 1935

ОТ РЕДАКЦИИ.

Редакция обращается к авторам работ с просьбой присылать рукописи, напечатанными, по возможности, на пишущей машинке и на одной стороне листа.

Работы могут быть написаны на русском, немецком, английском, французском или итальянском языках. Каждая работа должна сопровождаться резюме, делающем понятным сущность содержания работы для читателя, незнакомого с языком, на котором написана работа. Перевод резюме на русский или другой язык, в случае необходимости, берет на себя редакция.

Авторы получают бесплатно 75 отдельных оттисков их работ.

Адрес: Научно-Исследовательский Инст-т Математики и Механики при Томском Гос. Университете им. Куйбышева, Томск, СССР.

MITTEILUNG DER REDAKTION.

Die Autoren der für diese Zeitschrift bestimmten Arbeiten werden gebeten, die Manuskripte möglichst maschinenschriftlich auf einseitig beschriebenen Bögen einzureichen.

Die eingesandten Arbeiten können in russischer, deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache verfasst werden. Jeder Arbeit soll eine Zusammenfassung beigefügt werden, die ihren wesentlichen Inhalt auch für die der Originalsprache nicht kundigen Leser verständlich macht. Die Übersetzung derselben in die russische oder eine andere Sprache wird nötigenfalls die Redaktion selbst übernehmen.

Die Verfasser erhalten kostenlos 75 Sonderabdrucke ihrer Artikel.

Adresse: Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik an der Kujbyscew Staats-Universität, Tomsk, UdSSR.

DE LA REDACTION.

La rédaction prie les auteurs de vouloir bien envoyer leurs manuscrits écrits avec le dactylographe sur un côté de la feuille.

Les articles présentés peuvent être rédigés en russe, allemand, anglais, francais ou italien.

Chaque travail doit avoir un résumé écrit en termes clairs qui donnent une idée nette sur le sujet de ce travail même pour les lecteurs qui ne connaissent pas la langue du texte du travail.

La rédaction se charge de la traduction du résumé en russe ou dans une autre langue.

Les auteurs reçoivent gratuitement 75 tirages à part de leurs articles.

Adresse. Institut de mathématiques et de mécanique à l'Université Kouybycheff de Tomsk. L'U.R.S.S.

COMMUNICATIONS OF THE EDITORIAL STAFF.

The authors of the treatises which shall be published in this journal, are asked to present their manuscripts, if possible, in type-writing, on sheets, written upon only on one side.

The treatises may be written in Russian, English, French, German, or Italian. A résumé, which makes it possible for the reader not acquainted with the original language to understand the essential contents, shall be added. If necessary the editors will translate the résumé into Russian or any other language.

The authors will gratisly get 75 copies of their treatises.

Address: Research Institute for Mathematics and Mechanics at the Kuibysheff State-University, Tomsk, Siberia.

Научно-Исследовательский Институт математики и механики при Томском государственном университете им. Куйбышева приступает к изданию собственного печатного органа, в котором будут опубликовываться как результаты исследований Института, производимых его сотрудниками, так и работы, предложенные Институту советскими или иностранными учеными.

Помещаемые, как это видно из содержания настоящего тома, статьи в нашем журнале не ограничиваются какими-либо определенными областями чистой или прикладной математики. Однако, в дальнейшем, теория функций нескольких комплексных переменных, вопросы математической физики и теоретической механики, которые в будущем должны составлять основные направления исследовательской деятельности нашего Института, будут больше других областей математики представлены в нашем журнале. Дирекция Института надеется, что издание нашего математического журнала будет способствовать как усилению уже существующего контакта с другими научными учреждениями СССР и заграницы, так и установлению новых аналогичных связей.

Дирекция научно-исследовательского Института математики и механики.

Проф. Л. А. Вишневский.

Das Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik an der Staatsuniversität zu Tomsk (V. W. Kujbyschew-Universität) beginnt mit der Herausgabe eines eigenen Publikationsorgans, das die Forschungen des Instituts aus der Hand seiner Mitarbeiter aufnehmen soll, aber auch Arbeiten, die dem Institut von anderen, nicht zu seinen Mitgliedern zählenden, sowohl russischen, als ausländischen Fachgenossen vorgelegt werden.

Wie der Inhalt des vorliegenden Heftes zeigt, bestehen in unserer Zeitschrift keine Einschränkungen der aus der reinen und angewandten Mathematik vertretenen Richtungen. Es sollen jedoch künftig zwei Richtungen stärker betont werden, nämlich die Theorie der Funktioneu mehrerer komplexer Veränderlicher einerseits und die Fragen der mathematischen Physik und theoretischen Mechanik andererseits, die Grundrichtungen in der Tätigkeit unseres Instituts bilden sollen.

Die Direktion hofft, dass die Herausgabe unserer mathematischen Zeitschrift der Stärkung der bereits bestehenden wissenschaftlichen Verbindungen mit anderen wissenschaftlichen Einrichtungen der UdSSR und des Auslandes ebenso dient, wie auch der Anknüpfung neuer Beziehungen.

Die Direktion des Forschungsinstituts für Mathematik und Mechanik.

Prof. **L. A. Wischnjewsky.**

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. К. МИНЯТОВ (Томск)

§ 1.

Решение простейшего разностного уравнения, т. е. такого уравнения, в котором требуется по данной разности первого порядка найти первообразную функцию, как известно, дается формулой суммирования Маклорена - Эйлера. Следует заметить, что задача суммирования функций может пониматься двояко. При дискретной постановке этой задачи приходится находить сумму конечного числа значений функции от аргументов, составляющих арифметическую прогрессию, более же общая постановка вопроса делает задачу суммирования функций задачей решения функционального уравнения с двумя переменными, одним из которых является аргумент суммируемой функции, а вторым—интервал разностей. Решение этой задачи при такой общей постановке вопроса оказывается неопределенным благодаря присутствию произвольного периодического члена, и поэтому совершенно естественно возникает вопрос о дополнительном определяющем условии, например, можно потребовать, чтобы решение было аналитическим, в известной области.

Несмотря на то, что формула Маклорена-Эйлера непосредственно предназначается для дискретного суммирования, все же и при построении аналитичекого решения она играет решающую роль, а при ассимптотическом решении задачи, даже в случае полного отказа от дискретной точки зрения, формула Маклорена - Эйлера полностью возрождается в форме бесконечного ряда. Следует думать, что всякое обобщение формулы Маклорена-Эйлера на случай разностных уравнений более сложного вида окажется полезным как в практическом, так и в теоретическом смысле слова.

В настоящей работе я даю формулу, которая при известных условиях, может служить, как для дискретного, так и для аналитического решения разностных уравнений и систем разностных уравнений. Эта формула во многих отношениях представляет аналогию с формулой Маклорена-Эйлера.

Рассмотрим общее разностное уравнение первого порядка, которое запишем в виде:

$$y(x+\omega,\omega)-y(x,\omega)=\omega\varphi\left[x,y(x,\omega)\right]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

В этом уравнении x, есть основное независимое переменное, ω интервал разностей, $y(x, \omega)$ искомая функция аргументов x и ω и φ данная функция двух переменных.

Будем искать решение уравнения (1) в форме бесконечного ряда, расположенного по степеням ω. Пусть это разложение будет иметь вид:

$$y(x, \omega) = \eta(x) + \eta_1(x)\frac{\omega}{1} + \eta_2(x)\frac{\omega^2}{1.2} + \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

функции $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$; . . . . очевидно нужно выбрать так, чтобы, функция определяемая разложением (2), удовлетворяла уравнению (1). Для этой цели будем подставлять ряд (2) в уравнение (1), пользоваться формулой Тейлора и сравнивать коэффициэнты при одинаковых степенях ω. Таким образом, мы без труда получим следующие формулы, могущие служить для определения неизвестных функций $\eta(x)$ $\eta_1(x)$ $\eta_2(x)$ . . . .

$$\eta'(x) = \varphi[x, \eta(x)]$$

$$\eta'_1(x) - \varphi_y[x, \eta(x)]\,\eta_1(x) = -\frac{1}{2}\eta''(x)$$

. . . .

. . . . I

$$\frac{\eta'_k(x)}{k!} - \varphi_y[x, \eta(x)]\,\frac{\eta_k(x)}{k!} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=k-1}\frac{\eta_\nu^{(k+1-\nu)}(x)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} +$$

$$+\sum\frac{\varphi_{y^{s_1+s_2+\ldots+s_{k-1}}}[x, \eta(x)]}{s_1!\;s_2!\ldots s_{k-1}!}\left(\frac{\eta_1}{1!}\right)^{s_1}\left(\frac{\eta_2}{2!}\right)^{s_2}\ldots\left(\frac{\eta_k}{k!}\right)^{s_{k-1}}$$

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + (k-1)\,s_{k-1} = k$$

В формулах 1 верхние значки у букв η, η_1 η_2 . . . указывают на порядок производных по аргументн x, а буква y с показателем внизу у буквы φ указывает на порядок производной по аргументу y. Формула 2, вместе с формулами I дают формальное решение разностного уравнения (1).

Как характерное обстоятельство следует отметить, что в силу формул I, свободный член в разложении (2) является решением соответствующего дифференциального уравнения, т. е. такого дифференциального уравнения, которое получается из разностного уравнения путем замены разности, поделенной на интервал — предельным значением этого отношения, т. е. производной.. Это обстоятельство заставляет думать, что, при неограниченном приближении к нулю интервала разностей, и решение разностного уравнения будет стремиться, как к пределу, к решению соответствующего дифференциального уравнения. При дискретном решении разностного уравнения этот факт содержится в доказательстве

Коши—Липшица теоремы о существовании интегралов дифференциальных уравнений.

При аналитическом решении разностных уравнений этот вопрос о стремлении решения разностного уравнения к решению соответствующего дифференциального уравнения представляется наиболее интересным и вместе с тем наиболее трудным. С практической точки зрения интересно отметить, что если из решения соответствующего дифференциального уравнения функция $\eta(x)$ определена, то последующие функции $\eta_1(x)$ . . . , как показывают формулы I, найдутся в квадратурах.

Разложение (2), вместе с формулами I, является отправной точкой всех дальнейших исследований.

Покажем между прочим, каким образом, в частности из этих формул, получается строка Маклорена-Эйлера. Если уравнение (1) не содержит в правой части неизвестной функции, то это уравнение можно будет переписать в виде

$$y(x+\omega, \omega) - y(x, \omega) = \omega\varphi(x) \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

при этой формулы I примут вид

$$\eta(x) = a + \int_{xo}^{x} \varphi(z)\, dz \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\eta_\nu^{(k+1-\nu)}(x)}{\nu!\,(k+1-\nu)} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Вместо функций $\eta(x)$, $\eta_1(x)$ . . вводим функции $\zeta(x)$, $\zeta_1(x)$ . . определив их формулами

$$\zeta(x) = \eta(x) \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

$$\zeta_k^{(k)}(x) = \eta_k(x) \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

тогда формулы 4 и 5 примут вид

$$\zeta(x) = a + \int_{xo}^{x} \varphi(z)\, dz$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\zeta_\nu^{(k+1)}(x)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} = 0$$

интегрируя вторую из этих формул $k+1$ раз в пределах от x_o до x, придем к формулам (8) и (9). При чем постоянные входящие в формулы определяющие функции $\zeta(x)$ $\zeta_1(x)$ . . . . должны быть выбраны надлежащим образом.

$$\zeta(x) = a + \int_{xo}^{x} \varphi(z)\, dz \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\zeta_\nu(x)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Введем далее в рассмотрение женератриссу функций $\zeta\ \zeta_1 \ldots$ положив

$$z(x,\omega) = \zeta(x) + \zeta_1(x)\frac{\omega}{1} + \zeta_2(x)\frac{\omega^2}{1.2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Умножая формулу (9) на ω^k, суммируя по k от $k=1$ до ∞, получим после упрощений

$$z(x,\omega) = \frac{\omega}{e^{\omega}-1}\left[a + \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz\right]$$

Откуда находим

$$\zeta_k(x) = B_k\left[a + \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz\right] \qquad \text{и}$$

$$\eta_k(x) = B_k \overset{(k-1)}{\varphi}(x)$$

при чем $B_0\ B_1\ B_2$ суть числа Бернулли, определяемые из разложения в ряд по степеням ω функции $\dfrac{\omega}{e^{\omega}-1}$

Но в таком случае формула (2) примет вид

$$y(x,\omega) = a + \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz + \frac{B_1}{1!}\varphi(x)\,\omega + \frac{B_2}{2!}\varphi'(x)\,\omega^2 + \frac{B_3}{3!}\varphi''(x)\,\omega^3 + \ldots$$

т. е. мы действительно приходим к формуле Маклорена-Эйлера только без остаточного члена.

Оставляя временно в стороне вопрос о теоретическом обосновании формулы (2), обращаемся к рассмотрению некоторых примеров.

Пример 1.

Рассмотрим разностное уравнение

$$y(x+\omega,\omega) - y(x,\omega) = \omega\,\frac{[1-2xy(x,\omega)]\,[1+y(x,\omega)]}{x(x+1)} \quad \ldots \quad (11)$$

Будем искать решение этого уравнения, принимающее значение 1 при $x=1$.

Для этого по формуле 1 вычисляем функции $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$. Будем иметь

$$\eta(x) = \frac{1}{x}$$

$$\eta_1(x) = -\frac{x+1}{x^3}\,\log\frac{x+1}{2}$$

при чем начальные условия мы выбрали такие: $\eta(1)=1 \quad \eta_1(1)=0$. Вычисление дальнейших функций приводит к весьма сложным квадратурам.

На основании формул (2) и 1 полагаем приближенно

$$y(x,\omega) \backsim \frac{1}{x} - \omega \frac{x+1}{x^3} \log \frac{x+1}{2} \quad \ldots\ldots (12)$$

Формула (12) при численно заданных x и ω может служить для приближенного вычисления функции $y(x,\omega)$ если при этом x придавать значение $1, 1+\omega, 1+2\omega\ldots$, то вычисление можно будет проверить пользуясь уравнением (11) как рекуррентным соотношением. Приводим результаты этих вычислений.

Само собой разумеется, что при начальном значении x формула (12) дает вполне точный результат, поэтому мы даем таблицу значений функции, начиная с аргумента 1,01.

x	Из приближ. фор.	Непосредствен. из уравнения.	x	Из прибл. фор.	Непосредст. из уравнения
1,01	0,99000	0,99000	1,07	0,93400	0,93399
1,02	0,98020	0,98020	1,08	0,92528	0,92527
1,03	0,97060	0,97059	1,09	0,91672	0,91671
1,04	0,96119	0,96117	1,10	0,90833	0,90831
1,05	0,95194	0,95193	1,11	0,90007	0,90006
1,06	0,94289	0,94288	1,12	0,89198	0,89197

Пример 2. Возьмем уравнение

$$y(x+\omega,\omega) - y(x,\omega) = \frac{m\,\omega\, y(x,\omega)}{x-\alpha} \quad \ldots\ldots (13)$$

В уравнении (13) a и m суть постоянные параметры. В рассматриваемом случае формулы для определения функций $\eta_1(x)\ \eta_2(x)\ldots$ будут иметь вид

$$\eta(x) = C(x-a)^m$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\overset{k+1-\nu}{\eta_\nu(x)}}{\nu!\,(k+1-\nu)!} = \frac{m\,\eta_k(x)}{(x-\alpha)\,k!}$$

C обозначает произвольную постоянную.

Попытаемся удовлетворить этим формулам, положив

$$\eta_k(x) = C\,m(m-1)\ldots\ldots(m-k+1)\,A_k(m)\,(x-a)^{m-k} \quad \ldots\ldots (14)$$

при чем $A_k(m)$ есть постоянная зависящая от параметров k и m.

Для вычисления количеств $A_k(m)$, очевидно, будем иметь рекурентное соотношение

$$A_0(m) = 1$$

$$(m-k)\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{A_\nu(m)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} = \frac{m\,A_k(m)}{k!} \quad \ldots\ldots (15)$$

Введем в рассмотрение функцию $\Psi_m(\omega)$, определяемую бесконечным рядом

$$\Psi_m(\omega) = A_0(m) + A_1(m)\frac{\omega}{1} + A_2(m)\frac{\omega^2}{1.2}\cdot \quad \ldots\ldots (16)$$

помножая обе части формулы (15) на ω^k и суммируя по k в пределах от $k=0$ до $k=\infty$, получим

$$m\,\frac{e^{\omega}-1}{\omega}\Psi_m(\omega) - \omega\frac{d}{d\omega}\left[\Psi_m(\omega)\,\frac{e^{\omega}-1}{\omega}\right] = m\,\Psi_m(\omega)$$

Откуда, принимая во внимание, что $\Psi_m(0)=1$, находим

$$\Psi_m(\omega) = e^{-\omega}\left(\frac{\omega}{1-e^{-\omega}}\right)^{m+1}$$

Следовательно коэффициенты $A_0(m)\ A_1(m) \ldots\ldots$, определяются следующей общей формулой.

$$A_\nu(m) = \left\{\frac{d^\nu}{d\omega^\nu}\left[e^{-\omega}\left(\frac{\omega}{1-e^{-\omega}}\right)^{m+1}\right]\right\}_{m=0} \quad \ldots\ldots (17)$$

Из формулы (17), при помощи теоремы Коши нетрудно получить

$$A_\nu(\nu) = 0 \qquad \nu > 0 \quad \ldots\ldots (18)$$

$$A_{\nu-1}(\nu) = \frac{(\nu-1)!}{\nu} \qquad \nu > 0 \quad \ldots\ldots (19)$$

На основании формул (2) (14) и (17) формальное решение уравнения (13) будет

$$y(x,\omega) = C\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{m}{\nu}A_\nu(m)(x-a)^{-\nu}\omega^{\nu} \quad \ldots\ldots (20)$$

Заметим, что при m целом положительном ряд, стоящий в правой части формулы (20), обрывается после конечного числа членов и мы в этом случае получим не формальное, а действительное решение уравнения (13).

Заметим далее, что при всяком m частное решение уравнения (13) будет

$$y(x, \omega) = \omega^m \frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

И следовательно по крайней мере для целых и положительных m мы будем иметь соотношение

$$\omega^m \frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)} = \Pi(x, \omega) \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} A_\nu(m) (x-a)^{m-\nu} \omega^\nu \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

где $\Pi(x, \omega)$ есть периодическая функция с периодом ω. Принимая во внимание, что дробно рациональная функция, отличная от постоянного, не может иметь периода, заключаем, что $\Pi(x, \omega)$ не зависит от x, и формула (22) может быть переписана в виде

$$\omega^m \frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)} = \Pi(\omega) \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} A_\nu(m) (x-a)^{m-\nu} \omega^\nu$$

Для определения постоянного множителя $\Pi(\omega)$ разделим обе части последней формулы на $(x-a)$ и положим после этого $x = a$, тогда принимая во внимание формулы (18) и (19), получим $\Pi(\omega) = 1$ и следовательно:

$$\omega^m \frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} A_\nu(m) (x-a)^{m-\nu} \omega^\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Формула (23) выведена нами в предположении, что m есть целое положительное число. Если m будет целым отрицательным числом, то формула (21) сохранит смысл, если только будет

$$\left| \frac{m\omega}{x-a} \right| < 1$$

При этом ряд, стоящий в правой части, будет сходящимся, ибо при этом в левой части формулы (21) мы будем иметь дробно рациональную функцию аргумента ω, наименьший (по модулю) полюс которой есть

$$\frac{x-a}{m}$$

При всех прочих значениях m ряд, стоящий в правой части формулы (21), будет несомненно расходящимся, ибо при этом выражение, стоящее в правой части этой формулы, имеет при $\omega = 0$ существенно особую точку, являющуюся предельной точкой полюсов. Тем не менее формула (23) сохраняет и в этом случае некоторый смысл, ибо ряд, стоящий в правой его части, представляет ассимптотически функцию

$$\omega^m \frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)}$$

в чем можно было бы убедиться, воспользовавшись ассимптотическим рядом Стирлинга для функции $log\,\Gamma(x)$.

В заключение этого примера дадим выражение некоторых из полиномов $A_\nu(m)$ $A_0(m) = 1$; $A_1(m) = \frac{1}{2}(m-1)$;

$$A_2(m) = (m-2)\left(\frac{1}{4}m - \frac{1}{12}\right); A_3(m) = \frac{m-3}{8}(m^2-m);$$

$$A_4(m) = (m-4)\left[\frac{1}{16}m^3 - \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{48}m + \frac{1}{120}\right]$$

$$A_5(m) = (m-5)\left[\frac{1}{32}m^4 - \frac{5}{48}m^3 + \frac{5}{96}m^2 + \frac{1}{48}m\right].$$

Пример 3.

Рассмотрим уравнение

$$y(x+\omega, \omega) - y(x, \omega) = \omega y(x, \omega) \; \ldots\ldots\ldots \; (24)$$

Для уравнения (24) функции $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ .... должны быть определяемы из формул

$$\eta'(x) = \eta(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (25)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\eta_\nu^{(k+1-\nu)}(x)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} = \frac{\eta_k(x)}{k!} \; \ldots\ldots\ldots \; (26)$$

Подобно тому, как мы делали при выводе формулы Маклорена-Эйлера, введем вместо функции $\eta(x)$ $\eta_1(x)$ .... функции $\zeta(x)$ $\zeta_1(x)$ .... определив их формулами

$$\zeta(x) = \eta(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (27)$$

$$\zeta_k^{(k)}(x) = \eta_k(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (28)$$

Формулы (25) и (26), применительно к функциям $\zeta(x)$ $\zeta_1(x)$ примут вид

$$\zeta'(x) = \zeta(x)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\zeta_\nu^{k+1}}{\nu!\,(k+1-\nu)!} = \frac{\zeta_k^{(k)}}{}$$

или после интегрирования

$$\zeta'(x) = \zeta(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=k} \frac{\zeta'_\nu x)}{\nu!\,(k+1-\nu)!} \ldots\ldots \frac{\zeta_k}{\kappa!} \ldots\ldots \quad (30)$$

Введем в рассмотрение функцию $\Psi(x, \omega)$, определив ее формулой

$$\Psi(x, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\zeta_\nu(x)}{\nu!} \omega^\nu$$

тогда из формул (29) и (30) уже знакомым нам приемом найдем

$$\frac{e^\omega - 1}{\omega} \quad \frac{d\Psi}{dx} = \Psi$$

откуда найдем

$$\Psi(x, \omega) = C e^{\frac{x\omega}{e^\omega - 1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Следовательно

$$\zeta_\nu(x) = C \left\{ \frac{d^\nu}{d\omega^\nu} \left[e^{\frac{x\omega}{e^\omega - 1}} \right] \right\}_{\omega=0}$$

[illegible]еренцируя же ν раз по x найдем

$$\eta_\nu(x) = C \left\{ \frac{d^\nu}{d\omega^\nu} \left[\left(\frac{\omega}{e^\omega - 1} \right)^\nu e^{\frac{x\omega}{e^\omega - 1}} \right] \right\}_{\omega=0}$$

таким образом, формальное решение уравнения (24) будет иметь вид

$$y(x, \omega) = C \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^\nu}{\nu!} \left\{ \frac{d^\nu}{d\omega^\nu} \left[\left(\frac{\omega}{e^\omega - 1} \right)^\nu e^{\frac{x\omega}{e^\omega - 1}} \right] \right\}_{\omega=0} \quad . \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что уравнению (24) удовлетворяет следующая функция

$$y(x,\omega)=(1+\omega)^{\frac{x}{\omega}}$$

Эта функция $y,(x,\omega)$, есть голоморфная функция переменного ω внутри круга $|\omega|<|$.

Коэффициенты разложения этой функции в ряд по степеням $|\omega|$, с точностью до множителя, определяются уравнением (24). Следовательно, будем иметь

$$(1+\omega)^{\frac{x}{\omega}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^{\nu}}{\nu!}\left\{\frac{d^{\nu}}{d\omega^{\nu}}\left[\left(\frac{\omega}{e^{\omega}-1}\right)^{\nu}e^{\frac{x^{\omega}}{e^{\omega}-1}}\right]\right\} \quad . \; . \; (33)$$

При чем ряд стоящий в правой части формулы (31) сходится внутри круга $|\omega|<|$.

§ 2.

Формула Маклорена - Эйлера, служащая для решения простейшего разностного уравнения, в большинстве случаев представляет собою расходящийся ряд. Вполне естественно ожидать, что ряды, рассмотренные нами в предыдущем параграфе, представляющие собою обобщение формулы Маклорена - Эйлера, точно так же будут в общем случае расходиться. Но это обстоятельство, конечно, не должно служить поводом к тому, чтобы отвергать эти ряды, как теоретическое средство при построении аналитического решения разностных уравнений. Напротив, можно рассчитывать получить подобное решение, применяя к указанным рядам различные методы суммирования расходящихся рядов.

Не имея в виду решать вопрос во всей его полноте, я показываю в настоящей работе, каким образом можно в некоторых случаях получить решение рассматриваемой задачи, опираясь на метод Бореля для суммирования расходящихся рядов (*Borel*, *Leçons sur les series divergentes*).

Рассмотрим разностное уравнение

$$y(x+\omega,\omega)-y(x,\omega)=\omega\varphi\,[x,y(x,\omega)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Формальное решение этого уравнения может быть представлено рядом:

$$y(x,\omega)=\eta(x)+\frac{\omega}{1}\eta_1(x)+\frac{\omega^2}{1\,.\,2}\eta_2(x)+ \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Функции $\eta(x)$; $\eta_1(x)$; . . . . могут быть определены по формулам I § 1.

Для суммирования ряда (2) по Борелю нужно будет прежде всего исследовать функцию

$$F(t)=\eta(x)+\frac{t}{1!}\,\frac{\eta_1(x)}{1!}+\frac{t^2}{2!}\,\frac{\eta_2(x)}{2!}+\;\ldots\ldots \quad (3)$$

и найти ее продолжение вдоль направления вектора ω, тогда сумма ряда (2), по Борелю, представится интегралом

$$y(x,\omega)=\int_0^\infty e^{-t}F(\omega t)\,dt \;\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

В возможности таким способом получать решения разностных уравнений, можно убедиться на основании следующего примера:

Пусть дано уравнение

$$y(x+\omega,\omega)-y(x,\omega)=\frac{\omega}{x}\;\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Формальное решение этого уравнения представится рядом

$$y(x,\omega)=\log x+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\,\frac{B_\nu}{\nu x^\nu}\,\omega^\nu$$

Если ряд суммировать по Борелю, то после простых вычислений получим

$$y(x,\omega)=\log x+\int_0^\infty e^{-\frac{x\tau}{\omega}}\left\{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{1-e^{\tau}}\right\}d\tau$$

Пользуясь же интегральной формулой *Binet* для функции $\Psi(x)$, получим окончательно

$$y(x,\omega)=\Psi\left(\frac{x}{\omega}\right)+\log\omega$$

Посмотрим, каким образом метод Бореля можно применять в общем случае. Для этой цели введем в рассмотрение функции

$$\zeta(x)\;\zeta_1(x)\;\zeta_2(x)\;\ldots$$

удовлетворяющие условию

$$\zeta(x)=\eta(x)$$

$$\zeta_k^{(k)}(x)=\eta_k(x)$$

и рассмотрим бесконечный ряд

$$\Psi(x,\omega)=\zeta(x)+\zeta_1(x)\frac{\omega}{1}+\zeta_2(x)\frac{\omega^2}{1\,.\,2}+\;\ldots\ldots \quad (6)$$

Может оказаться так, что несмотря на расходимость ряда (2), постоянные интегрирования, при определении фунцкий $\zeta(x)\,\zeta_1(x)$ . . . , удастся подобрать так, что ряд (6) при любых комплексных значениях x, за исключением некоторых изолированных особых значений, будет относительно ω иметь отличный от нуля радиус сходимости и, следовательно, в окрестности значения $\omega = 0$ будет аналитической функцией комплексных переменных x и ω.

В этом случае будем называть функцию $\Psi(x, \omega)$ резольвентной разностного уравнения (1).

Такое название, как видно из дальнейшего, оправдывается тем обстоятельством, что знание функции $\Psi(x, \omega)$ приводит задачу решения уравнений (1) к другим более простым задачам анализа. Допустим, что уравнение (1) действительно имеет резольвенту $\Psi(x, \omega)$. Обозначим через r независящее от x положительное число и предположим, что при любых значениях, отличных от изолированных особых значений и при любых ω, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega| < r$$

ряд (6) будет сходящимся. Рассмотрим комплексный интеграл

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|v| = \rho < r} \Psi\left(x + \frac{t}{v}; v\right) \frac{dv}{v} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

в котором ρ обозначает произвольное положительное число меньше чем r. Предполагая в формуле (7) x отличным от особого, мы будем иметь возможность, по крайней мере для достаточно малых по модулю значений t, разложить функцию $\Psi\left(x + \frac{t}{v}; v\right) \frac{1}{v}$ в двойной ряд по степеням количеств $\frac{t}{v}$ и v, который относительно величины v будет равномерно сходящимся на круге $|v| = \rho$. Очевидно это разложение будет иметь вид

$$\frac{1}{v} \Psi\left(x + \frac{t}{v}; v\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} \frac{\zeta_{\mu}^{(\nu)}(x)}{\mu!} v^{\mu - \nu - 1}$$

Откуда почленным интегрированием найдем, принимая во внимание свойство функций $\zeta(x) \zeta_1(x) \ldots$

$$F(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{(\nu!)^2} \eta_{\nu}(x) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

И следовательно в случае суммируемости ряда (2) в смысле Бореля, функция $F(x, t\omega)$ будет (относительно t), допускать аналитическое продолжение вдоль положительной вещественной оси, и сумма ряда (2) представится интегралом

$$y(x,\omega)=\int\limits_0^\infty e^{-t}F(x,t\omega)\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

В дельнейшем мы рассмотрим несколько случаев применения набросанной здесь схемы вычисления.

Начнем с простейшего случая, именно с задачи суммирования функций. Изображая для удобства записи суммируемую функцию как производную от данной функции $\varphi(x)$, напишем разностное уравнение, соответствующее рассматриваемому случаю в виде

$$y(x+\omega,\omega)-y(x,\omega)=\omega\varphi'(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Из того, что было сказано в § 1 относительно этого уравнения слеудет, что резольвенту уравнения (10) можно взять в виде

$$\Psi(x,\omega)=\varphi(x)\frac{\omega}{e^{\omega}-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Следовательно, если положить

$$F(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|v|=\rho<2\pi}\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{v}\right)}{e^{v}-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

то решение уравнения (10) нужно будет искать под видом интеграла (9). Все исследование распадается на три части. В первой части нужно найти аналитическое продолжение функции $F(x,t\omega)$ вдоль положительной вещественной оси. Во второй части нужно доказать существование интеграла (9), и, наконец в третьей части, что функция $y(x,\omega)$, определяемая формулой (9), действительно удовлетворяет разностному уравнению (10). Первые две части требуют для своего разрешения ограничительных условий относительно функции $\varphi(x)$.

Предположим что $\varphi(x)$ есть функция целая и при том такая, что существует положительное число k, для которого выполняется соотношение

$$\lim_{|x|\to\infty}\varphi(x)e^{-k|x|}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

из того обстоятельства, что функция $\varphi(x)$, есть целая функция, несомненно следует, что будет также целой функцией переменных t и x и функция

$$F(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|v|=\rho<2\pi}\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{v}\right)}{e^{v-1}}\,dv\,.$$

Для того, чтобы доказать существование интеграла (9), предположим, что ω удовлетворяет условию

$$|\omega| < \frac{2\pi}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

после чего выберем число ρ, так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$|\omega| k < \rho < 2\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Из условия (13) находим

$$|\varphi(x)| < C e^{k|x|} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

C обозначает численную константу. Отсюда находим

$$\left| e^{-t} \varphi\left(x + \frac{t\omega}{v}\right) \right| < C e^{-t + k\left|x + \frac{t\omega}{v}\right|} < C_1(x) e^{-t\left(1 - \frac{k|\omega|}{\rho}\right)}$$

или в силу условия (15)

$$\left| e^{-t} \varphi\left(x + \frac{t\omega}{v}\right) \right| < C_1(x) a^{-t};\ a > 1$$

Но последнее говорит за равномерную, относительно v, сходимость интеграла

$$\int_0^\infty e^{-t} \varphi\left(x + \frac{t\omega}{v}\right) dt,$$

но в таком случае оправдывается существование интеграла (9) и мы можем положить

$$y(x, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|v| = \rho} \frac{\int\limits_0^\infty e^{-t} \varphi\left(x + \frac{t\omega}{v}\right) dt}{e^{-v} - 1} dv \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

И следовательно остается только показать, что функция $(y\, x, \omega)$ определяемая формулой (17), действительно удовлетворяет разностному уравнению (10). Для этого замечаем, что по свойству функции $F(x, t)$ можем написать

$$F(x + \omega, \omega t) - F(x, \omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k \overset{(k)}{\varphi}(x) \sum_{\nu=0}^{\nu=k-1} \frac{B_\nu}{(\nu!)^2 (k-\nu)!} t^\nu.$$

Если же принять во внимание уравнение, определяющее числа Бернулли, то из последнего уравнения интегрированием найдем

$$y(x + \omega, \omega) - y(x, \omega) = \omega \varphi'(x).$$

Само собой разумеется, что рассмотренный нами случай решения уравнения (10) является весьма частным случаем. Но обобщение в области решения задачи суммирования не могут представить такого интереса, как решение разностных уравнений более сложного вида, ибо вопросы, связанные с суммированием функций, разобраны достаточно подробно, например, у Нёрлюнда (Diefferenzenrechnung).

Приложение указанного нами метода к уравнениям отличным от уравнения типа (10) начнем с рассмотрения уравнения

$$y(x+\omega,\omega)-y(x,\omega)=\frac{m\,\omega\,y(x,\omega)}{x-a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (18),$$

которое уже знакомо нам из § 1. На основании формального решения этого уравнения, которое дано нами в предыдущем параграфе, мы можем в качестве резольвенты взять выражение

$$\Psi(x,\omega)=(x-a)^m e^{-\omega}\left(\frac{\omega}{1-e^{-\omega}}\right)^{m+1} \quad . \; . \; (19)$$

В таком случае в соответствии с намеченным нами методом, мы прежде всего должны исследовать функцию $F(x, t\omega)$, определяемую формулой

$$F(x,t\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|v|=\rho<2\pi}\left(x-a+\frac{\omega t}{v}\right)^m e^{-v}\left(\frac{v}{1-e^{-v}}\right)^{m+1}\frac{dv}{v}$$

и затем искать решение уравнения (18) в форме интеграла

$$y(x,\omega)=\int_0^{\infty}e^{-t}F(x,\omega t)\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Для устранения многозначности множителя $(x-a)^m$ мы можем провести из точки a, в плоскости комплексного переменного x разрез и рассматривать затем главное значение функции $(x-a)^m$, которое при наличии указанного разреза будет однозначной функцией.

В формуле (20) будем считать число ρ положительным числом меньшим чем 2π, но сколь угодно близким к 2π. Для определения функции $F(x,\omega t)$ нужно прежде всего найти элемент этой функции, соответствующий бесконечно малому значению t.

При достаточно малых значениях t, внутри круга $|v|=\rho$ подинтегральное выражение в формуле (20) будет иметь две особых точки, именно $v=0$ и $v=\dfrac{\omega t}{a-x}=\alpha$.

Сама же функция $F(x, t\omega)$ при постоянном x и ω будет голоморфной в окрестности значения $t=0$.

Для того, чтобы получить аналитическое продолжение функции, предположим, что вещественная часть числа m отрицательна, но больше чем -1.

Предположим сначала, что t удовлетворяет неравенству

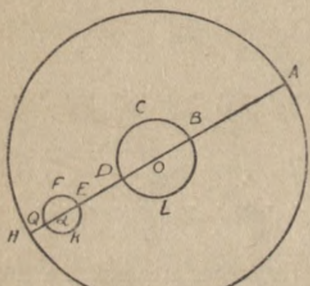
$$0 \leqq t < 2\pi \left| \frac{x-a}{\omega} \right| \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Подинтегральное выражение в формуле (20), несмотри на наличие двух особых точек внутри круга $|v| = \rho$ будет при обходе по этому кругу возвращаться к начальному значению, но в таком случае, для значений, удовлетворяющих неравенству (22), функция $F(x, \omega t)$ может быть представлена интегралом

$$F(x, \omega t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ABCDEFGHGKEDLBA} \left(x - a - \frac{\omega t}{v}\right)^{m} e^{-v} \left(\frac{v}{1-e^{-v}}\right)^{m+1} \frac{dv}{v},$$

но интегралы, взятые в прямом и обратном направлении, вдоль отрезков AB и GH уничтожатся.

Если, сверх того, мы вспомним, что вещественная часть числа m ограничена известным образом, то можем перейти к пределу, уменьшая до нуля радиусы кругов, окружающих особые точки.



Черт. 1.

Если, сверх того, мы заметим, что выражение $1 - \frac{a}{v}$, при приближении v к точке B вдоль отрезка AB, остается вещественным положительным числом, то, учитывая изменения, которые претерпевает подинтегральная функция при обходе вокруг критических точек, будем иметь, после введения нового переменного интегрирования при посредстве формулы

$$v = \frac{\omega t}{a-x} z$$

$$F(x, \omega t) = -\frac{\omega^{\;+1} t^{m+1} \operatorname{Sin} m\pi}{\pi (x-a)} \,.$$

$$\cdot \int_0^1 (1-z) \frac{e^{\frac{\omega t}{x-a} z}}{\left(e^{\frac{\omega t}{x-a} z} - 1\right)^{m+1}} dz \,. \quad (23)$$

Формула (23) дает аналитическое продолжение функции $F(x, \omega t)$ во всю плоскость комплексного переменного t, за исключением точек прямой линии, на которой вещественная часть числа $\frac{\omega t}{x-a}$ будет равна нулю и модуль которых более чем 2π.

Вещественная часть числа $x-a$, в силу сделанного нами разреза, не может быть равна нулю, если же мы дополнительно потребуем, чтобы вещественная часть числа $\frac{\omega}{x-a}$ была отлична от нуля, то при помощи формулы (23) функция $F(x, \omega t)$ получит аналитическое продолжение вдоль всей бесконечной, положительной вещественной оси переменного t.

Для того, чтобы выяснить условия существования интеграла (21), рассмотрим отдельно два случая:

Случай 1). Вещественная часть числа $\frac{x-a}{\omega}$ отрицательна. В этом случае, при неограниченном возрастании t, $F(x, \omega t)$ остается конечным и следовательно, не подлежит сомнению факт существования несобственного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-t} F(x, \omega t)\, dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{24}$$

Случай 2). Вещественная часть числа $\frac{x-a}{\omega}$ положительна. Обозначая это положительное число буквою σ, легко получим для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{t^{m+1} e^{\sigma z t}}{(e^{\sigma z t}-1)^{m+1}} \right| < C z^{R(m)+1} e^{(\varepsilon + R(m)) + \sigma},$$

при чем C есть постоянная, независящая ни от t, и ни от z, но в таком случае, если число σ удовлетворит неравенству

$$\sigma < \frac{1}{R(m)},$$

то существование несобственного интеграла (24) будет очевидно.

Таким образом, окончательно мы приходим к следующему выводу.

Если вещественная часть числа $\frac{\omega}{x-a}$ есть отличное от нуля, положительное, или отрицательное число, удовлетворяющее неравенству

$$R\left(\frac{\omega}{x-a}\right) < \frac{1}{|m|},$$

а вещественная часть числа m лежит внутри между -1 и 0, то бесконечный ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{m}{\nu} A_\nu\,(m)(x-a)^{m-\nu} \omega^\nu,$$

представляющий формальное решение уравнения (18), будет суммируемым в смысле Бореля, и его сумма будет

$$y(x,\omega) = -\frac{\omega^{m+1}\, Sin m\pi}{\pi(x-a)}\int_0^{\infty} e^{-t} t^{m+1}\,dt \int_0^1 \frac{(1-z)^m e^{\frac{\omega t}{x-a}z}}{\left(e^{\frac{\omega t}{x-a}}-1\right)^{m+1}}\,dz \quad (25).$$

При этом следует заметить, что так как переменное $\frac{\omega}{x-a}$ в процессе своего изменения не может пересекать мнимой оси, то в двух различных случаях, соответствующих двум различным знакам вещественной части числа $\frac{\omega}{x-a}$ $y(x,\omega)$, может представить две аналитически различные вещи.

Из теорем относительно рядов, суммируемых по Борелю, следует, что функция $y(x,\omega)$, даваемая формулой (25), является решением уравнения (18). Остается только выяснить, какое именно решение мы получим.

Для этой цели заметим, что, в силу того, что функция $y(x,\omega)$, определяемая формулой (25), удовлетворяет уравнению (18), мы можем написать

$$y(x,\omega) = \frac{(x-a)(x-a+\omega)\ .\ .\ .\ .\ (x-a+n\omega)}{(x-a+m)(x-a+\omega+m)\,.\,.(x-a+n\omega+m)} + y(x\overline{n+1}\,\omega,\omega).$$

Но из формулы (25), при высказанных нами условиях, не трудно получить соотношение

$$\lim_{n\to\infty} h^{-m} y(x+\overline{n+1}\,\omega,\omega) = 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

но в таком случае, основываясь на бесконечном произведении Гаусса для функции $\Gamma(x)$, будем иметь окончательно

$$y(x,\omega) = \omega^m \frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)}.$$

И, следовательно, окончательно мы можем сказать, что в формуле (3 § 1) ряд, стоящий в правой части, сходится в смысле

Бореля и представляет функцию, стоящую в левой части єтой формулы, и, кроме того, мы приходим еще к формуле

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}\right)}=$$

$$=-\frac{\omega \operatorname{Sin} m\pi}{\pi(x-a)}\int_0^\infty e^{-t} t^{m+1} dt \int_0^1 \frac{(1-z)^m e^{\frac{\omega t}{x-a}z}}{\left(e^{\frac{\omega t}{x-a}z}-1\right)^{m+1}} dz$$

§ 3.

В этом параграфе мы займемся применением намеченного нами метода к системам линейных разностных уравнений.

Рассмотрим такую систему разностных уравнений:

$$y_i(x+\omega,\omega)-y_i(x,\omega)=\omega\sum_{S=1}^{n} P_{is}(x)\, y_s(x,\omega)+\omega\varphi_i(x) \quad . . (1)$$

$$i=1,2,3, \ldots . n:$$

Будем искать неизвестные функции $y_1(x,\omega), \ldots\ y(x,\omega)$ в форме бесконечных рядов, расположенных по степеням аргумента ω. Положим

$$y_i(x,\omega)=\eta_{io}(x)+\eta_{i1}(x)\frac{\omega}{1}\eta_{i2}(x)\frac{\omega^2}{1.2} \quad . . . . (2).$$

Тогда приемом, аналогичным тому, которым мы пользовались в § 1, найдем следующие дифференциальные уравнения, для определения неизвестных функций

$$\eta'_{io}(x)=\sum_{s=1}^{n} P_{is}(x)\,\eta_{so}(x)+\varphi_i(x);\ i=1,2, \ldots n \quad . . (3)$$

$$\eta'_{ik}(x)=\sum_{s=1}^{n} P_{is}(x)\,\eta_{sk}(x)-\frac{1}{k+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{k+1}{\nu}\eta_{i\nu}^{(k+1-\nu)}(x) \quad . . . (4)$$

$$i=1,2,3, \ldots . n$$

$$k=1,2,3, \ldots .$$

для того, чтобы задача была определенной, предположим, что мы ищем такое решение системы (1), которое удовлетворяет начальному условию

при $x=x_0$

$$y_i(x,\omega)=y_i$$

функции $P_{\nu\mu}(x)$ и $\varphi_\nu(x)$ будем предполагать голоморфными в окрестности значения.

$$x = x_0.$$

Очевидно, мы не нарушим общности нашей задачи, если положим $x_0 = 0$ $y_i(^0) = 0$, ибо к этому случаю всегда можно придти путем надлежащей замены переменных.

Обозначим через $P(x)$ функцию голоморфную в окрестности значения $x = o$ и при том такую, что коэффициенты разложения ее в ряд по степеням x будут больше абсолютных значений, соответствующих коэффициентов разложениий функций $P_{\mu\nu}(x)$; $\mu, \nu = 1, 2, 3 \ldots n$.

Другими словами функция $P(x)$ будет усиливающей по отношению ко всем функциям $P_{\nu\mu}(x)$.

Точно так же через $\Phi(x)$ обозначим функцию, усиливающую по отношению ко всем функциям $\varphi_\nu(x)$. После этого рассмотрим систему функций, определенных следующими дифференциальными уравнениями:

$$\lambda'_{i0}(x) = P(x) \sum_{s=1}^{n} \lambda_{s0}(x) + \Phi(x), i = 1, 2 \ldots n \quad \ldots (5).$$

$$\lambda'_{ik} = P(x) \sum_{s=1}^{n} \lambda_{sk}(x) + \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k+1}{\nu} \lambda_{i\nu}^{(k+1-\nu)}(x) \quad \ldots (6).$$

Начальные значения функций $\eta_{\nu\mu}$ мы зададим так $\eta_{\nu\mu}(0) = 0$ и те же начальные значения сохраним и за функциями $\lambda_{\nu\mu}(x)$. При таких условиях, очевидно, функции $\lambda_{\mu\nu}(x)$ будут усиливающими по отношению к функциям $\eta_{\mu\nu}(x)$. Кроме того, уравнения (5) и (6) показывают, что функции, отличающиеся только первыми значками, тождественны между собой. В таком случае положим для сокращения

$$\lambda_{ik} = \lambda_{2k} = \ldots\ldots = \lambda_{nk} = L_k(x).$$

Для определения функций $L_0(x)$ $L_1(x)$ будем иметь уравнения:

$$L_0'(x) = n P(x) L_0(x) + \Phi(x)$$

$$L_k'(x) = n P(x) L_k(x) + \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k+1}{\nu} L_\nu^{(k+1-\nu)}(x),$$

которые могут быть также переписаны в виде

$$L_0(x) = e^{n\int_0^x P(z)\,dz} \int_0^x e^{-n\int_0^x P(z)\,dz}\,\Phi(z)\,dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

$$L_k(x) = \frac{1}{k+1} e^{n\int_0^x \Phi(z)\,dz} \int_0^x e^{-n\int_0^x P(z)\,dz} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k+1}{\nu} L_\nu^{(k+1-\nu)}(x)\,dx \quad . \ (8).$$

Пусть R будет такое положительное число, что внутри и на границе круга $|x| = R$ функции $P(x)$ и $\Phi(x)$ будут голоморфны.

Предположим, что ρ есть вещественное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq \rho \leq R,$$

тогда из формул (7) и (8) найдем

$$L_0(\rho) < M \int_0^\rho P(z)\,dz$$

$$L_k(\rho) < M \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{\kappa+1}{\nu} L_\nu^{(k-\nu)}(\rho)$$

Будем рассматривать кроме функций $L_0(x), L_1(x), \ . \ . \ .$ функции $T_0(x), T_1(x)$, определив их при посредстве формул:

$$T_k^{(k)}(x) = L_k(x) \text{ и } T_k^{(s)}(0) = 0 \ \ s < k.$$

Для этих последних функций будут, очевидно, удовлетворены неравенства:

$$T^{(k)}(\rho) < M \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k+1}{\nu} T_\nu^{(k)}(\rho),$$

или после интегрирования:

$$\Gamma_k(\rho) < M \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k+1}{\nu} T_\nu(\rho);$$

последняя формула показывает, что

$$T_k(\rho) < \Gamma_k(\rho),$$

где функции $\Gamma_0(x)\,\Gamma_1(x), \ . \ . \ .$ определяются уравнениями:

$$\Gamma_0(x) = M \int_0^x \Phi(z)\,dZ$$

$$\Gamma_k(x) = M \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k=1} \binom{k+1}{\nu} \Gamma_\nu(\rho).$$

Из последних уравнений не трудно усмотреть, что функция $\frac{\Gamma_k(x)}{k!}$ есть коэффициэнт при ω^k в выражении:

$$F(x, \omega) = \frac{M\omega \int_0^x \Phi(z)\, dz}{\omega - M(e^{\omega} - 1 - \omega)}.$$

Но функция $F(x, \omega)$ голоморфна в окрестности значения $\omega = 0$ и, следовательно, при достаточон малом ω будет сходящийся ряд

$$\Gamma_0(x) + \frac{\omega}{1} \Gamma_1(x) + \frac{\omega^2}{1.2} \Gamma_2(x) - \ldots$$

Введем, наконец, функции $\zeta_{io}(x)\ \zeta_{i1}(x)\ \ldots$, определив их формулами:

$$\zeta_{is}^{(s)}(x) = \eta_{is}(x).$$

Тогда, на основании всего предыдущего, не трудно убедиться, что при достаточно малом ω будут сходящимися ряды:

$$\Psi_i(x, \omega) = \zeta_{io}(x) + \frac{\zeta_{i1}(x)}{1}\omega + \ldots \qquad i = 1, 2, 3 \ldots$$

Но в таком случае решение системы (1) можно будет искать под видом:

$$y_i(x, \omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} F_i(x, \omega t)\, dt,$$

при чем элемент функции $F_i(x, t)$ определяется формулой:

$$F_i(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|v| = \rho} \Psi_i\left(x + \frac{t}{v}; v\right) \frac{dv}{v}$$

Заметим, что в случае, когда коэффициэнты системы (1) многочлены, то для определения резольвент $\psi_i(x, \omega)$ не трудно составить систему линейных уравнений в частных производных.

Vergleichende Untersuchung von Differential—und Differenzengleichungen

Von A. K. Minijatow.

Die Arbeit ist ein Versuch, die Mac-Laurin-Eulersche Summenformel zu verallgemeinern und auf den Fall der Differenzengleichungen erster Ordnung zu übertragen; desgleichen auf den Fall eines Systems linearer Differenzengleichungen.

Zur Summation der sich ergebenden Reihen wird die Borelsche Summierungsmethode verwandt.

ОСОБОЕ ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА VOLTERRA

А. А. ТЕМЛЯКОВ (Томск)

Целью данной работы является рассмотрение линейного особого интегрального уравнения типа Volterra, т. е., когда, или ядро не удовлетворяет условию $\int_a^x [k(x,y)]^2 \lambda y < M$, где $a \leq x \leq b$ и M некоторая постоянная, или Область интеграции бесконечна. Особенностью соответствующего однородного уравнения будет являться то, что оно имеет собственные решения с непрерывным спектором. Существование решения будет доказано эффективным способом его получения. В конце работы будет указана связь рассматриваемого интегрального уравнения с обыкновенными дифференциальными ур-ями. Тип особого интегрального ур-ния, который подлежит рассмотрению, следующий:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s)\, ds + f(x),$$

где $f(x)$ и $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ — функции заданные, λ — параметр и искомая функция — $\varphi(x)$.

Заметим, что ядро $K(x,y) = \Phi_1\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{y} + \Phi_2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}$ приводится к предыдущему виду. Пусть фунции $\Phi(r)$ и $f(x)$ таковы, что $\int_0^1 \Phi(z) z^{-k}\, dz$, $k \geq 0$ существует и $f(x)$ голоморфная в окрестности точки о, за исключением разве последней, которая может быть полюсом порядка $\leq K$. Тогда докажем следующую теорему:

1. Уравнение $\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s)\, ds + f(x)$

имеет частное решение вида:

$$\varphi(x) = \sum_{i=-m}^{\infty} \frac{a_i x^i}{1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1}\, dz},$$

если

$$\lambda \neq \frac{1}{\int_0^1 \Phi(z) z^{i-1}\, dz} \quad (i = -m, -(m-1), \ldots 0, 1, \ldots, n, \ldots)$$

где a_i, — коэффициенты разложения $f(x)$ и $m \leq k$.

Пусть $f(x)$ допускает точку нуль полюсом порядка $m \leq \kappa$, т. е.

$$f(x) = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i.$$

Будем искать решение в виде $\varphi(x) = \sum_{i=-m}^{\infty} A_i x^i$. Предположив, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i$ сходится равномерно и заметив, что

$$\int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} s^i \, ds = x^i \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} \, dz,$$

положив $s = x \cdot z$, мы можем равенство

$$\sum_{i=-m}^{\infty} A_i x^i = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \sum_{i=-m}^{\infty} A_i s^i \, ds + \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i$$

представить в следующей форме:

$$\sum_{i=-m}^{\infty} A_i x^i = \lambda \sum_{i=-m}^{\infty} A_i x^i \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} \, dz + \sum_{i=-m}^{\infty} a_i x^i.$$

Значит:

$$A_i = \lambda A_i \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} \, dz + a_i$$

и

$$A_i = \frac{a_i}{1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} \, dz}.$$

Следовательно:

$$\varphi(x) = \sum_{i=-m}^{\infty} \frac{a_i x^i}{1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} \, dz},$$

если

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i x^i}{1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} \, dz}$$

равномерно сходится.

Пусть $|\Phi(z) z^{\mu}| < \overline{M}$ в отрезке (0,1) и число N так велико, что $\frac{|\lambda| \overline{M}}{N} < 1$.

Тогда для $n \geq N$

$$\left|\sum_{i=n+\mu+1}^{\infty} \frac{a_i x^i}{1-\lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} dz}\right| < \sum_{i=n+\mu+1}^{\infty} \frac{|a_i x^i|}{\left|1-\lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} dz\right|} \leq$$

$$\leq \sum_{i=n+\mu+1}^{\infty} \frac{|a_i x^i|}{1-|\lambda| \int_0^1 |\Phi(z)| \, z^{i-1} dz} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|a_{i+\mu+1} x^{i+\mu+1}|}{1-|\lambda| \int_0^1 |\Phi(z)| \, z^{i+\mu} dz} \leq$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|a_{i+\mu+1} x^{i+\mu+1}|}{1-\frac{|\lambda| M}{i+1}} \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|a_{i+\mu+1} x^{i+\mu+1}|}{1-\frac{|\lambda| M}{N}} =$$

$$= M \sum_{i=n}^{\infty} |a_{i+\mu+1} x^{i+\mu+1}| < \xi,$$

если

$$\sum_{i=n}^{\infty} |a_{i+\mu+1} x^{i+\mu+1}| < \frac{\xi}{M},$$

т. е. ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i x^i}{1-\lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} dz}$$

сходится равномерно в круге сходимости

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Пусть теперь,

$$\lambda = \frac{1}{\int_0^1 \Phi(z) z^{n-1} dz}.$$

Тогда докажем следующую теорему:

II. Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s) ds + f(x)$$

еет частное решение вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=-m}^{\infty}{}' \frac{a_i x^i}{1-\lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{i-1} dz} - \frac{a_n x^n l_n^k x}{\lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{n-1} l_n^k z \, dz},$$

если $\lambda = -\frac{1}{\int_0^1 \Phi(z) z^{n-1} dz}$, где $\sum\limits_{i=-m}^{\infty}{}'$ есть $\sum\limits_{i=-m}^{\infty}$ без члена $n^{\text{ой}}$ степени относительно x и $k = 1, 2, \ldots$

Положим $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ и будем искать решения двух уравнений:

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi_1(s)\, ds + \sum_{i=-m}^{\infty}{}' a_i x^i \text{ и}$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi_2(s)\, ds + a_n x^n.$$

На основании первой теоремы, первое уравнение имеет решение

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=-m}^{\infty}{}' \frac{a_i x^i}{1 - \lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{i-1} dr}.$$

Второе же уравнение преобразуем с помощью подстановки

$$\varphi_2(x) = x^n \psi(x).$$

$$x^n \psi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} S^n \varphi(s)\, ds + a_n x^n, \text{ или}$$

$$x^n \Psi(x) = \lambda x \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \psi(x.r)\, dr + a_n x^n, \text{ или}$$

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{n-} \psi(x.r)\, dr + a_n.$$

Я утверждаю, что оно допускает решение вида $\psi(x) = c.\ln x$ если

$$\int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \ln r\, dr \neq 0.$$

$$\text{Действительно: } C.\ln x = \lambda c \ln x \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} dr +$$

$$+ \lambda C \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \ln r\, dr + a^n, \text{ или}$$

$$C.\ln x = C.\ln x + \lambda C \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \ln r\, dr + a_n,$$

$$\text{т. е. } C = -\frac{a_n}{\lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \ln r\, dr}$$

$$\text{и, следовательно, } \varphi(x) = -\frac{a^n \ln x}{\lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \ln r\, dr}$$

и искомая функция $\varphi_2(x) = -\frac{a_n x^n \ln x}{\lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \ln r\, dr}$.

Если $\int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^i r\, dr = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1$. а

$\int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^k r\, dr \neq 0$, то $\varphi_2(x) = -\dfrac{a_n x^n ln^k x}{\lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^k r\, dr}$.

Действительно, $C x^n ln^k x = \lambda C \int_0^x \Phi\left(\dfrac{s}{x}\right) S^{n-1} ln^k s\, ds + a_n x^n$, или

$$C x^n ln^k x = \lambda C x^n \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^k (x . r)\, dr + a^n x_n, \text{ или}$$

$$C x^n ln^k x = \lambda C x^n \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} [ln^k x + k\, ln^{k-1} x\, ln\, r + \ldots$$

$$\ldots + k\, ln\, x\, ln^{k-1} r + ln^k r]\, dr + a^n x^n, \text{ или}$$

$$C x^n ln^k x = C x^n ln^k x + \lambda C x^n \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^k r\, dr + a_n x^n, \text{ т. е.}$$

$$C = -\frac{a_n}{\int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^k r\, dr}, \text{ а следовательно } \varphi_2(x) = -$$

$$= -\frac{a_n x^n ln^k x}{\lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} ln^k r\, dr}.$$

Чтобы получить общее решение предложенного уравнения, нужно присоединить к найденному решению, решения однородного уравнения, соответствующие значению λ. К этому вопросу мы сейчас и перейдем.

Итак рассмотрим однородное уравнение.

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s)\, ds.$$

Назовем уравнение относительно $r: 1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz = 0$ характеристическим уравнением.

Относительно однородного интегрального уравнения можно высказать следующую теорему:

III. Если характеристическое уравнение имеет простые корни $r = r_1, r_2, \ldots, r_n$, то однородное интегральное уравнение имеет решение:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i x^{r_i},$$

где C_i — произвольные постоянные; если характеристическое уравнение имеет корни $r = r_1, r_2, \ldots r_n$, соответственно кратностей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то однородное уравнение имеет решение $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{r_i} P_{\alpha_i - 1}(ln\, x)$, где $P_{\alpha_i} - 1\ (lnx)$ — полином степени $\alpha_i - 1$ относительно $ln\, x$ с произвольными постоянными коэффициентами.

Действительно, пусть $\varphi(x) = C \cdot x^r$.

Тогда $Cx^r = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} Cs^r ds$, или $1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz = 0$.

И, если последнее уравнение допускает простые корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то следовательно, частные решения будутвида $\varphi_i(x) = C_i \cdot x^{r_i}$ и более общее $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot x^{r_i}$. Если же корни будут кратные, именно соответственно кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, то по методу d'Alembert'a рассматривая, например, $r_2 = r_1$ в пределе $\lim\limits_{r_2 \to r_1} \frac{x^{r_2} - x^{r_1}}{r_2 - r_1} = x^{r_1} \ln x$ также будет частным решением уравнения.

Следовательно, по методу d'Alembert'a, если r_1, — корень кратности α_1, то решение уравнения, соответствующее этому корню, будет:

$$\varphi(x) = x^{r_1} \sum_{i=0}^{\alpha_1 - 1} C_i \ln^i x = x^{r_1} P_{\alpha_1 - 1}(\ln x).$$

И так, на основании трех теорем, уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s) ds + f(x)$$

имеет более общее решение:

$$\varphi(x) = \sum_{i=-m}^{\infty'} \frac{a_i x^i}{1 - \lambda \int_0^1 \Phi(r) r^{i-1} dr} - \frac{a_n x^n \ln^k x}{\lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{n-1} \ln^k z \, dz} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} x^{r_i} P_{\alpha_i - 1}(\ln x),$$

где наивысшая степень $\alpha_i = k$.

В последней теореме предполагалось, что характеристическое уравнение, для заданного λ, допускает конечное число решений относительно r. Это будет иметь место, например, для целей рациональной функции $\Phi(r)$, $\Phi(r) = r^k P_\mu(\ln r)$, где $P_\mu(\ln r)$ полином относительно $\ln z$ с постоянными коэффициентами степени μ и т. д. В общем же случае, характеристическое уравнение $1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz = 0$ может допускать и бесконечное число решений относительно r. Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — простые нули характеристического уравнения, расположенные в порядке возрастания их действительной части $R(r_i)$ и $R(r_i) \geq 0$, за исключением конечного числа. Так как каждому r_i, соответствует частное решение вида

$C_i x^{r_i}$, где C_i — произвольное постоянное, то можно распорядиться произволом C_i так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| \, |x|^{R(r_i)}$ сходился. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} C_i x^{r_i}$ будет абсолютно сходящимся в круге сходимости первого ряда $|x| < \rho$ и, как степенной ряд, равномерно сходящимся в круге $|x| \leq \rho_1 < \rho$. Итак можно высказать следующую теорему:

IV. Если $1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz = 0$ имеет бесконечное число нулей, из которых конечное число — кратные или все простые, то уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s) ds \text{ имеет решение:}$$

$$\varphi(x) = C \sum_{=}^{\infty} C_i x^{r_i} + \sum_{i=1}^{\infty} x^{r_{\mu_i}} P_{\alpha_i - 1}(ln\, x), \text{ где } |C_i| < \frac{g^i}{\rho^{R(r_i)}}, \; g < 1.$$

Рассмотрим теперь более общий вид однородного интегрального уравнения типа Volterra.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x \Phi\left[\frac{f(s)}{f(x)}\right] \frac{f'(s)}{f(s)} \varphi(s) ds,$$

$$\text{где } f(x) = (x - a)^m \psi(x)$$

$m > 0$ и целое число, $\psi(x)$ — голоморфная функция в области точки a и $\psi(a) \neq 0$; $\Phi(r)$ удовлетворяет также условию $\int_0^1 \Phi(r) r^{-k} dr$ существует, когда $k \geqslant 0$. Относительно этого обобщенного уравнения можно высказать теорему аналогичную третьей:

Если характеристическое уравнение $1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz = 0$ имеет простые нули: $r_1, r_2, \ldots . r_n$, то уравнение имеет решение $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f^i(x)$, где C_i — произвольные постоянные; если характеристическое уравнение имеет нули: $r_1, r_2, \ldots, r_n$, соответственно кратностей: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, то уравнение имеет решение:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x) \,.\, P\alpha_i - 1\,(l_n f(x)), \text{ где } P\alpha_i - 1\,(l_n f(x))$$

полином степени $\alpha_i - 1$ относительно $ln\, f(x)$ с произвольными постоянными коэффициентами.

Действительно, пусть $\varphi(x) = C \,.\, f^r(x)$;

тогда $C \,.\, f^r(x) = \lambda C \int_a^x \Phi\left[\frac{f(s)}{f(x)}\right] \frac{f'(s)}{f(s)} f^r(s) \, ds$, или

$f^r(x) = \lambda f^r(x) \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz$, т. е. $1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{r-1} dz = 0$.

Так как последнее уравнение допускает корни в первом случае простые: $r_1, r_2, \ldots r_n$, то частные решения будут вида $\varphi_i(x) = C_i f^{r_i}(x)$ и, следовательно, более общее решение будет:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f^{r_i}(x).$$

Если же корни, соответственно кратности: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, то по методу d'Alembert'a решение будет $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} f^{r_i}(x) P_{\alpha_i - 1}(\ln f(x))$

Как не трудно убедиться, для обобщенного уравнения сохраняет силу и теорема IV, так как $f(x)$ в окрестности точка a — голоморфна и, следовательно, ограничена.

Укажем теперь связь интегральных уравнений разнообразного вида с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть $\Phi\left(\frac{s}{x}\right)$ — целая рациональная функция: $\Phi\left(\frac{s}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \left(\frac{s}{x}\right)^i$, где A_i — постоянные. Тогда уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s) ds$$

принимает вид $x^n \varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^x x^{n-i} s^{i-1} \varphi(s)\, ds.$

Будем последовательно дифференцировать это уравнение:

$$x^n \varphi'(x) + (n - \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i) x^{n-1} \varphi(x) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n-1} A_i (n - i) \int_0^x x^{n-i-1} s^{i-1} \varphi(s)\, ds.$$

Не трудно видеть, что после n-кратного дифференцирования мы придем к дифференциальному уравнению n-го порядка типа Эйлера. Следовательно, решения интегрального уравнения есть решения уравнения Эйлера.

Положим в обобщенном уравнении $f(x) = e^x$. Так как нижний предел для интеграла есть то значение аргумента, при котором $f(x)$ обращается в нуль, то в данном случае нужно его взять за $-\infty$.

Итак $\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{x} \Phi(e^{s-x}) \varphi(s)\, ds$. Согласно общей теории, это уравнение допускает решения или $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$, или $\sum_{i=1}^{n} e^{r_i x} P_{\alpha_i - 1}(x)$, если характеристическое уравнение допускает, или простые корни, или кратные, — в конечном числе. Если за $\Phi(e^{s-x})$ взять, напр., целую рациональную функцию $\Phi(e^{s-x}) = \sum_{i-1}^{n} A . e^{i(s-x)}$ и дифференцировать, то получим:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i \Phi_i(x)$$

$$\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) \sum_{i=1}^{n} A_i = -\lambda \sum_{i=1}^{n} A_i \mathrm{i} . \Phi_i(x)$$

$$\varphi''(x) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)\varphi'(x) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} A_i \mathrm{i}\right)\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i i^2 \Phi_i(x),$$

$$\text{где } \Phi_i(x) = \int_{\infty}^{x} e^{(s-x)i}\varphi(s)\,ds.$$

Так как определитель системы 1-х n уравнений

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ A_1 & A_2 2 & \ldots & A_n . n \\ A_1 & A_2 2^2 & \ldots & A_n n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 & A_2 2^{n-1} & \ldots & A_n n^{n-1} \end{vmatrix} = A_1 A_2 \ldots A_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & v \\ 1 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, как определитель Вандермонда, то определив $\Phi_i(x)$ из первых n уравнений и подставив в n-ую производную первоначального уравнения, получим с точностью до знака:

$$\Phi_i(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & \frac{\varphi(x)}{\lambda} & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & \frac{\varphi'(x)}{\lambda} - \varphi(x) \sum_{i=1}^{n} A_i, & & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{n-1} & \ldots & \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\lambda} & \ldots, & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix}}{A_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & n_2 \\ 1 & 1^2 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{n-1}, & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix}} \text{ и}$$

уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Итак, если $1-\lambda\int_0^1 k(z)z^{r-1}dr=0$ $(k\ (r)=\Phi\ (r))$ допускает конечное число корней, то решение уравнения $\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^x \kappa(e^{s-x})\ \varphi(s)\ ds$, есть решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Заметим, что рассмотренное интегральное уравнение есть частный вид ур-ния $\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^x \kappa(x-s)\varphi(s)\,ds$.

Рассмотрим еще пример:

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{2}A_i\int_a^x\left[\frac{f(s)}{f(x)}\right]^{i+k}\frac{f'(s)}{f(s)}\varphi(г)\,ds.$$

Аналогичным просчетом, как в последнем примере, придем к

$$\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2\varphi''(x)+\frac{f(x)}{f'(x)}\left[\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'+A\right]\varphi'(x)+B\varphi(x)=0,\ \text{или}$$

$$F^2(x)\varphi''(x)+F(x)\,[F'(x)+A]\,\varphi'(x)+B\varphi(x)=0.$$

В зависимости от вида $\Phi(r)$ и $f(x)$ мы видим, что особое интегральное уравнение $\varphi(x)=\lambda\int_a^x\Phi\left[\frac{f(s)}{f(x)}\right]\frac{f'(s)}{f'(s)}\varphi(s)\,ds$ приводит и к особым линейным дифференциальным уравнениям, которые в окрестности точки a допускают правильные интегралы.

Lösung der singulären Integralgleichungen vom Volterraschen Typus.

Von A. A. Temliakow (Tomsk)

In vorliegender Arbeit wird eine Volterrasche singuläre Integralgleichung untersucht, von der Form

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \frac{1}{s} \varphi(s)\, ds - f(x),$$

wo die gegebenen Funktionen $\Phi\left(\frac{s}{x}\right)$ und $f(x)$ folgenden Bedingungen genügen: das Integral $\int_0^1 \Phi(z) \frac{dz}{zk}$ existiert für $k \geqslant 0$; $-f(x)$ ist in der Umgebung des Nullpunktes holomorph und nur in diesem Punkte kann sie einen Pol von der Ordnung $\leqslant k$ haben. Gesucht wird die Funktion $\varphi(x)$.

Die beiden ersten Theoreme beweisen für jeden Parameterwert λ die Existenz einer partikulären Lösung dieser Gleichung unter Angabe der Form dieser Lösung. Die zwei folgenden Sätze stellen das Vorhandensein einer Lösung der homogenen Gleichung fest, sofern über die Wurzeln r der Gleichung $1 - \lambda \int_0^1 \Phi(z) z^{v-1}\, dz = 0$ gewisse Annahmen gemacht werden Weiterhin werden diese Resultate verallgemeinert auf Gleichungen von der Form

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x \Phi\left(\frac{f(s)}{f(x)}\right) \frac{f'(s)}{f(s)} \varphi(s)\, ds,$$

wo $f(x) = (x-a)^m \psi(x)$, $m > 0$ nd ganz, $\psi(x)$ holomorph im Punukte a und seiner Umgebung ist.

Am Schluss der Arbeit wird auf den Zusammenhang dieser Integralgleichungen mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen hingewiesen. Es wird festgestellt, dass die Eulerschen Gleichungen und die linearen homogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten spezielle Fälle sind, entsprechend den Gleichungen

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi\left(\frac{s}{x}\right) \varphi(s)\, ds + f(x)$$

und

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^x K(s-x) \varphi(s)\, ds.$$

К ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА

Н. П. РОМАНОВ (Томск)

В своей замечательной работе „Об аддитивных свойствах чисел" (Новочеркасск 1930 г.) Шнирельман впервые доказал, что каждое целое число может быть разложено на сумму ограниченного числа простых слагаемых, при чем в качестве верхней границы для числа простых чисел, необходимых для представления всех достаточно больших чисел, он получил число 100000. В настоящей работе доказывается, что путем некоторого видоизменения рассуждений Шнирельмана, эта граница может быть уменьшена примерно в 100 раз. Результат Шнирельмана основан на двух его леммах.

Лемма I: число $\nu(x)$ чисел, разложимых на сумму двух простых слагаемых и не превосходящих x для достаточно больших x, удовлетворяет неравенству $\nu(x) > \alpha x$, где α есть положительная абсолютная константа. Или по терминологии Шнирельмана, последовательность чисел, разложимых на сумму двух простых слагаемых, есть последовательность плотности не меньшей α.

Лемма II: Если последовательность $n_1, n_2 ..$ есть последовательность положительной плотности $\geqslant \alpha > 0$, то тогда каждое достаточно большое число, с точностью до ограниченного слагаемого, может быть разложено на сумму не больше чем $2\left[\frac{1}{\alpha}\right]$, слагаемых из последовательности $n_1, n_2 \ldots\ldots$

Комбинируя эти две леммы мы получаем предложение: каждое достаточно большое число может быть, с точностью до ограниченного слагаемого, разложено на сумму не больше чем $2\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ простых чисел. Следуя Шнирельману, получим $\alpha = \frac{1}{200000}$, следовательно для указаний верхней границы для числа необходимых простых слагаемых $2\left[\frac{1}{\alpha}\right] = 400000$. Легко показать, однако, что в качестве α можно взять $\frac{1}{552}$ и получить, таким образом, для указанной верхней границы $2\left[\frac{1}{\alpha}\right] = 1104$. Рассмотрим произвольную целочисленную последовательность $n_1, n_2 \ldots$

Обозначим через $A(u, x)$, $\varphi(u, x)$ число решений соответственно уравнений:

$$n_i - n_j = u\,(n_i \leqslant x,\ n_i \leqslant x) \text{ и } n_i + n_i = u\ (n_i \leqslant x,\ n_i \leqslant x).$$

Между определенными таким образом величинами существует соотношение:

$$\sum_{u=1}^{2x} \psi(u, x)^2 = A(0, x)^2 + 2\sum_{u=1}^{x} A(u, x) \quad \ldots \ldots (1)$$

или, если мы обозначим через $P(x)$ число n_i не превосходящих x

$$\sum_{u=1}^{2x} \psi(u, x)^2 = P(x)^2 + 2\sum_{u=1}^{x} A(u, x)^2 \quad \ldots \ldots (1a).$$

Для доказательства тождества (1) рассмотрим уравнение:

$$n_i + n_j - n_k - n_e = 0 \quad (n_i \leqslant x,\ n_j \leqslant x,\ n_k \leqslant x,\ n \leqslant x) \ldots (2)$$

и сосчитаем двумя различными способами число его решений. Это уравнение может быть записано в виде $n_i + n_j = n_k + n_e$ $(n_i \leqslant x; n_j \leqslant x; n_k \leqslant x, n_e \leqslant x)$

и заменена система уравнений $n_i + n_j = u$, $n_k + n_e = n$

$(n_i \leqslant x,\ n_j \leqslant x,\ n_k \leqslant x;\ n_e \leqslant x)$ $u = 1, 2, 3, \ldots \ldots 2x$.

Отсюда следует, что число решений уравнения

$$(2) \text{ равно: } \sum_{u=1}^{2x} \varphi(u, x)^2,$$

т. е. левой части тождества (1). С другой стороны, уравнение (2) может быть представлено в виде $n_i - n_k = n_e - n_j$

$n_i \leqslant x$; $n_i \leqslant x$; $n_k \leqslant x$; $n_j \leqslant x$ и заменено системой $n_i - n_k = u$; $n_e - n_j = u$

$(n_i \leqslant x, n_j \leqslant x,\ n_k \leqslant x,\ n_e \leqslant x;\ u = -x, -(x-1) \ldots -1, 0, 1, 2, 3 \ldots x$

Поэтому, число решений уравнения (2) равно

$\sum_{u=1}^{x} A(u, x)^2 = A(0, x)^2 + 2\sum_{u=1}^{x} A(u, x)^2$, т. е. равно левой части тождества (1), которое, таким образом, доказано: обозначим через $\nu(2x)$ число чисел интервала $(0, 2x)$, представимых в виде $n_i \leqslant n_j$ $(n_i \leqslant x,\ n_j \leqslant x)$. Очевидно, что число равно числу чисел ряда $\psi(1, x)$, $\psi(2, x)\,\psi(3, x) \ldots \psi(2x, x)$ отличных от нуля. Поэтому, на основании неравенства Шварца, имеем:

$$\nu(2\kappa) > \frac{\left(\sum_{u=1}^{2x} \psi(u, x)\right)^2}{\sum_{n=1}^{2x} \psi(u, x)^2} \quad \ldots \ldots (3).$$

Кроме того, очевидно, $\sum_{u=1}^{2x} \psi(u,x) = P(x)^2$, т. к. $\sum_{u=1}^{2x} \psi(u,x)$ равно числу решений системы неравенств: $n_i \leqslant x$, $n_i \leqslant x$;

На основании (1) и (3) теперь имеем:

$$\nu(2x) > \frac{P(x)^4}{P(x)^2 + \sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2}.$$

Если $n_1, n_2 \ldots \ldots nk$ означает последовательность целых чисел, то тогда, как известно $P(x) = \pi(x) \backsim \frac{x}{lg\, x}$.

Кроме того, на основании обобщенной леммы Вигго-Бруна (смотри вышеуказанную работу Шнирельмана),

$$A(u,x) < A \frac{x}{log^2 x} \mathop{\Pi}_{d/u} \left(1 + \frac{1}{q}\right) = A \frac{x}{log^2 x} \sum_{d/u} \frac{\mu(d)^2}{d} = A \frac{x}{log^2 x} f(u) \; . \; . (5),$$

где A означает абсолютную константу, μ есть символ функции Мебиуса и произведение справа распространено на все простые делители q числа u.

На основании (5) имеем: $\sum_{u=1}^{x} A(u,x)^2 < A \frac{x}{lg^2 x} \sum_{u=1}^{x} A(u,x) f(u) =$

$$= A \frac{x}{lg^2 x} \sum_{u=1}^{x} A(u,x) \sum_{d/u} \frac{\mu(d)^2}{d} = A \frac{x}{lg^2 x} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} \sum_{u=1}^{\frac{x}{k}} A(uk, x) =$$

$$= A \left(\frac{x}{lg^2 x} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k) \right), \text{ где } S(k) = \sum_{u=1}^{\frac{x}{k}} A(uk, x)$$

означает число решений сравнения $p_i - p_f \equiv 0 \; (mod\; k)$, в простых целых числах $\leq x$. Обозначим через $\pi(x, \alpha, k)$ число простых чисел меньших, чем x и сравнимых с α по модулю k. Не трудно показать, слегка видоизменяя рассуждения Ландау (см. Landau Zahlentheorie Bd II),

$$\pi(x, \alpha, x) = \frac{1}{\varphi(k)} li(x) + O(k^3 x e^{-\sqrt{lgx}}).$$

Кроме того, совершенно очевидно $\pi(x, \alpha, k) < \frac{x}{k}$. Далее, $S(k) =$

$$= \sum_{i=1}^{\pi(x)} \pi(x, p_i, k) = \frac{li(x)\pi(x)}{\varphi(k)} + O(k^3 \frac{x^2}{lg\, x} e^{-\sqrt{lgx}}),$$

или: $S(k) = \frac{l_i(x)\pi(x)}{\varphi(k)} + O\left(k^3 \frac{x^2}{lg^{10} x}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (6).$

Воспользовавшись неравенством $\pi(x, a, k) < \frac{x}{k}$, точно также получаем $S(k) < \frac{\pi(x)x}{k}$ . . . . (7).

Оценим теперь сумму $\sum\limits_{k=1}^{x} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2$ . . . . (8).

На основании (6) имеем $\sum\limits_{k=1}^{y} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2 = li(x)\pi(x) \sum\limits_{k=1}^{y} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)} =$

$$+ O\left(\frac{x^2}{lg^{10} x} \sum_{k=1}^{y} k^2\right) = li(x)\pi(x) \sum_{k=1}^{y} \frac{\mu(k)}{k\varphi(k)} + O\left(\frac{x^2}{log^{10} x} y^3\right).$$

На основании (7), для второй части (8) получим:

$$\sum_{k=y}^{x} \frac{S(k)}{k} \mu(k)^2 < \pi(x)x \sum_{k=y}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi(x)x}{y}.$$

Сопоставляя последние неравенства, получим:

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k) < li(x)\pi(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)} + \frac{\pi(x)x}{y} + O\left(\frac{x^2}{log^{10} x} y^3\right),$$

полагая $y = lg^2 x$, получим $\sum\limits_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k) < \frac{x^2}{lg^2 x} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)} +$

$$+ O\left(\frac{x^2}{lg^2 x}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{k\varphi(k)}$, как легко получить путем преобразования в бесконечное произведение, равен $\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} = 1{,}37$ и, следовательно, для всех достаточно больших значений x $\sum\limits_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)^2}{k} S(k) < 1{,}38 \frac{x^2}{lg^2 x}$ . . . .

Отсюда легко получить следующее неравенство:

$\sum\limits_{u=1}^{x} A(u, x)^2 < 1{,}37 A \frac{x^2}{lg^4 x}$ . . ., или, полагая вместе с Шнирельманом $A = 100$, получим:

$$\sum_{u=1}^{x} A(u, x)^2 < 137 \frac{x^3}{lg^4 x} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9),$$

на основании (4) и (9), имеем $\nu(2x) > \dfrac{\pi(x)^4}{\pi(x)^2 + 2.137 \dfrac{x^3}{lg^4 x}}$, или, дл[я]

достаточно больших x

$$\nu(2x) > \frac{1}{2.138}x, \text{ или } \nu(x) < \frac{1}{2.276}x,$$

на основании леммы II теперь имеем: каждое достаточно большое число может быть разложено на сумму не больше чем $4.276 = 1104$ слагаемых, что и требовалось доказать.

Zum Goldbach'schen Problem.

N. Romanoff (Tomsk).

In der vorliegenden Arbeit wird eine Verschärfung des Schnierelmann'schen Ergebnisses, wonach sich jede genügend grosse Zahl durch die Summe von nicht mehr als 100 000 Primzahlen darstellen lässt, gegeben. Die Grenze 100 000 wird hier auf 1104 herabgesetzt.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА. $\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) f(s, \varphi(s))\, ds$

А. ТЕМЛЯКОВ (Томск).

Целью данной работы является исследование нелинейных интегральных ур-ний типа Fredholm'a с точки зрения существования решений. По этому вопросу имеются работы:

1. Hammerstein'a „Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen" в журнале Acta mathematica за 1931 г.

2. Iglisch'a „Nichtlineare Integralgleichungen im Grossen" в журнале Mathematische Annalen за 1933 г. В обоих работах рассматриваются ядра симметрические. Дальнейшие работы в этом направлении были даны В. В. Немыцким и затем Golomb'ом „Zur Theorie der nichtlinearen Integralglelichungen" за 1934 г.

Во всех этих работах рассматриваются у-ния не с точки зрения существования у них особых решений. Насколько мне известно, с этой точки зрения нелинейные интегральные ур-ния никем не рассматривались.

Рассмотрим функцию $f(x, u)$, которая в заданной области плоскости (x, u) непрерывна, удовлетворяет условию Lipschitz'a

$$|f(x, u_2) - f(x, u_1)| \leqslant M\,|u_2 - u_1|,$$

где M — положительное число, независящее от x и u, $f(x, 0) \neq 0$. Пусть в этой области $|f(x, u)| < M'u\,|K(x, s) f(s, u)| < M$, где $K(x, y)$ функция ограниченная $|K(x, y)| < N$. Выберем три числа: a, b и c, которые удовлетворяют условию $c < (b-a) M$ и для которых прямоугольник $a \leq x \leq b$, $|u| < 2c$ принадлежит первоначальной области.

В этой выбранной области, при условии

$$M < \frac{1}{N(b-a)} < \frac{1}{\left|\int_a^b K(x, s)\, ds\right|},$$

существует решение интегрального ур-ния

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s) f(s, \varphi(s))\, ds$$

и единственное.

Возьмем число A меньше c, введением числа A достигается то, чтобы точки $(a \leqslant x \leqslant b,\ u = 0)$ принадлежали заданной области $f(x, u)$, и представим искомую функцию $\varphi(x)$, как разность $\psi(x) - A$. Тогда интегральное ур-ние примет вид:

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s) f(s, \psi(s) - A)\, ds + A,$$

где, следовательно, искомой функцией будет $\psi(x)$. К этому ур-нию и применим метод последовательных приближений:

$$\psi_0(x)=A,\ \psi_1(x)=\int_a^b K(x,s)f(s,0)\,ds+A,$$
$$\psi_2(x)=\int_a^b K(x,s)f(s,\psi_1(s)-A)\,ds+A,\ldots,$$
$$\psi_{n+1}(x)=\int_a^b K(x,s)f(s,\psi_n(s)-A)\,ds+A,\ldots$$

Прежде всего докажем, что все $\psi_n(x)$ для $a\leq x\leq b$ принадлежат выбранной области, а следовательно, и заданной. Действительно, согласно выбора $A, \psi_0(x)=A<c$ для $a\leq x\leq b$. Что касается других $\psi_n(x)$, то:

$$|\psi_1(x)-\psi_0(x)|\leq\int_a^b|K(x,s)f(s,0)|\,ds<M(b-a)<c,\ldots,$$
$$|\psi_n(x)-\psi_0(x)|\leq\int_a^b|K(x,s)f(s,\psi_{n-1}(s)-\psi_0(s)|\,ds<M(b-a)<c\ldots,$$
$$\text{т. е. } |\psi_n(x)|<|\psi_0(x)|+c<2c \text{ для } a\leq x\leq b.$$

Итак, все последовательные приближения $\psi_n(x)$ принадлежат к выбранному прямоугольнику: $a\leq x\leq b, |u|<2c$, а следовательно, и к первоначально выбранной области. Заметим, что если ядро $K(x,y)$ допускает линии разрыва первого рода, то все $\psi_n(x)$ непрерывные функции на отрезке $a\leq x\leq b$. Докажем теперь, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$ и что предельная функция $\psi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$ — решение предложенного интегрального ур-ния:

$$\psi(x)=\int_a^b K(x,s)f(s,\psi(s)-A)\,ds+A, \text{ при условии}$$
$$|f(x,u_2)-f(x,u_1)|<M|u_2-u_1|, \text{ где } M<\frac{1}{N(b-a)}.$$

Для этого рассмотрим разности между последовательными приближениями:

$$|\psi_1(x)-\psi_0(x)|<c,$$
$$|\psi_2(x)-\psi_1(x)|\leq\int_a^b|K(x,s)[f(s,\psi_1(s)-A)-f(s,0)]|\,ds<$$
$$\leq M\int_a^b|K(x,s)||\psi_1(s)-\psi_0(s)|\,ds<CMN(b-a),\ldots,$$
$$|\psi_{n+1}(x)-\psi_n(x)|=\int_a^b|K(x,s)||f(s,\psi_n(s)-A)-f(s,\psi_{n-1}(s)-A)|\,ds\leq$$
$$\leq M\int_a^b|K(x,s)||\psi_n(s)-\psi_{n-1}(s)|\,ds<CM^nN^n(b-a)^n,\ldots$$

Так как ряд для:

$$M<\frac{1}{N(b-a)}:\psi_0(x)+(\psi_1(x)-\psi_0(x))+\ldots(\psi_{n+1}(x)-\psi_n(x))+\ldots$$

абсолютно и равномерно сходится для всех $x: a\leq x\leq b$, то существует $\psi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$. В силу непрерывности $\psi_n(x), \psi(x)$ — непрерывная функция на $a\leq x\leq b$ и $|\psi(x)|<2c$.

Так как, $\psi_n(x) = \int_a^b K(x,s) f(s, \psi_{n-1}(s) - A)\, ds + A$, то в силу равномерной сходимости $\psi_n(x)$ к $\psi(x)$ для $a \leq x \leq b$, получается для $n \to \infty$

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,s) f(s, \psi(s) - A)\, ds + A.$$

Итак, $\varphi(x) = \psi(x) - A = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) - A$ является решением предложенного ур-ния. Теперь докажем, что в выбранной области существует единственное решение. Пусть имеется в выбранной области другое решение $\bar{\psi}(x)$, отличное от $\psi(x)$:

$$\bar{\psi}(x) = \int_a^b K(x,s) f(s, \bar{\psi}(s) - A)\, ds + A.$$

Тогда:

$$|\bar{\psi}(x) - \psi_0(x)| \leq \int_a^b |K(x,s) f(s, \bar{\psi}(s) - A)|\, ds \leq M(b-a) < c,$$

$$|\bar{\psi}(x) - \psi_1(x)| \leq \int_a^b |K(x,s)|\, |f(s, \bar{\psi}(s) - A) - f(s, 0)|\, ds \leq$$
$$\leq M \int_a^b K(x,s)\, ||\bar{\psi}(s) - A|\, ds < CMN(b-a), \ldots$$

$$|\bar{\psi}(x) - \psi_n(x)| \leq \int_a^b |K(x,s)|\, |f(s, \bar{\psi}(s) - A) - f(s, \psi_{n-1}(s) - A)|\, ds \leq$$
$$\leq M \int_a^b |K(x,s)|\, |\bar{\psi}(s) - \psi_{n-1}(s)|\, ds < C M^n N^n (b-a)^n, \ldots$$

Но, так как $M < \dfrac{1}{N(b-a)}$, то $M = \dfrac{q}{N(b-a)}$, где $q < 1$,

а поэтому $|\bar{\psi}(x) - \psi_n(x)| < c q^n$.

Следовательно, $\bar{\psi}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$.

Если ввести параметр λ, т. е. $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s, \varphi(s))\, ds$, то доказанное предложение можно высказать в следующей форме: уравнение допускает решение и единственное в достаточно малом круге сходимости λ, именно $|\lambda| < \dfrac{1}{MN(b-a)}$, при условии, что $|f(x, u_2) - f(x, u_1)| < M|u_2 - u_1|$ и обращающееся в нуль при $\lambda = 0$.

На ряду с этим единственным решением, рассматриваемое интегральное ур-ние может допускать и другого рода (особые) решения, т. е. $\lim\limits_{\lambda\to 0} \varphi(x, \lambda) \neq 0$.

Для этого рассмотрим нелинейное интегральное ур-ние вида

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{j=0}^{n+1} A_j(s) \varphi^j(s)\, ds,$$

где $K(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i(x) y_i(y)$ — вырождающее ядро, $A_j(x)$ — непрерывные функции в отрезке (a, b).

На основании вышеуказанного, ур-ние имеет единственное решение, при достаточно малом λ, обращающееся в нуль при $\lambda = 0$. В справедливости этого предложения можно было бы убедиться и другим методом, который будет применен в дальнейшем.

Покажем, что могут быть решения отличные от предыдущего, а именно $\lim\limits_{\lambda \to 0} \varphi(x, \lambda) = \infty$.

Для доказательства положим $\varphi(x) = \dfrac{\psi(x)}{\lambda^{\frac{1}{n}}}$; тогда ур-ние примет следующий вид: $\psi(x) = \int_a^b K(x, s) \sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i(s) \lambda^{1 - \frac{i-1}{n}} \psi^i(s)\, ds$. Будем искать решение этого уравнения, в виде $\psi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(x)$, считая $x_i(x)$ (а также и y_i), линейно независимыми, что можно всегда сделать. Тогда существует решение в том случае, если существуют α_i, удовлетворяющие ур-ниям:

$$\alpha_k - \int_a^b y_k(s) \sum_{i=0}^{n+1} A_i(s) \lambda^{1 - \frac{i-1}{n}} \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(s) \Big)^i ds =$$

$$= F_k(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m; \lambda) = 0, \ (K = 1, 2, \ldots m,).$$

Пусть система ур-ний:

$$\alpha_k - \int_a^b y_k(s) A_{n+1}(s) \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(s) \Big)^{n+1} ds = 0, \ K = 1, 2, \ldots, m$$

совместна и $\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \ldots, \bar\alpha_m$ — корни этой системы; затем определитель:

$$1 - (n+1) \int_a^b y_1(s) x_1(s) A_{n+1}(s) \Big(\sum_{j=1}^{m} \bar\alpha_j x_j(s) \Big)^n ds, \ldots, -(n+1) \int_a^b y_1 x_m A_{n+1} \Big(\sum_1^m \Big)^n$$

. . . .

$$-(n+1) \int_a^b y_m x_1 A_{n+} \Big(\sum_1^m \Big)^n ds, \ldots, 1 - (n+1) \int_a^b y_m x_m A_{n+1} \Big(\sum_1^m \Big)^n ds$$

отличен от нуля. Тогда функции $F_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \lambda)$ в точке $(\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \ldots \bar\alpha_m, 0)$ обращаются в нуль, а Якобиан их в этой точке отличен от нуля.

Следовательно, существует система функций $\alpha_k(\lambda)$, которые приводятся к $\bar\alpha_k$ в точке $\lambda = 0$ и в окрестности этой точки обращают ур-ния $F_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \lambda) = 0$ в тождества.

Таким образом, существует и решение $\psi(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j(x)$, не обращающееся в нуль при $\lambda=0$. А значит, предложенное уравнение имеет решение $\varphi(x)=\frac{\psi(x)}{\lambda^{\frac{1}{n}}}$, обращающееся в бесконечность при $\lambda=0$.

Итак, на ряду с решением (правильным), обращающимся в нуль при $\lambda=0$, могут существовать и (особые) решения, обращающиеся в бесконечность при $\lambda=0$.

Рассмотрим „правильное" решение последнего ур-ния. Для этого возвратимся вновь к ур-ниям $F_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\lambda)=0$, $k=1,2,\ldots,m$. Так как функции $F_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\lambda)$ в точке ($\alpha_i=0$, $\lambda=0$) обращаются в нуль, а Якобиан их в этой точке равен единице, то существует еще система функций $\alpha_k(\lambda)$, которые приводятся к 0 в точке $\lambda=0$ и в окрестности этой точки обращают ур-ния $F_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\lambda)=0$ в тождества. Следовательно, существует решение $\psi(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j(x)$, обращающееся в нуль $\lambda=0$. В силу единственности существования решения $\varphi(x,\lambda)$, обращающегося в нуль при $\lambda=0$, следует из связи $\varphi(x,\lambda)=\frac{\psi(x,\lambda)}{\lambda^{\frac{1}{n}}}$, что $\psi(x,\lambda)$, как функция λ, имеет порядок малости выше чем $\frac{1}{n}$.

Пример 1.

Пусть $A_{n+1}(x)=\frac{1}{\bar{\psi}^n(x)}$, где $\bar{\psi}(x)$ — фундаментальная функция ядра $K(x,y)$, соответствующая фундаментальному значению $\bar{\lambda}$. Легко видеть, что функции:

$$F_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m;\lambda)$$

в точке:

$$\left(\alpha_k=\int_a^b y_k(s)\,\bar{\lambda}^{1+\frac{1}{n}}\,\bar{\psi}(s)\,ds,\ \lambda=0\right)$$

обращаются в нуль и, если ядро таково, что определитель:

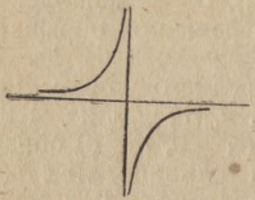
$$\begin{vmatrix} 1-(n+1)\int_a^b y_1(s)\,x_1(s)\,ds, \ldots, & -(n+1)\int_a^b y_1(s)\,x_m(s)\,ds \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -(n+1)\int_a^b y_m(s)\,x_1(s)\,ds, \ldots, & 1-(n+1)\int_a^b y_m(s)\,x_m(s)\,ds \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то существуют $\alpha_i(\lambda)$, которые при $\lambda=0$ отличны от нуля.

Пример 2. $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x s \varphi^2(s)\, ds.$

$$\varphi(x) = Ax,\ A = \lambda \int_0^1 A^2 s^3\, ds = \frac{\lambda A^2}{4},\quad A = 0,\ A = \frac{4}{\lambda}$$

$$\varphi(x) = 0,\ \varphi(x) = \frac{4}{\lambda} x.$$

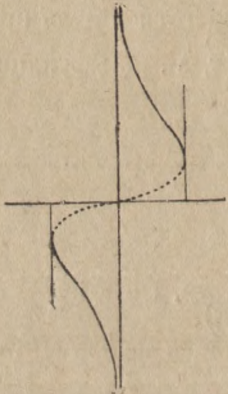


Последнее решение особое.

Сечение плоскостью $x = c$.

Пример 3. $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xs\, [\varphi^2(s) + 1]\, ds.$

$$\varphi(x) = \frac{2 - \sqrt{4 - 2\lambda^2}}{\lambda} x,\ \varphi(x) = \frac{2 + \sqrt{4 - 2\lambda^2}}{\lambda} x \text{ — особое.}$$



Über singuläre Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen vom Tipus $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s, \varphi(s))\, ds$

Von A. A. Temliakow (Tomsk).

In der vorliegenden Arbeit wird eine nichtlineare Integralgleichung von der Form $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s, \varphi(s))\, ds$ in Bezug auf die Existenz von Lösungen untersucht. Es wird bewiesen, wenn $f(x, 0) \neq 0$ ist und im gegebenen Gebiet der (x, u) Ebene $f(x, u)$ stetig ist und in Bezug auf u die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, dass alsdann die Gleichung $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) f(s, \varphi(s))\, ds$ eine Lösung und zwar eine einzige in einem genügend kleinen Konvergenzkreise für λ besitzt, die bei $\lambda = 0$ zu Null wird. Ausserdem wird die Existenzmöglichkeit von singulären Lösungen bewiesen, d. h. von Lösungen, die für $\lambda = 0$ unendlich werden.

BERECHNUNG DER UNTERBROCHENEN SCHWEISSNAHT IM GEBOGENEN STABE

VON P. KUFAREFF

In der Arbeit von A. Sokolow [1]) ist eine Lösung der Frage nach der Verteilung der Schubspannungen in der (elektrischen) Schweissnaht bei Biegung gegeben. Zur Berechnung der unterbrochenen Schweissnaht wurde von ihm die Methode der Matrizen benutzt. Hier wird die Berechnung in anderer Weise durchgeführt—nach der Methode der Differenzengleichungen, welche schon von R. Kalina [2]) im Falle von einfachem Zug angewandt wurden. Ausserdem werden in der Berechnung die Gleichungen nicht für Schubspannungen in der Naht gebildet, wie es Sokolow [1]) u. Howgaard [3]) machen, sondern für Schubbeanspruchungen, was zweckmässiger ist, wie schon Fillunger [4]) gezeigt hat. Dabei gehen wir von den bei Berechnungen der Naht gewöhnlich gebräuchlichen Annahmen aus (s. die angeführten Arbeiten).

§ 1. Ableitung der Gleichungen für Schubbeanspruchungen.

Betrachten wir zwei Stäbe, welche auf zwei Stützen liegen und durch die konzentrierte Kraft P verbogen sind. Die Länge der Licht-

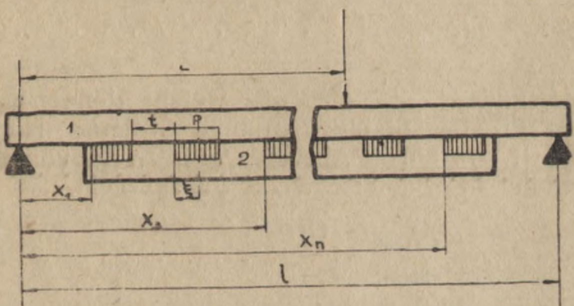


Abb. 1.

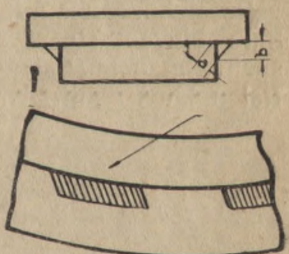


Abb. 2.

weite bezeichnen wir mit l, die Querschnittsflächen und Trägheitsmomente der Stäbe mit F_1, F_2 und I_1, I_2. Die Stäbe seien durch eine Naht zusammengeschweisst, welche aus n Abschnitten besteht, deren Länge gleich p sind und deren Abstände voneinander gleich t sind (s. Abb. 1).

[1]) А. Соколов, Журнал технической физики, 2, вып. 1, 1933, стр. 145.

[2]) R. Kalina, Die Spannungsverteilung in unterbrochenen Schweissnähten. „Die Wasserwirtschaft" 1932 (Wien), № 30–31.

[3]) W. Howgaard. Die Spannungsverteilung in Schweissungen. Zeitschrift für angew. Math. und Mech. 2, 1931. Heft 5.

[4]) P. Fillunger. Zeitschrift für angew. Math. und Mech. 12. Heft 4. 1932 стр. 256.

Die Koordinate des linken Endes im i—ten Abschnitt bezeichnen wir mit x_i. Jeder Abschnitt der Naht verschiebt sich bei Biegung. Der mittlere Schub $S_{\xi i}$ der Nahtebene, welche am ersten Stabe anliegt, gegen die Nahtebene, die am zweiten Stabe anliegt, wird im Querschnitt ξ des i—ten Abschnitts (s. Abb. 2, 3) für proportional zu den

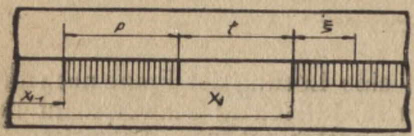


Abb. 3. Vor der Deformation

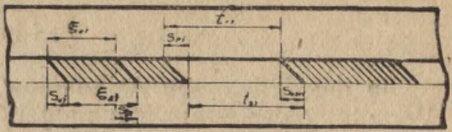


Abb. 3-b. Nach der Deformation.

Schubbeanspruchungen in der Naht in diesem Querschnitt angesehen (berechnet zur Längeneinheit der Naht)

$$T_{\xi i} = \alpha S_{\xi i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

($T_{\xi i} = 2a\ T'_{\xi i}$, wo $T'_{\xi i}$ die mittleren Schubspannungen der Symmetrieebene der Naht im Querschnitt ξ sind).

Die Summe der Schubbeanspruchungen, welche links vom Punkt ξ wirken, ist gleich

$$Q_{\xi i} = \sum_{j=1}^{j=i-1} \int_0^p T_{\xi j}\, d\xi + \int_0^\xi T_{\xi i}\, d\xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Daher

$$T_{\xi i} = \frac{d\, Q_{\xi i}}{d\xi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Bezeichnen wir mit M_1 und M_2 die Momente, welche den 1. und 2. Stab biegen, so werden die der Stabbreite nach mittleren Normalspannungen im Querschnitt ξ in einem Abstande von z_1, z_2 vom neutralen Querschnitt der Stäbe in folgender Weise ausgedrückt.

$$\sigma_{\xi 1 i} = \frac{M_1 z_1}{J} - \frac{Q_{\xi i}}{F_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\sigma_{\xi 2 i} = \frac{M_2 z_2}{J_2} + \frac{Q_{\xi i}}{F_2}$$

ρ_1 und ρ_2 seien die Krümmungsradien der Stäbe 1 und 2 bei Biegung durch die entsprechenden Momente M_1 und M_2. Wie bekannt, ist

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_1}{EJ_1}; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{M_2}{EJ_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Setzen wir:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

(s. die Arbeit von Sokolow), so haben wir

$$\frac{M_1}{J_1} = \frac{M_2}{J_1}.$$

Andererseits ist es klar, dass man das Moment der äusseren Kräfte bei geringen Durchbiegungen gleich der Summe der Momente M_1 und M_2 und der Momente $Q_{\xi i} \cdot h_1$, $Q_{\xi i} \cdot h_2$ der Achsenkraft setzen kann, welch letztere von der Naht aus wirkt (hier sind h_1 und h_2 — die halbe Höhe der entsprechenden Stäbe 1 und 2).

$$M_1 + M_2 = M - Q_{\xi i}(h_1 + h_2) = \begin{cases} P\dfrac{l-c}{l}x - Q_{\xi i}(h_1+h_2) & \text{für den linken} \\ P\dfrac{c}{e}(l-x) - Q_{\xi i}(h_1+h_2) & \text{für den rechten.} \end{cases} \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\frac{M_1}{J_1} = \frac{M_2}{J_2} = \frac{M}{J_1 + J_2} - \frac{h_1 + h_2}{J_1 + J_2} Q_{\xi i} \quad \ldots \ldots (7)$$

Die der Naht anliegenden Punkte des ersten Stabes, welche vor der Deformation die Abszisse ξ haben, werden nach erfolgter Deformation lgende Abszisse besitzen

$$\xi_{1i} = \int_0^\xi \left(1 + \frac{1}{E}\sigma_{\xi 1 i}\right) d\xi \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

oder nach Formel (4).

$$\xi_{1i} = \int_0^\xi \left(1 + \frac{M_1 h_1}{EJ_1} - \frac{Q_{\xi i}}{EF_1}\right) d\xi.$$

Analog ist für den zweiten Stab

$$\xi_{2i} = \int_0^\xi \left(1 - \frac{M_2 h_2}{EJ_2} + \frac{Q_{\xi i}}{EF_2}\right) d\xi$$

Hieraus, nach den Gleichungen (6), (7)

$$\xi_{1i} - \xi_{2i} = \frac{(h_1 + h_2)P}{E(J_1 + J_2)}\left(1 - \frac{c}{l}\right)\int_0^\xi x\, d\xi -$$
$$- \left[\frac{(h_1 + h_2)^2}{E(J_1 + J_2)} + \frac{F_1 + F_2}{EF_1F_2}\right]\int_0^\xi Q_{\xi i}\, d\xi \quad \ldots \ldots (9)_1$$

für den linken Teil des Stabes, und

$$\bar{\xi}_{1i} - \bar{\xi}_{2i} = \frac{(h_1 + h_2)P}{E(J_1 + J_2)}\frac{c}{l}\int_0^\xi (l - x)\, d\xi -$$
$$- \left[\frac{(h_1 + h_2)^2}{E(J_1 + J_2)} + \frac{F_1 + F_2}{EF_1F_2}\right]\int_0^{\bar{\xi}} \bar{Q}_{\xi i}\, d\xi \quad \ldots \ldots (9)_2$$

für den rechten Teil.

Andererseits ist, wie aus Abb. 3 zu ersehen

$$\xi_{1i} + S_{\xi i} = \xi_{2i} + S_{0i}$$

oder

$$\xi_{1i} - \xi_{2i} = S_{0i} - S_{\xi i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

oder nach den Gleichungen (1), (3).

$$\xi_{1i} - \xi_{2i} = \frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{T}_{0i} - \frac{dQ_{\xi i}}{d\xi}\right)$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke für $\xi_{1i} - \xi_{2i}$ einander gleich, so erhalten wir

$$\mathrm{T}_{0i} - \frac{dQ_{\xi i}}{d\xi} = r\left(1 - \frac{c}{l}\right)\int_0^{\xi} x\,d\xi - \mathrm{k}^2 \int_0^{\xi} Q_{\xi i}\,d\xi$$

für die linke Seite und

$$\overline{\mathrm{T}}_{0i} - \frac{d\overline{Q}_{\xi i}}{d\xi} = r\frac{c}{l}\int_0^{\xi} (l - x)\,d\xi - \mathrm{k}^2 \int_0^{\xi} \overline{Q}_{\xi i}\,d\xi.$$

In diesen Gleichungen ist

$$r = \frac{\alpha(h_1 + h_2)P}{E(J_1 + J_2)};\ \mathrm{k}^2 = \frac{\alpha}{E}\left[\frac{F_1 + F_2}{F_1 F_2} + \frac{(h_1 + h_2)^2}{J_1 + J_2}\right] \quad . \ . \ (11)$$

und

$$x = x_i + \xi.$$

Wir differenzieren nach ξ und erhalten für $Q_{\xi i}$ die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 Q_{\xi i}}{d\xi^2} - \kappa^2 Q_{\xi i} + r\left(1 - \frac{c}{l}\right)(x_i + \xi) = 0$$

(linke Seite)

$$\frac{d^2 \overline{Q}_{\xi i}}{d\xi^2} + \mathrm{k}^2 \overline{Q}_{\xi i} + r\,\frac{c}{l}(l - x_i - \xi) = 0 \quad \ldots \ldots (12)$$

(rechte Seite).

Bezeichnen wir

$$Q_{0i} = \sum_{J=1}^{J=i-1} \int_0^p \mathrm{T}_{\xi j}\,d\xi = Q_{i-1} \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

und

$$Q_{pi} = \sum_{J=1}^{J=e} \int_0^p \mathrm{T}_{\xi j}\,d\xi = Q_i$$

so kann man das Integral der Gleichungen, dass diesen Grenzbedingungen entspricht, in folgender Weise schreiben

$$Q_{\xi i}=\frac{[Q_i-q(x_i+p)]\,sh k\xi+[Q_{i-1}-qx_i]\,sh k(p-\xi)}{sh k p}+q(x_i+\xi)$$

(linke Seite)

$$\overline{Q}_{\xi i}=\frac{[\overline{Q}_i-\overline{q}(l-x_i-p)]\,sh k\xi+[\overline{Q}_{i-1}-\overline{q}(l-x_i)]\,sh k(p-\xi)}{sh k p}+$$

$$+q(l-x_i-\xi)$$

wo

$$q=\frac{r}{k^2}\left(1-\frac{c}{l}\right), \overline{q}=\frac{r}{}\frac{c}{l},\ q+\overline{q}=\frac{r}{k^2}\ \text{ist} \quad \ldots \quad (15)$$

Dann wird $T\xi_i$ zu

$$T_{\xi i}=k\,\frac{[Q_i-q(x_i+p)]\,ch k\xi-[Q_{i-1}-q\,x_i]\,ch k(p-\xi)}{sh k p}+q \quad \ldots (16)$$

$$\overline{T}_{\xi i}=k\,\frac{[\overline{Q}_i-\overline{q}(l-x_i-p)]\,ch k\xi-[Q_{i-1}-\overline{q}.(l-x_i)]\,ch k(p-\xi)}{sh k p}-\overline{q}.$$

§ 2. Bestimmung von Q_i.

Die Summe der Schubspannungen links, Q_i, bleibt zwischen den Nahtabschnitten konstant. Deshalb hat die Gleichung (9). welche jetzt für den ganzen Zwischenraum t gilt, folgendes Aussehen (s. Abb. 3).

$$t_{1i}-t_{2i}=\frac{r}{\alpha}\left(1-\frac{c}{l}\right)\int_0^t x\,d\eta-\frac{k^2}{\alpha}Q_i t$$

(linke Seite).

Andererseits hat man nach Abb. 3.

$$t_{1i}-t_{2i}=S_{pi}-S_{0,i+1}=\frac{1}{\alpha}(T_{pi}-T_{0,i-1}) \quad \ldots \quad (17)$$

Hieraus ist

$$T_{pi}-T_{0,i+1}=k^2 q\int_0^t x\,d\eta-k^2 Q_i t \quad \ldots \quad (18)_1$$

und

$$\overline{T}_{pi}-\overline{T}_{0,i+1}=k^2\overline{q}\int_0^t (l-x)\,d\eta-k^2\overline{Q}_i t \quad \ldots (18)_2$$

(Hier ist $x=x_i+p+\eta$).

Aber aus den Formeln (16) ist

$$T_{pi} = k\,\frac{[Q_i - q\,(x_i + p]\,ch k\,p - [\,Q_{i-1} - q\,x_i]}{sh k p} + q$$

$$T_{0\,i+1} = k\,\frac{[Q_{i+1} - q\,(x_{i+1} + p)\,] - [Q_i - q\,x_{i+1}]\,ch k p}{sh k\,p} + q.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung (18) ein und berechnen wir das Integral auf der rechten Seite, so erhalten wir folgende Differenzengleichung

$$k^2 \left\{ q\left[(x_i + p)\,t + \frac{t^2}{2}\right] - Q_i t \right\} =$$

$$= k\,\frac{[2\,Q_i - q\,(x_i + x_{i+1} + p)]\,ch k\,p - Q_{i-1} - Q_{i+1} + q\,(x_i + x_{i+1} + p)}{sh k p}$$

Wir bemerken, dass

$$x_{i+1} = x_i + p + t = x_1 + i\,(p + t)$$

und stellen diese Gleichung nach einigen Umformungen in folgender Weise dar:

$$Q_{i+1} - m\,Q_i + Q_{i-1} = -\,(m-2)\,q\left(x_i + p + \frac{t}{2}\right) \quad . \quad . \; (19)_1$$

wo

$$m = 2\,ch k\,p + k t\,sh k p$$

ist.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$Q_i = C_1 y^i + C_2 y^{-i} + q\left(x_i + p + \frac{t}{2}\right) =$$

$$= C_1 e^{si} + C_2{}^{-si} + q\left(x_i + p + \frac{t}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

wo $y = e^s$ Wurzel der Gleichung

$$y^2 - my + 1 = 0$$

ist, d. h.

$$y = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1} = e^s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Analog erhalten wir für die rechte Seite des Stabes die Differenzengleichung

$$\overline{Q}_{i+1} - m\,\overline{Q}_i + \overline{Q}_{i-1} = -\,(m-2)\,\overline{q}\left(l - x_i - p - \frac{t}{2}\right) \quad . \quad . \; (19)_2$$

deren Lösung folgendermassen ist

$$\overline{Q}_i = \overline{C}_1 y^i + \overline{C}_2 y^{-i} + \overline{q}\left(l - x_i - p - \frac{t}{2}\right) =$$

$$= \overline{C}_1 e_{s_1} + \overline{C}_2\,e^{-si} + \overline{q}\left(l - x_i - p - \frac{t}{2}\right).$$

§ 3. Gleichungen für die willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \overline{C_1}, \overline{C_2}$.

Zur Bestimmung der willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \overline{C_1}, \overline{C_2}$ sind 4 Gleichungen nötig. Zwei Gleichungen erhält man aus den Randbedingungen

$$Q_0 = 0 \quad \overline{Q}_n = 0.$$

Wir sehen, dass

$$x_i + p + \frac{t}{2} = x_{i+1} - \frac{t}{2}$$

und schreiben diese Gleichungen in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 = C_1 + C_2 = q\left(x_1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \\ \overline{Q}_n = \overline{C}_1 e^{sn} + \overline{C}_2 e^{-sn} + \overline{q}\left(l - x_n - p - \frac{t}{2}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \ (22)$$

Zweiit andere Gleichungen erhält man, wie gewöhnlich, aus den Stetigke sbedingungen im Punkt $x = c$. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Angriffspunkt der Kraft P, $x = c$ befindet sich über dem ν — ten Nahtabschnitt

$$x_\nu \leqslant c \leqslant x_\nu + p$$

2. Der Angriffspunkt der Kraft befindet sich zwischen dem $\nu - 1$ — ten und ν — ten Nahtabschnitt

$$x_{\nu-1} + p \leqslant c \leqslant x_\nu.$$

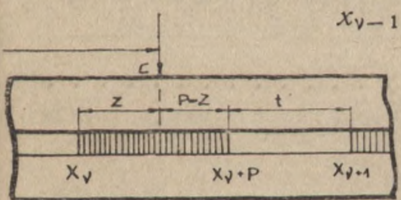


Abb. 4.

Erster Fall. Nehmen wir

$$c = x_\nu + z$$

an. (s. Abb. 4).

Die Veränderung der Kraft $Q_{\xi\nu}$ von 0 bis z wird durch folgende Gleichung charakterisiert:

$$\frac{d^2 Q_{\xi\nu}}{d\ ^2} - k^2 Q_{\xi\nu} + r\left(1 - \frac{c}{l}\right)(x_\nu + \xi) = 0$$

und von z bis p durch die Gleichung

$$\frac{d^2 \overline{Q}_{\xi\nu}}{d\xi^2} - k^2 \overline{Q}_{\xi\nu} + r\frac{c}{l}(l - x_\nu - \xi) = 0.$$

Wenn wir die Integrale dieser Gleichungen folgendermassen schreiben

$$Q_{\xi\nu} = A_\nu e^{k\xi} + B_\nu e^{-k\xi} + q(x_\nu + \xi)$$

$$\overline{Q}_{\xi\nu} = \overline{A}_\nu e^{k\xi} + \overline{B}_\nu e^{-k\xi} + \overline{q}(l - x_\nu - \xi) \quad \ldots\ldots (23)$$

so haben wir für Bestimmung der willkürlichen Konstanten A_ν B_ν $\overline{A}_\nu, \overline{B}_\nu$ die Grenzbedingungen

$$1.\ Q_{\xi\nu}(0) = Q_{\nu-1} \qquad 2.\ \overline{Q}_{\xi\nu}(p) = \overline{Q}_\nu.$$

$$3.\ Q_{\xi\nu}(z) = \overline{Q}_{\xi\nu}(z) \text{ und } \qquad 4.\ T_{\xi\nu}(z) = \overline{T}_{\xi\nu}(z).$$

Nachdem wir aus diesen vier Gleichungen A_ν, B_ν, $\overline{A}_\nu$, $\overline{B}_\nu$ bestimmt haben, stellen wir $Q_{\xi\nu}$ und $\overline{Q}_{\xi\nu}$ in folgender Weise dar:

$$\overline{Q}_{\xi\nu} = \frac{[\overline{Q}_\nu - \overline{q}(l - x_\nu - p)]\, sh k\xi + [Q_{\nu-1} - q x_\nu - \frac{r}{k^3} sh kz]\, sh k(p - \xi)}{sh kp} + $$
$$+ \overline{q}(l - x_\nu - \xi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)_2$$

$$Q_{\xi\nu} = \frac{[\overline{Q}_\nu - \overline{q}(l - x_\nu - p) - \frac{r}{k^3} sh k(p - z)]\, sh k\xi + [Q_{\nu-1} - q x_\nu]\, sh k(p - \xi)}{sh k p} + $$
$$+ \overline{q}(x_\nu + \xi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)_1$$

und $T_{\xi\nu}$:

$$T_{\xi\nu} = k\, \frac{[\overline{Q}_\nu - \overline{q}(l - x_\nu - p) - \frac{r}{k^3} sh k(p - z)]\, ch k\xi}{sh k p} - $$
$$- \frac{[Q_{\nu-1} - q x_\nu]\, ch k(p - \xi)}{sh k p} + \overline{q} \quad \ldots\ldots (25)_1$$

$$\overline{T}_{\xi\nu} = k\, \frac{[\overline{Q}_\nu - \overline{q}(l - x_\nu - p)]\, ch k\xi - [Q_{\nu-1} - q x_\nu - \frac{r}{k^3} sh kz]\, sh k(p - \xi)}{sh k p}$$
$$- \overline{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)_2$$

Wir schreiben nun die Gleichung (18) für die Zwischenräume zwischen dem ν—ten und $\nu+1$—ten Nahtabschnitt und zwischen dem $\nu-1$—ten und dem ν—ten:

$$\overline{T}_{p\nu}-\overline{T}_{0,\nu+1}=k^2\overline{q}\int\limits_0^t(l-x_\nu-p-\eta)\,d\eta-k^2\overline{Q}_\nu t$$

$$T_{p,\nu-1}-T_{0,\nu}=k^2 q\int\limits_0^t(x_\nu+p+\eta)\,d\eta-k^2 Q_{\nu-1}t$$

und erhalten die uns notwendigen zwei Gleichungen. Hier werden $\overline{T}_{0,\nu+1}$ und $T_{p,\nu-1}$ nach den allgemeinen Formeln (16) berechnet, während $T_{0,\nu}$ und $\overline{T}_{p,\nu}$ nach den Formeln (25) berechnet werden. Nach einfacher Rechnung erhalten wir

$$\overline{Q}_{\nu+1}-m\overline{Q}_\nu+Q_{\nu-1}=-m\overline{q}\left(l-x_\nu-p-\frac{t}{2}\right)+qx_\nu+$$
$$+\overline{q}\,(l-x_{\nu+1}-p)+\frac{r}{k^3}sh\mathrm{k}z$$

und

$$\overline{Q}_\nu-mQ_{\nu-1}+Q_{\nu-2}=-mq\left(x_{\nu-1}+p+\frac{t}{2}\right)+qx_{\nu-1}+$$
$$+\overline{q}(l-x_\nu-p)+\frac{r}{k^3}sh\mathrm{k}(p-z).$$

Doch ist den Gleichungen (19) gemäss

$$\overline{Q}_{\nu+1}-m\overline{Q}_\nu=-\overline{Q}_{\nu-1}-(m-2)\overline{q}\left(l-x_\nu-p-\frac{t}{2}\right)$$

und

$$-mQ_{\nu-1}+Q_{\nu-2}=-Q_\nu-(m-2)q\left(x_\nu+p+\frac{t}{2}\right).$$

Hier sind $\overline{Q}_{\nu-1}$ und Q_ν fiktive Grössen. $\overline{Q}_{\nu-1}$ stellt die Summe der Schubbeanspruchungen in $\nu-1$ Abschnitten (von links) dar, falls der Angriffspunkt der Kraft P sich links vom $\nu-1$—ten Abschnitt befindet. Analog ist Q_ν gleich der Summe der Schubbeanspruchungen im ν—ten Nahtabschnitt, falls der Angriffspunkt der Kraft P sich rechts vom ν—ten Abschnitt befindet.

Wir setzen dies in unsere Gleichungen ein und bemerken noch, dass

$$x_{\nu-1}=x_\nu-p-t \quad x_{\nu+1}=x_\nu+p+t$$

$$x_\nu+z=c \qquad q+\overline{q}=\frac{r}{k^2}$$

und formen sie folgendermassen um

$$Q_{\nu-1}-\overline{Q}_{\nu-1}=-\frac{r}{k^2}z+\frac{r}{k^3}sh\mathrm{k}z$$

$$\overline{Q}_{\nu}-Q_{\nu}=-\frac{r}{k^2}(p-z)+\frac{r}{k^3}sh\mathrm{k}(p-z).$$

Stellen wir endlich diese Differenzen nach den Formeln (20) dar:

$$Q_{\nu-1}-\overline{Q}_{\nu-1}=(C_1-\overline{C}_1)e^{(\nu-1)s}+(C_2-\overline{C}_2)e^{-(\nu-1)s}+$$
$$+q\left(x_{\nu-1}+p+\frac{t}{2}\right)-\overline{q}\left(l-x_{\nu-1}-p-\frac{t}{2}\right)$$

oder

$$Q_{\nu-1}-\overline{Q}_{\nu-1}=(C_1-\overline{C}_1)e^{(\nu-1)s}+(C_2-\overline{C}_2)e^{-(\nu-1)s}-\frac{r}{k^2}\left(z+\frac{t}{2}\right)$$

und analog

$$\overline{Q}_{\nu}-Q_{\nu}=(\overline{C}_1-C_1)e^{\nu s}+(\overline{C}_2-C_2)e^{-\nu s}-\frac{r}{k^2}\left(z-\frac{t}{2}\right)$$

Hieraus erhalten wir endgültig

$$(C_1-\overline{C}_1)e^{(\nu-1)s}+(C_2-\overline{C}_2)e^{-(\nu-1)s}=\frac{r}{k^2}\left(\frac{t}{2}+\frac{shkz}{k}\right)=N'_3 \quad (26)$$

$$(\overline{C}_1-C_1)e^{\nu s}+(\overline{C}_2-C_2)e^{-\nu s}=\frac{r}{k^2}\left(\frac{t}{2}+\frac{sh\mathrm{k}(p-z)}{k}\right)=N'_4\,.\;.\;(27)$$

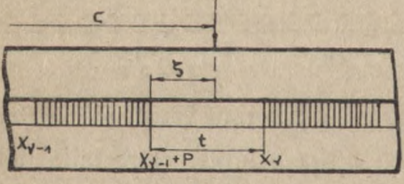


Abb. 5.

Zweiter Fall.

Nehmen wir $c=x_{\nu-1}+p+\varsigma$ an (s. Abb. 5). Erste Gleichung.

$$Q_{\nu-1}=\overline{Q}_{\nu-1}$$

oder nach (21).

$$(C_1-\overline{C}_1)e^{(\nu-1)s}+(C_2-\overline{C}_2)e^{-(\nu-1)s}=\frac{r}{k^2}\left(\varsigma-\frac{t}{2}\right)=N''_3\,.\;.\;(28)$$

Die zweite Gleichung wird wiederum durch die Formel (18) gegeben, welche im gegebenen Fall so aussieht

$$T_{p,\nu-}-\overline{T}_{0,\nu}=k^2\left[q\int_0^{\varsigma}(x_{\nu-1}+p+\eta)\,d\eta+\overline{q}\int_{\varsigma}^{t}(l-x_{\nu-1}-p-\eta)\,d\eta\right]$$
$$-k^2Q_{\nu-1}t.$$

Die Berechnungen werden mit dem ersten Fall analog. Als Resultat erhalten wir die Gleichung

$$(\overline{C}_1 - C_1)e^{\nu s} + (\overline{C}_2 - C_2)e^{-\nu s} = \frac{r}{k^2}\left\{\frac{t}{2} + \frac{sh kp}{k} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(t-\varsigma)\left[2\, ch kp + k(t-\varsigma)\, sh kp\right]\right\} = N''_4 \quad \ldots \quad (29)$$

(Nehmen wir in (26) und (27) $z = 0$, und in (28), (29). $\xi = t$, so erhalten wir identische Gleichungen).

§ 4. Bestimmung der willkürlichen Konstanten C_1, C_2, $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$.

Wir haben also vier Gleichungen für die willkürlichen Konstanten C

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = N_1 & \left[N_1 = -q\left(x_1 - \frac{t}{2}\right)\right] \\ \overline{C}_1 e^{ns} + \overline{C}_2 e^{-ns} = N_2 & \left[N_2 = -\overline{q}\left(l - x_n - p - \frac{t}{2}\right)\right] \\ (C_1 - \overline{C}_1)e^{(\nu-1)s} + (C_2 - \overline{C}_2)e^{-(\nu-1)s} = N_3 & \\ (\overline{C}_1 - C_1)e^{\nu s} + (\overline{C}_2 - C_2)e^{-\nu s} = N_4 & \end{cases} \quad \ldots (30)$$

Die Lösung dieser Gleichungen sieht so aus:

$$C_1 = \frac{N_2 - N_1 e^{-ns} - \frac{1}{shs}\left[N_4\, sh(n-\nu+1)s + N_3\, sh(n-\nu)s\right]}{2\, shns}$$

$$C_2 = -\frac{N_1 - N_2 e^{+ns} - \frac{1}{shs}\left[N_4\, sh(n-\nu+1)s + N_3\, sh(n-\nu)s\right]}{2\, shns}$$

$$\overline{C}_1 = \frac{N_2 - N_1 e^{-ns} + \frac{e^{-ns}}{shs}\left[N_4\, sh(\nu-1)s + N_3\, sh\nu s\right]}{2\, shns} \quad \ldots \quad (31)$$

$$\overline{C}_1 = -\frac{N_2 - N_1 e^{ns} + \frac{e^{ns}}{shs}\left[N_4\, sh(\nu-1)s + N_3\, sh\nu s\right]}{2\, shns}$$

Setzen wir sie in den Ausdruck für Q_i und $\overline{Q}_i$ ein, so finden wir

$$Q_i = \frac{N_2\, shis + N_1\, sh(n-i)s - \frac{shis}{shs}\left[N_4 sh(n-\nu+1)s + N_3 sh(n-\nu)s\right]}{shns} +$$
$$+ q\left(x_i + p + \frac{t}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$\overline{Q}_i = \frac{N_2\, sh is + N_1\, sh(n-i)s - \frac{sh(n-i)s}{shs}\left[N_4\, sh(\nu-1)s + N_3\, sh\, \nu s\right]}{shns} +$$
$$+ \overline{q}\left(l - x_i - p - \frac{t}{2}\right).$$

Fall der ununterbrochenen Naht.

Um die Berechnungsformeln für den Fall der ununterbrochenen Naht zu finden, brauchen nur die Betrachtungen von § 3. („Erster Fall") angewandt zu werden. Nehmen wir in den Formeln (23), (24), (§ 3)

$$Q_{0\nu} = Q_0 = 0 \text{ und } Q_{p\nu} = Q_1 = 0$$

und setzen wir c_1 statt x_ν, c_2 statt $x_\nu + p$ (s. Abb. 6), so erhalten wir:

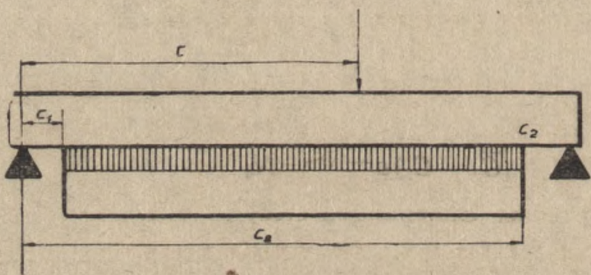


Abb. 6.

$$Q_\xi = q(c_1 + \xi) - \frac{\left[\overline{q}(l - c_2) + \frac{r}{k^3}\, shk(p-z)\right] shk\,\xi + qc_1\, shk(p-\xi)}{shk\,p} \tag{33}$$

$$\overline{Q}_\xi = \overline{q}(l - c_1 - \xi) - \frac{\left[qc_1 + \frac{r}{k^3}\, shkz\right] shk(p-\xi) + \overline{q}(l-c_2)\, shk\xi}{shkp}$$ [1].

Расчет точечного электросварочного шва в изогнутой балке.

П. П. КУФАРЕВ (Томск)

В этой работе выводятся расчетные формулы для срезающих сил, действующих на электросварочный шов при изгибе.

---

[1]) S. die Arbeit von A. Sokolow.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ, ОСТАВЛЯЮЩИХ ДАННУЮ ГРУППУ ИНВАРИАНТНОЙ I.

Б. А. ФУКС (Томск)

§ 1

ОПЕЧАТКИ

	Напечатано	Должно быть
Стр. 3, в форм. (5) и дальше	$\eta_{1,\nu}^{k+1-\nu}(x)$	$\eta_{1,\nu}^{(k+1-\nu)}(x)$
Стр. 6, в форм. (20)	$(x-a)^{-\nu}$	$(x-a)^{m-\nu}$
Стр. 9, стр. 4 сверху	$\zeta_k^{(k)}$	$\frac{\zeta_k^k}{k!}$
Стр. 9, в форм. (30)	$\ldots \frac{\zeta_k(}{k!}$	$\ldots = \frac{\zeta_k(x)}{k!}$
Стр. 10, стр. 5 сверху	$\lvert\omega\rvert <\lvert$	$\lvert\omega\rvert < 1$
Стр. 14, в форм. (17)	$e^{-v}-1$	$e^{v}-1$
Стр. 14, стр. 8 снизу	$(y\,x,\omega)$	$y(x,\omega)$
Стр. 15, стр. 18 сверху, под знаком интеграла	$e^{-\nu}$	e^{-v}
Стр. 16, стр. 8 сверху, под знаком интеграла	$\overset{m-v}{e}$	e^{m-v}
Стр. 18, в форм. (25)	$(1-z)^m e^{\frac{\omega t}{x-a}z}$	$(1-z)^m e^{\frac{\omega t}{x-a}z}$
Стр. 18, стр. 9 снизу	$\ldots + y(x\overline{n+1}\,\omega,\omega)$	$.\,y(x+\overline{n+1}\,\omega,\omega)$
Стр. 19, стр. 3 сверху	$\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}-m\right)$	$\Gamma\left(\frac{x-a}{\omega}+m\right)$
Стр. 25, стр. 1 снизу	$l_n^k x$	$ln^k x$

данной группы G, что, конечно, имеет место независимо от того, удовлетворяют ли Zf дифференциальным уравнениям (2)[2]).

Таким образом, уравнения (2) и (3) действительно полностью выражают условия, которым должны удовлетворять преобразования Zf. Следует заметить, что не все уравнения (3) являются независимыми. E. Cartan'ом получена серия соотношений между уравнениями (1), которая может быть легко применена к случаю уравнений (3). Эти соотношения запишутся так: [3]).

$$Q_{(abc)}{}^{k} = \sum_{l} c_{ab}\ Q_{lc}{}^{k} + c_{bc}{}^{l} Q_{la}{}^{k} + c_{ca}{}^{l} Q_{eb}{}^{k} + \\ + c_{lc}{}^{k} Q_{ab}{}^{l} + c_{la}{}^{k} Q_{bc}{}^{l} + c_{lb}{}^{k} Q_{ca}{}^{l} = 0. \quad \ldots (3').$$

Они, вообще, не исчерпывают всех соотношений между (3) и сами не являются все независимыми. Между ними могут быть легко установлены аналогичные соотношения, но они не имеют для нас значения. Легко видеть, что уравнения (3), на основании (2), удовлетворяются значениями:

$$\lambda_i{}^k = \sum_s e^s c_{is}{}^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

где e^s произвольны. Это, конечно, соответствует тому, что за преобразование Zf берется:

$$Zf = \sum_s \varepsilon^s X_s f + Uf \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4'),$$

где Uf преобразование перестановочное с группой G [4]).

Интерес, конечно, представляют те Zf, которые отличны от преобразований, определяемых (4') — так называемые внешне-автоморфные преобразования.

§ 2.

Мы рассмотрим группу $\overline{G}$, составленную независимыми б. м. преобразованиями $X_1 f, X_2 f \ldots X_r f, Zf$. Ее структура определяется равенствами (1) и (2). Ее общее преобразование мы возьмем в виде:

$$Xf = \sum_{k}^{1-r} e^k X_k f + \eta Z f.$$

Тогда ее присоединенная группа сможет быть записана, на основании обычных правил, в таком виде:

$$\begin{cases} E_i f = \sum\limits_{h,\,k} e^h c_{hi}{}^k \dfrac{\partial f}{\partial e_k} - \eta \sum\limits_k \lambda_i{}^k \dfrac{\partial f}{\partial e_k}\,, \\ E' f = \sum\limits_{h,\,k} e^h \lambda_h{}^k \dfrac{\partial f}{\partial e_k}\,. \end{cases} \quad \ldots\ldots (5).$$

---

2) Эта интерпретация тождества Якоби может быть легко получена из формул стр. 40—42 статьи E. Cartan'a: „La Géometrie des groupes de transformations“ Journ. de Math. pures et appl. 1927 p. 40—42. К аналогичному результату приводит применение 3-ей основной теоремы Lie.

3) Cartan стр. 119.

4) Lie-Engel „Theorie der Transformationsgruppen“ Bd I. стр. 369 — 375.

Составим характеристическое уравнение для группы G:

$$\begin{vmatrix} \Sigma e^i c_{i1}{}^1 - \eta\lambda_1{}^1 - \omega ; & \Sigma e^i c_{i2}{}^1 - \eta\lambda_2{}^1 ; & \ldots \Sigma e^i c_{ir}{}^1 - \eta\lambda_r{}^1 \\ \Sigma e^i c_{i1}{}^2 - \eta\lambda_1{}^2 ; & \Sigma e^i c_{i2}{}^2 - \eta\lambda_2{}^2 - \omega ; & \ldots \Sigma e^i c_{ir}{}^2 - \eta\lambda_r{}^2 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \Sigma e^i c_{i1}{}^r - \eta\lambda_1{}^r ; & \Sigma e^i c_{i2}{}^r - \eta\lambda_2{}^r ; & \ldots \Sigma e^i c_{ir}{}^r - \eta\lambda_r{}^r - \omega \end{vmatrix} = 0 \ldots (6)$$

и затем уравнения, выражающие известную теорему Killing'а о том, что коэффициенты уравнения (6) являются инвариантами присоединенной группы. Вместо коэффициентов уравнения (6), мы возьмем суммы одинаковых степеней его корней, положив $\bar{\varphi}_k = \sum_{s=1}^{r} \omega_s{}^k$.

Легко видеть, что после некоторых преобразований окажется:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_k = & \sum e^{p_1} \ldots e^{p_k} c_{p_1 a_1}{}^{a_2} c_{p_2 a_2}{}^{a_3} \ldots c_{p_k a_k}{}^{a_1} - \\ & - k\eta \sum e^{p_2} \ldots e^{p_k} \lambda_{a_1}{}^{a_2} c_{p_2 a_2}{}^{a_3} \ldots c_{p_k a_k}{}^{a_1} + \\ & + \eta^2 \frac{k(k-1)}{1.2} \sum e^{p_1} \ldots e^{p_k} \lambda_{a_1}{}^{a_2} \lambda_{a_2}{}^{a_3} c_{p_3 a_3}{}^{a_4} \ldots c_{p_k a_k}{}^{a_1} - \ldots + \\ & + (-1)^k \eta^k \sum \lambda_{a_1}{}^{a_2} \lambda_{a_2}{}^{a_3} \ldots \lambda_{a_k}{}^{a_1}. \end{aligned} \quad (7)\ldots$$

Условия инвариантности $\bar{\varphi}_k$ относительно преобразований (5) будут иметь такой вид:

$$E\bar{\varphi}_k = 0 \; ; \; E'\bar{\varphi}_k = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Составляя последнее уравнение, мы увидим, что оно распадается на ряд соотношений между $c_{ik}{}^s$ и $\lambda_i{}^k$, которые мы получим, приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях e^k и η. В частности, приравнивая нулю коэффициент при $\eta e^{p_2} \ldots e^{p_k}$, мы придем к таким уравнениям:

$$\sum \lambda_i{}^s c_{s a_1}{}^{a_2} c_{p_2 a_2}{}^{a_3} \ldots c_{p_k a_k}{}^{a_1} = 0 \quad i, p = 1, 2, \ldots, r. \quad \ldots . (8)$$

Заметим, что $\sum e^{p_1} e^{p_2} \ldots e^{p_k} c_{p_1 a_1}{}^{a_2} c_{p_2 a_2}{}^{a_3} \ldots c_{p_k a_k}{}^{a_1} = \varphi_k$ представляет собой сумму k-ых степеней корней характеристического уравнения для группы G. Уравнения (8) являются тождественными с теми уравнениями, которые мы получили бы, определяя коэффициенты тех линейных форм $\Sigma \eta_s^{(a)} e^s$, от которых существенно зависит форма φ_k. В самом деле, производя замену $e^q = \sum_{p}^{1-r} \alpha_p{}^q \varepsilon^p$ с $|\alpha_p{}^q| \neq 0$, где $q = 1, 2, \ldots, r$, в выражении для φ_k, требуя чтобы φ_k не зависело, например, от ε^1, мы придем, пользуясь тем, что $|\alpha_p{}^q| \neq 0$ к уравнениям относительно $\alpha_p{}^q$, тождественным с (8). Отсюда мы видим, что всегда будет иметь место:

ТЕОРЕМА I. Если Zf преобразование, оставляющее группу G инвариантной, не сводящееся к соединению какого-нибудь преобразования G с преобразованием перестановочным с G, то скобки (Z, X_k) могут зависеть только от тех преобразований G, которые определяются приравниванием нулю тех линейных форм из e^k, от которых существенно зависит характеристический определитель группы G.

В частности, отсюда получаются для $k=2$ уравнения:

$$\Sigma \lambda_i^s c_{sa_1}{}^{a_2} c_{pa_2}{}^{a_1} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8')$$

которые выражают факт отсутствия для полупростой группы, рассматриваемого типа, преобразований. Этому обстоятельству E. Cartan дал 2 доказательства более сложных, чем настоящее (см. примечание к стр. 1). Полученная теорема устанавливает известный предел для увеличения числа членов производной подгруппы, при добавлении к группе новых преобразований, оставляющих ее инвариантной. То обстоятельство, что уравнениям

$$\Sigma A_k^{(i)} e^k = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

где $\Sigma A_k^{(i)} e^k$ как раз те формы, от которых существенно зависит характеристический определитель группы G, удовлетворяют величины $\eta_{(j)}^k$, определяющие выражениями $\sum\limits_k^{1-r} \eta_{(j)}{}^k X_k f$ те преобразования производной подгруппы от G, которые принадлежат к наибольшей инвариантной интеграбельной подгруппе группы G, — известно еще из исследований Killing'а [5]).

§ 3.

Всякая неинтеграбельная группа, как известно, может быть представлена, составленной из ее наибольшей инвариантной интеграбельной подгруппы Γ и полупростой подгруппы g мероэдрично изоморфной с данной группой. Преобразования g целиком, и часть преобразований Γ, входят в производную подгруппу от G. Для того, чтобы представить группу в таком виде достаточно „привести ее к подгруппе γ“ и затем, если у характеристического уравнения окажутся кратные корни, возможно произвести некоторое изменение основных независимых преобразований, принадлежащих к этим корням [6]). Мы рассмотрим результаты композиции Zf с преобразованиями группы g и докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА II. Всякое преобразование, оставляющее данную интеграбельную группу инвариантной, может быть видоизменено путем добавления к нему

---

[5]) Cartan стр. 108 теорема 4.

[6]) Cartan стр. 99—105. E. Levi „Sulla struttura dei gruppi finiti e continui“ (дальше просто Levi) Atti Accademia di Torino t. 40 an. 1905.

некоторого преобразования данной группы, так что оно будет перестановочно с преобразованиями группы, образующими ее полупростую подгруппу, мероэдрично изоморфную со всей группой.

Для доказательства мы рассмотрим группу $\overline{G}$ и осуществим над ней вышеуказанное преобразование. Тогда, как всегда, преобразования не входящие в производную подгруппу, окажутся принадлежащими к подгруппе γ [7]). Поэтому, к подгруппе γ окажется принадлежащим некоторое преобразование вида $Zf+\Sigma\alpha^k X_k f$, входящее в $\overline{\Gamma}$ — наибольшую инвариантную интеграбельную подгруппу, группы $\overline{G}$. Остальные преобразования группы $\overline{G}$, получаемые таким образом, можно рассматривать как независящие от Zf, т. к. их можно взять определяющими G — инвариантную подгруппу группы $\overline{G}$; она, согласно результатам E. Cartan'a, может быть определена преобразованиями, принадлежащими к отдельным корням характеристического уравнения [8]).

Преобразование $Zf+\Sigma\alpha^k X_k f$ мы и будем рассматривать в дальнейшем, обозначая его просто через Zf. Оно и представляет собою то исправленное преобразование, о котором говорится в теореме; прибавление $\Sigma\alpha^k X_k f$ соответствует отсечению от Zf некоторого внутреннего автоморфизма [9]).

Группа $\overline{G}$ будет, очевидно, состоять из группы $\overline{\Gamma}$ и g. Пусть $X_a f$ какое-нибудь преобразование g, отвечающее корню ω_a характеристического уравнения; $X_{a'} f$ преобразование g, отвечающее корню $-\omega_a$, а $Y_a f=(X_a, X_{a'})$. Эти преобразования, как известно, образуют некоторую 3-х членную простую подгруппу g. Преобразование $Y_a f$ принадлежит к подгруппе γ как группы $\overline{G}$, так и группы g. Тогда мы, прежде всего, получим, что должно быть:

$$(Y_a, Z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Это непосредственно следует из теоремы Killing'a, строго доказанной E. Cartan'ом [10]) о том, что все преобразования, входящие в наибольшую инвариантную интеграбельную подгруппу, будут 1 рода относительно $Y_a f$, т. е.. будет иметь место:

$$(Y_a, X)=\alpha Xf, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

где α некоторое постоянное. В нашем случае, для Zf, $\alpha=0$, т. к. иначе Zf входило бы в производную группу и мы приходим к равенству (10).

Теперь рассмотрим скобки (X_a, Z) и $(X_{a'}, Z)$, представляющие собой преобразования $\overline{\Gamma}$, относящиеся к корням, ω_a и $-\omega_a$; мы рассмотрим серию преобразований:

$$\begin{matrix}(X_a, Z)\,;(X_a,(X_a, Z))\,;(X_a,(X_a,(X_a, Z)))\ldots \\ (X_{a'}, Z)\,;(X_{a'},(X_{a'}, Z))\,;(X_{a'},(X_{a'},(X_{a'}, Z)))\ldots\end{matrix} \quad \ldots (11)$$

[7]) Cartan стр. 22–43 (гл. 2-ая).

[8]) Cartan стр. 40 теорема 10 гл. 2-ой.

[9]) Заметим, что результат E. Cartan'a, об отсутствии у полупростой группы внешних автоморфизмов, следует также из возможности расположения группы $\overline{G}$ в только что указанном виде.

[10]) Cartan стр. 104 § 4 гл. 6-ой.

В такой серии имеется всегда $2h_1$, преобразований, где h_1, некоторое целое число меньшее h и h определенно тем, что $\pm h\omega_a$ еще является корнем характеристического уравнения, но уже $\pm(h+1)\omega_a$ и все другие величины вида $\pm(h+m)\omega_a$, где m целое положительное число, корнями характеристического уравнения не являются. Последние, получающиеся в той серии преобразования, мы обозначим $Z_{h_1}f$ и $\overline{Z}_{-h_1}f$ соответственно. Они, между прочим, характеризуются тем, что $(X_{a_1}Z_{h_1})=0$ и $(X_{a'},\overline{Z}_{h_1})=0$. Пользуясь этим, а также свойством группы, состоящим в том, что если X_bf принадлежит к корню ω_b, то если $(X_a, X_b)=X_cf$, $(X_{a'}, X_c)=AX_bf$ [11]) мы видим, что прилагая $X_{a'}f$ к преобразованию $Z_{h_1}f$, мы получим серию

$$Z_{h_1}f, Z_{h_1-1}f, \ldots, Z_0f, Z_{-1}f, \ldots, Z_{-h_1}f, \ldots \quad (11)$$

преобразования которой будут отличаться от преобразований серии (11) только постоянными множителями и в частности [12])

$$Z_0f=(-1)^{h_1}2^{h_1}h_1!\,Zf \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Отсюда следует, что Zf принадлежит к производной подгруппе это невозможно и поэтому $h_1=0$ и следует:

$$(X_a, Z)=0 \text{ и } (X_{a'}, Z)=0),$$

что и доказывает теорему.

Мы сейчас укажем на некоторые следствия доказанной теоремы. Образуем последовательные производные подгруппы от G. Так как группа G не является интеграбельной, то в результате этого, мы, в конце концов, придем к некоторой группе, которая будет совпадать со своей производной подгруппой. В частном случае, такой последней производной подгруппой, может оказаться группа g и в этом случае G есть прямое произведение групп g и Г. Вообще же эта подгруппа—мы будем называть ее ядром группы, будет состоять из g и некоторой инвариантной подгруппы ранга 0, которую мы обозначим Γ_1. По отношению к ядру группы все преобразования группы G, не входящие в него, могут рассматриваться, очевидно, как преобразования типа Zf. Поэтому, мы приходим к такому следствию:

Все преобразования группы, не входящие в ее ядро, перестановочны с теми преобразованиями группы, которые образуют полупростую подгруппу изоморфную с данной группой.

Заметим, что среди преобразований $\overline{G}$, не входящих в ядро (ядро группы $\overline{G}$ совпадает с ядром группы G), Zf не занимает какого-либо особого положения. Поэтому мы, рассматривая надлежащие уравнения из системы (3), приходим к выводу:

Результат композиции исправленного преобразования Zf с преобразованиями группы, не входя-

[11]) Levi стр. 559.
[12]) Cartan стр. 100.

щими в ядро и этих преобразований между собой приводит к преобразованиям перестановочным с G.

§ 4.

Сейчас мы рассмотрим результаты композиции преобразований Zf (не входящих в ядро) с преобразованиями, входящими в Γ_1— наибольшую инвариантную подгруппу ранга 0 ядра. Теорема II-я позволяет сделать некоторые заключения на этот счет. Для этого мы приведем ядро к подгруппе γ. Тогда, очевидно, единственными независимыми корнями характеристического уравнения будут l независимых корней, соответствующих подгруппе g, где l ея ранг. Все остальные могут быть получены из них в результате линейных комбинаций. Это, очевидно, следует из того, что величины всех корней, относительно любого преобразования γ, не принадлежащего g, в данном случае будут соизмеримы между собой [13]) и поэтому окажутся равными 0, т. к. нулю равны относительно них все главные корни. Таким образом, все корни представляют собой линейные формы с l переменными и с соизмеримыми между собою коэффициентами у каждой переменной и, поэтому, они могут быть представлены как линейные функции l из них с рациональными коэффициентами. Все преобразования группы, не входящие в g, могут быть вполне аналогичны тому, как это делается Cartan'ом и E. Levi [14]) распределены по особым сериям; преобразования такой серии переходят одно в другое при композиции с надлежащими преобразованиями $X_a f$ и $X_{a'} f$ группы g.

Мы рассмотрим преобразования, принадлежащие к корням вида $\mu\,\omega_a + \sum_{q=1}^{l}{}' m_q \omega_q = \mu\,\omega_a + \omega$, где Σ' означает суммирование по всем индексам, исключая a и μ принимает все значения, при которых рассматриваемое выражение является корнем характеристического уравнения, не все преобразования которого входят в g [15]). Тогда, если $h\,\omega_a + \omega$ наибольший, а $-h'\,\omega_a + \omega$ наименьший корень подобного вида, то тогда вообще s-ой серии окажутся принадлежащими преобразования $(h \leqslant k_s,\ h' \leqslant k'_s)$

$$X_{k_s \omega_a + \omega,\, s} f;\ X_{(k_s - 1)\,\omega_a + \omega,\, s} f;\ldots;X_{-k'_s \omega_a + \omega,\, s} f \quad \ldots (13),$$

при чем

$$(X_a, X_{i\,\omega_a + \omega,\, s}) = (k_s - i)\, X_{(i+1)\,\omega_a + \omega, s} f \quad \ldots\ldots (14)$$

$$(X_{a'}, X_{i\,\omega_a + \omega, s}) = (k'_s + i)\, X_{(i-1)\,\omega_a + \omega,\, s} f$$

при этом $k'_s - k_s = \Sigma' m_q \omega_q$ и поэтому $(X_a, X_{k_s \omega_a + \omega, s}) = (X_{a'}, X_{-k_s' \omega_a + \omega, s}) = 0$. $k'_s - k_s$, при этом оказывается целым числом. Необходимые вычисления могут быть проделаны вполне аналогично счету E. Cartan'a или E. Levi в только что указанном месте их работ.

---

[13]) Cartan стр. 42 теорема 12-ая.

[14]) Levi стр. 557—510 и Cartan стр. 100—102.

[15]) ω_a — любой главный корень характеристического урав-ия.

Теперь составим тождества Якоби между преобразованиями $X_{i\omega_a+\omega,s}f$, Zf и $Y_k f$, полагая $k=1,2,\ldots,l$. Мы получим, пользуясь теоремой II.

$$(Y_k, (X_{i\omega_a+\omega,s}, Z)) = (i\,\omega_a^{(k)} + \Sigma' m_d \omega_d^{(k)})(X_{i\omega_a+\omega,s}, Z) \quad (15).$$

Это свидетельствует о том, что преобразование $(X_{i\omega_a+\omega,s}Z)$ принадлежит к корню $i\omega_a+\omega$. [16]). Поэтому имеем:

$$(X_{i\omega_a+\omega,s}, Z) = \nu_i X_{i\omega_a+\omega,\beta}f + \rho_i X_{i\omega_a+\omega,\rho}f + \ldots \quad (16).$$

Комбинируя (16) с $X_a f$ и $X_{a'}f$ и собирая коэффициенты при $X_{(i+1)\omega_a+\omega,\beta}f$ и $X_{(i-1)\omega_a+\omega,\beta}f$ соответственно получим, пользуясь опять теоремой 2-ой и равенством (14):

$$(k_s - i)\nu_{i+1} = (k_\beta - i)\nu_i \quad (17)$$

$$(k'_s + i)\nu_{i-1} = (k'_\beta + i)\nu_i \quad (18).$$

Кроме того, получается, что $\nu_i=0$, если $i > k_\beta$, или $i < -k'_\beta$. Беря в (17) $i=k_s$ мы получим, что должно быть $k_\beta \leqslant k_s$, или $\nu_{k_s}=0$ и вслед за ним все остальные ν_i. Затем положим в (17) $i=k_s-1$ и получим, что если не все ν_i равны 0, то должно быть $k_\beta > k_s - 1$. Таким образом, получается, что если серия β действительно встречается в (16), то должно быть $k_s = k_\beta$. Аналогично мы покажем на основании (18), что в этом случае должно быть $k'_\beta = k'_s$. Таким образом, в (16) могут встречаться только такие серии, у которых характеризующие их постоянные будут равны постоянным той серии, к которой принадлежит рассматриваемое преобразование [17]).

Таким образом, мы приходим к такой теореме.

ТЕОРЕМА III. Серии, на которые распадаются преобразования, входящие в наибольшую инвариантную подгруппу ранга 0 ядра, обладают таким свойством:

При композиции с преобразованиями, не входящими в ядро, преобразования такой серии переходят в преобразования другой серии, отвечающие тем же корням. Обе эти серии имеют одинаковые характерные постоянные.

Отсюда следует, что если все такие серии ординарные, (т. е. постоянным k_s и $k'_s = \Sigma' m_q \omega_q + k_s$ отвечает всего только одна серия, то преобразования инвариантной подгруппы ранга 0 ядра $\Gamma_1: X_{p+1}f, X_{p+2}f, \ldots, X_r f$, после приведения ядра к подгруппе γ и надлежащем выборе независимых преобразований, будут при композиции с Zf только умножаться на некоторые постоянные. Отсюда следует, что для того, чтобы Zf не было в этом случае

16) Заметим, что этот результат может быть иначе получен, пользуясь теоремой E. Cartan'a, данной в Thése § 8-ой гл. 6 стр. 110—112.

17) Укажем на аналогию этих рассуждений с выкладками E. Cartan'a, произведенными им в Thése на стр. 116—118.

перестановочным со всеми преобразованиями Γ_1 ядра, необходимо, чтобы добавление Zf к ядру увеличивало бы ранг группы, т. е. получилась бы группа ранга, большего чем l.

Это следует из того, что если группа $Zf, X_{p+1}f, X_{p+2}f, \ldots, X_rf$ будет ранга 0, то все двучленные ея подгруппы будут коммутативны; с другой стороны, в рассматриваемом случае ординарных серий $(Z, X_{p+1}) = \alpha X_{p+1}f$, конечно, при надлежащем выборе независимых преобразований, как это следует из теоремы III-ей.

Заметим, что если ранг группы $Zf, X_{p+1}f, \ldots, X_rf$ равен 0, то Zf будет в общем случае перестановочно со всеми преобразованиями ординарных серий.

Мы теперь рассмотрим вопрос о композиции между собой преобразований группы, не входящих в ядро. С этой целью рассмотрим 2 таких преобразования Z_1f и Z_2f. Очевидно, $(Z_1, Z_2) = Zf + Uf$, где Uf некоторое преобразование Γ_1, а Zf не входит в ядро. Так как (Z_1, Z_2) и Zf перестановочны с преобразованиями g, то и Uf будет перестановочно с преобразованиями g. Отсюда следует, что Uf будет принадлежать к подгруппе γ ядра. Если мы рассмотрим серии E. Cartan'a, на которые распадаются преобразования Γ_1, относительно преобразований g, то мы увидим, что Uf само составляет такую серию (относительно любой 3-х членной подгруппы g), причем $k = k' = 0$. Совокупность преобразований γ, обладающих этим свойством, мы будем в дальнейшем называть нулевой подгруппой. На основании теоремы III, мы можем легко заключить, что если U_1f какое-нибудь преобразование нулевой подгруппы, то $(U_1, X_{l\omega_a+\omega})$ принадлежит к тому же корню и к сериям с теми же характерными числами, что и преобразование $X_{l\omega_a+\omega}f$. Отсюда следует, что с преобразованиями ординарных серий Uf перестановочно, т. к. Γ_1 группа ранга 0. Если все преобразования, не входящие в нулевую подгруппу, участвуют в ординарных сериях, то тогда, очевидно, что преобразования нулевой подгруппы коммутативны со своими преобразованиями ядра, не принадлежащими к нулевой подгруппе. Покажем, что в этом случае нулевая подгруппа является центром ядра.

Прежде всего, очевидно, что нулевая подгруппа будет ранга 0, т. к. она является подгруппой группы ранга 0. Далее, т. к. нулевая подгруппа есть часть ядра, то все ее преобразования должны быть получены при вычислении производной группы ядра, с ядром совпадающей. Заметим, что преобразования нулевой группы не могут получаться при композиции преобразований Γ_1 с g; это следует из самого определения нулевой группы. Поэтому, часть преобразований нулевой подгруппы должна быть обязательно получена в результате составления (X, Y), где Xf и Yf принадлежит к Γ_1, но не к нулевой подгруппе. Однако, получаемые таким образом преобразования нулевой группы будут иметь вид $(X, Y) + Vf$, где Vf опять принадлежит к Γ_1, но не к нулевой подгруппе и поэтому будут перестановочны со всеми преобразованиями нулевой группы, как это следует легко из соответствующего тождества Якоби.

Следовательно, они входят в центр ядра. Пусть остальные преобразования нулевой подгруппы, непредставимые таким образом $U_1 f, U_2 f, \ldots, U_t f$. Они все должны входить в производную подгруппу, но могут быть в ней получены только в результате композиции друг с другом. Поэтому скобки (U_p, U_q), где $p, q = 1, 2, \ldots, t$ обязательно должны воспроизводить преобразования $U_1 f, U_2 f, \ldots U_t f$ и могут только зависеть от еще некоторых преобразований $U_{t+1} f, \ldots, U_k f$ нулевой подгруппы, входящих в центр ядра. Тогда преобразования $U_1 f, U_2 f, \ldots U_k f$ составляют группу, очевидно ранга 0, совпадающую со своей производной группой. Это невозможно. Поэтому скобками (X, Y), где Xf и Yf входят в Γ_1, но не в нулевую подгруппу, будут исчерпаны все преобразования нулевой подгруппы, которая таким образом совпадает с центром. Таким образом, мы приходим к такой теореме:

ТЕОРЕМА IV. Преобразования некоторой неинтеграбельной группы, не входящие в ее ядро, образуют сами интеграбельную группу по модулю некоторой „нулевой“ подгруппы ранга 0 ядра, коммутативной с преобразованиями полупростой подгруппы всей группы с ней изоморфной. Если серии E. Cartan'a, на которые распадаются преобразования наибольшей инвариантной подгруппы ранга 0 ядра таковы, что каждое преобразование этой подгруппы, не входящее в нулевую группу, принадлежит к какой нибуль одинарной серии, то эта нулевая подгруппа совпадает с центром ядра.

Параллельно этой теореме можно указать на такой факт, относящийся к результатам композиции преобразований, не входящих в производную подгруппу данной группы. Если мы обратимся к уравнениям (3), то увидим, что если преобразования $X_{\alpha_1} f$, $X_{\alpha_2} f, \ldots, X_{\alpha_q} f$ образуют центр группы G, а $X_{\beta_1} f, X_{\beta_2} f, \ldots, X_{\beta_k} f$ не входят в производную подгруппу от G, $\lambda_{\alpha_s}^{\beta_n}$ не входят в (3). Поэтому, если группа G имеет центр и не совпадает со своей производной подгруппой (например является группой ранга 0), то мы в любых формулах, дающих автоморфизм группы, напр. в (4), можем считать соответствующие λ_p^q произвольными. Это вообще приводит к внешне-автоморфному преобразованию, исключая тот случай, когда среди преобразований G можно всегда выбрать такое Xf, которое переводит преобразования $X_{\beta_1} f; X_{\beta_2} f; \ldots; X_{\beta_k} f$ в любые преобразования центра G. В том случае, когда не все преобразования центра входят в производную подгруппу от G, мы обязательно получаем внешне-автоморфное преобразование. Таким образом, этот автоморфизм дает действительную возможность построить из группы G такую группу, в которой преобразования центра, не входившие в производную подгруппу, в центр группы $\bar{G}$ не войдут.

Заметим, что эта задача может быть решена и другим путем, а именно, присоединяя к нашей группе преобразование Zf, так чтобы имело место:

$$(X_k, Z) = \nu_k Zf \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Составляя для определения ν_k тождества Якоби между $X_k f$, $X_l f$ и Zf мы легко увидим, что если $X_l f$ входит в производную подгруппу $\nu_k = 0$, а если нет, то ν_k произвольно.

Этим самым, конечно, опять создается возможность превращения центральных преобразований G, не входящих в производную группу в нецентральные преобразования группы $\bar{G}$ ($\bar{G}$ — это группа G дополненная Zf).

Über Transformationen, welche eine kontinuierliche Gruppe invariant lassen

B. Fuchs (Tomsk)

In der vorliegenden Arbeit leite ich einige Eigenschaften der Transformationen ab, welche die sogenannte äussere Automorphismen einer kontinuierlichen Gruppe bilden. Ich bekomme insbesondere die folgenden Ergebnisse:

1) Wenn die Transformation Zf einen äusseren Automorphismus einer Gruppe G bildet, so hängen die Klammern (Z, X_k) nur von solchen Transformationen G ab, welche durch Nullsetzung aller Linearformen mit e^k definiert sind, von denen die charakteristische Gleichung der Gruppe G wesentlich abhängt.

Hier bedeutet $\sum_{k=1}^{r} e^k X_k f$ die allgemeine Transformation der Gruppe G.

2) Jede Transformation, die eine nichtintegrable Gruppe invariant lässt, kann man durch Addition mit einer Transformation dieser Gruppe so umwechseln, dass sie kommutativ wird mit den Transformationen der Gruppe, welche ihre halbeinfache, mit der ganzen Gruppe isomorphe, Untergruppe bilden.

Daraus folgt, dass alle die Transformationen mit dieser Untergruppe kommutativ sind, welche nicht zu ihrer letzten Hauptuntergruppe (Kern der Gruppe) gehören.

Dann bespreche ich die Ergebnisse der Zusammensetzung einer nach den Forderungen des Satzes 2 umgewechselten ausserautomorphen Transformation Zf mit den Transformationen der Gruppe, die eine invariante Untergruppe Γ vom Range 0 bilden und nicht zu der halbeinfachen Untergruppe gehören.

Ich betrachte die Serien, in welche diese Transformationen nach den Arbeiten von E. Cartan und E. Levi zerfallen (s. die Fussnoten №№ 12,14). Ich gelange zu folgenden Sätzen:

3) Die Serien, in welche die Transformationen der Untergruppe Γ zerfallen, besitzen folgende Eigenschaft:

Bei Zusammensetzung mit Transformationen der Gruppe, die nicht zu ihrem Kern gehören, gehen alle Transformationen einer Serie in die Transformationen einer neuen Serie über, welche denselben Wurzeln der charakteristischen Gleichung angehören. Diese neue Serie hat dieselben charakteristischen Zahlen wie die frühere.

4) Die Transformationen einer nichtintegrablen Gruppe, welche nicht zu dem Kern der Gruppe gehören, bilden selbst eine integrable Gruppe nach dem Modul einer Untergruppe vom Range 0 des Kernes. Diese Untergruppe ist kommutativ mit den Transformationen der halbeinfachen Untergruppe des Kernes. Falls die Serien E. Cartan's einfach sind, fällt diese Untergruppe mit dem Zentrum des Kernes zusammen.

In den beiden letzen Sätzen müssen die Transformationen, welche nicht zum dem Kern der Gruppe gehören, nach den Forderungen des Satzes 3 umgewechselt werden.

SUR UNE MÉTHODE EFFECTIVE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME AVEC APPLICATION À UN PROBLÈME DE L'HYDRODYNAMIQUE

par Stefan BERGMANN (Tomsk)

§ I. La question de la résolution effective de l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0$$

joue un rôle important dans l'hydrodynamique. Soit

$$X=H_1(x, y)=\mathbf{Re}\ [g\ (z)],\ Y=H_2\ (x, y)=\mathbf{Im}\ [g\ (z)]$$

(**Re** partie réelle, **Im** — imaginaire) une représentation conforme d'un domaine B sur un autre domaine B^*. Chaque fonction $H\ (X, Y)$ harmonique dans B devient une fonction $H[H_1(x,y), H_2(x,y)]$ harmonique dans B^*. C'est pourquoi la connaissance de la transformation conforme d'un domaine sur un autre permet de résoudre quelques problèmes importants pour l'hydrodynamique. Un tel problème est, par exemple, la détermination du courant autour d'une aile (Voir les figures 1 et 2, la figure 2 représente le cas où l'aile est près de la terre). Notre problème sera résolu, si nous pouvons représenter ces domaines sur les domaines indiqués dans les figures 3, 4 possédant comme frontières une coupure (Schlitz) AB et dans le cas de figure 4: la coupure AB et la droite CD. Les lignes de courant dans les figures 1 et 2 correspondront aux droites parallèles à l'axe réel.

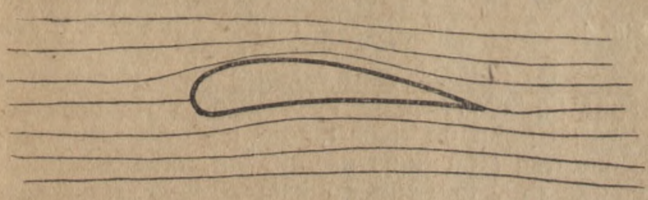


Fig. 1.

Fig. 2.

Dans ce qui suit je voudrais développer quelques considérations, qui permettent d'effectuer une transformation conforme d'un domaine sur un autre.

A l'aide de quelques théorèmes, que nous formulerons dans ce qui suit, nous introduirons des coordonnées ξ, η que nous appelons *coordonnées naturelles*, **possédant la propriété d'être invariantes par rapport aux transformations conformes** et indiquerons comment on peut calculer leurs valeurs dans un point quelconque d'un domaine donné.

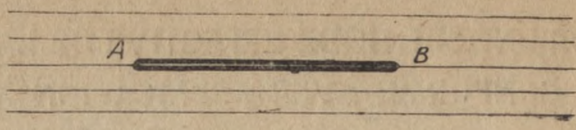


Fig. 3.

Nos considérations sont basées sur quelques théorèmes de la théorie des transformations que l'on peut immédiatement généraliser au cas des transformations pseudo-conformes, c'est-à-dire au cas des transformations des domaines à $2n$ dimensions par n fonctions complexes $Z_k(z_s)$, $k = 1, 2, \ldots n$, de n variables complexes z_s, $s = 1, 2, \ldots n$.

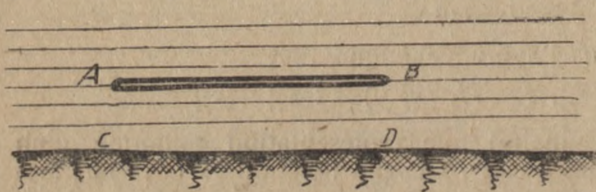


Fig. 4.

Quelques-uns des théorèmes indiqués sont valables pour ce cas, si on comprend par z le point $\{z_1, z_2, \ldots z_n\}$ de l'espace de variables complexes, les autres servent de point de départ pour les recherches plus étendues de la théorie des transformations pseudo-conformes [1]).

§ 2. Soit B un domaine situé tout entier à distance finie. Nous supposons pour simplifier, que son contour est formé d'un nombre fini d'arcs réguliers. Soit $\mathbf{E}\,(B)$ l'ensemble des fonctions f régulières dans B, pour lesquelles $\int_B\int |f(z)|^2\, d\omega \leqq 1$ ($d\omega$ désigne l'élément de surface) et soit t un point de B. On appelle fonction noyau (Kernfunktion) de B attachée à l'ensemble $\mathbf{E}\,(B)$ la fonction $K(t, \bar{t}) = k(u, v) = \max |h(t)|^2$, $h(z)$ appartenant à $\mathbf{E}\,(B)$, $[t = u + iv]$. [2c, 2g].

Théorème 1. *$k(x, y)$ est une fonction régulière dans B (considérée comme fonction des variables réelles x, y)* [2a, 2c].

1) Quant au développement plus détaillé de ces considérations voir les travaux suivants:

1° Aronszajn, *a.* C. R. **197**, 33, 1579; *b.* C. R. **198**, 34, 143.

2° *a.* M. A. **86**, 22, 237; *b.* M. A. **100**, 28, 399; *c.* M. Z. **29**, 29, 640; *d.* M. A. **102**, 30, 430; *e.* Journal de Crelle **162**, 30, 262; *f.* Sitz.-Ber. Berlin. math. Ges. **30**. 32, 11; *g.* Journal de Crelle **169**, 33, 1; *h.* Rend. d. R. Accad. Naz. dei Lincei, VI série **19**, 34, 474.

3° Bochner, M. Z. **14**, 22, 180.

4° Hammerstein, Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss. 33, 259.

5° Welke, *a.* M. A. **103**, 30, 437, (Diss. Behnke, Münster); *b.* Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete, III, 3, Behnke und Thullen, 34, 106.

6° Zarankiewicz, *a.* C. R. **198**, 34, 1347; *b.* Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik, **14**, 34, 97.

Abréviations: C. R. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, M. A. Mathematische Annalen; M. Z. Mathematische Zeitschrift.

Il est utile d'introduire aussi une autre définition de la fonction-noyau. On dit qu'un système de fonctions $\varphi_\nu(z)$, $\nu=1, 2, \ldots$ régulières dans B est orthogonal et normé, si pour chaque couple de fonctions φ_ν, φ_μ on a:

$$\iint_B \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\, d\omega = \delta_{\nu\mu}, \qquad \delta_{\nu\nu}=1,\ \delta_{\nu\mu}=0 \text{ pour } \nu \neq \mu.$$

Ce système est dit complet pour E (B) si pour toute fonction f appartennant à E (B) on a:

$$\iint_B |f|^2 d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \iint_B f\overline{\varphi_k}\, d\omega \Big|^2.$$

Théorème 2. *Pour chaque domaine B il existe un système complet pour* E (B) *des fonctions φ_ν orthogonales et normées* [2*a*, 2*b*, 3, 5*b*].
De plus on a:

$$K(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_\nu(z)|^2.$$

Par conséquent, il existe une infinité de systèmes orthogonaux, chacun pouvant se déduire de l'autre par une transformation unitaire.

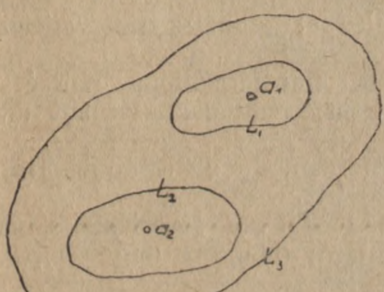


Fig. 5.

(Naturellement $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(z)\overline{\Psi_\nu(t)}$ [2]), appelé noyau bilinaire, reste invariant par ces transformations; $\Psi_\nu(z)$, $\nu=1, 2, \ldots$ étant un système quelconque de fonctions orthogonales, complet pour E (B)).

Etant donné un système **S** de fonctions régulières dans B on sait toujours construire un système orthogonal **O**. Pour la pratique la méthode d'orthogonalisation la plus commode est celle de M. Schmidt.

Soit B un domaine n multiplement connexe, limité par n courbes fermées L_k, (chacune étant composée d'un nombre fini d'arcs réguliers) et soit a_k un point quelconque intérieur à L_k, $k=1, 2, \ldots n-1$. Nous désignons par $\mathbf{S}_1$ le système

$$\{z^m, (z-a)^{-m}\}, k=1, 2, \ldots n-1,\ m=0, 1, 2, \ldots$$

Théorème 3. *Le système* $\mathbf{O}_1$ *de fonctions orthogonales engendré par* $\mathbf{S}_1$ *est complet pour* E (B).

2) Dans le cas d'une variable complexe si B est un domaine simplement connexe $w(z)=\int_0^z \Psi_\nu(z)\overline{\Psi_\nu(t)}\,dz$ représente B sur un cercle; au point t correspond le centre du cercle.

Dans le cas de plusieurs variables on sait démontrer l'existence du système O complet (théorème 2), mais leur construction effective n'est pas connue dans tous les cas [4].

Théorème 4. *$K(z,\bar{z})$ est un invariant intégral par rapport aux transformations conformes, c'est-à-dire, si $z^*(z)$ transforme le domaine B en B^* on a:*

$$K_{B^*}(z^*,\overline{z^*}) = K_B[z(z^*),\overline{z(z^*)}]\left|\frac{dz}{dz^*}\right|^2.$$

La forme différentielle

$$ds^2 = K(z,\bar{z})\,|dz|^2 \quad \textit{respectivement} \quad ds^2 = \Sigma\frac{\partial^2 \log K}{\partial z_k \partial \bar{z}_s}\, dz_k\, d\bar{z}_s \;\;(1)$$

[3]

dans le cas de plusieurs variables est un invariant par rapprot aux transformations conformes ou pseudo-conformes. Un autre invariant important est

$$I(z,\bar{z}) = \frac{1}{K}\frac{\partial^2 \log K}{\partial z\,\partial \bar{z}}.$$

Nous avons ainsi défini une variété de Riemann, qu'il est utile d'employer pour les recherches de la théorie des transformations conformes ou pseudo-conformes.

En utilisant les considérations précédentes comme point de départ on a jusqu'ici traité les problèmes suivants [4]:

I. La structure et les propriétés locales et globales des variétés riemanniennes (1) [2*i*, 6*a*, 6*b*].

II. 1° Les invariants par rapport aux transformations normées (c'est-à-dire par rapport à l'ensemble de transformations, possédant un point fixe).

2° Les invariants par rapport aux transformations quelconques [1*a*, 1*b*, 2*c*, 2*g*, 2*h*].

III. Le choix d'un domaine représentatif (et ses propriétés) dans l'ensemble des domaines engendrés par transformations normées [1*b*, 2*a*, 2*d*, 2*f*, 5*a*].

IV. Les propriétés des domaines de la même classe, c'est-à-dire possédant la même métrique (1), en particulier quelques théorèmes sur la transformation de mesures euclidiennes (Verzerrungssätze) [2*e*, 2*h*].

§ 3. Après avoir donné les théorèmes fondamentaux, nous passons à la question de la détermination des coordonnées naturelles dans le cas où B est simplement connexe (B_1) et où B est doublement connexe (B_2). Pour simplifier nous supposons, que B est situé tout entier à distance finie et que son contour est formé d'un nombre fini d'arcs réguliers. (On sait que les domaines indiqués dans les figures 1-4 peuvent être transformés sur de tels domaines par les fonctions élementaires). Comme l'on sait, on peut transformer B_1 en un cercle E:

---

3) $\frac{1}{K}\frac{\partial^2 \log K}{\partial z\,\partial \bar{z}}$ étant un invariant, on peut pour $n=1$ au lieu de $\frac{\partial^2 \log K}{\partial z\,\partial \bar{z}}\,|dz|^2$ utiliser la forme indiquée.

4) La plupart dans le cas de transformations pseudo-conformes.

$|w| < 1$, à un point $\mathfrak{O}$ quelconque de B_1 on peut faire correspondre le centre o de E. B_2 peut être transformé en un anneau circulaire A $r < |w| < 1$, où r est un nombre caractéristique pour B_2 (appelé module de B_2). Dans le cas de E les rayons R_φ: $\varphi = \text{const.}$ et les cercles C_ς: $|w| = \varsigma$ sont des géodésiques de notre métrique. Par chaque point p

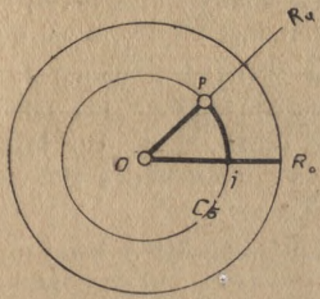


Fig. 6.

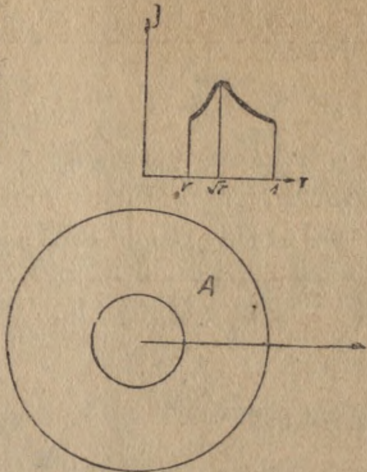


Fig. 7.

de E passe une courbe R_φ et une courbe C_ς. En fixant un des rayons par exemple R_0 et le sens de rotation, nous définissons les coordonnées naturelles en posant $\xi = \mathbf{L}_E(\widehat{pi}), \eta = \mathbf{L}_E(\widehat{po})$, où $\mathbf{L}(\ )$ désigne la longueur non euclidienne de l'arc entre paranthèses et i le point d'intersection de C_ς avec R_0. Dans le cas de l'anneau A, d'après un résultat de M. Zarankiewicz [6a, 6b], l'invariant $\mathbf{I}(w, \overline{w})$ reste constant sur chaque cercle $|w| = \text{const.}$ Sur $|w| = \sqrt{r}$ $\mathbf{I}$ prend son maximum et décroit lorsqu'on s'approche de la frontière, où on a $\mathbf{I} = 2$ [5]) [2g]. Désignons par C_0 la circonférence $|w| = \sqrt{r}$ et fixons un rayon par exemple R_0 et le sens de rotation. Par chaque point p passe une courbe C_α et R_β. En désignant par i l'intersection de C_α avec R_0, par l de R_β avec C_0 on obtient les coordonnées naturelles de p en posant $\xi = \mathbf{L}_A(\widehat{pi})$, $\eta = \mathbf{L}_A(\widehat{pl})$.

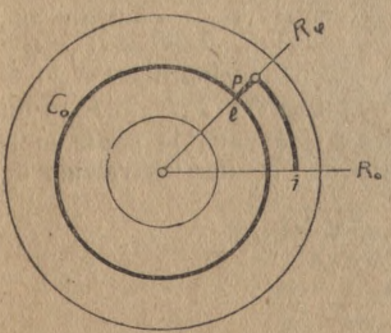


Fig. 8.

Nous voulons maintenant montrer comment on peut dans le cas de B_1 trouver les géodésiques $\mathfrak{C}_\alpha$ passant par un point $\mathfrak{O}$ et leurs trajectoires orthogonales $\mathfrak{R}_\beta$ ou bien, dans le cas de B_2, les courbes $\mathfrak{C}_\alpha$: $\mathbf{I}(z, \overline{z}) = \text{const.}$ et leurs trajectoires orthogonales $\mathfrak{R}_\beta$. Si nous pouvons tracer ces courbes et encore déterminer effectivement la longueur non euclidienne (invariante) d'un arc quelconque de l'une

5) Dans le cas de B_1 l'invariant $\mathbf{I}$ est une constante.

d'elles dans B, nous pouvons déterminer les valeurs des coordonnées naturelles ξ, η en chaque point de B, et par conséquent nous pourrons effectuer la transformation conforme de B_1 en E ou de B_2 en A.

Les courbes géodésiques satisfont à l'équation

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \Gamma^1_{11} \left(\frac{dz}{du} \right)^2 = 0, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial z}.$$

Par conséquent, nous pourrons tracer les courbes $\mathfrak{R}_\alpha$ dans B_1 correspondant aux rayons, si nous pouvons déterminer les Γ^1_{11}, ainsi que les courbes $\mathfrak{C}_\alpha$ dans le cas de B_2, si nous connaissons les valeurs de $\mathbf{I}(z, \bar{z})$ et enfin calculer les longueurs $\mathbf{L}_B$, si nous connaissons les valeurs de K. (On obtient les courbes $\mathfrak{C}_\beta$ dans le cas de B_1, et $\mathfrak{R}_\alpha$ dans le cas de B_2 en traçant les trajectoires orthogonales aux familles de courbes indiquées $\mathfrak{R}_\alpha$ et $\mathfrak{C}_\beta$).

§ 4. On peut calculer les quantités indiquées en déterminant un nombre fini de fonctions du système $\mathbf{O}$ (voir p. 72) et en se bornant à ce nombre de termes dans la série infinie.

Mais au voisinage de la frontière la convergence étant très faible, on emploie une autre méthode, basée sur le fait que les quantités $\frac{1}{K}$, $\mathbf{I}(z, \bar{z})$, Γ^1_{11} sont les valeurs minima que l'on obtient dans quelques problèmes de variation [6]).

Par exemple $\frac{1}{K(t, \bar{t})}$ est le minimum de $\int_B \int |h(z)|^2 d\omega$, si pour h on prend toutes les fonctions régulières dans B, pour lesquelles on a: $h(t) = 1$. Par conséquent on a $K_B(t, \bar{t}) \leqq K_G(t, \bar{t})$, si on a $B \supset G$. Mais il existe des domaines pour lesquels en connaissant la fonction qui les transforment sur un cercle, on peut facilement calculer K. Si l'on prend deux de ces domaines $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ (domaines de comparaison, Vergleichsbereiche) on peut s'arranger de façon que l'on ait $G^{(1)} \subset B \subset G^{(2)}$ et que dans une partie de $G^{(1)}$ (au voisinage de la frontière) $K_{G^{(1)}}$ et $K_{G^{(2)}}$ diffèrent pratiquement très peu. Comme on a $K_{G^{(1)}} \geqq K_B \geqq K_{G^{(2)}}$ on obtient une approximation pour les valeurs de K dans la partie indiquée de B. D'une manière analogue on peut calculer les valeurs de $\mathbf{I}$ et Γ^1_{11} au voisinage de la frontière.

Institut de mathématiques et mécanique, Tomsk.

---

6) Voir principalement 2c et la II-ème partie du travail: „Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande", qui paraitra prochainement dans le Journal de Crelle 172 p. 89.

Об одном эффективном методе конформного отображения, имеющем приложения к одной проблеме гидродинамики

С. Б. Бергман (Томск)

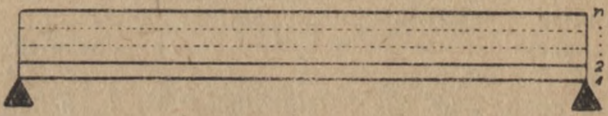
В настоящей работе рассматривается особый метод определения аналитической функции комплексного переменного, отображающей одну область на другую. Этот метод основан на свойствах особой функции—ядра, присоединяемой к данной области. Ее определение представляет собой экстремальную задачу. Рассмотрение этой функции позволяет ввести особую Римановскую метрику в данной области, остающейся инвариантной при отображении области с помощью аналитических функций. Тогда спределение функции, отображающей, например, данную односвязную область на круг или двухсвязную область на кольцо, сводится к определению натуральных координат точек, получающегося из нашей сбласти Римановского многообразия. Для этого достаточно определить геодезические линии такого многообразия, выходящие из точки рассматриваемой однозвязной области, преобразуемой в центр круга и ортогональные траектории к ним. В случае двухсвязной области, определению подлежит некоторое другое семейство геодезических линий и ортогональных траекторий к ним. В случае, если функция—ядро области, известна, это сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка.

Определение функции—ядра может быть эффективным образом произведено, исходя из некоторой системы ортогональных функций, связанной с данной областью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЙ МЕЖДУ ЧАСТЯМИ МНОГОПЛАСТИНЧАТОЙ БАЛКИ

КУФАРЕВ П. П. (Томск)

В этой работе предлагается метод для вычисления давления между балками, лежащими друг на друге на двух опорах и подверженными действию некоторой нагрузки, а также моментов, изгибающих каждую из балок. Балки предполагаются при этом идеально гладкими; длины балок—одинаковыми. Расчет проводится на основании формул технической теории упругости.



Черт. 1.

Обозначения.

M — изгибающий момент,

R_1, R_2 — реакции опор,

q_i — давление между i — той и $i+1$ — ой балкой, рассчитанное на единицу длины,

m_i — изгибающий момент для i — той балки,

$Q_i = m'_i$ — срезывающая сила,

F_i — площадь поперечного сечения балки,

I_i — момент инерции поперечного сечения,

E и G — модуль Юнга и модуль сдвига,

l — длина балок, n — число балок.

При решении вопроса будем исходить из принципа минимума работы деформации.

Энергия деформации системы

$$W = \int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i^2}{2EI_i} + \mu \frac{Q_i^2}{2GF_i} \right) \right\} dx, \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

где μ — численный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балок.

Но

$$m_i = \int_0^x q_{i-1}(x-\xi)\,d\xi - \int_0^x q_i(x-\xi)\,d\xi \quad \ldots \ldots (2)$$

и

$$Q_i = m'_i = \int_0^x q_{i-1}\,d\xi - \int_0^x q_i\,d\xi \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

или, обозначая

$$\int_0^x q_i(x-\xi)\,d\xi = u_i$$

имеем

$$m_i = u_{i-1} - u_i \qquad Q_i = u'_{i-1} - u'_i$$

и

$$W = \int \sum \left[\frac{(u_{i-1} - u_i)^2}{2EI_i} + \mu \frac{(u'_{i-1} - u'_i)^2}{2GF_i} \right] dx.$$

Из условия минимума работы деформации получаются следующие уравнения для u_i

$$\frac{d}{dx}\left[\mu \frac{u'_i - u'_{i-1}}{GF_i} + \mu \frac{u'_i - u'_{i+1}}{GF_{i+1}} \right] - \frac{u_i - u_{i-1}}{EI_i} - \frac{u_i - u_{i+1}}{EI_{i+1}} = 0$$

или

$$\mu \frac{m''_i}{GF_i} - \mu \frac{m''_{i+1}}{GF_{i+1}} - \frac{m_i}{EI_i} + \frac{m_{i+1}}{EI_{i+1}} = 0$$

или, обозначая

$$m''_i - \alpha^2_i m_i = F_i z_i,$$

где

$$\alpha_i^2 = \frac{GF_i}{\mu EI_i}, \qquad \qquad (4)$$

имеем

$$z_i - z_{i+1} = 0$$

Решение этого простейшего разностного уравнения $z_i = \varphi(x)$ (не зависит от i) и след.,

$$m''_i - \alpha_i^2 m_i = F_i \varphi(x) \qquad \qquad (5)$$

Общий интеграл этого дифференциального уравнения

$$m_i = A_i \, sh \, \alpha_i x + B_i \, ch \, \alpha_i x + \frac{F_i}{\alpha_i} \int^x \varphi(t) \, sh \, \alpha_i (x - t) \, dt \qquad (6)$$

В случае, когда на балки действуют также сосредоточенные силы, приходится писать несколько уравнений типа (5).

Так, в случае, когда на балки действует одна сосредоточенная сила P, на расстоянии c от левой опоры, необходимо рассматривать отдельно левую и правую часть балок, т. е. писать два уравнения:

$$m''_i - \alpha_i^2 m_i = F_i \varphi(x) \qquad \qquad (7_1)$$

$$\overline{m}''_i - \alpha_i^2 \overline{m_i} = F_i \overline{\varphi(x)}, \qquad \qquad (7_2)$$

где через m_i и $\overline{m}_i$ обозначены моменты соответственно для частей балки слева от силы и справа от силы.

Общие интегралы в этом случае удобно написать в виде:

$$m_i = A_i \, sh\, \alpha_i x + B_i \, sh\, \alpha_i x + \frac{F_i}{\alpha_i}\int_0^x \varphi(t)\, sh\, \alpha_i (x-t)\, dt$$

$$\overline{m}_i = \overline{A}_i \, sh\, \alpha_i x + \overline{B}_i \, ch\, \alpha_i x + \frac{F_i}{\alpha_i}\int_l^x \overline{\varphi}(t)\, sh\, \alpha_i (x-t)\, dt.$$

Так как $m_i(0) = 0$, то $B_i = 0$, и формула (6) принимает вид:

$$m_i = A_i \, sh\, \alpha_i x + \frac{F_i}{\alpha_i}\int_0^x \varphi(t)\, sh\, \alpha_i (x-t)\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Для определения неизвестной функции $\varphi(x)$ воспользуемся тем условием, что сумма всех моментов m_i равна M.

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i = M \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Отсюда для $\varphi(x)$ получается интегральное уравнение

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i \, sh\, \alpha_i x + \int_0^x \varphi(t) \left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{F_i}{\alpha_i} sh\, \alpha_i (x-t)\right] dt = M \quad . \; . \; . \; (10)$$

решение которого принципиально несложно. Именно, дифференцируя $2n$ раз, получим следующие уравнения:

$$(1) \; . \; . \; . \; \int_0^x \varphi(t) \left[\sum_{i=1}^{n} F_i \, ch\, \alpha_i (x-t)\right] dt + \sum_{i=1}^{n} A_i \alpha_i \, ch\, \alpha_i x = M',$$

$$(2) \; . \; . \; \int_0^x \varphi(t) \left[\sum F_i \alpha_i \, sh\, \alpha_i (x-t)\right] dt + \sum A_i \alpha_i^2 \, sh\, \alpha_i x + \varphi(x) \sum F_i = M'',$$

$$(3) \; . \; \int \varphi(t) \left[\sum F_i \alpha_i^2 \, ch\, \alpha_i (x-t)\right] dt + \sum A_i \alpha_i^3 \, ch\, \alpha_i x + \varphi'(x) \sum F_i = M''',$$

$$(4) \; . \; . \; . \; . \; . \; \int_0^x \varphi(t) \left[\sum F_i \alpha_i^3 \, sh\, \alpha_i (x-t)\right] dt + \sum A_i \alpha_i^4 \, sh\, \alpha_i x + \; . \; . \; (11)$$

$$+ \varphi''(x) \sum F_i + \varphi(x) \sum F_i \alpha_i^2 = M^{(IV)},$$

. . . .

$$(2n) \; . \; . \; . \; \int_0^x \varphi(t) \left[\sum F_i \alpha_i^{2n-1} . sh\, \alpha_i (x-t)\right] dt + \sum A_i \alpha_i^{2n} sh\, \alpha_i x +$$

$$+ \varphi^{(2n-2)}(x) \sum F_i + \varphi^{(2n-4)}(x) \sum F_i \alpha_i^2 + \; . \; . \; . \; . \; . \; +$$

$$+ \varphi''(x) \sum F_i \alpha_i^{2n-4} + \varphi(x) \sum F_i \alpha_i^{2n-2} = M^{(2n)}.$$

Достаточно взять из этих уравнений для определения $\varphi(x)$ лишь уравнения четного номера. Принимая во внимание (8), их можно написать в виде

$$
\begin{aligned}
&M=\Sigma m_i \\
&\Sigma \xi_i m_i = M'' - \varphi . S_0 \\
&\Sigma \xi_i^2 m_i = M^{(IV)} - \varphi . S_1 - \varphi'' . S_0 \qquad \qquad . \; . \; . \; . \; (12) \\
&. \; . \\
&\Sigma \xi_i^n m_i = M^{(2n)} - \varphi S_{n-1} - \varphi'' S_{n-2} - \varphi^{(IV)} . S_{n-3} - \\
&\qquad - \ldots - \varphi^{(2n-2)} . S_0,
\end{aligned}
$$

где

$$\xi_i = \alpha_i ; S_к = \Sigma F_i \xi_i^к .$$

Исключая из последних уравнений m_i, имеем для $\varphi(x)$ дифференциальное уравнение:

$$
\begin{vmatrix}
-M & 1 & 1 \ldots \ldots 1 \\
-M'' + \varphi . S_0 & \xi_1 & \xi_2 \ldots . \xi_n \\
-M^{(IV)} + \varphi . S_1 + \varphi'' . S_0 & \xi_1^2 & \xi_2^2 \ldots . \xi_n^2 \\
-M^{(VI)} + \varphi . S_2 + \varphi'' S_1 + \varphi^{(IV)} . S_0 & \xi_1^3 & \xi_2^3 \ldots . \xi_n^3 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots & & \\
-M^{(2n)} + \varphi . S_{n-1} + \varphi'' S_{n-2} + & & \\
\qquad + \ldots + \varphi^{(2n-2)} . S_0 & \xi_1^n & \xi_2^n \ldots . \xi_n^n
\end{vmatrix} = 0 . \; (13)
$$

в случае, если все ξ_i различны; или же уравнение такого-же вида, но более низкого порядка в случае если среди чисел, $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ есть равные. (Так, если, например, $\xi_1 = \xi_2$, то в уравнения (12) входят кроме φ (x) по сути дела только $n-1$ неиззестных: $m_1 + m_2, m_3, m_4 \ldots \ldots m_n$, и для составления уразнения для $\varphi(x)$ достаточно n уравнений).

Решая это уравнение, найдем функцию $\varphi(x)$, а, следовательно, будут определены и момен ы m_i; произвольные постоянные определим из граничных условий и из уравнений, которые получим, подставляя φ (x) в уравнения (11).

Мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда балки нагружены сосредоточенной силой P, приложенной на расстоянии C от левой опоры.

I. Все ξ_i различны и, следовательно, сечения балок различны:

В уравнении (13), следует положить

$$M = P \frac{l-c}{l} x, \; M'' = M^{(IV)} = \ldots = M^{(2n)} = 0$$

для левой части балки, и $\overline{M} = P\dfrac{c}{l}(l-x)$ для правой части. Раскрывая определитель, представим уравнение (13) в виде:

$$-MD + \varphi D_0 + \varphi'' D_1 + \varphi^{(IV)} D_2 + \ldots\ldots \varphi^{(2n-2)} D_{n-1} = 0,$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{n-1} & \xi_2^{n-1} & \ldots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n = V \cdot \prod_{k=1}^{k=n} \xi_k$$

и

$$D_j = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \xi_1^j & \xi_2^j & \ldots & \xi_n^j \\ S_0 & \xi_1^{j+1} & \xi_2^{j+1} & \ldots & \xi_n^{j+1} \\ S_1 & \xi_1^{j+2} & \xi_2^{j+2} & \ldots & \xi_n^{j+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-j-1} & \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \xi_1^j & \xi_2^j & \ldots & \xi_n^j \\ \Sigma F_i & \xi_1^{j+1} & \xi_2^{j+1} & \ldots & \xi_n^{j+1} \\ \Sigma F_i \xi_i & \xi_1^{j+2} & \xi_2^{j+2} & \ldots & \xi_n^{j+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma F_i \xi_i^{n-j-1} & \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} F_i \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \xi_1^j & \xi_2^j & \ldots & \xi_n^j \\ 1 & \xi_1^{j+1} & \xi_2^{j+1} & \ldots & \xi_n^{j+1} \\ \xi_i & \xi_1^{j+2} & \xi_2^{j+2} & \ldots & \xi_n^{j+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_i^{n-j-1} & \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix}$$

или, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{e-1} & \xi_2^{e-1} & \ldots & \xi_n^{e-1} \\ \xi_1^{e+1} & \xi_2^{e+1} & \ldots & \xi_n^{e+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix} = V \cdot \sum \xi_{\nu_1} \xi_{\nu_2} \ldots \xi_{\nu_{n-e}} {}^{*)}$$

---

*) См. Каган, Теория определителей, стр. 161 и 31.

где сумма составлена из произведений n количеств $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, взятых по $n-e$ (без повторений); то, раскрывая определитель по элементам первого столбца, представим D_j в виде:

$$D_j = V \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i (-1)^j \Big\{ \sum \xi_{\nu_1} \xi_{\nu_2} \ldots \xi_{\nu_{n-j-1}} - \xi_i \sum \xi_{\mu_1} \xi_{\mu_2} \ldots \xi_{\mu_{n-j-2}} +$$

$$+ \xi_\nu^2 \sum \xi_{\sigma_1} \xi_{\sigma_2} \ldots \xi_{\sigma_{n-j-3}} - \ldots + (-1)^{n-j-2} \xi_i^{n-j-2} \sum_{\rho=1}^{n} \xi_\rho +$$

$$+ (-1)^{n-j-1} \xi^{n-j-1} \Big\} = (-1)^j V \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i \sum_{t \neq i} \xi_{t_1} \xi_{t_2} \ldots \xi_{t_{n-j-1}}.$$

В последней сумме—суммируются произведения из $n-1$ количеств $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{i-1}, \xi_{i+1} \ldots \xi_{n-1}, \xi_n$, взятых по $n-j-1$, при чем ξ_i исключается. Обозначая эту сумму через

$$B_{n\,i}^{n-j-1} = \sum_{t=i} \xi_{t_1} \xi_{t_2} \ldots \xi_{t_{n-j-1}}$$

и сокращая на множитель V, неравный нулю, имеем окончательно для функции $\varphi(x)$ уравнение:

$$M \prod_{k=1}^{n} \xi_k + \varphi \sum_{i=1}^{n} F_i B_{ni}^{n-1} - \varphi'' \sum_{i=1}^{n} F_i B_{ni}^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi^{(2n-4)} \sum F_i B_{ni}^{1} +$$

$$+ (-1)^n \varphi^{(2n-2)} \sum F_i = 0.$$

Частный интеграл уравнения

$$\varphi = -\frac{M \prod\limits_{1}^{n} \xi_k}{\sum F_i B_{ni}^{n-1}} = -\frac{M \prod \xi_k}{\sum F_i \sum\limits_{t=1} \xi_{t_1} \xi_{t_2} \ldots \xi_{t_{n-i}} \dfrac{\xi_i}{\xi_i}} = -\frac{M \prod \xi_k}{\prod \xi_k \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{F_i}{\xi_i}}$$

или, так как

$$\xi_i = \alpha_i^2 = \frac{GF_i}{\mu E I_i},$$

то

$$\varphi = -\frac{M}{\sum I_i} \frac{G}{\mu E} = -\frac{G}{\mu E \cdot \sum I_i} \cdot P \frac{l-c}{l} x.$$

Общий интеграл можно записать в виде:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \, sh r_k x + \sum_{k=1}^{n-1} E_k \, ch r_k x - \frac{M}{\sum I_i} \frac{G}{\mu E},$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, приняв

$$C_\kappa=\frac{L_\kappa}{r_\kappa}\frac{shr_\kappa(l-c)}{shr_\kappa l}\frac{G}{\mu E}\frac{P}{\sum\limits_1^n I_\nu};\ \overline{C}_\kappa=\frac{L_\kappa}{r_\kappa}\frac{shr_\kappa c}{shr_\kappa l}\frac{G}{\mu E}\frac{P}{\sum\limits_1^n I_\nu}$$

Граничные условия 2

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{C_\kappa r_\kappa F_i}{r_\kappa^2-\alpha_i^2}chr_\kappa c+\frac{P(l-c)}{l}\frac{I_i}{\sum\limits_1^n I_\nu}=$$

$$=-\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{\overline{C}_\kappa r_\kappa F_i}{r_\kappa^2-\alpha_i^2}chr_\kappa(l-c)-\frac{Pc}{l}\frac{I_i}{\sum\limits_1^n I_\nu}$$

запишутся тогда более просто

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{F_i r_\kappa}{r_\kappa^2-\alpha_i^2}\left[C_\kappa chr_\kappa c+\overline{C}_\kappa chr_\kappa(l-c)\right]=-P\frac{I_i}{\sum\limits_1^n I_\nu}$$

или, подставляя C_κ и $\overline{C}_\kappa$, получим окончательно следующие ур ия для L_κ (замечая, что $\frac{GF_i}{\mu EI_i}=\alpha_i^2$)

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{L_\kappa\alpha_i^2}{r_\kappa^2-\alpha_i^2}=-1\ (i=1,2\ldots n-1)\quad\ldots\ldots(18)$$

Итак,

$$m_i=P\frac{(l-c)}{l}x\frac{I_i}{\sum\limits_1^n I_\nu}+$$

$$+\frac{P}{\sum\limits_1^n I_\nu}\frac{GF_i}{\mu E}\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{L_\kappa}{r_\kappa(r_\kappa^2-\alpha_i^2)}\frac{shr_k(l-c)}{shr_\kappa l}shr_\kappa x\quad\ldots(19)$$

$$\overline{m}_i=P\frac{c}{l}(l-x)\frac{I_i}{\sum\limits_1^n I_\nu}+$$

$$+\frac{P}{\sum\limits_1^n I_\nu}\frac{GF_i}{\mu E}\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{L_\kappa}{r_\kappa(r_\kappa^2-\alpha_i^2)}\frac{shr_\kappa c}{shr_\kappa l}shr_\kappa(l-x),$$

где L_κ — решения уравнений (18).

Дифференцируя m_i, найдем срезающую силу Q_i.

Далее, из соотношений

$$q_{i-1} - q_i = Q_i', \ \bar{q}_{i-1} - \bar{q}_i = \bar{Q}_i',$$

принимая во внимание, что $q_0 = \bar{q}_0 = 0$, найдем давления между балками:

$$q_1 = -Q_1', \ q_2 = -Q_1' - Q_2'$$

и вообще

$$q_i = -\sum_{s=1}^{s=i} Q_s', \ \bar{q}_i = -\sum_{s=1}^{s=i} \bar{Q}_s' \ldots \ldots \ (20)$$

Случай двух балок, лежащих друг на друге и нагруженных сосредоточенной силой.

В этом случае уравнение (14) для r имеет вид:

$$F_1 (r^2 - \alpha_2^2) + F_2 (r^2 - \alpha_1^2) = 0 \ldots \ldots \ldots \ (21)$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\alpha_i^2 = \frac{GF_i}{\mu EI_i}$, найдем

$$r^2 = \frac{G}{\mu E} \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}.$$

Уравнение для единственного коэффициента L_1 по (18) напишется:

$$\frac{L_1 \alpha_1^2}{r^2 - \alpha_1^2} = -1.$$

откуда

$$\frac{G}{\mu E} \frac{F_2 \ L_1}{r^2 - \alpha_2^2} = -I_1.$$

Замечая еще, что на основании уравнения (21):

$$\frac{F_1}{r^2 - \alpha_1^2} = -\frac{F_2}{r^2 - \alpha_2^2}$$

и, след.,

$$\frac{G}{\mu E} \frac{F_2 L_1}{r^2 - \alpha_2^2} = I_1,$$

найдем выражения моментов в виде

$$\left.\begin{aligned}
m_1 &= P \frac{l-c}{l} x \frac{I_1}{I_1 + I_2} - \frac{P}{r} \frac{I_1}{I_1 + I_2} \frac{shr(l-c)}{shr\,l} shr\,x, \\
m_2 &= P \frac{l-c}{l} x \frac{I_2}{I_1 + I_2} + \frac{P}{r} \frac{I_1}{I_1 + I_2} \frac{shr(l-c)}{shr\,l} shr\,x, \\
\bar{m}_1 &= P \frac{c}{l} (l-x) \frac{I_1}{I_1 + I_2} - \frac{P}{r} \frac{I_1}{I_1 + I_2} \frac{shr\,c}{shr\,l} shr(l-x), \\
\bar{m}_2 &= P \frac{c}{l} (l-x) \frac{I_2}{I_1 + I_2} + \frac{P}{r} \frac{I_1}{I_1 + I_2} \frac{shr\,c}{shr\,l} shr(l-x),
\end{aligned}\right\} \ldots \ (22)$$

откуда, дифференцируя, выразим срезающие силы

$$Q_1 = P\frac{l-c}{l}\frac{I_1}{I_1+I_2} - P\frac{I_1}{I_1+I_2}\frac{shr(l-c)}{shr\,l}chr\,x,$$

$$Q_2 = P\frac{l-c}{l}\frac{I_2}{I_1+I_2} + P\frac{I_1}{I_1+I_2}\frac{shr(l-c)}{shr\,l}chr\,x, \quad . \; . \; (23)$$

$$\overline{Q}_1 = -P\frac{c}{l}\frac{I_1}{I_1+I_2} + P\frac{I_1}{I_1+I_2}\frac{shr\,c}{shr\,l}chr(l-x),$$

$$\overline{Q}_2 = -P\frac{c}{l}\frac{I_2}{I_1+I_2} + P\frac{I_1}{I_1+I_2}\frac{shr\,c}{shr\,l}chr(l-x),$$

и давление между балками:

$$q = -Q_1' = Pr\frac{I_1}{I_1+I_2}\frac{shr(l-c)}{shr\,l}shr\,x,$$

$$\overline{q} = Pr\frac{I_1}{I_1+I_2}\frac{shr\,c}{shr\,l}shr(l-x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

Пример. Пусть $F_1 = F_2 = 60\,см^2$, $I_1 = I_2 = 125\ см^4$ (балки одинакового прямоугольного сечения 5×12)

$$l = 200\,см,\ c = 50\,см,\ P = 2000\,кг,\ \frac{G}{E} = \frac{3}{8},\ \mu = 1,2^{1)}$$

Кривые чертежа 2 характеризуют изменение давления q. (Следует заметить, что, как известно, формулы не применимы для сечений, близких к опорам).

2. Случай балок одинакового сечения, нагруженных сосредоточенной силой P на расстоянии c от левой опоры.

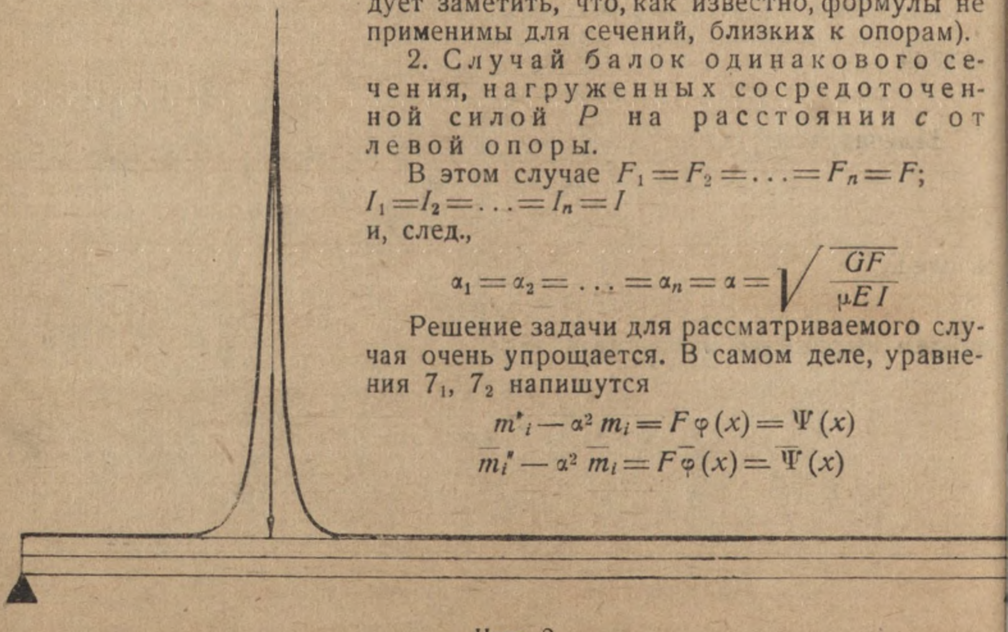
В этом случае $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F$; $I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I$ и, след.,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha = \sqrt{\frac{GF}{\mu EI}}$$

Решение задачи для рассматриваемого случая очень упрощается. В самом деле, уравнения 7_1, 7_2 напишутся

$$m_i'' - \alpha^2 m_i = F\varphi(x) = \Psi(x)$$

$$\overline{m}_i'' - \alpha^2 \overline{m}_i = F\overline{\varphi}(x) = \overline{\Psi}(x)$$



Черт. 2.

[1]) См. Тимошенко. „Курс сопротивления материалов", изд. 1931 г. стр. 311.

откуда

$$m_i = A_i sh\,\alpha_i x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x \Psi(t)\,sh\,\alpha(x-t)\,dt,$$
$$\overline{m}_i = \overline{A}_i sh\,\alpha_i(l-x) + \frac{1}{\alpha}\int_l^x \overline{\Psi}(t)\,sh\,\alpha(x-t)\,dt. \quad . \quad . \; (25)$$

Интегральное уравнение $\Sigma m_i = M$ для $\Psi(x)$ имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i sh\,\alpha x + \frac{n}{\alpha}\int_0^x \Psi(t)\,sh\,\alpha(x-t)\,dt = P\,\frac{l-c}{l}\,x \quad . \quad . \; (26)$$

Дифференцируя два раза, имеем:

$$n\int_0^x \Psi(t)\,ch\,\alpha(x-t)\,dt + \alpha . ch\,\alpha x . \sum_{i=1}^{n} A_i = P\,\frac{l-c}{l},$$

$$n\alpha\int_0^x \Psi(t)\,sh\,\alpha(x-t)\,dt + n\Psi(x) + \alpha^2 sh\,\alpha x . \sum_{i=1}^{n} A_i = 0.$$

Полагая в первом из этих уравнений $x=0$, найдем:

$$\sum A_i = \frac{P}{\alpha}\,\frac{l-c}{l}.$$

Из второго же и (26)

$$\Psi(x) = -\frac{P(l-c)}{l}\,\frac{\alpha^2}{n}\,x$$

и аналогично

$$\overline{\Psi}(x) = -P\,\frac{c}{l}\,\frac{\alpha^2}{n}(l-x).$$

Следовательно, (из уравнений 25)

$$m_i = A_i sh\,\alpha x - \frac{P}{n\alpha}\,\frac{l-c}{l}\,[\alpha x - sh\,\alpha x]$$

$$\overline{m}_i = \overline{A}_i sh\,\alpha(l-x) - \frac{P}{n\alpha}\,\frac{c}{l}\,[\alpha(l-x) - sh\,\alpha(l-x)].$$

Определяя из граничных условий A_i и $\overline{A}_i$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{P}{\alpha n}\left[\frac{l-c}{l} - \frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}\right] \\ \overline{A}_i &= \frac{P}{\alpha n}\left[\frac{c}{l} - \frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}\right] \end{aligned}\right\} i = 1,2\ldots n-1$$

$$A_n = \frac{P}{\alpha n}\left[\frac{l-c}{l} + (n-1)\frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}\right],$$

$$\bar{A}_n = \frac{P}{\alpha n}\left[\frac{c}{l} + (n-1)\frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}\right],$$

и окончательно моменты выразятся:

$$\left.\begin{aligned} m_i &= \frac{1}{n}\left[P\frac{l-c}{l}x - \frac{P}{\alpha}\frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}sh\,\alpha x\right] \\ \bar{m}_i &= \frac{1}{n}\left[P\frac{c}{l}(l-x) - \frac{P}{\alpha}\frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}sh\,\alpha(l-x)\right] \end{aligned}\right\} i = 1,2\ldots n-1$$

$$m_n = \frac{1}{n}\left[P\frac{l-c}{l}x + (n-1)\frac{P}{\alpha}\frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}sh\,\alpha x\right], \quad \ldots (27)$$

$$\bar{m}_n = \frac{1}{n}\left[P\frac{c}{l}(l-x) + (n-1)\frac{P}{\alpha}\frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}sh\,\alpha(l-x)\right].$$

Срезывающие силы

$$Q_i = \frac{P}{n}\left[\frac{l-c}{l} - \frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}ch\,\alpha x\right],$$

$$\bar{Q}_i = \frac{P}{n}\left[-\frac{c}{l} + \frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}ch\,\alpha(l-x)\right], \quad \ldots (28)$$

$$Q_n = \frac{P}{n}\left[\frac{l-c}{l} + (n-1)\frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}ch\,\alpha x\right],$$

$$\bar{Q}_n = \frac{P}{n}\left[-\frac{c}{l} - (n-1)\frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}ch\,\alpha(l-x)\right]$$

и давления между балками

$$q_i = -\sum_{s=1}^{s=i} Q_s' = P\frac{i}{n}\alpha\frac{sh\,\alpha(l-c)}{sh\,\alpha l}sh\,\alpha x, \quad \ldots (29)$$

$$\bar{q}_i = -\sum_{s=1}^{s=i} \bar{Q}_s' = P\frac{i}{n}\alpha\frac{sh\,\alpha c}{sh\,\alpha l}sh\,\alpha(l-x)$$

Bestimmung der Drucke zwischen mehreren auf 2 Stützen übereinanderliegenden Balken.

P. Kufareff.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Berechnung der Drucke zwischen mehreren auf zwei Stützen übereinanderliegenden Stäben angegeben. Vom Prinzip des Minimums der Formänderungs Arbeit ausgehend, erhält man zur Bestimmung der Momente m_i, in jedem von den Stäben ein System von Differentialgleichungen folgender Gestalt.

$$\frac{m_i'' - \alpha_i^2 m_i}{F_i} = \frac{m''_{i+1} - \alpha_{i+1} m_{i+1}}{F_{i+1}} = \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine unbekannte Funktion ist. Die Aufgabe besteht in der Bestimmung dieser Funktion $\varphi(x)$. Aus der Bedingung, dass die Summe der Momente m_i dem äusseren Momente M gleich sein muss, erhält man zur Bestimmung von $\varphi(x)$ eine einfache Integralgleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \, sh \, \alpha_i x + \int_0^x \varphi(t) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{\alpha_i} \, sh \, \alpha_i (x - t) \right] dt = M$$

Die Berechnung wird vollständig durchgeführt in dem Falle, dass die Stäbe der Wirkung einer konzentrierten Kraft ausgesetzt sind.

О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЮЩИХСЯ В КВАДРАТУРАХ

Е. Н. АРАВИЙСКАЯ (Томск)

Во многих задачах прикладного характера приходится интегрировать дифференциальное уравнение, причем функции, входящие в состав этого уравнения, известны нам только на основании опыта и поэтому могут быть в известных границах варьированы. Целесообразно поэтому выбирать их так, чтобы данное уравненне можно было интегрировать в квадратурах. Мы приходим, таким образом, в простейшем случае к задаче: найти условия, при которых интегрировалось бы в квадратурах дифференциальное уравнение вида

$$y' = F(x, y, \lambda(x)),$$

где λ произвольная функция от x. Необходимый и достаточный критерий интегрируемости дифференциального уравнения в квадратурах можно установить при помощи теории S. Lie [1]). Но, в соответствии с элементарным характером нашей задачи, в настоящей работе вопрос разрешается совсем элементарным путем.

Критерий интегрируемости, найденный в настоящей работе, был получен ранее Максимовичем, о чем можно судить по краткому реферату в Fortschritte der Mathematik [2]). С оригинальной же работой Максимовича ознакомиться мне не удалось.

Настоящая работа имеет целью рассмотреть возможные виды интегралов дифференциального уравнения

$$y' = F(x, y, \lambda(x)), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

где λ произвольная функция от x, интегрирующегося в квадратурах.

Назовем выражение

$$\int \varphi_1(x, \lambda)\, dx + a_1 = S_1^{(1)},$$

(где a_1 произвольная постоянная) операцией первого порядка,

$$\int \Phi_1(x, \lambda, S_1^{(k)})\, dx + a_2 = S_2^{(1)},$$

где a_2 произвольная постоянная, операцией второго порядка и т. д. Причем φ_i, Φ_i и т. д. могут обозначать результат ряда алгебраических операций и операций дифференцирования.

В этих обозначениях интеграл дифференциального уравнения (I) примет вид:

---

[1]) S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen, т. 1.

[2]) Fortschritte der Mathematik 17 (1885). Mayer. Berichte über die Verhandl. der königl. Sächs. Ges. in Leipzig 24 (1890).

$$y=f(x, \lambda ; S_1', \dots S_1^{(p)} ; S'_2, \dots S_2^{(q)} ; \dots S'_n, \dots S_n^{(w)}), \dots \dots (1)$$

где $p, q, \dots w < \infty$

Выражение (1) является интегралом уравнения (I) и потому содержит одно произвольное постоянное, т. е. константы интегрирования $a_1, a_2 \dots a_n$ должны входить в интеграл уравнения следующим образом:

$$y=\psi(g(a_1, a_2, \dots a_n), x, \lambda). \dots \dots \dots (1')$$

Пусть $S_1, S_2, \dots S_n$ операции каких то порядков и пусть

$$y=f(x, \lambda S_1, S_2, \dots S_n,)$$

будет интеграл уравнения (I).

Тогда

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_k}=c_l^k \frac{\partial\psi}{\partial a_e}, \dots \dots \dots (2')$$

где c_e^k не зависит от x, или

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial S_i} \frac{\partial S_i}{\partial a_k}=c_e^k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial S_i} \frac{\partial S_i}{\partial a_e} \dots \dots \dots (2)$$

И обратно, легко показать, если выполнена система (2), то интеграл уравнения имеет вид (1').

Начнем разбор с наиболее простых случаев.

a) Пусть интеграл дифференциального уравнения (I) имеет вид

$$y=f(S_1),$$

где S_1, — операция первого порядка. Тогда

$$S_1=\psi(y),$$

и уравнение (I), заменою зависимого переменного $\psi(y)=y_1$, преобразуется к виду:

$$y_1' F=(x).$$

b) В случае

$$y=f(S_1 x, \lambda) \text{ или } S_1=\psi(x, \lambda, y)$$

подстановка $\psi(x, \lambda, y)=y_1$ приводит уравнение к предыдущему виду.

c) Пусть

$$y=f(S_1, S_2, \dots S_n),$$

где $S_1, S_2, \dots S_n$ — операции первого порядка. Система (2) будет состоять из уравнений такого вида:

$$\frac{\partial f}{\partial S_l}=c_k^l \frac{\partial f}{\partial S_k}.$$

Введя обозначение

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial S_i}}{\frac{\partial f}{\partial S_k}}=u_k^i$$

и имея в виду, что c_k^l не зависит от x, получаем одно или несколько соотношений такого вида:

$$\frac{\partial u^i_k}{\partial S_1} S'_{1x} + \frac{\partial u^i_k}{\partial S_2} S'_{2x} + \ldots + \frac{\partial u^i_k}{\partial S_n} S'_{nx} = 0$$

с коэффициентами, свободными от x. Следовательно, между операциями $S_1, \ldots S_n$ существует линейная зависимость:

$$A_1 S_1 + A_2 S_2 + \ldots + A_n S_n = A_{n+1},$$

где $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ постоянные, т. е. интеграл уравнения зависит только от $(n-1)$ операции.

Повторяя только что проведенное рассуждение, мы приходим к заключению: *интеграл вида*

$$y = F(S_1, S_2, \ldots S_n)$$

зависит по существу от одной операции первого порядка, все остальные операции являются линейными функциями (*с постоянными коэффициентами*) *этой последней*.

d) Пусть интеграл зависит лишь от x и от нескольких операций первого норядка:

$$y = F(S_1, S_2, \ldots S_n, x, \lambda).$$

Так как $S_1, S_2, \ldots S_n$ линейно зависят от $a_1, a_2, \ldots a_n$, то можно сказать, что y также зависит от a_i, как и от S_i. Следовательно, если интеграл имеет вид

$$y = \Phi(\varphi(a_1, a_2, \ldots a_n), x, \lambda),$$

то его можно привести и к такому виду:

$$y = F(\varphi(S_1, S_2, \ldots S_n), x, \lambda),$$

а тогда заменою зависимого переменного интеграла приводится к виду b).

e) Перейдем к рассмотрению интегралов, содержащих операции выше первого порядка. Пусть

$$y = F(S_2, x, \lambda),$$

где S_2 — операция второго порядка.

В этом случае система (2) сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial S_1} = c_2^1 \frac{\partial f}{\partial S_2}, \text{ или } \frac{\partial S_2}{\partial S_1} = c_2^1, \text{ или}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial S_1} = f(a_1), \text{ т. е. } S_2 = f_1(a_,) + f_2(x).$$

Следовательно, S_2 не является операцией второго порядка, что противоречит сделанному предположению, значит интеграл рассматриваемого вида не возможен.

f) Пусть

$$y = f(S_1, S_2),$$

где S_1 — операция первого порядка, S_2 — операция второго порядка.

Система (2) и в этом случае сводится к одному уравнению:

$$\frac{df}{dS_1} = \left(c'_2 - \frac{\partial S_2}{\partial S_1}\right)\frac{\partial f}{\partial S_2},$$

или

$$u = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial S_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial S_2}} = c'_2 - \frac{\partial S_2}{\partial S_2}.$$

Дифференцируем это последнее тождество по S_2:

$$\frac{\partial u}{\partial S_2} = \frac{\partial c'_2}{\partial a_2}.$$

И, так как $\dfrac{\partial c'_2}{\partial a_2}$ не зависит от x, то

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_1\,\partial S_2}\right) S'_{1x} + \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2} S'_{2x} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

где $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial S_1\,\partial S_2}\right)$ обозначает дифференцирование по S_1 полностью, т. е.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_1\,\partial S_2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial a_1\,\partial a_2}.$$

Так как коэффициенты при S'_{1x} и S'_{2x} в соотношении (3) величины постоянные и S'_{1x} и S'_{2x} зависят от произвольной функции λ, то при $S'_{1x} \neq 0$ имеем:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_1\,\partial S_2}\right) = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial S_2^2} = 0, \qquad \text{т. е.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S_2} = A, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

где A не зависит ни от a_1, ни от a_2, ни от x.

Если же $S'_{2x} = 0$, то

$$S_2 = f(S_1) + a_2.$$

В этом случае тождество (3) показывает, что

$$\frac{\partial u}{\partial S_2} = f(a_2)$$

и, так как $\dfrac{\partial u}{\partial S_2} = \dfrac{\partial u}{\partial a_2}$, то отсюда непосредственно вытекает, что S_2 не является операцией второго порядка.

Из (4) следует, что

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial S_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial S_2}} = AS_2 + f(S_1). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Рассматривая в уравнении (5) S_1 и S_2, как два независимых переменных, мы без труда приходим к заключению, что

$$y = F(S_2 e^{-AS_1} + f_2(S_1)).$$

Введем обозначения:

$$S_2 e^{-AS_1} + f_2(S_1) = e^{-AS_1} J_2,$$

где J_2 — операция снова второго порядка, $AS_1 = J_1$ — операция первого порядка.

Тогда интеграл уравнения (I) запишется в таком виде:

$$y = F(J_2 e^{J_1}).$$

И так как аргумент y только что написанного выражения должен зависеть, по существу, только от одного произвольного постоянного, то

$$\frac{\partial}{\partial a_1}(J_2 e^{-I_1}) = d'_2 \frac{\partial}{\partial a_2}(J_2 e^{-I_1}),$$

где d'_2 не зависит от x, или

$$\frac{\partial J_2}{\partial J_1} = J_2 + d'_2 \text{ или}$$

$$\frac{\partial J'_{2x}}{\partial J_1} = -J'_{2x}.$$

Откуда следует

$$J_2 = \int e^{I_1} f(x)\, dx.$$

Заменив зависимое переменное функцией от него, мы получим интеграл в таком виде:

$$y_1 = J_2 e^{-I_1}, \text{ т. е.}$$

дифференциальное уравнение (I), после такой замены приводится к виду линейного уравнения.

g) Пусть

$$y = f(S_1;\ S_2,\ S_3, \ldots S_n),$$

где S_1, — операция первого порядка, а $S_2, S_3, \ldots S_n$ — операции второго порядка. Система (3) показывает, что в этом случае имеют место такие соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial S_i} = c_e^i \frac{\partial f}{\partial S_l}, \text{ если } i > 1,\ e > 1.$$

И следовательно,

$$u_e^i = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial S_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial S_2}} = c_e^i$$

не зависит от x. Дифференцируем это последнее тождество по x:

$$\left(\frac{\partial u_e^i}{\partial S_1}\right) S'_{1x} + \frac{\partial u_e^i}{\partial S_2} S'_{2x} + \ldots + \frac{\partial u_e^i}{\partial S_n} S'_{nx} = 0, \quad \ldots \ldots (6)$$

где $\left(\dfrac{\partial u_e^i}{\partial S_1}\right) = \dfrac{\partial u_e^i}{\partial a_1}$,

$S'_{1x}, S'_{2x}, \ldots S'_{nx}$ — производные по явно входящему x. Так как коэффициенты в (6) при $S'_{1x}, \ldots S'_{nx}$ не зависят от произвольной функции λ, то, если все S'_{ix} не равны нулям,

$$\left(\frac{\partial u_e^i}{\partial S_i}\right) = \frac{\partial u_e^i}{\partial S_2} = \ldots = \frac{\partial u_e^i}{\partial S_n} = 0,$$

т. е. $u_e^i = A_e^i$ не зависит от $a_1, a_2, \ldots a_n$. Отсюда легко заключить, что $y = f\,(S_1,\ B_2\ S_2 + \ldots + B_n\ S_n)$, т. е. интеграл дифференциального уравнения (I) зависит по существу только от одной операции первого порядка и от одной операции второго порядка.

h) Прежде чем перейти к дальнейшим более общим предположениям, вернемся к случаю одной операции первого порядка и одной операции второго порядка и предположим, что интеграл уравнения зависит, кроме того, явно от x и λ:

$$y = f\,(S_1,\ S_2,\ x,\ \lambda).$$

Так как должно существовать тождество

$$f\,(S_1,\ S_2,\ x,\ \lambda) = \Phi\,(g\,(a_1,\ a_2),\ x,\ \lambda) \text{ и}$$

так как S_1 и S_2 содержат соответственно a_1 и a_2, как аддитивные постоянные, то интеграл должен иметь следующий вид:

$$y = f\,(g(S_1,\ S_2),\ x,\ \lambda),$$

что позволяет заменою зависимого переменного привести этот случай к случаю, уже рассмотренному выше.

Последнее замечание дает возможность рассмотреть более общие предположения относительно вида интегралов.

i) Пусть

$$y = f(S_1, S_2, \ldots S_k; S_{k+1}, S_{k+2} \ldots S_n),$$

где $S_1, S_2, \ldots S_k$ — операции первого порядка, $S_{k+1}, \ldots S_n$ — операции второго порядка.

Придавая определенные значения константам $a_2, \ldots a_k$, мы приходим к рассмотренному уже случаю; откуда следует, что f зависит только от одной операции второго рода. Исходя из вида $y=f(S_1, \ldots S_k; S_{k+1})$ легко получаем, что интеграл зависит только от одной операции первого порядка.

h) *Покажем теперь, что интеграл уравнения (I) не может содержать операции выше второго порядка.*

Для этого достаточно показать, что интеграл вида

$$y=f(S_1, S_2, S_3), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

где S_1, S_2, S_3 операция соответственно первого, второго и третьего порядка, может быть представлен, как функция операций только первого и второго порядков.

Система (3) в случае (7) будет состоять из двух тождеств:

$$\frac{\partial f}{\partial S_2}=\left(c_3^2-\frac{\partial S_3}{\partial S_2}\right)\frac{\partial f}{\partial S_3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_1}=\left(c'_3-c_3^2\frac{\partial S_2}{\partial S_1}-\frac{\partial S_3}{\partial S_1}\right)\frac{\partial f}{ds_3}.$$

Из первого мы получим:

$$u=\frac{\frac{\partial f}{\partial S_2}}{\frac{\partial f}{\partial S_3}}=c_3^2-\frac{\partial S_3}{\partial S_2}. \qquad \text{Откуда } \frac{\partial u}{\partial S_3}=\frac{\partial c_3^2}{\partial a_3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_1\,\partial S_3}\right)S'_{1x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_2\,\partial S_3}\right)S'_{2x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial S_3{}^2}\right)S'_{3x}=0.$$

Откуда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial S_2}=A \qquad \text{и, следовательно,}$$

$$y=F(I_3\,e^{-I_2}),$$

но выражение

$$I_3\,e^{-I_2}$$

должно зависеть только от одного постоянного, следовательно

$$\frac{\partial I_2}{\partial a_2}-I_3=c_3^2,$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial a_1}-c_3^2\frac{\partial I_2}{\partial a_1}=c'_3$$

откуда и вытекает, что I_3 не является операцией третьего порядка.

Рассматривая возможные виды интегралов дифференциального уравнения (I), мы пришли к следующему результату:

Чтобы уравнение 1-го порядка, содержащее произвольную функцию, могло интегрироваться в квадратурах, необходимо и достаточно, чтобы путем замены зависимого переменного это уравнение преобразовывалось к линейному [1]).

---

[1]) Fortschritte der Mathematik 17 (1885), стр. 305.

Sur les intégrales d'équation differentielle, l'intégration de laquelle se ramène aux quadratures

E. Aravysky (Tomsk)

Soient

$$\int \varphi_i(x, \lambda) + a_1 = S^i_1 \text{ une opération du premier ordre,}$$

$$\int \Psi_i\,(x, \lambda, a_1) + a_2 = S^i_2 \text{ une opération du deuxième ordre etc.,}$$

$$\lambda \text{ — une fonction arbitraire.}$$

Nous supposons que l'integration de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda) \qquad \text{(I)}$$

se ramène à des quadratures. Alors les intégrales de cette équation possèdent des propriétés suivantes.

Si l'intégrale ne depend que de quelques opérations du premier ordre, toutes ces opérations sont des combinaisons linèaires à coefficients constants de l'une d'elles.

L'équation (I) ne peut pas avoir une intégrale dépèndant seulement d'une opération du deuxième ordre.

Si l'intégrale contient quelques opérations du premier et du deuxième ordre, on peut les exprimer par une opération du premier ordre J_1 et par une opération du deuxième ordre J_2, où $I_2 = \int e^{J_1} F(x)\,dx$ Dans ce cas l'intégrale se ramène à la forme

$$y = J_2 e^{I_1}.$$

L'intégrale de l'équation (I) ne peut contenire des opérations d'ordre supérieur au deuxième.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ S. LIE

Б. А. ФУКС (Томск)

В настоящей заметке дается некоторое обобщение одного результата S. Lie, касающегося вопроса об определении преобразований перестановочных с преобразованиями данной группы [1]). Здесь этот результат обобщается для случая задачи определения преобразований, оставляющих данную группу инвариантной.

Пусть группа G задана своими б. м. преобразованиями $X_1 f, \dots X_r f$, при чем пусть, как всегда:

$$(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f,$$

$$c_{iks} + c_{kis} = 0 \quad \dots \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum_{k=1}^{r} c_{pqk} c_{kst} + c_{spk} c_{kqt} + c_{qsk} c_{kpt} = 0; i, k, p, q, s, t, = 1, 2, \dots, r.$$

Задача об определении преобразований, оставляющих данную группу инвариантной, очевидно сводится к интегрированию дифференциальных уравнений:

$$(X_i, Z) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} X_k f; i = 1, 2, \dots, r. \quad \dots \dots \dots (2)$$

Здесь λ_{ik} не являются произвольными, а удовлетворяют соотношениям:

$$\sum c_{pqk} \lambda_{kt} + c_{kpt} \lambda_{qk} - c_{kqt} \lambda_{pk} = 0, \quad \dots \dots \dots (3)$$

получающимся из тождества Jacobi, примененного к преобразованиям Zf, $X_k f$, $X_i f$. В этой заметке мы не будем изучать возникающих отсюда структурных связей между группой G и преобразованиями типа Zf [2]), а рассмотрим вопрос об интегрировании системы (3) вполне аналогично тому, как это сделано S. Lie по отношению к дифференциальным уравнениям

$$(X_i, Z) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, r$$

определяющим преобразования перестановочные с данной группой.

---

[1]) См. s. Lie—Engel. Theorie der Transformationsgruppen Bd. I стр. 367—377.

[2]) По этому вопросу см мою статью „О преобразованиях, оставляющих данную группу инвариантной" в этом же журнале (стр. 57—68).

Пусть группа G конкретизирована в пространстве n переменных и пусть:

$$X_i f = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}\,;\; Zf = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, r \\ k = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

ξ_{ik} и ζ_k — функции от переменных, обладающие обычными для теории непрерывных групп S. Lie свойствами.

Тогда уравнения (2) запишутся так:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial \zeta_p}{\partial x_k} - \sum^{n} \zeta_k \frac{\partial \xi_{ip}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}\, \xi_{kp} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad (2')$$

Поступая вполне аналогично тому, как это делается S. Lie, мы положим, что уравнения:

$$\zeta_i = \omega_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

определяют некоторую систему решений уравнений (3″).

Тогда равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial \omega_p}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \frac{\partial \xi_{ip}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}\, \xi_{kp} = 0$$

выражают собственно тот факт, что уравнения (5) между $2n$ переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\zeta_1, \zeta_2 \ldots, \zeta_n$ допускают серию из r преобразований:

$$W_k f = X_k f + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{e=1}^{n} \zeta_e \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_e} + \sum_{m=1}^{r} \lambda_{km}\, \xi_{mk} \right] \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \; . \; . \; (6)$$

Эти преобразования членом — $\sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{r} \lambda_{km}\, \xi_{mk} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}$ отличаются от преобразований, рассмотренных в указанном месте S. Lie.

Содержанием нашего обобщения будет являться доказательство того факта, что также как в рассматриваемой теории S. Lie, серия (6) образует группу в пространстве $2n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\zeta_e, \ldots, \zeta_n$, изоморфную с данной группой G.

Для доказательства этого составим скобки (W_i, W_k). После некоторых преобразований использования (1), мы получим (рассматривая ζ_i, как независимые переменные):

$$(W_k, W_j) = \sum_{\sigma=1}^{r} c_{kj\sigma}\, X_\sigma f + \sum_{i,\mu=1}^{n} \zeta\mu \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\sum_{e=1}^{n} \left(\xi_{ke} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_e} - \xi_{je} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_e} \right) \right] +$$

$$\sum_{m=1}^{r} \lambda_{jm} \sum_{i,\rho=1}^{n} \left(\xi_{k\rho} \frac{\partial \xi_{mi}}{\partial x_\rho} - \xi_{m\rho} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\rho} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} -$$

$$-\sum_{m=1}^{r}\lambda_{km}\sum_{i,\rho=1}^{n}\left(\xi_{j\rho}\frac{\partial\xi_{mi}}{\partial x_\rho}-\xi_{m\rho}\frac{\partial\xi_{ji}}{\partial x_\rho}\right)\frac{\partial f}{\partial\zeta_i}=$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{r}c_{kj\sigma}\left[X_\sigma f+\sum_{\mu,i=1}^{n}\left(\zeta_\mu\frac{\partial\xi_{\sigma i}}{\partial x_\mu}\right)\frac{\partial f}{\partial\zeta_i}\right]-\sum_{m,\rho}^{1-r}\lambda_{km}c_{jm\rho}\sum_{i=1}^{n}\xi_{\rho i}\frac{\partial f}{\partial\zeta_i}+$$

$$+\sum_{m,\rho}^{1-r}\lambda_{km}c_{km\rho}\sum_{i}^{1-m}\xi_{\rho i}\frac{\partial f}{\partial\zeta_i}.$$

Далее, пользуясь (3), для преобразования последних 2 членов в полученном выражении, мы получаем:

$$(W_k, W_j)=\sum_{\sigma=1}^{r}c_{kj\sigma}\left[X_\sigma f+\sum_{i=1}^{s}\left[\sum_{\mu=1}^{s}\zeta_\nu\frac{\partial\xi_\sigma}{\partial x_\nu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{m=1}^{r}\lambda_{\sigma m}\xi_{mi}\right]\frac{\partial f}{\partial\zeta_i}\right.=\sum_{\sigma=1}^{r}c_{kj\sigma}W_\sigma f.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7)$$

Этим и доказывается высказанное положение.

Полученное предложение позволяет без затруднений сделать заключения о характере решений дифференциальных уравнений (2), аналогичные соответствующим результатам S. Lie, касающимся уравнений $(X_i, Z)=0$.

Verallgemeinerung eines Theorems von S. Lie.

B. Fuchs (Tomsk)

In dieser Note wird ein Satz von S. Lie, über Transformationen welche mit einer Gruppe vertauschbar sind, auf Transformationen welche eine Gruppe invariant lassen, verallgemeinert.

EIN ZAHLENTHEORETISCHER SATZ

Von P. ERDÖS UND P. TURAN (Budapest)

(Auszug aus einem Briefe an N. P. Romanoff).

...In Ihrer Arbeit [1]) steht folgender Satz:
Es sei $l(k)$ die kleinste positive ganze Zahl, für die $a^{l(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{\substack{k=1 \\ (a,k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)^2}{kl(k)}$.

Es ist uns gelungen allgemein die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kl(k)},$$

wo $\varepsilon > 0$, folgendermassen zu beweisen:

$l(k)$ sei die kleinste ganze Zahl, für welche $a^{l(k)} \equiv 1$ $(mod\, k)$, wo a eine fixe ganze Zahl ist. Dann ist $\sum_{\substack{k=1 \\ (a,k)=1}}^{\infty} \frac{1}{kl(k)^{\varepsilon}}$ konvergent.

Wir teilen die Zahlen in zwei Gruppen. Für die Zahlen der ersten Gruppe sei $l(k) \geqslant (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$, für die der zweiten Gruppe hingegen $l(k) < (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Für die k der ersten Gruppe ist $\sum_{\substack{k=1 \\ (a,k)=1}}^{\infty}{}' \frac{1}{kl(k)^{\varepsilon}} < \sum_{k=1} \frac{1}{k \log^2 k}$ konvergent, sodass wir uns nur mit dem zweiten Teil beschäftigen müssen. Wir beweisen, dass $\sum \frac{1}{k}$, ausgedehnt, auf diese k, konvergent ist. Wir beweisen dies, indem wir zeigen, dass die Anzahl der in die zweite Gruppe gehörigen $k \leqslant n$ für jedes n von der Grössenordnung $O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ ist, woraus sich die Konvergenz des $\sum'' \frac{1}{k}$ unmittelbar ergibt. Es sei nun n eine beliebige, aber fixe,

[1]) „Uber einige Sätze der additiven Zahlentheorie" Mathematische Annalen 109, 1934, S. 668–678.

Zahl; wir vergrössern die Anzahl der Zahlen der zweiten Gruppe, wenn wir jene k Zahlen ($k < n$) in Betracht ziehen, für die $l(k) < (\log n)^{\frac{2}{\varepsilon}}$. Als Anzahl dieser Zahlen erhalten wir $O\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right)$.

Nach Definition sind diese k Zahlen unter den Teilern der Zahlen $(a-1), (a^2-1)\ldots, a^{\left[(\log n)^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]}-1$; also vergrössern wir die Anzahl der obigen Zahlen k, wenn wir diejenigen Zahlen bis n nehmen, die aus den verschiedenen Primfaktoren der Zahlen $(a-1), (a^2-1), \ldots\ldots (a^{\left[(\log n)^{\frac{2}{\varepsilon}}\right]}-1)$ zusammengesetzt sind. Es ist klar, dass die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der Zahl k kleiner ist als $C_1 \log k$, also enthält ein Glied der obigen Zahlenreihe höchstens $O(\log^{\frac{2}{\varepsilon}} n)$ verschiedene Primfaktoren; infolgedessen ist die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren $O(\log^{\frac{4}{\varepsilon}} n)$.

Nun beweisen wir folgenden Satz. Wie wir auch $[\log^{\frac{4}{\varepsilon}} n]$ Primzahlen angeben, ist die Anzahl derjenigen Zahlen, die nur aus diesen Primzahlen zusammengesetzt sind $O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$. Unter diesen Zahlen gibt es nämlich solche, bei denen 1. die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren $\geqq \sqrt{\log n}$ ist und 2. bei denen die Zahl der verschiedenen Primfaktoren $< \sqrt{\log n}$ ist. Die Anzahl der Teiler der Zahlen, der ersten Gruppe ist offensichlich $> 2^{\sqrt{\log n}}$; oder wenn wir mit $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n bezeichnen, $O(n \log n) = \sum_1^n d(n) > R(n)\, 2^{\sqrt{\log n}}$ und daraus $R(n) = O\left(\frac{n \log n}{\sqrt{\log n}}\right) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$.

Für die Zahlen der zweiten Gruppe ist die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren $< \sqrt{\log n}$. Ein Primfaktor kann höchstens mit dem Exponent $[2 \log n]$ vorkommen, denn $2^{2 \log n} > n$. Also müssen wir aus $\left[(\log n)^{\frac{4}{\varepsilon}+1}\right]$ Primzahlen und Primzahlpotenzen die Kombinationen 1, 2;$\ldots$ $[\sqrt{\log n}]$ — ter Ordnung bilden, und auf diese Weise erhalten wir alle Zahlen der zweiten Gruppe. Die Anzahl dieser Zahlen ist offenbar $O\left(e^{\log\log n \left(\frac{4}{\varepsilon}+1\right)\sqrt{\log n}}\right) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ q. e. d.

Es wäre vielleicht interessan, $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ (a,\,k)=1}}^{n} l(k)$ abzuschätzen. Es scheint wahrscheinlich, dass die obige Summe $O(n^2)$ ist. Der Beweis scheint aber sehr schwer zu sein.

Об одной теореме из теории чисел

П. Эрдеш и П. Туран (Будапешт)

(из письма к Н. П. Романову).

В настоящей заметке доказывается следующее предложение: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,l(k)^{\varepsilon}}$, где $l(k)$ означает наименьшее из чисел m, удовлетворяющих сравнению $a^m \equiv 1 \pmod{k}$, сходится при всяком $\varepsilon > 0$.

Это предложение является обобщением аналогичной теоремы, доказанной Н. Романовым в его указанной выше работе.

ХРОНИКА

Научно-Исследовательский Институт Математики и Механики при Томском Государственном Университете под этой рубрикой публикует отчеты о работах Института, выдержки из программы Института, построенной на принципе планирования, и аналогичные сообщения.

В этом номере помещаем программу, положенную проф. Бергманом в основу работ, проводящихся под его руководством в 1935 г. Изучаются следующие вопросы теории функций двух комплексных переменных:

1) Не-эвклидова метрика областей, инвариантная при преобразовании этих областей при помощи пары аналитических функций двух комплексных переменных, а также ее применения в теории функций двух комплексных переменных.

2) Целые и мероморфные функции двух переменных. Они изучаются при помощи так называемых особых (двухмерных) граничных поверхностей. Эти последние находятся на трехмерной границе четырехмерной области определения функций двух комплексных переменных и играют с точки зрения теории функции двух комплексных переменных ту же самую роль, что граничные кривые в теории функций одной комплексной переменной[1]).

3) В связи с этим производятся работы по применению теории функций многих переменных к дифференциальным уравнениям и к вопросам прикладной математики.

В отношении пункта 1 изложенной программы, более подробные указания даны в докладе проф. Бергмана, помещенном в этом выпуске журнала (стр. 69). Более подробные сведения относительно пунктов 2 и 3 будут даны в следующих номерах нашего журнала.

[1]) См. работы Math. Zeitsch. 39, (1933), 76—94; Math. Annalen 109 (1934) 324—348; Comptes Rendus 197 (1934), 1743--1745 и 198 (1934) 340—342.

CHRONIK DES INSTITUTS.

Das Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik an der Staatsuniversität Tomsk wird unter dieser Rubrik Berichte über seine Arbeit, Auszüge aus seinem, gemäss dem Planierungsprinzip aufgestellten Programm und ähnliche Mitteilungen veröffentlichen.

In diesem Heft teilen wir das Programm mit, das Prof. S. Bergmann den unter seiner Leitung auszuführenden Arbeiten für das Jahr 1935 zu Grunde legt.

Es sollen Untersuchungen zur Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen durchgeführt werden. Erforscht werden vor allem:

I. Die Nicht-Euklidische Metrik von Bereichen, die bei der Abbildung dieser Bereiche durch Paare analytischer Funktionen zweier Veränderlicher invariant bleibt, sowie ihre Anwendung in der Theorie dieser Funktionen.

II. Ganze und meromorphe Funktionen zweier Veränderlicher. Sie werden der Untersuchung unterworfen unter Heranziehung von sogenannten „ausgezeichneten (2-dimensionalen) Randflächen".

Diese liegen auf dem (3-dimensionalen) Rand des (4-dimensionalen) Definitionsbereichs der Funktion von zwei komplexen Veränderlichen und spielen in der Theorie der Funktionen von zwei Veränderlichen eine analoge Rolle, wie die Randkurven in der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen.

III. In Verbindung hiermit werden Arbeiten zur Anwendung der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher im Gebiete der Differentialgleichungen stehen, ebenso auch in der angewandten Mathematik vermittelst Methoden, die in Verbindung mit der Nicht-Euklidischen Metrik stehen.

Bezüglich Punktes I. obigen Programms finden sich nähere Angaben in dem Vortragsbericht von Prof. Bergmann in diesem Hefte der Zeitschrift, S. 69.

[illegible] Mitteilungen bezüglich Punktes II und III werden in [illegible] späteren Hefte folgen.

СОДЕРЖАНИЕ.
INHALT.
TABLE DES MATIÈRES.

Уполкрайлито № 1399 14/X 34 г.
Сдано в работу 20/X 1934 г.
Подписано к печати 15/III 35 г.
Статф. 155×230/16

Типогр. зн. в печатн. л. 50752
Об'ем 6³/₄ печатн. л.
Тираж 500 экз.
Заказ № 2738—1934 г.

Типография изд. „Красное Знамя" Томск, Советская ул., № 3

10,00

~~Цена 5~~ руб.