BULLETIN OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS INSTITUTE OF THE STATE KUIBUSHEV UNIVERSITY IN TOMSK.

Vol. III. No. 1.

BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE A L'UNIVERSITÉ KOUYBYCHEFF DE TOMSK.

Vol. III. Fasc. 1.

ИЗВЕСТИЯ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРИ ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. В. В. КУЙБЫШЕВА

ТОМ ТРЕТИЙ
ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

ТОМСК Издание Томского Госуд. Университета 1946

ОГЛАВЛЕНИЕ

98, 204,

К300079
Сдано в набор 31/VIII-1940 г.
Подп. к печати 11/V-1946 г.
Заказ № 1806

Знаков в печ. л. 48000
Объем 12,5 п. л., авт. 15.
Тираж 460 экз.

Томск, типогр. изд-за „Красное Знамя". Советская, 47.

Ф. Э. МОЛИН

25 декабря 1941 года на 80 году жизни, после продолжительной болезни скончался заслуженный деятель науки, доктор физико-математических наук, профессор Томского Государственного университета Федор Эдуардович Молин.

Окончив физико-математический факультет Юрьевского (Дерптского) университета, Федор Эдуардович специализировался по астрономии. За диссертацию, посвященную определению элементов кометы 1880^{III}, он получил степень кандидата астрономических наук. Результаты Федора Эдуардовича были опубликованы в журнале Astron. Nachr. 1883. Но вскоре предметом усиленных занятий Федора Эдуардовича становится математика, главным образом теория эллиптических функций и алгебра, а несколько позднее—теория гиперкомплексных чисел и теория групп. Полученные Ф. Э. Молиным результаты соста-

...тических дисциплин на физико-математическом [illegible] евского университета. К этому периоду жизни Федора Эдуардовича относится ряд его научных работ, в которых он, на основании развитой им ранее общей теории числовых систем, получает ряд ценных свойств групп подстановок и исследует один из важнейших и труднейших вопросов теории групп—вопрос о представлениях групп. В 1900 г. Федор Эдуардович занял кафедру математики в Томском технологическом институте, где он и проработал затем 12 лет. Тотчас по прибытии в Томск Федор Эдуардович всецело отдается делу организации преподавания высшей математики в институте; подготовляет и выпускает (сначала в литографированном, а затем в печатном виде) свой курс лекций по математическому анализу. Еще большей

ОГЛАВЛЕНИЕ

Помещенные в этом выпуске работы были сданы в печать в августе 1940 г. Осенью 1941 г. Научно-Исследовательский Институт Математики и Механики был влит в Сибирский Физико-Технический Институт при Томском Государственном Университете и стал функционировать в виде отдела математики и механики. Поэтому выпуск в свет настоящего сборника, сильно задержавшийся в связи с военными событиями, осуществлен редколлегией „Трудов СФТИ".

Все запросы и всю переписку по поводу этого сборника следует направлять по адресу: Томск, площадь Революции № 1, СФТИ.

К300079
Сдано в набор 31/VIII-1940 г.
Подп. к печати 11/V-1946 г.
Заказ № 1806

Знаков в печ. л. 48000
Объем 12,5 п. л., авт. 15.
Тираж 460 экз.

Томск, типогр. изд-за „Красное Знамя", Советская, 47.

Ф. Э. МОЛИН

25 декабря 1941 года на 80 году жизни, после продолжительной болезни скончался заслуженный деятель науки, доктор физико-математических наук, профессор Томского Государственного университета Федор Эдуардович Молин.

Окончив физико-математический факультет Юрьевского (Дерптского) университета, Федор Эдуардович специализировался по астрономии. За диссертацию, посвященную определению элементов кометы 1880^{III}, он получил степень кандидата астрономических наук. Результаты Федора Эдуардовича были опубликованы в журнале Astron. Nachr. 1883. Но вскоре предметом усиленных занятий Федора Эдуардовича становится математика, главным образом теория эллиптических функций и алгебра, а несколько позднее—теория гиперкомплексных чисел и теория групп. Полученные Ф. Э. Молиным результаты составили содержание его магистерской (1885) и докторской (1892) диссертаций, а также и ряда других работ, опубликованных в различных журналах. Главная работа Федора Эдуардовича—его докторская диссертация Über Systeme höherer komplexen Grössen (Math. Ann. 1892)—посвящена построению основ теории гиперкомплексных чисел. Новые понятия, введенные Федором Эдуардовичем в этой работе, а также полученные им здесь весьма важные общие результаты, делают ее одной из основных работ в этой области. Федор Эдуардович заслуженно может считаться одним из основателей теории гиперкомплексных чисел, что неоднократно отмечалось многими учеными, в том числе такими корифеями, как Фробениус и Софус Ли. Получение Федором Эдуардовичем степеней сначала магистра, а затем доктора чистой математики открыло ему доступ к преподаванию математических дисциплин на физико-математическом факультете Юрьевского университета. К этому периоду жизни Федора Эдуардовича относится ряд его научных работ, в которых он, на основании развитой им ранее общей теории числовых систем, получает ряд ценных свойств групп подстановок и исследует один из важнейших и труднейших вопросов теории групп—вопрос о представлениях групп. В 1900 г. Федор Эдуардович занял кафедру математики в Томском технологическом институте, где он и проработал затем 12 лет. Тотчас по прибытии в Томск Федор Эдуардович всецело отдается делу организации преподавания высшей математики в институте; подготовляет и выпускает (сначала в литографированном, а затем в печатном виде) свой курс лекций по математическому анализу. Еще большей заслугой Федора Эдуардовича является организация им регулярного студенческого практикума по математике,—что в те времена представляло собой педагогическое новшество,—и издание ежегодных выпусков сборников задач по дифференциальному и интегральному исчислению, систематически подобранных параллельно читавшемуся им курсу. С 1914 г. Федор Эдуардович состоит профессором Сибирских высших женских курсов, а с 1917 г. профессором открывшегося тогда физико-математического факультета Томского Государственного университета. Нельзя также не отметить деятельности Федора Эдуардовича в деле создания математической библиотеки при Томском индустриальном институте, а также в деле организации и руководства Томским научным математическим журналом „Известия НИИММ'а при ТГУ", в деле выращивания новых научных кадров, в организации семинаров по научным проблемам математики. Проф. Ф. Э. Молин не был кабинетным ученым—он живо интересовался всеми вопросами общественной жизни страны. Всем известна его солидарность с революционным движением студенчества, вызвавшая репрессии к нему со стороны царского правительства. Научная, педагогическая и общественная деятельность Федора Эдуардовича, освещенная здесь далеко не полно, была высоко оценена Советским Правительством, присвоившим ему звание заслуженного деятеля науки.

Память о проф. Молине—ученом, организаторе, общественном деятеле, будет жива в сердцах советских ученых.

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ОБОБЩЕНИЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. С. Кованько (Иваново).

ВВЕДЕНИЕ.

В настоящей работе мы имеем целью провести анализ всех известных обобщений почти-периодических функций, что частично проделано в части наших работ, приведенных в списке прилагаемой литературы; затем мы хотим расположить все классы обобщенных почти-периодических функций в определенном порядке и указать на возможность вставления промежуточных классов.

Из обобщений почти-периодических функций имеются еще функции Урсела, но они стоят несколько в стороне от тех обобщений, кои мы рассматриваем, а потому в настоящем исследовании мы их оставим в стороне. Также мы не рассматриваем наших обобщений (7-в), которые в силу своей широты не представляют достаточного интереса для исследования.

Для упрощения определений и некоторых выводов мы введем общепринятые обозначения в теории обобщенных почти-периодических функций и будем давать определения не в оригинале, а в указанных символах, появившихся несколько позже.

§ 1. Некоторые обозначения, определения, формулы

Пусть $E(a, b)$ обозначает часть линейного множества E на $(-\infty, +\infty)$, заключенную внутри интервала $(a < x < b)$,

$$\text{Полагаем } \delta E(a, b) = \frac{Mes\, E(a, b)}{b-a}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \delta_S^d E &= \underset{-\infty < a < +\infty}{\text{верх. гр.}}\ \delta E(a, a+d) \\ \delta_W E &= \lim_{d \to \infty} \delta_S^d E \\ \delta_B E &= \lim_{T \to \infty} \text{super}\, \delta E(-T, +T) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&D^d_{s_k}[f(x), \varphi(x); E] = \underset{-\infty < a < +\infty}{\text{верх. гр.}} \frac{1}{d} \int\limits_{E(a,\, a+d)} |f(x) - \varphi(x)|^k dx.\\
&D_{W_k}[f(x), \varphi(x); E] = \lim_{d \to \infty} D^d_{s_k}[f(x), \varphi(x); E];\\
&D_{B_k}[f(x), \varphi(x); E] = \lim_{T \to \infty} \text{super} \frac{1}{2T} \int\limits_{E(-T,\, T)} |f(x) - \varphi(x)|^k dx.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Если в частности в обозначениях (2) $E = (-\infty, +\infty)$, то мы их сокращенно условимся писать так:

$$D^d_{s_k}[f(x), \varphi(x)],\ D_{w_k}[f(x), \varphi(x)], D_{B_k}[f(x), \varphi(x)]. \quad (3)$$

Если $\varphi(x) = 0$, то мы примем следующие сокращенные обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\mathfrak{M}}^d_{s_k}(f(x); E) = D^d_{s_k}[f(x), 0; E]\\
&\overline{\mathfrak{M}}_{W_k}(f(x); E) = D_{W_k}[f(x), 0; E]\\
&\overline{\mathfrak{M}}_{B_k}(f(x); E) = D_{B_k}[f(x), 0; E]
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Вводим также следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta^d_S[f(x); \varphi(x); E] = \underset{-\infty < a < +\infty}{\text{верх. гр.}} \frac{1}{d} \int\limits_{E(a,\, a+d)} \frac{|f(x) - \varphi(x)|}{1 + |f(x) - \varphi(x)|} dx\\
&\vartheta_w[f(x); \varphi(x); E] = \lim_{d \to \infty} \vartheta^d_S[f(x), \varphi(x); E]\\
&\vartheta_B[f(x), \varphi(x); E] = \lim_{T \to \infty} \text{super} \frac{1}{2T} \int\limits_{E(-T,\, +T)} \frac{|f(x) - \varphi(x)|}{1 + |f(x) - \varphi(x)|} dx
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

В частности при $E = (-\infty, +\infty)$ мы напишем для них соответственно следующие обозначения:

$$\vartheta^d_s[f(x), \varphi(x)],\ \vartheta_W[f(x), \varphi(x)],\ \vartheta_B[f(x), \varphi(x)]. \quad (6)$$

Введем следующее обозначение:

$$\overline{M}\{a_i\} = \lim \ \text{super} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{i=n} a_i \quad (7)$$

Определение I. $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется S асимптотически ограниченной ($S. a. o.$), если, как бы мало ни было положительное число ε, меньшее 1, и число $d>0$, существует такое число $A>0$, что множество точек E, где $|f(x)|>A$, обладает тем свойством, что $\delta_S^d E<\varepsilon$.

Определение II. $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ называется W асимптотически ограниченной ($W.a.o.$), если, как бы мало ни было $\varepsilon>0 (\varepsilon<1)$, существует такое число $A>0$, что множество точек E, где $|f(x)|>A$, обладает тем свойством, что $\delta_w E<\varepsilon$.

Определение III. $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ называется B асимптотически ограниченной ($B.a.o.$), если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$, существует такое число A, что множество точек E где $|f(x)|>A$, обладает тем свойством, что $\delta_B E<\varepsilon$.

Определение IV. $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ называется S равномерно-суммируемой ($S.p.c.$), если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, и $d>0$, существует такое число $\eta>0$, что $\overline{\mathfrak{M}}_{S_1}^d (f(x); E)<\varepsilon$ при $\delta_S^d E<\eta$.

Определение V. $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ называется W равномерно-суммируемой ($W.p.c.$), если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, существует такое число $\eta>0$, что $\overline{\mathfrak{M}}_{w_1}^d (f(x)); E)<\varepsilon$ при $\delta_w E<\eta$.

Определение VI. $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ называется B равномерно-суммируемой ($B.p.c.$), если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$ существует такое число $\eta>0$, что $\overline{\mathfrak{M}}_{B_1} (f(x); E)<\varepsilon$ при $\delta_B E<\eta$.

Определение VII. Относительно-плотной последовательностью чисел...... $<x_{-3}<x_{-2}<x_{-1}<x_0<x_1<x_2<x_3$.......... называется такая последовательность, что существует число $l>0$ такое, что внутри всякого интервала длины l имеется по крайней мере одно число последовательности.

Определение VIII. Достаточно равномерной последовательностью чисел...... $x_{-3}<x_{-2}<x_{-1}<x_0<x_1<x_2<x_3$....... называется такая последовательность, что существует число $l>0$, обладающее следующим свойством:

Пусть $H(l)$ есть максимальное, а $\nu(l)$ минимальное число чисел последовательности, заключенных внутри любого интервала длины l; тогда $\dfrac{H(l)}{\nu(l)}<2$ при l достаточно-большом.

Отметим в заключение некоторые неравенства, вытекающие из неравенства Hölder'а и Минковского.

Пусть $p>1$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&[\overline{\mathfrak{M}}_{S_p}^d (f+\varphi; E)]^{\frac{1}{p}} \leqslant [\overline{\mathfrak{M}}_{S_p}^d (f; E)]^{\frac{1}{p}} + [\overline{\mathfrak{M}}_{S_p}^d (\varphi; E)]^{\frac{1}{p}};\\
&[\mathfrak{M}_{W_p} (f+\varphi; E)]^{\frac{1}{p}} \leqslant [\mathfrak{M}_{W_p} (f; E)]^{\frac{1}{p}} + [\overline{\mathfrak{M}}_{W_p} (\varphi; E)]^{\frac{1}{p}};\\
&[\overline{\mathfrak{M}}_{B_p} (f+\varphi; E)]^{\frac{1}{p}} \leqslant [\overline{\mathfrak{M}}_{B_p} (f; E)]^{\frac{1}{p}} + [\overline{\mathfrak{M}}_{B} (\varphi; E)]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Пусть p и q положительные числа, большие 1 и такие, что

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогда имеют место неравенства:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{M}}^{d}_{S_1}[f\cdot\varphi;E] &\leqslant [\overline{\mathfrak{M}}^{d}_{S_p}(f;E)]^{\frac{1}{p}}\cdot[\overline{\mathfrak{M}}^{d}_{S_q}(\varphi;E)]^{\frac{1}{q}}\\
\overline{\mathfrak{M}}_{W_1}[f\cdot\varphi;E] &\leqslant [\overline{\mathfrak{M}}_{W_p}(f;E)]^{\frac{1}{p}}\cdot[\overline{\mathfrak{M}}_{W_q}(\varphi;E)]^{\frac{1}{q}}\\
\overline{\mathfrak{M}}_{B_1}[f\cdot\varphi;E] &\leqslant [\overline{\mathfrak{M}}_{B_p}(f;E)]^{\frac{1}{p}}\cdot[\overline{\mathfrak{M}}_{B_q}(\varphi;E)]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

В частности, при $p=q=2$ мы имеем неравенства Шварца. Укажем еще на такие неравенства:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta^{d}_{S}[f(x),\varphi(x);E] &\leqslant \vartheta^{d}_{S}[f(x),0;E]+\vartheta^{d}_{S}[0,\varphi(x);E]\\
\vartheta_{W}[f(x),\varphi(x);E] &\leqslant \vartheta_{W}[f(x),0;E]+\vartheta_{W}[0,\varphi(x);E]\\
\vartheta_{B}[f(x),\varphi(x);E] &\leqslant \vartheta_{B}[f(x),0;E]+\vartheta_{B}[0,\varphi(x);E]
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

В заключение введем еще одно сокращенное обозначение для тригонометрического полинома.

Положим $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{k=n}a_k e^{-i\lambda_k x}$, где λ_k действительные количества.

§ 2. Краткий обзор различных обобщений почти периодических функций

Первые обобщения почти периодических функций принадлежат В. В. Степанову [1]) и А. С. Безиковичу [2]), а затем уже Вейлю [3]). К этим обобщениям примыкают наши обобщения в смысле некоторого расширения классов, принадлежащих указанным авторам.

Следует отметить важные результаты Франклина [4]), который занялся впервые задачей апроксимирования обобщенных почти-периодических функций, если не считать определения, данного Безиковичем. Следует также отметить работу Шмидта [5]), которая тесно примыкает к работе Вейля.

В этих различных обобщениях ставились различные задачи, но подход был различен. В общем мы должны отметить две точки зрения в обобщениях почти-периодических функций. Одна точка зрения основана на задаче апроксимирования функции ря-

---

[1])—1. [2])—3. [3])—2. [4]) 7—a, c, d. [4])—4, [5])—5.

дами квази-периодических функций. Она принадлежит А. С. Безиковичу, а другие обобщения Вейля и Степанова основаны на теории почти периодов без каких-либо вопросов апроксимирования.

Наши исследования дополнили классы обобщенных п. п. ф. в пространстве измеримых функций, а также в пространстве функций с суммируемой p-й степенью ($p > 1$). В работах Безиковича и Бора [1]) эти последние наши классы обобщенных функций были позднее обозначены соответственно через S_p. W_p и B_p применительно к обобщениям Степанова, Вейля и Безиковича.

Для классов измеримых функций мы вводим соответственно обозначения $\widetilde{S}$, $\widetilde{W}$ и $\widetilde{B}$[2]).

Мы разберем в отдельности различные обобщения Степанова, Вейля и Безиковича с теми дополнениями, которые были нами сделаны.

§ 3. Обобщения типа Степанова

Определение $\widetilde{S}$[3]). Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется $\widetilde{S}$ почти-периодической ($\widetilde{S}$ *п. п.*), если, как бы мало ни было положительное число ε, меньшее 1, и число $d > 0$, существует относительно плотное множество чисел τ (почти-периоды) таких, что $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ для всех значений x, исключая, быть может, множества E_τ такого, что

$$\delta_S^d E_\tau < \varepsilon.$$

Отметим, что сумма и произведение двух функций $\widetilde{S}$. *п. п.* есть опять функция $\widetilde{S}$ *п. п.*

Функция S *п. п.* есть функция S. *a. o.*

Определение S_p[4]). Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется S_p почти-периодической (S_p *п. п.*), если, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, и число $d > 0$, существует относительно плотное множество чисел (почти-периодов) τ таких, что

$$D_{Sp}^d\,[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

Легко видеть, что сумма двух функций S_p *п. п.* есть функция S_p *п. п.*, а также, что всякая S_p *п. п.* функция есть функция S. *п. п.*

ТЕОРЕМА I_S[4]). *Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция* $f(x)$ ($\widetilde{S}$ *п. п.*) *была бы также функцией* (S_p *п. п.*), *состоит в том чтобы* $|f(x)|^p$ *была бы* S *p. c.*

---

[1])—6. [2]) 7 *g*. [3]) 1. [4]) 7—*e*.
[1]) 7—(частный случай $p=1$, $p=2$ см. 1).

Докажем еще одну важную теорему, вытекающую из 1-го неравенства (9) § 1 и из теоремы I_S.

ТЕОРЕМА II_S[1]). *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ две функции, из коих первая S_p^1 п. п., а вторая S_q п. п., причем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то произведение $f(x)$ и $\varphi(x)$ есть функция S п. п.*

Доказательство. Из I_S вытекает, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть S п. п. функции, а потому $f(x).\varphi(x)$ также $\widetilde{S}$ п. п. Кроме того $|f(x)|^p$ и $|f(x)|^q$ суть функции $S. p. c.$, а потому, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, мы можем подобрать $\eta > 0$ так, что

$$\overline{\mathfrak{M}}^d_{Sp}(f, E) < \varepsilon^{\frac{p}{2}} \text{ и } \overline{\mathfrak{M}}^d_{Sq}(\varphi; E) < \varepsilon^{\frac{q}{2}}$$

при $\delta^d_S E < \eta$, а потому, в силу первого неравенства (9) § 1, мы заключаем, что

$$\overline{\mathfrak{M}}_{S_1}(f\varphi; E) < \varepsilon.$$

Следовательно, $f\varphi$ есть функция $S. p. c.$, а потому, в силу теоремы I_S, она S_1 п. п. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА III_S[2]) *Необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ была функцией $\widetilde{S}$ п. п., состоит в том, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и $d > 0$, существует относительно плотное множество почти периодов τ таких, что*

$$\delta^d_S[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА IV_S[3]). *Необходимое и достаточное условие чтобы $f(x)$ была функцией $\widetilde{S}$ п. п., состоит в том, что, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$ и число $d > 0$, существует такой тригонометрический полином $P_n(x)$, что имеет место неравенство: $|f(x)-P_n(x)| < \varepsilon$ для всех значений x, исключая, быть может, множества E значений x такого, чтобы $\delta^d_S E < \varepsilon$.*

В силу теоремы IV_S можно видоизменить теорему III_S следующим образом:

ТЕОРЕМА V_S[4]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ была функцией S_p п. п., состоит в том, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и число $d > 0$, существует такой тригонометрический полином $P_n(x)$, что*

$$D^d_{Sp}[f(x), P_n(x)] < \varepsilon,$$

[1]) Не опубликовано. [2]) 7—g. [3])—4.
[4]) 7—.

ТЕОРЕМА VIs[1]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы функция $f(x)$ была бы S_pп.п., состоит в том, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и каково бы ни было число $d > 0$, существует такой тригонометрический полином $P_n(x)$, что*

$$D^d{}_{S_p}[f(x), P_n(x)] < \varepsilon.$$

Из теоремы VIs вытекает интересное и простое следствие. Мы, очевидно, можем построить последовательность полиномов, которая сходится определенным образом к $f(x)$.

Мы, очевидно, имеем для всякого значения k такой тригонометрический полином $P_{n_k}(x)$, что $|f(x) - P_{n_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{2^k}$ для всех значений x, исключая, быть может, множества E_k такого, что $\delta_S^d E_k < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Составим множество $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots$

Очевидно, что $\delta E(a, a+d) \leqslant \delta E_1(a, a+d) + \delta E_2(a\, a+d) + \ldots\ldots$ при любом a и так как $\delta E_k\,(a, a+d) \leqslant \delta_S^d E_k < \frac{\varepsilon}{2^k}$, то отсюда ясно, что $\delta E(a, a+d) < \sum\limits_1^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$, откуда следует что $\delta_S^d F < \varepsilon$.

Вне множества E мы имеем, очевидно, равномерную сходимость. Итак мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА VIIs[2]). *Если $f(x)$ есть функция S п.п., то, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$ и каково бы ни было $d > 0$, существует последовательность тригонометрических полиномов $P_{n_1}(x)$, $P_{n_2}(x), \ldots$ которая сходится равномерно к $f(x)$, исключая, быть может, множества E такого, что $\delta_S^d E < \varepsilon$.*

В частности, если $f(x)$ ограниченная функция, то можно построить последовательность, указанную в теореме VIIs, так, что все ее полиномы ограничены в их совокупности. На доказательстве этого предложения мы не останавливаемся, ограничившись лишь замечанием, что метод доказательства аналогичен приведенному нами в нашей статье 7/-е для приближений функций $\tilde{B}$ *п.п.*

§ 4. Обобщения типа Вейля

Определение $\tilde{W}$[3]). Функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется $\tilde{W}$ почти-периодической ($\tilde{W}$ *п.п.*), если, как бы мало ни

[1]) —6. (Частный случай $p = 1$. $p = 2$ см. 4).

[2]) Не опубликовано. [3]) 7 — d.

было положительное число $\varepsilon < 1$, существует относительно плотное множество чисел (почти-периодов) τ таких, что $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$ для всех значений x, исключая, быть может, множества E_τ такого, что $\delta_W E_\tau < \varepsilon$.

Отметим, что сумма и произведение двух функций $\tilde{W}$. *п.п.* есть опять функция $\tilde{W}$.*п.п.*

Функция $\tilde{W}$. *п.п.* есть функция W. *а. о.*

Определение W_p[1]). Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется W_p почти-периодической (W_p *п.п.*), если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно плотное множество почти-периодов τ таких, что

$$D_{W_p}[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

Сумма двух функций W_p *п.п.* есть также функция W_p *п.п.*
Функция W_p *п.п.* есть также функция W *п.п.*

ТЕОРЕМА I_W[2]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы W п.п. функция $f(x)$ была также функцией W_p п.п., состоит в том, чтобы $|f(x)|^p$ была бы W равномерно суммируемой.*

Совершенно аналогично, как это мы доказали для функций S_p *п.п.*, мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА II_W[3]). *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ две функции, из коих первая W_p п.п., а вторая W_q п.п. причем $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то их произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть функция W_1 п.п.*

ТЕОРЕМА III_W[4]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ была функцией $\tilde{W}_p$ п.п., состоит в том, что как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно плотное множество почти-периодов τ таких, что*

$$\delta_W[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА IV_W[5]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ была функцией $\tilde{W}$ п.п., состоит в том, что, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$, существует такой тригонометрический полином $P_n(x)$, что*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E такого, что $\delta_W E < \varepsilon$.

---

[1]) 7—*e*. [2]) 7—*g*, [3]) Не опубликовано. [4]) 7—*g*. [5]) 7—*d*,

В силу III_W—теорему IV_W можно видоизменить, и мы приходим к теореме.

ТЕОРЕМА V_W[1]). *Необходимое и достаточное условие того, чтобы* $f(x)$ *была бы функцией* $\widetilde{W}$ *п.п., состоит в том, что, как бы мало ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такой тригонометрический полином* $P_n(x)$, *что*

$$\vartheta_W[f(x),\ P_n(x)] < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА VI_W[2]). *Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция* $f(x)$ *была* W_p *п. п., состоит в том, что как бы мало ни было* $\varepsilon > 0$, *существует такой тригонометрический полином* $P_n(x)$, *что*

$$\vartheta_{W_p}[f(x),\ P_n(x)] < \varepsilon.$$

Теорема VII_S не имеет аналога для функций $\widetilde{W}$ *п. п.* Для частного случая, когда $f(x)$ ограничена, можно лишь высказать такое предложение: каково бы ни было $\varepsilon < 1$, существуют бесконечные последовательности тригонометрических полиномов $P_{n_k}(x)$, ограниченных в их совокупности, и таких, что

$$|f(x) - P_{n_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E_k такого, что

$$\delta_W E_k < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

§ 4. Обобщения типа Безиковича

Определение $\widetilde{B}$[3]). Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется $\widetilde{B}$ почти-периодической ($\widetilde{B}$ *п. п.*), если, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$, существует достаточно-равномерная последовательность чисел (почти-периодов) τ таких, что $|f(x+\tau_k) - f(x)| < \varepsilon$ для всех значений x, исключая, быть может, множества E_k такого, что

$$D_{B_1}[M_k\{\delta E_k(x,\ x+a)\},0] < \varepsilon$$

(*а* любое), кроме того, $f(x)$—*B а. о.* функция.

Отметим, что сумма и произведение двух функций $\widetilde{B}$ *п. п* суть опять функция $\widetilde{B}$ *п. п.*

---

[1]) 7- *g*. [2]) 7—*g*.
[3]) 7—(эти функции были названы первоначально β *п. п.*).

Определение B_p[1]). Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется B_p почти-периодической (B_p *п. п.*), если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует достаточно-равномерная последовательность чисел (почти-периодов) τ_k таких, что

$$D_{B_1}\left[\ M_k\left\{\frac{1}{a}\int\limits_x^{x+a}|f(t+\tau_k)-f(t)|^p dt\right\},\ 0\ \right]<\varepsilon.$$

Сумма двух функций B_p *п. п.* есть функция B_p *п. п.*

Всякая функция B_p *п. п.* есть функция $\widetilde{B}$ *п. п.*

ТЕОРЕМА I_B[2]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы функция $f(x)$ $\widetilde{B}$ п. п. была также B_p п. п., состоит в том, чтобы $|f(x)|^p$ была бы В р. с.*

ТЕОРЕМА II_B[3]). *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ две функции, из коих первая B_p п. п., а вторая B_q п.п., причем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то их произведение $f(x).\varphi(x)$ есть функция B_1 п. п.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы II_S.

ТЕОРЕМА III_B[4]). *Если $f(x)$ есть функция $\widetilde{B}$ п. п., то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно плотное множество почти-периодов τ таких, что*

$$D_B[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА IV_B[5]). *Необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ была функцией $\widetilde{B}$ п. п., состоит в том, что, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$, существует тригонометрический полином $P_n(x)$ такой, что*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E такого, что $\delta_B E < \varepsilon$.

Этой теореме можно еще придать следующий вид.

ТЕОРЕМА V_B[6]). *Если $f(x)$ есть функция $\widetilde{B}$ п. п., то, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такой тригонометрический полином $P_n(x)$, что*

$$\vartheta_B[f(x), P_n(x)] < \varepsilon.$$

Аналогично, как и для функций Вейля, мы можем высказать

[1]) — 6. [2]) 7 — f. [3]) Неопубликов.
[4]) 7 — f - g. [5]) [5]) 7 — f [6]) 7 — g.

следующее свойство ограниченных $\widetilde{B}$ п. п. функций. Если $f(x)$ ограниченная $\widetilde{B}$ п. п. функция, то, каково бы ни было положительное число $\varepsilon < 1$, существует бесконечная последовательность тригонометрических полиномов $P_{nk}(x)$, ограниченных в их совокупности, и таких, что

$$|f(x)-P_{nk}(x)| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E_k с $\delta_B E_k < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

В заключение заметим, что функции $\widetilde{B}$ *п. п.* были нами рассмотрены в нашей статье 7-*а* (Определение A) в несколько иной форме, чем то, которое мы приводим для функций $\widetilde{B}$ *п. п.* Кроме того, то определение является частным случаем определения $\widetilde{B}$, предполагающим, что множества исключения, фигурирующие в определении $\widetilde{B}$, совпадают между собой независимо от почти-периодов τ_k.

Затем мы рассматривали частные случаи определения B_p; это B_1 и B_2 в частном предположении, что $|f(x)|$ и $|f(x)|^2$ суть функции *S.p.c.* Эти определения были названы нами соответственно B' и C'.

§ 4. Сравнительный анализ различных обобщений почти-периодических функций и композиция их классов

Мы рассматривали обобщения почти-периодических функций в определениях $\widetilde{S}$, $\widetilde{W}$, $\widetilde{B}$. Эти определения даются в пространстве измеримых функций.

Для этих функций мы доказали соответственно теоремы IV_S, VI_W, IV_B, дающие возможность приближения их тригонометрическими полиномами с соответствующими множествами исключения. Эти теоремы являются аналогом теоремы Bohr'a для его функций, где имеет место всюду равномерное приближение.

Обратимся к определениям IV, V и VI § 1, в которых говорится о различных видах равномерной суммируемости.

Введем следующие сокращенные обозначения для классов, удовлетворяющих условиям определений IV, V и VI.

Екли $|f(x)|^p$ есть функция $\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix}$ равномерно суммируемая, то мы скажем, что она принадлежит классу $\begin{pmatrix} S_p\ p.\ c. \\ W_p\ p.\ c. \\ B_p\ p.\ c. \end{pmatrix}$.

Теперь мы можем построить формально, кроме классов $\widetilde{S}$, $\widetilde{W}$, $\widetilde{B}$, девять других различных классов соединением трех классов с классами $S_p\ p.\ c.$, $W_p\ p.\ c.$ и $B_q p.\ c.$ Тогда мы получим следующие классы: [1]

$$\left.\begin{array}{lll} \widetilde{S}(S_p\ p.\ c.), & \widetilde{S}(W_p\ p.\ c.), & \widetilde{S}(B_p\ p.\ c.) \\ \widetilde{W}(S_p\ p.\ c.), & \widetilde{W}(W_p\ p.\ c.), & \widetilde{W}(B_p\ p.\ c.) \\ \widetilde{B}(S_p\ p.\ c.), & \widetilde{B}(W_p\ p.\ c.), & \widetilde{B}(B_p\ p.\ c.) \end{array}\right| \qquad (\mathfrak{M}_p)$$

Классы, стоящие по главной диагонали данной таблицы, нами уже изучены и представляют собой ничто иное, как соответственно классы S_p, W_p и B_p *п.п.* функций.

Нетрудно привести примеры остальных видов классов, причем интересно рассмотреть такие примеры, которые не были бы тривиальны и не давали бы совпадающих классов.

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим вопрос о том, какие классы являются более общими по сравнению с другими.

Совершенно очевидно, что, каково-бы ни было измеримое множество E,

$$\delta_S^d E \geqslant \delta_W E \geqslant \delta_B E.$$

Поэтому следует, что

$$(S_p\ p.\ c.) \subset (W_p\ p.\ c.) \subset (B_p\ p.\ c.). \qquad (1)$$

Также совершенно очевидно, что

$$\widetilde{S} \subset \widetilde{W} \subset \widetilde{B}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{S}(S_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{S}(W_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{S}(B_p\ p.\ c.) \\ \widetilde{W}(S_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{W}(W_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{W}(B_p\ p.\ c.) \\ \widetilde{B}(S_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{B}(W_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{B}(B_p\ p.\ c.) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Также очевидно, что

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{S}(S_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{W}(S_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{B}(S_p\ p.\ c.) \\ \widetilde{S}(W_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{W}(W_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{B}(W_p\ p.\ c.) \\ \widetilde{S}(B_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{W}(B_p\ p.\ c.) \subset \widetilde{B}(B_p\ p.\ c.) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

[1] T—с.

Из (3) и (4) вытекает еще, что

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{S}(W_p\ p.\ c.) \subset \tilde{W}(B_p\ p.\ c.)\\ \tilde{W}(S_p\ p.\ c.) \subset \tilde{B}(W\ p.\ c.)\\ \tilde{S}(S_p\ p.\ c.) \subset \tilde{W}(W_p\ p.\ c.) \subset \tilde{B}(B_p\ p.\ c.)\end{array}\right| \qquad (5)$$

Заметим еще, что если $p > q$, то каждый класс матрицы $\mathfrak{M}_p$ будет заключаться в соответствующем классе матрицы $\mathfrak{M}_q$.

Займемся теперь построением примеров иллюстрирующих различные классы матрицы $\mathfrak{M}_p$, а также примеры функций

$\tilde{S}$, $\tilde{W}$ и $\tilde{B}$ п.п.

Мы начнем с примера $\tilde{S}$ п. п. функции. Такой пример мы встречаем в работе В. Степанова [1]). Но мы здесь построим примерно тем же методом несколько иной пример:

Составим последовательность периодических функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_2(x)$, ... следующим образом: $\varphi_k(x), = h_k > 0$ на интервалах $\left(-10^k + \frac{1}{2^{k+1}} < x < -10^k + \frac{1}{2^k}\right)$ и на $\left(10^k - \frac{1}{2^k} < x < 10^k - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$.

В остальных местах интервала $(-10^k \leq x \leq 10^k)$ $\varphi_k(x) = 0$.

В остальном $\varphi_k(x)$ периодически повторяется и, следовательно, имеет период 2.10^k.

Составим следующую функцию: $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$.

Совершенно очевидно, что, поскольку значения x, для которых значения $\varphi_k(x)$ (при разных k) отличны от нуля, не совпадают, построенный ряд является всюду сходящимся на

$(-\infty, +\infty)$. Кроме того, он дает нам функцию $\tilde{S}$ п. п.

В самом деле, $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \varphi_k(x)$ есть квази-периодическая*) функция

и отличается от $\varphi(x)$ только на множестве E_n, средняя плотность которого на любом интервале заранее заданной длины d (n выбирается в зависимости от выбора d) может быть сделана величиной сколь угодно малой.

*) Так называется функция, состоящая из суммы конечного числа чисто-периодических функций. Заметим, что вместо полинома приближения можно взять квази-периодическую функцию или даже почти-периодическую функцию Бора.

Чтобы $\varphi(x)$, будучи $\widetilde{S}$ *п. п.*, не была бы S_p *п. п.*, при данном p достаточно предположить, что среди всех величин $h_1\, h_2\, h_3 \ldots\ldots$ существует бесконечное множество h_k таких, что $\dfrac{h_k^p}{2^{k+1}} \geqslant 1$. Это дает нам, что $h_k \geqslant 2^{\frac{k+1}{p}}$.

В этом случае среди таких значений k, для которых выполняется последнее неравенство, можно будет отыскать столь большие значения k и, соответственно этому столь малые интервалы длины $\dfrac{1}{2^{k+1}}$, что на них значение интеграла от $|\varphi(x)|^p$ будет превосходить 1.

Следовательно $|\varphi(x)|^p$ не есть функция S *р. с.*, а следовательно, $\varphi(x)$ не есть функция S_p *п. п.*

Положим для удобства $h_k = 2^{\frac{k+1}{p}} \cdot a_k^{\frac{1}{p}}$.

Из сказанного вытекает, что существует бесконечное множество таких a_k, которые $\geqslant 1$.

Постараемся теперь выбрать $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ так, чтобы $\varphi(x)$ была бы B_p *р. с.*

Пусть E произвольное измеримое множество на $(-\infty, +\infty)$ вобще бесконечного диаметра.

Рассмотрим следующую величину:

$$\frac{1}{2.10^n} \int\limits_{E(-10^n, +10^n)} |\varphi(x)|^p dx.$$

Пусть $E_{n,k}$ есть часть E, лежащая в $(-10^n, +10^n)$ и общая с интервалами, в которых $\varphi_k(x) \neq 0$.

Тогда, очевидно, что, так как $\varphi_k(x) > 0$, то

$$\frac{1}{2.10^n} \int\limits_{E(-10^n, +10^n)} |\varphi(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{2.10^n} \int\limits_{-10^n}^{+10^n} |\varphi(x)|^n dx.$$

Но, очевидно, что $\dfrac{1}{2.10^n} \displaystyle\int\limits_{-10^n}^{+10^n} |\varphi(x)|^p \, dx =$

$$= \frac{1}{2.10^n}\left[10^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot h_1{}^p + 10^{n-2} \frac{1}{2^2} h_2{}^p + \ldots\ldots + 10 \frac{1}{2^{n-1}} h_{n-1}^p + \right.$$

$$\left. + \frac{h_n^p}{2^n}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{h_1{}^p}{20} + \frac{h_2{}^p}{20^2} + \ldots\ldots + \frac{h_n^p}{20^n}\right] = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^n}$$

Отсюда легко видеть, что

$$\lim_{T\to\infty} \text{super} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |\varphi(x)|^p dx = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\cdot \qquad (6)^{*)}$$

Мы выберем числа $a_1, a_2, \ldots$ так, чтобы полученный бесконечный ряд был сходящимся.

Имеем теперь, в силу неравенства (8) § 1, что

$$\lim_{T\to\infty} \text{super} \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|^p dx \leqslant \left\{\left[\lim\sup \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} \left|\sum_1^m \varphi_k(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left[\lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} \left|\sum_{m+1}^{\infty}\varphi_k(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p \qquad (7)$$

Но

$$\lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} \left|\sum_{m+1}^{\infty}\varphi_k(x)\right|^p dx \leqslant \lim_{T\to\infty}\sup \int_{-T}^{+T} \left|\sum_{m+1}^{\infty}\varphi_k(x)\right|^p dx =$$

$$= \frac{a^{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{a^{m+2}}{10^{m+2}} + \cdots \qquad (8)$$

В силу сходимости ряда $\sum_1^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно выбрать m столь большим, что

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} < \frac{\varepsilon}{2^p} \qquad (9)$$

Итак для любого множества E мы имеем, в силу (8) и (9) что

$$\lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)} \left|\sum_{m+1}^{\infty}\varphi_k(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{2^p} \qquad (10)$$

при m достаточно большом.

С другой стороны, поскольку $\left|\sum_1^m \varphi_k(x)\right|^p$ есть функция огра-

*) Тот факт, что мы считаем $T = 10^n$, не нарушает общности.

ниченная, а следовательно, $S.\ p.\ c.$, то мы можем выбрать $\eta > 0$ столь малым, что

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{E(-T,+T)} \Big|\sum_1^m \varphi_k(x)\Big|^p dx < \frac{\varepsilon}{2^p} \tag{11}$$

при $\delta_B E < \eta$.

На основании (7), (10) и (11) мы можем заключить, что

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{E(-T,+T)} |\varphi(x)|^p dx \leqslant \left\{\left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p = \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}\right)^p = \left(\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right)^p = \varepsilon$$

при $\delta_B E < \eta$.

Это значит, что $|\varphi(x)|^p$ есть функция $B.\ p.\ c.$; следовательно, $\varphi(x)$ есть функция $\widetilde{S}(B_p\ p.\ c.)$.

Легко теперь убедиться, что $\varphi(x)$ не принадлежит к классу $\widetilde{S}(W_p\ p.\ c.)$.

В самом деле, если бы это было так, то в силу известного свойства функций W_p *п. п.* можно было бы найти такое постоянное число $A > 0$, что для достаточно большого $T_0 > 0$ выполнялось бы следующее неравенство:

$$\frac{1}{2T_0} \int\limits_{a-T_0}^{a+T_0} |\varphi(x)|^p dx < A, \tag{12}$$

каково бы ни было число a.

Пусть $T_0 > 2$.

Но легко видеть, что в нашем примере этого как раз не будет. В самом деле, взяв интервал $(-10^n - 1, 10^n)$ внутри $a - T_0$, $a + T_0$, мы получим, очевидно, что

$$\int\limits_{10^n-1}^{10^n} |\varphi(x)|^p dx = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n.$$

Так как среди всех a_k есть бесконечно большое их число, таких, что они > 1, то выбрав n достаточно большим, мы можем добиться того, что

$$\int\limits_{10^n-1}^{10^n} |\varphi(x)|^p dx \geqslant 2T_0 A,$$

откуда

$$\frac{1}{2T_0} \int\limits_{10^n-1}^{10^n} |\varphi(x)|^p dx > A;$$

отсюда подавно

$$\frac{1}{2T_0}\int\limits_{a-T_0}^{a+T_0}|\varphi(x)|^p\,dx \geqslant A \tag{13}$$

Неравенства (12) и (13) противоречат друг другу.
Это противоречие доказывает наше утверждение, что $\varphi(x)$ не принадлежит к классу $\widetilde{S}\,(W_p\ p.\ c.)$.

Нам не удалось привести примера функции класса $\widetilde{S}\,(W_p p. c.)$ без того, чтобы она не была также и класса $\widetilde{S}\,(S_p\ p.\ c.)$. Было бы интересно построить такой пример, или же доказать тождественность классов $\widetilde{S}\,(W_p\ p.\ c.)$ и $\widetilde{S}\,(S_p\ p.\ c.)$.

Для построения примера класса $\widetilde{S}\,(S_p\ p.\ c.)$ функций нам достаточно было бы в предшествующем примере взять для a_n бесконечно убывающую последовательность, положив, например, $a_n=\dfrac{1}{n}$.

Перейдем теперь к построению примера класса $\widetilde{W}$ п. п. функций.

Пусть $F(x)$ суммируемая функция на интервале $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$. Строим следующую функцию $f(x)$:

$$f(x)=F(x) \text{ на } (-1\leqslant x\leqslant +1)$$

$$\text{и } f(x)=0 \text{ на } (-\infty<x<-1) \text{ и } (+1<x<+\infty).$$

Это, очевидно, функция $\widetilde{W}$ п. п.

Предположив теперь, что $|F(x)|^p$ $(p>1)$ суммируемая, мы получим функцию $\widetilde{W}\,(S_p\ p.\ c.)$

Рассмотрим теперь следующий пример:

$f(x)=2^{\frac{n}{p}}$ на интервалах $2^{n-1}\leqslant x\leqslant 2^{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$

и $f(x)=0$ на интервалах $\left(2^{n-1}+\dfrac{1}{2^n}<x<2^n\right)$,

а также $f(x)=0$ на интервале $(-\infty,+1)$.

Это несомненно функция $\widetilde{W}$ п. п., и квази-периодическая функция ее приближения может быть выбрана равной нулю (она, очевидно, не $\widetilde{S}$ *п. п.*).

Совершенно очевидно, что это также функция W *p. c.* В самом деле, рассмотрим величину

$$\frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T} |f(x)|^p\,dx,$$

где T достаточно велико и a любое.

Не нарушая общности рассуждения, мы можем, например, взять: $T=2^k$.

Пусть $2^{n-1} \leqslant a \leqslant 2^n$; очевидно, что $T \leqslant 2^{n+k}-2^{n-1}$.

Имеем $\displaystyle\frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T}|f(x)|^p\,dx \leqslant \frac{1}{2^k}\int\limits_{2^{n-1}}^{2^{n+k}}|f(x)|^p\,dx = \frac{1}{2^k}\sum_{i=n-1}^{i=n+k}\frac{1}{2^n}.\,2^n = \frac{k+1}{2^k}$

Это величина, которая, при достаточно большом k, может быть сделана сколько угодно малой.

Следовательно, $f(x)$ есть функция W_p *p. c.*

Следовательно, $f(x)$ принадлежит к $\widetilde{W}$ (W_p *p. c.*).

Видоизменяя несколько числовые данные в предшествующем примере, мы легко можем построить функцию B_p *p. c.*

Пусть $f(x)=h_n$ на интервалах $\left(2^{n-1}, 2^{n-} + \frac{1}{2^{\frac{n}{k}}}\right)$ и $f(x)=0$ на $\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}, 2^n\right)$, а также $f(x)=0$ на $(-\infty < x < +1)$.

Положим

$$h_n = 2^{\frac{n}{p}}\ a_n^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим величину интеграла $\displaystyle\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T}|f(x)|^p\,dx$ при T достаточно большом.

Не нарушая общности, мы можем положить $T=2^{n-1}$; тогда значение этого интеграла будет, очевидно, следующим:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{i=n-1} a_i$$

Выберем $a_i = 2^{\frac{i}{2}} - 2^{\frac{i-1}{2}}$; тогда

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} a_i = \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(2^{\frac{i}{2}} - 2^{\frac{i-1}{2}}\right) = 2^{\frac{n-1}{2}} - 1.$$

Отсюда видно, что $\lim \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{i=n-1} a_i = \lim \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} = 0.$

Значит, $f(x)$ есть функция B_p *p. c.*

Но легко также видеть, что $f(x)$ не есть функция W_p *p. c.*

В самом деле, рассмотрим величину $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^p dx$ при любых a и при T достаточно большом.

Легко видеть, что, выбрав a достаточно большим, мы для значения рассматриваемой величины получим сколько угодно большое значение.

Мы имеем: $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} 2^{\frac{i-1}{2}}(\sqrt{2} - 1) = \infty.$

Пусть теперь T нам задано сколько угодно большим, но постоянным.

Мы выберем тогда a столь большим, чтобы в интервал $(a, a+T)$ попал интервал $\left(2^{n-1} \leqslant x \leqslant 2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right)$ с таким индексом n, чтобы

$$a_n = 2^{\frac{n-1}{2}}(\sqrt{2}-1) > T n.$$

Тогда $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^p dx \geqslant \frac{a_n}{T} > n.$

Поскольку n может быть выбрано сколь угодно большим, мы видим, что $\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^p dx$ неограниченная величина, следовательно, $f(x)$ не W_p *p. c.*

Итак, мы имеем пример функции $\widetilde{W}$ $(B_p\, p.\, c)$.

Построим теперь функцию $\widetilde{B}$ *n. n.*

Пусть $f(x) = a_n$ в интервале $(2^n, 2^n + n)(n = 1,2,3\ldots), a_n > 0$, в остальных местах считаем $f(x) = 0$.

Совершенно очевидно, что $f(x)$ есть функция $\widetilde{B}$ *п. п.* с квазипериодическим приближением $=0$ (но $\widetilde{W}$ не *п. п.*).

Сделав все величины a_n ограниченными в их совокупности, мы получим функцию S_p *р. с.*

Сложив эту функцию с функцией W_p *п. п.*, мы получим функцию

$$\widetilde{B}(W_p\ p.\ c.).$$

Наконец, положив $a_n = n^{\frac{1}{p}}$, мы находим, что

$$\frac{1}{2^n}\int\limits_0^{2n} | f(x) |^p\, dx = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{i=n-1} k^2,$$

и эта величина стремится к нулю вместе с n. Следовательно, мы имеем функцию (B_p *р. с.*) и, следовательно, пример функции ($\widetilde{B}_p$ *р. с.*).

Заметим еще, что среди функций S_p *п. п.* мы можем выделить весьма широкий подкласс ограниченных функций.

Если мы сложим две функции различных классов, то получим в сумме функцию того класса, который будет более общим из числа слагаемых.

Для произведения функций классов из числа $\widetilde{B}$, $\widetilde{W}$ и $\widetilde{S}$ *п. п.* мы можем высказать аналогичные предложения.

Для классов суммируемых функций вопрос обстоит сложнее; можно для них высказать предложения, аналогичные теоремам (II) §§ 3, 4 и 5.

Например, произведение двух функций классов

$$\widetilde{S}\ (B_p\ p.\ c.) \text{ и } \widetilde{S}\ (B_q\ p.\ c.)$$

дает нам функцию класса $\widetilde{S}$ (B_1 *р. с.*), если $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

На дальнейшем развитии этого вопроса мы не останавливаемся в виду его большой простоты.

§ 6. Последовательности обобщенных почти-периодических функций.

Мы знаем, что для функций Бора достаточным условием сохранения почти-периодичности при переходе к пределу является равномерная сходимость.

Нетрудно убедиться, что равномерная сходимость является также достаточным условием сохранения почти-периодичности для последовательностей обобщенных почти-периодических функций.

Однако, это условие может быть заменено более общим для обобщенных почти-периодических функций.

Так для последовательностей функций $\widetilde{S}$ *п. п.* [1]) мы дали условие более широкое, чем равномерная сходимость.

Мы говорили, что последовательность функций:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots . (-\infty < x < +\infty)$$

сходится по мере, если, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) и число $d > 0$, можно подобрать такое число $N > 0$, что $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ при всяком $n > N$ и при любом p для всех значений x, исключая, быть может, множества $E_{n,p}$ такого, что

$$\delta_S^d E_{n,p} < \varepsilon.$$

Для такой последовательности, как мы показали, существует „предельная" функция $f(x)$, т. е. такая, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) и $d > 0$, можно подобрать такое N, что имеет место неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для $n > N$ и для всякого x, исключая, быть может, множества E_n с

$$\delta_S^d E_n < \varepsilon.$$

Мы также доказали, что если функции нашей последовательности $\widetilde{S}$ *п. п.*, то и $f(x)$ также $\widetilde{S}$ *п. п.*

Можно показать, что сходимость „$\widetilde{S}$ по мере" обеспечивает сохранение классов $\widetilde{W}$ и $\widetilde{B}$ *п. п.* функций. Итак имеем:

ТЕОРЕМА I. *Если $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots (-\infty < x < +\infty)$ последовательность функций $\begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{S} \end{pmatrix}$ п. п., которая сходится „$\widetilde{S}$ по мере", то „предельная" функция $f(x)$ будет также функцией $\begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{S} \end{pmatrix}$ п. п.*

Доказательство. Зададим произвольно малое положительное число ε, меньшее 1, и число $d > 0$.

---

[1]) 7 — *i*.

Мы можем тогда, в силу условий сходимости, подобрать такое число $N > 0$, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

при всяком $n > N$ и при всяком x, исключая, быть может, множества E_n такого, что $\delta_S^d E_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так как $f_n(x)$ есть $\begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{B} \end{pmatrix}$ *п. п.* функция, то существует такой тригонометрический полином $P_{m_n}(x)$, что

$$|f(x) - P_{m_n}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

исключая, быть может, множества $\widetilde{E}$ такого, что

$$\delta_W \widetilde{E} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\delta_B \widetilde{E} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

На основании неравенств (1) и (2), имеем:

$$|f(x) - P_{m_n}(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - P_{mn}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества $\overline{E} = E + \overset{\backsim}{E}$ такого, что

$$\begin{matrix} \delta_W \overline{E} \\ \\ \delta_B \overline{E} \end{matrix} \leqslant \begin{matrix} \delta_W E_n + \delta_W \widetilde{E} \\ \\ \delta_B E_n + \delta_B \widetilde{E} \end{matrix} \leqslant \begin{matrix} \delta_S^d E_n + \delta_W \widetilde{E} \\ \\ \delta_S^d E_n + \delta_B \widetilde{E} \end{matrix} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Можно ввести для функций $\widetilde{W}$ и $\widetilde{B}$ *п. п.* более общие условия, сохраняющие их класс при переходе к пределу.

Дадим следующее определение:

Определение I. Мы говорим, что последовательность функций $f_1(x), f_3(x), f_3(x) \ldots . . (-\infty < x < +\infty)$ сходится „$\begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{B} \end{pmatrix}$ по мере", если, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, можно подобрать такое $N > 0$, что

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при всех значениях $n>N$ и любом p и для всех значений x, исключая, быть может, множества E_{np} такого, что

$$\delta_W E_{n,p}<\varepsilon,$$

$$\delta_B E_{n,p}<\varepsilon.$$

Этот вид сходимости существенно отличается от сходимости „S по мере“. Из всякой последовательности, сходящейся „$\widetilde{S}$ по мере“; можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду к своей „предельной“ функции. Этим свойством не обладают последовательности, сходящиеся „$\begin{pmatrix}\widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{pmatrix}$ по мере“.

Следующий пример показывает нам это.

Пусть $f_n(x)=1$ на интервале $(-n\leqslant x\leqslant+n)$ и $f_n(x)=0$ на $(-\infty<x<-n)$ и $(+n<x<+\infty)$.

Совершенно очевидно, что $f_n(x)$ есть функция W п.п.

Последовательность сходится „$\widetilde{W}$ по мере“, но одновременно она сходится всюду в обычном смысле к функции $\varphi(x)=1$, но не сходится к ней по мере, как это дано в следующем определении.

Определение I-а. Мы говорим, что последовательность функций $f_1(x), f_2(x)\ldots\ldots(-\infty<x<+\infty)$ сходится „$\begin{pmatrix}\widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{pmatrix}$ по мере“ к $f(x)$, если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$, существует такое число $N>0$, что $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ для всех $n>N$ и для всех x, исключая, быть может, множества E_n с $\begin{pmatrix}\delta_W E_n\\ \delta_B E_n\end{pmatrix}<\varepsilon$

ТЕОРЕМА II. Если последовательность $\begin{pmatrix}\widetilde{W}\\ \widetilde{E}\end{pmatrix}$ *п. п. функций* $f_1(x), f_2(x), f_3(x)\ldots$ *сходится* $\begin{pmatrix}\widetilde{W}\\ \widetilde{E}\end{pmatrix}$ *по мере к* $f(x)$, *то* $f(x)$ *также функция* $\begin{pmatrix}\widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{pmatrix}$ *п. п.*

Доказательство. По условию сходимости, как бы мало ни было $\varepsilon>0$, можно подобрать N столь большим, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

при всяком $n>N$ и любом x, исключая, быть может, множества E_1, такого, что

$$\delta_W E_1<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\delta_B E_1<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $f_n(x)$ есть функция $\begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \sim \\ B \end{pmatrix}$ *п. п.*, то существует такой тригонометрический полином $P_{m_n}(x)$, что имеет место неравенство

$$|f_n(x)-P_{m_n}(x)|<\varepsilon.$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E_2 с

$$\delta_W E_2<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\delta_B E_2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из неравенств (3) и (4) мы заключаем, что

$$|f(x)-P_{m_n}(x)|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-P_{m_n}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества $E=E_1+E_2$, у которого

$$\begin{matrix} \delta_W E \\ \delta_B E \end{matrix} \leqslant \begin{matrix} \delta_W E_1+\delta_W E_2 \\ \delta_B E_1+\delta_B E_2 \end{matrix} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

следовательно, $f(x)$ есть функция $\begin{pmatrix} \widetilde{W} \\ \widetilde{B} \end{pmatrix}$ *п. п.*

Обратимся еще к вопросу сохранения классов суммируемых почти-периодических функций обобщенного типа.

Для функций S_p *п. п.* мы разобрали этот вопрос [1]) и ввели понятие о следующем виде сходимости.

Мы говорим, что: $f_1(x), f_2(x), f_3(x)\ldots(-\infty<x<+\infty)$ сходится „S_p в среднем", если, как бы мало ни было $\varepsilon>0$ и $d>0$, существует такое N, что

[1]) 7—i.

$$D^d_{Sp}[f_{n+p}(x),\ f_n(x)] < \varepsilon.$$

Для такой последовательности, как мы доказали, существует „предельная функция“ $f(x)$, обладающая тем свойством, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и $d > 0$, существует такое $N > 0$, что

$$D^d_{Sp}[f(x), f_n(x)] < \varepsilon$$

для всех значений $n > N$, а также мы доказали, что, если функции последовательности S_p п. п., то и $f(x)$ будет S_p п. п.

Введем теперь новое определение сходимости.

Определение II. Мы говорим, что последовательнвсть $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots (-\infty < x < +\infty)$ сходится „$\begin{pmatrix} W_p \\ B_p \end{pmatrix}$ в среднем“ к $f(x)$, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $N > 0$, что

$$D_{W^p}[f(x), f_n(x)] < \varepsilon,$$
$$D_{B^p}[f(x), f_n(x)] < \varepsilon$$

для всякого $n > N$.

ТЕОРЕМА II. Если функции последовательности $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots \begin{pmatrix} W_p \\ B_p \end{pmatrix}$ п. п. и если она сходится „$\begin{pmatrix} W_p \\ B_p \end{pmatrix}$ в среднем“ к $f(x)$, то $f(x)$ также функция $\begin{pmatrix} W_p \\ B_p \end{pmatrix}$ п. п.

Доказательство. В силу определения сходимости, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, можно удовлетворить неравенству

$$\begin{matrix} D_{W^p}[f(x), f_n(x)] \\ D_{B^p}[f(x), f_n(x)] \end{matrix} < \frac{\varepsilon}{2^p} \tag{5}$$

при всяком $n > N$.

Так как $f_n(x)$ есть функция $\begin{pmatrix} W_p \\ B_p \end{pmatrix}$ п. п., то можно подобрать такой тригонометрический полином $P_{n,m}(x)$, что

$$\begin{matrix} D_{W^p}[f_n(x), P_{n,m}(x)] < \dfrac{\varepsilon}{2^p} \\ D_{B^p}[f_n(x), P_{n,m}(x)] < \dfrac{\varepsilon}{2^p} \end{matrix} \tag{6}$$

На основании (5) и (6) заключаем, что

$$D[f(x), P_{n,m}(x)] \leqslant \left[\{D[f(x), f_m(x)]\}^{\frac{1}{p}} + \{D[f_n(x), P_{nm}(x)]\}^{\frac{1}{p}}\right]^p \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p = \left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}\right)^p = \left(\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right)^p = \varepsilon.$$

(Значки W_p и, B_p мы для сокращения письма отбросили).

Последнее неравенство показывает нам, что $f(x)$ есть функция $\begin{pmatrix} W_p \\ B_p \end{pmatrix}$ *п. п.*

§ 7. Композиция обобщенных почти-периодических функций.

Нами был решен вопрос о композиции почти-периодических функций Бора [1]). Мы можем теперь исследовать более широко вопрос композиции, отнеся его к обобщенным почти-периодическим функциям.

Пусть нам дана функция n переменных

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (-\infty < x_i < +\infty) \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

которая равномерно-непрерывна в отношении совокупности всех ее переменных.

Пусть мы имеем n почти-периодических функций Бора:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x).$$

Тогда, как мы показали, $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x))$ есть также функция почти-периодическая.

Это предложение можно расширить, и мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА I. Если $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *равномерно-непрерывная функция совокупности своих переменных* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *и если*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \ldots \varphi_n(x) \text{ функции } \begin{matrix} \tilde{S} \\ \tilde{W} \\ \tilde{B} \end{matrix} \text{ п. п. то } F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$$

есть функция $\begin{matrix} \tilde{S} \\ \tilde{W} \\ \tilde{B} \end{matrix}$ *п. п.*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) (и число $d > 0$), можно указать такое число $\eta > 0$, что

$$|F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - F(x_1 x_2 \ldots x_n)| < \varepsilon \tag{1}$$

при $|h_k| < \eta$ ($k = 1, 2, 3 \ldots n$).

После этого мы можем подобрать n почти-периодических функций Бора $\psi_1(x), \psi_2(x) \ldots \psi_n(x)$ так, что

$$|\varphi_k(x) - \psi_k(x)| < \eta \tag{2}$$

---

[1]) 7—k.

для всех значений x, исключая, быть может, E*) с

$$\delta_S^d E < \eta$$

$$\delta_W E < \eta$$

$$\delta_B E < \eta.$$

(Число η должно быть достаточно малым, мы его выбираем $\leqslant \varepsilon$). Тогда, в силу (1), мы заключаем, что

$$|F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) - F(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)| < \varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может множества E.

Но так как по предыдущему $F(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)$ есть почти периодическая функция Бора, то $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ есть функция

$\widetilde{S}$

$\widetilde{W}$ *п. п.*

$\widetilde{B}$

Легко убедиться, что равномерная непрерывность $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ не обязательна для справедливости предшествующей теоремы.

Докажем это.

ТЕОРЕМА II. *Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть функция непрерывная в отношении совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ $(-\infty < x < +\infty)$ и если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ почти периодические функции Бора, то $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ есть функция п. п. в смысле Бора.*

Доказательство. Пусть M есть верхняя граница для совокупности.

$$|\varphi_k(x)| \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Рассмотрим $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ в области

$$(-M \leqslant x_i \leqslant +M) \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

В этой области, очевидно, F равномерно непрерывна; поэтому, задав произвольно малое положительное число $\varepsilon < 1$, мы можем подобрать число $\eta > 0$ столь малым, что

$$|F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - F(x_1 x_2 \ldots x_n)| < \varepsilon \tag{3}$$

при всяком $|h_n| < \eta$. (Считаем $\eta \leqslant \varepsilon$).

В силу известных свойств почти периодических функций Бора можно подобрать относительно-плотное множество почти периодов $\{\tau\}$ для совокупности функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, принадлежащих к числу η.

---

*) Можно всегда выбрать одно такое множество, пригодное для $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$.

Имеем

$$|\varphi_k(x+\tau)-\varphi_k(x)|<\eta \tag{4}$$

для всех значений x.

Тогда, в силу (3), мы имеем, что

$$|F(\varphi_1(x+\tau), \varphi_2(x+\tau), \ldots \varphi_n(x+\tau)) - F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x))| < \varepsilon$$

для всех значений x. Значит, $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ есть функция почти-периодическая по Бору.

ТЕОРЕМА III. Если $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ есть непрерывная функция в отношении совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ $(-\infty < x_i < +\infty)$ и если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$ суть функции

$$\begin{array}{l} \widetilde{S} \\ \widetilde{W} \text{ п. п., то} \\ \widetilde{B} \end{array}$$

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) \textit{ есть также функция } \begin{array}{l} \widetilde{S} \\ \widetilde{W} \text{ п. п.} \\ \widetilde{S} \end{array}$$

Доказательство этой теоремы, с небольшими оговорками, есть полное повторение доказательства теоремы I, а потому мы его опускаем.

Рассмотрим теперь композицию двух почти-периодических функций.

Пусть $F(x)$ есть функция почти-периодическая по Бору, и $\varphi(x)$ другая почти-периодическая функция.

Тогда $F(x+\varphi(x))$, очевидно, также функция почти периодическая по Бору, что можно непосредственно проверить. В самом деле, взяв $\varepsilon>0$, в силу равномерной непрерывности $F(x)$ можно выбрать $\eta>0$ столь малым, что

$$|F(x+h)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

при $|h|<\eta$.

Выберем $h \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\{\tau\}$ относительно-плотная система почти-периодов, общих для F и φ и принадлежащих к η.

Тогда имеем

$$|F(x+\tau)-F(x)|<\eta\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

$$\text{и } |\varphi(x-\tau)-\varphi(x)|<\eta \tag{7}$$

для всех значений x.

На основании (5), (6) и (7) заключаем, что

$$F\,|(x+\tau+\varphi(x+\tau))-F(x+\varphi(x))\,|\leqslant|\,F(x+\tau+\varphi(x+\tau))-$$

$$-F(x+\varphi(x+\tau))|+|\,F(x+\varphi(x+\tau))-F(x+\varphi(x))\,|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для всех значений x.

Следовательно, $F(x+\varphi(x))$ функция *п.п.*

На основании этого простого замечания мы сможем совершить композицию обобщенных почти-периодических функций.

ТЕОРЕМА IV. Если $F(x)$ есть функция п.п. по Бору, а $\varphi(x)$ есть функция $\begin{matrix}\widetilde{S}\\ \widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{matrix}$ *п.п., то $F(x+\varphi(x))$ будет функция* $\begin{matrix}\widetilde{S}\\ \widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{matrix}$ *п.п.*

Доказательство. Зададим произвольно малое положительное число $\varepsilon<1$ и число $d>0$. В силу равномерной непрерывности функции $F(x)$ можно подобрать такое число $\eta>0$, что

$$|\,F(x+h)-F(x)\,|<\varepsilon, \tag{8}$$

при всяком $|h|<\eta$.

Выберем $\eta\leqslant\varepsilon$.

После этого мы можем построить такую почти-периодическую функцию Бора $\psi(x)$, что

$$|\,\varphi(x)-\psi(x)\,|<\eta \tag{9}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества значений E такого, что

$$\delta^d_S\,E<\varepsilon$$
$$\delta_W\,E<\varepsilon$$
$$\delta_B\,E<\varepsilon$$

Тогда в силу (8) и (9), очевидно, что

$$|\,F(x+\varphi(x))-F(x+\psi(x))\,|<\varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E.

Но так как, в силу предшествующего, $F(x+\psi(x))$ есть функция *п.п.* по Бору, то $F(x+\varphi(x))$ функция $\begin{matrix}\widetilde{S}\\ \widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{matrix}$ *п.п.*

ТЕОРЕМА V. Если $F(x)$ есть функция $\begin{pmatrix}\widetilde{S}\\ \widetilde{W}\end{pmatrix}$ *п.п.,* а $\varphi(x)$

есть функция п.п. по Бору, то $F(x+\varphi(x))$ *будет также функцией* $\begin{pmatrix}\widetilde{S}\\ \sim\\ W\end{pmatrix}$ *п.п.*

Доказательство. В силу хорошо известного свойства функций $\begin{pmatrix}\widetilde{S}\\ \sim\\ W\end{pmatrix}$ *п.п.*, как бы мало ни было число $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$, и $d>0$, можно подобрать столь малое число $\eta>0$, что

$$|F(x+h)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

при всяком $|h|<\eta$ для всех значений x, исключая, быть может множества E с

$$\delta_S^d E<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\delta_W E<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $\eta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Выберем теперь относительно-плотное множество (τ) общих почти-периодов $F(x)$ и $\varphi(x)$, которые принадлежат к числу η.

Мы имеем, что

$$|\varphi(x+\tau)-\varphi(x)|<\eta \tag{11}$$

для всех значений x, и

$$|F(x+\tau)-F(x)|<\eta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E_1, с

$$\delta_S^d E_1<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta_W E_1<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Принимая во внимание (10), (11) и (12), получим

$$|F(x+\tau+\varphi(x+\tau))-F(x+\varphi(x))|\leqslant F(x+\tau+\varphi(x+\tau))-$$
$$-F(x+\varphi(x+\tau))|+|F(x+\varphi(x+\tau))-F(x+\varphi(x)|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{12}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества

$\widetilde{E} = E + E_1$ такого, что

$$\left.\begin{array}{l} \delta_S^d \widetilde{E} \leqslant \delta_S^d E + \delta_S^d E_1 \\ \delta_W \widetilde{E} \leqslant \delta_W E + \delta_W E_1 \end{array}\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Неравенство (13) показывает нам, что $F(x+\varphi(x))$ есть функция $\begin{pmatrix} \widetilde{S} \\ \widetilde{W} \end{pmatrix}$ *п.п.*

Если бы мы предположили, что $F(x)$ есть функция $\widetilde{B}$ *п. п.*, то указанным методом невозможно доказать почти периодичность $F(x+\varphi(x))$ в обобщенном смысле. И вообще остается пока неизвестным, будет ли $F(x+\varphi(x))$ функцией почти периодической в одном из обобщенных смыслов. Может быть, здесь необходимы некоторые добавочные условия, которым должны удовлетворять $F(x)$.

ТЕОРЕМА VI. Если $F(x)$ *есть функция* $\widetilde{S}$ *п. п., а* $\varphi(x)$ *функция* $\begin{matrix} \widetilde{S} \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{B} \end{matrix}$ *п.п., то* $F(x+\varphi(x))$ *есть функция* $\begin{matrix} \widetilde{S} \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{B} \end{matrix}$ *п.п.*

Доказательство. В силу известного свойства функций $\widetilde{S}$ *п.п.*, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $\eta > 0$, что

$$|F(x+h) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

для всякого $|h| < \eta$ и для всякого x, исключая, быть может, множества E, с

$$\delta_S^d E < \eta$$

Выберем $\eta < \frac{\varepsilon}{3}$.

Так как $\varphi(x)$ есть функция $\begin{matrix} \widetilde{S} \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{B} \end{matrix}$ *п.п.*, то существует почти-периодическая по Бору функция $\psi(x)$, такая, что

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \eta \tag{15}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества $\widetilde{E}$ такого, что

$$\delta_S^d \widetilde{E} < \eta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta_W \widetilde{E} < \eta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta_B \widetilde{E} < \eta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Следовательно, на основании (14) и (15), мы заключаем, что

$$|F(x+\varphi(x)) - F(x+\psi(x))| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

для всех значений x, исключая, быть может, можества $E+\widetilde{E}$.

Так как в силу теоремы V $F(x+\psi(x))$ есть функция $\begin{matrix}\widetilde{S}\\ \widetilde{W}\\ \widetilde{B}\end{matrix}$ $п.п.$, то существует тригонометрический полином $P_n(x)$, такой, что

$$|F(x+\psi(x)) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества $\overline{E}$ с

$$\delta_S^p \overline{E} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta_W \overline{E} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\delta_B \overline{E} < \frac{\varepsilon}{3}$$

На основании (16) и (17) заключаем, что

$$|F(x+\varphi(x)) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{18}$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества $\hat{E} = E + \widetilde{E} + \overline{E}$ такого, что

$$\delta_S^d \hat{E} \leqslant \delta_S^d E + \delta_S^d \tilde{E} + \delta_S^d \bar{E} < 3 . \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$$\delta_W \hat{E} \leqslant \delta_S^d E + \delta_W \tilde{E} + \delta_W \bar{E} < 3 . \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

$$\delta_B \hat{E} \leqslant \delta_S^d E + \delta_B \tilde{E} + \delta_B \bar{E} < 3 . \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Значит, $F(x+\varphi(x))$ есть функция $\begin{matrix}\tilde{S}\\ \tilde{W}\\ \tilde{B}\end{matrix}$ *п.п.*, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА VII. Если $F(x)$ есть функция $\tilde{W}$ п.п., а $\varphi(x)$ функция $\begin{matrix}\tilde{S}\\ \tilde{W}\\ \tilde{B}\end{matrix}$ п.п., то $F(x+\varphi(x))$ есть функция $\begin{matrix}\tilde{S}\\ \tilde{W}\\ \tilde{B}\end{matrix}$ п.п.

Доказательство этой теоремы есть полное повторение доказательства теоремы VI, только здесь вместо $\delta_S^d E$ берется $\delta_W E$. Поэтому на доказательстве мы не останавливаемся.

§ 8. О некоторых иных обобщениях *п. п.* функций и возможности построения новых классов обобщенных *п. п.* функций.

Мы не упомянули еще об одном промежуточном классе обобщенных почти-периодических функций, принадлежащем А. С. Безиковичу. Это функции $\bar{B}$ *п. п.* Они определяются следующим образом:

Определение: $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется $\bar{B}$ *п.п.* функцией, если, как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, существует достаточно равномерная последовательность почти-периодов $\{\tau_k\}$ таких, что

$$D_{B_1}[\bar{M}_k \{ [f(x+\tau_k) - f(x)], 0\}] < \varepsilon.$$

Кроме того

$$\lim_{T\to\infty} inf \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |f(x)| \, dx$$

конечная величина.

Оказывается, что всякая функция $\varphi(x)$ B_1 *п.п.* может быть представлена в виде $\varphi(x) = f(x) + \psi(x)$, где $f(x)$ есть функция $\bar{B}$ *п.п.*, а $D_{B_1}[\psi(x), 0] = 0$.

Нами изучен анализ этих функций в пространстве измеримых функций, и эти функции были названы $\overline{\beta}$ *п.п.*[1]). Приводим их определение.

Определение. $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ есть функция $\overline{\beta}$ *п.п.*, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует „достаточно равномерная" последовательность почти-периодов $\{\tau_k\}$, что

1) $|f(x+\tau_k) - f(x)| < \varepsilon$ для всех значений x, исключая, быть может, множеств E_k таких, что $\delta_B E_k < \varepsilon$.

2) $\overline{M}_k \{|f(x+\tau_k) - f(x)|\} < \varepsilon$ для всех значений x, исключая, быть может, некоторого множества E с $\delta_B E < \varepsilon$.

3) Кроме того, $f(x)$ есть функция $(a.\ o.)$.

Интересно было бы углубить изучение этого класса функций и, может быть, в связи с этим упростить и самое определение, отбросив некоторые условия.

Кроме указанных классов, можно было бы поставить проблему построения промежуточных классов, а именно между классами $\widetilde{W}$ *п.п.* и $\widetilde{S}$ *п.п.*, а также между классами $\widetilde{S}$ *п.п.* и Боровскими. Определения этих функций мы даем соответственно в следующих видах:

Определение I. $f(x)$ есть функция $\widetilde{S}(d)$ *п.п.*, если, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$, можно подобрать относительно-плотное множество почти-периодов $\{\tau\}$ таких, что

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества E с $\delta_S^d E < \varepsilon$.

Определение II. $f(x)$ называется функцией $S_p\,(d)_{пп}$ $(p > 1)$, если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно-плотное множество почти-периодов $\{\tau\}$ таких, что

$$D^d_{S_p}[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

Эти два определения совпадают соответственно с определениями функций $\widetilde{S}$ *п.п.* и S_p *п.п.*, если d становится произвольным числом.

Определение III. $f(x)$ называется функцией $\widetilde{S}$ *п.п.*, если, как бы мало ни было положительное число $\varepsilon < 1$, существует относительно-плотное множество почти-периодов τ таких, что

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех значений x, исключая, быть может, множества меры 0.

---

[1]) $7\frac{h}{}$.

Можно поставить еще следующие определения почти-периодичности.

Определение IV. $f(x)$ называется почти-периодической в смысле A, если она непрерывна, исключая, быть может, регулярных точек разрыва (первого рода) и если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно-плотное множество почти-периодов $\{\tau\}$ таких, что

$$\left| \frac{f(x+\tau+0)+f(x+\tau-0)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \right| < \varepsilon$$

для всех значений x.

ЛИТЕРАТУРА.

1) Stepanoff. Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Functionen (Math. Ann. 1927, Bd. 95, S. 473—498).

2) Weyl. Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen (Math. Ann. Bd. 97 1/2, S. 338).

3) Besicovitz. Sur quelques points de la théorie des fonctions presque-périodiques (C. R. t. 181, p. 391).

4) Franklin. Approximation theorems for generalised a. p. fonctions (Math. Zeitschr. 29, 5. 70—76).

5) Schmidt R. Die trigonometrischen Approximationen für eine Klasse von verallgemeinerten f. p. Funktionen (Math. Ann. Bd. 100, 3 H., S. 335).

6) a) Besicovitz and Bohr. Almost periodicity and general trigonometric series (Acta Math. Vol. 57).

b) Besicovitz. Analysis of conditions of generalised almost periodicity (Acta Math. Vol. 58).

7) Kovanko. a) Sur une généralisation des fonctions presque-périodiques (C. R. Paris, t. 186, p. 354).

b) Sur quelques généralisations des fonctions presque-périodiques (C. R. Paris, t. 186, p. p. 729).

c) Sur une classe de fonctions presque-périodiques, qui engendre les classes des fonctious p. p. de W. Stepanoff, H. Weyl et A. Besicovitz (C. R. Paris, t. 188, p. 142).

d) Sur l'approximation des fonctions presque-périodiques généralisées (Мат. Сборн. XXXVI 3—4 (1929) стр. 409—416).

e) Sur les classes de fonctions presque-périodiques généralisées (Annali di Mat. Ser. IV, t. VIII (1930-31).

f) Sur la structure de fonctions presque-pêriodiques généralisées (Мат. Сборн. т. 42, стр. 3-18).

g) Sur les espaces de fonctions presque-périodiques généralisées (Журн. Инст. Мат. Укр. Акад. Наук № 1 (1935) стр. 75—96).

h) Об одном классе обобщенных почти-периодических функций (Труды 2-го Всесоюзн. мат. съезда, Ленинград. 1934).

i) Sur quelques modes de convergence des suites de fonctions sur $(-\infty, +\infty)$ (Известия НИИММ Т. Г. У. т. I, вып. 2).

k) Sur la composition des fonctions presque-périodiques (Изв. У. А. Н. 1931).

Sur la correspondence entre les classes diverses de fonctions presque-périodiques généralisées.

A. S. Kovanko (Jvanovo).

Le but du travail présent, c'est de faire une analyse profonde des classes de fonctions presque-périodiques généralisées qui présentent l'object des recherches de H. Bohr, W. Stepanoff, H. Weyl, A. Besicovitz, et de nos propres recherches.

En faisant les intersections des classes de fonctions presque-périodiques mésurables avec des diverses classes des fonctions sommables sur $(-\infty < x < +\infty)$ nous recevons des nouvelles classes intermédiaires de fonctions presque-périodiques, dont nous demontrons des exemples, qui nous prouvent que ces nouvelles classes ne sont pas vides.

Nous posons des problèmes très naturelles à construire encore des nouvelles classes intermédiaires des fonctions presque-périodiques généralisées, dont la résolution doit présenter beaucoup d'intérêt.

К ВОПРОСУ О ПОВЕДЕНИИ ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ.

П. П. Куфарев (Томск).

В этой работе рассматривается односвязная ограниченная область G плоскости комплексного переменного z, граница Γ которой удовлетворяет следующим условиям:

а) Γ является кривой Жордана;

б) Γ принадлежит кольцу $1-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant|z|\leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}$;

в) На дуге Γ_{φ_0} границы Γ, принадлежащей углу $-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$, радиус—вектор точки является однозначной функцией аргумента, $r=f(\varphi)$, удовлетворяющей условию:

$$|f(\varphi)-1|\leqslant Q|\varphi|^n.$$

Кроме того, предполагается, что для постоянных $\varepsilon, \varphi_0, Q$ имеют место некоторые ограничения (см. формулы (96)—(98)).

Для таких областей доказывается следующая теорема:

Функция

$$w=\Phi(z),\ \Phi(0)=0,$$

конформно отображающая область G на единичный круг

$$|w|<1,$$

и ее производные $\Phi'(z), \Phi''(z), \ldots\ldots \Phi^{(n-2)}(z)$ стремятся к определенным предельным значениям $\Phi(1)$, $\Phi'(1), \ldots\ldots \Phi^{(n-2)}(1)$ при приближении z изнутри области G к граничной точке $z_0=1$ по путям, не касательным к Γ.

Кроме того, для предельных значений устанавливаются оценки:

$$|\Phi'(1)-1|\leqslant L_0 Q^{\frac{1}{n-1}}\varepsilon^{\frac{n-2}{n-1}}$$

$$|\Phi^{(s)}(1)|\leqslant L_s Q^{\frac{s}{n-1}}\varepsilon^{\frac{n-s-1}{n-1}},$$

где L_s — числовые постоянные.

Я думаю, что метод, которым доказывается эта теорема в данной работе, даст также возможность доказать более общие теоремы о поведении отображающей функции на границе. Именно, кажется очевидным, что этим методом можно получить результаты, аналогичные результатам, установленным в работе Seidel'a [1]), но в некоторых отношениях более общие.

§ 1.

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного z окружность

$$\gamma: \quad z = e^{\varphi i}. \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть интегрируемая [2]) *в интервале* $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ *периодическая* [3]) *функция* $f(\varphi)$ *удовлетворяет условиям:*

а) $|f(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; (2)

б) $|f(\varphi)| \leqslant M|\varphi|^n$ при $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$. (3)

Пусть, кроме того,

$$\varphi_0 \geqslant \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{M}} = \vartheta_0. \tag{4}$$

Тогда аналитическая в круге

$$K: \quad |z| < 1$$

функция

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\varphi)dt}{t - z}, \quad t = e^{\varphi i}, \tag{5}$$

и ее производные $F'(z), F''(z), \ldots\ldots F^{(n-1)}(z)$ *стремятся к определенным предельным значениям* $F(1), F'(1), F''(1), \ldots\ldots F^{(n-1)}(1)$ *при приближении точки* z *изнутри* K *к точке* $z_0 = 1$, *причем*

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant C_s M^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}} \qquad (s = 1, 2, \ldots\ldots n-1), \tag{6}$$

где

$$C_s = \frac{\pi}{2^{s-1}} \, s! \; {}^{4)} \tag{7}$$

Доказательство. Существование предельных значений для производных

$$F^{(s)}(z) = \frac{s!}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\varphi)dt}{(t-z)^{s+1}} \qquad (s = 1, 2 \ldots n-1) \tag{8}$$

---

[1]) W. Seidel. „Uber die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen". Math. Annalen, Bd. 104, 1931, стр. 232.

[2]) Здесь и дальше имеем в виду интегрируемость по Лебегу.

[3]) с периодом 2π.

[4]) Условие (4) имеет значение лишь при получении оценок (6). Если ограничиться только доказательством существования предельных значений, то это условие может быть отброшено.

Это же замечание относится к условиям (21) в теореме 3, (36) в теореме 3а и (71) в теореме 4.

непосредственно следует из существования при условиях теоремы интеграла

$$F^{(s)}(1) = \frac{s!}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\varphi)\, dt}{(t-1)^{s+1}}. \tag{9}$$

Остается лишь получить оценки (6). Для этого представим $F^{(s)}(1)$ в виде

$$F^{(s)}(1) = \Phi_s(1) + \chi_s(1), \tag{10}$$

где

$$\Phi_s(1) = \frac{s!}{\pi i} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{f(\varphi)\, dt}{(t-1)^{s+1}} \tag{11}$$

и

$$\chi_s(1) = \frac{s!}{\pi i} \int_{\vartheta_0}^{2\pi-\vartheta_0} \frac{f(\varphi)\, dt}{(t-1)^{s+1}}, \tag{12}$$

Пользуясь условиями (2), (3) и справедливым при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ неравенством:

$$|t-1| = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \geqslant \frac{2}{\pi} \varphi \tag{13}$$

найдем для этих выражений оценки:

$$|\chi_s(1)| \leqslant \frac{2\varepsilon s!}{\pi} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{s+1}} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \frac{\varepsilon (s-1)!}{\vartheta_0^{\,s}}, \tag{14}$$

$$|\Phi_s(1)| < \frac{2Ms!}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s+1} \int_{0}^{\vartheta_0} \varphi^{n-s-1}\, d\varphi < \left(\frac{\pi}{2}\right)^s Ms! \frac{\vartheta_0^{\,n-s}}{n-s}, \tag{15}$$

из которых тотчас следует справедливость неравенства (6).

Следствие. Так как аналитическую в круге K функцию $F(z)$ можно представить через граничные значения $P(1,\varphi)$ ее вещественной части интегралом:

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{P(1,\varphi)\, dt}{t-z} + C, \tag{16}$$

то из теоремы I вытекает следующее положение:

ТЕОРЕМА 2. Пусть граничные значения [1] $f(\varphi)=P(1,\varphi)$ *гармонической внутри единичного круга К функции* $P(r,\varphi)$ *удовлетворяют условиям теоремы I. Тогда аналитическая внутри К функция*

$$F(z)=P(r,\varphi)+iQ(r,\varphi)\ ^{2)} \tag{17}$$

и ее производные $F'(z), F''(z), \ldots F^{(n-1)}(z)$ *стремятся к определенным предельным значениям* $F(1), F'(1), F''(1), \ldots F^{(n-1)}(1)$ *при приближении* z *изнутри К к точке* $z_0=1$, *причем выполняются неравенства* (6).

§ 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть граничные значения функции $P(r,\varphi)$, *гармонической в секторе*

$$G:\quad -\beta<\varphi<\beta,\ 0<r<1 \tag{18}$$

интегрируемы и удовлетворяют условиям:

а) $|P(r,\varphi)|\leqslant\varepsilon$ *на всей границе области* G; (19)

б) $|P(1,\varphi)|\leqslant M_1|\varphi|^n$ при $|\varphi|\leqslant\beta$. (20)

Пусть, кроме того,

$$\beta\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{M_1}}. \tag{21}$$

Тогда предельные значения $F'(1), F''(1)\ldots F^{(n-1)}(1)$ [4] *производных аналитической в* G *функции*

$$F(z)=P(r,\varphi)+iQ(r,\varphi)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|F^{(s)}(1)|\leqslant C'_s M_1^{\frac{s}{n}}\varepsilon^{\frac{n-s}{n}} \tag{22}$$

где C'_s — *числовые постоянные.*

Доказательство. Отобразим конформно сектор G на единичный круг плоскости $\zeta=\rho e^{i\vartheta}$ так, чтобы точка $z_0=1$ перешла при отображении в точку $\zeta_0=1$ и дуга

$$\alpha:\quad z=e^{i\varphi}, -\beta\leqslant\varphi\leqslant\beta,$$

---

[1]) Существование граничных значений функции $P(r,\varphi)$ предполагается. Это замечание относится также к теоремам 3, 3а, 4.

[2]) Здесь и в дальнейшем через $Q(r,\varphi)$ обозначается гармоническая функция, сопряженная $P(r,\varphi)$.

[3]) По дуге границы.

[4]) Существование предельных значений при приближении z изнутри G к $z_0=1$ для всех производных от функции $F(z)$ до $n-1$-ого порядка включительно следует из теоремы 2 и из того, что функция, отображающая сектор G на единичный круг, продолжаема за границу G в окрестности точки z_0.

перешла в полуокружность

$$\alpha' : \zeta = e^{i\vartheta}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отображающая функция имеет выражение:

$$\zeta = -\frac{(z^{\frac{\pi}{2\beta}} + 1)^2 - 2}{(z^{\frac{\pi}{2\beta}} - 1)^2 - 2} \tag{23}$$

(причем для функции $z^{\frac{\pi}{2\beta}}$ выбираем ветвь, принимающую значение 1 при $z=1$).

Элементарные вычисления показывают, что при этом отображении между аргументами соответствующих точек на дугах α и α' выполняется соотношение:

$$\sin\frac{\pi\varphi}{2\beta} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}. \tag{24}$$

Так как при $|\vartheta| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\varphi| \leqslant \beta$ справедливы неравенства:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right| \leqslant \frac{|\vartheta|}{\sqrt{2}}, \quad \left|\sin\frac{\pi\varphi}{2\beta}\right| \leqslant \frac{|\varphi|}{\beta},$$

то из формулы (24) вытекает неравенство:

$$|\varphi| \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{2}}|\vartheta|. \tag{25}$$

Отсюда следует, что гармоническая в круге $|\zeta| < 1$ функция

$$P_1(\rho,\vartheta) = P(r(\rho,\vartheta), \varphi(\rho,\vartheta)) \tag{26}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2, если положить:

$$M = M_1 \frac{\beta^n}{2^{\frac{n}{2}}}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}. \tag{27}$$

Поэтому, согласно этой теореме, предельные значения $F_1'(1)$, $F_1''(1) \ldots F_1^{(n-1)}(1)$ производных по ζ от аналитической в круге $|\zeta| < 1$ функции

$$F_1(\zeta) = P_1(\rho,\vartheta) + iQ_1(\rho,\vartheta) \tag{28}$$

удовлетворяют неравенствам:

$$|F_1^{(s)}(1)| < C_s \frac{\beta_s}{2^{\frac{s}{2}}} M_1^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}} \qquad (s = 1, 2 \ldots n-1). \tag{29}$$

Переходя теперь к функции

$$F(z) = F_1(\zeta(z)),$$

рассматриваемой в теореме, имеем при $z \subset G$:

$$F^{(s)}(z) = \sum_{p=1}^{p=s} A_{ps} F_1^{(p)}(\zeta), \tag{3}$$

где A_{ps} — полиномы от производных функции $\zeta(z)$ — такие, что сумма произведений порядка производных на степень, в которую возвышается данная производная, равна s для каждого члена полинома.

Но значения производных функции $\zeta(z)$ в точке $z=1$, как устанавливается элементарными вычислениями, удовлетворяют неравенствам:

$$\left| \left(\frac{d^k \zeta}{dz^k} \right)_{z=1} \right| \leqslant \frac{D_k}{\beta^k}, \tag{31}$$

где D_k — численные постоянные.

Таким образом,

$$|A_{ps}| \leqslant \frac{E_p}{\beta^s} \tag{32}$$

(E_p — численнные постоянные), и, следовательно, из (30) и (29) имеем:

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant \sum_{p=1}^{s} \frac{C_p E_p}{2^{\frac{p}{2}}} \beta^{p-s} M_1^{\frac{p}{n}} \varepsilon^{\frac{n-p}{n}}, \tag{33}$$

или

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant M_1^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}} \sum_{p=1}^{n} \frac{C_p E_p}{2^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{\beta^{s-p}} \left(\frac{\varepsilon}{M_1} \right)^{\frac{s-p}{n}}. \tag{33}$$

Так как по предположению (см. 21)

$$\frac{1}{\beta} \left(\frac{\varepsilon}{M_1} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \tag{21}$$

то окончательно имеем:

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant C_s' M_1^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}}, \tag{22}$$

где C_s' — постоянные, зависящие толко от s, что и требовалось доказать.

* * *

Рассмотрим далее круговой двуугольник

$$B(k):\ |z| < 1, |z-1| < k.$$

Пусть α и соответственно δ — дуги окружностей $|z|=1$ $|z-1|=k$, принадлежащие границе области $B(k)$. Величину k будем считать для удобства дальнейших вычислений не большей $1/2$.

ТЕОРЕМА 3 а. Пусть граничные значения функции $P(r,\varphi)$. гармонической в $B(k)$, интегрируемы и удовлетворяют условиям:

а) $|P(r,\varphi)| \leqslant \varepsilon$ на $\alpha+\delta$, (34)

б) $|P(r,\varphi)| \leqslant M_2 |\varphi|^n$ на α. (35)

Пусть, кроме того,

$$k \geqslant \frac{6}{\pi^2} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{M_2}}. \tag{36}$$

Тогда предельные значения[1] $F'(1), F''(1), \ldots . F^{(n-1)}(1)$ *производных аналитической в* $B(k)$ *функции*

$$F(z) = P(r,\varphi) + iQ(r,\varphi)$$

удовлетворяют неравенствам:

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant C_s'' M_2^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}}, \tag{37}$$

где C''_s числовые постоянные.

Доказательство. Посредством линейного преобразования

$$\zeta = \frac{z-1+k}{1-(1-k)z} \tag{38}$$

область $B(k)$ отображается на круговой двуугольник

$$B'(k):\ |\zeta| < 1, \left| \zeta - \frac{1}{k} \right| < \frac{1}{k} \tag{39}$$

[1]) Относительно существования предельных значений см. примечание к теореме 3, стр. 40.

так, что дуга δ переходит в некоторую дугу δ' окружности $\left|\zeta - \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k}$, дуга α — в дугу α' окружности $|\zeta| = 1$, и точка $z = 1$ — в точку $\zeta = 1$. При этом между аргументами соответствующих при отображении точек дуг α и α', как легко проверить, выполняется соотношение:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{k}{2-k}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \tag{40}$$

откуда таким же образом, как в теореме 3, следует, что

$$|\varphi| \leqslant k\sqrt{2}\,|\vartheta|. \tag{41}$$

Следовательно, граничные значения гармонической в $B'(k)$ функции

$$P_1(\rho,\vartheta) = P(r(\rho,\vartheta),\ \varphi(\rho,\vartheta)) \tag{42}$$

удовлетворяют условиям:

$$|P_1(\rho,\vartheta)| \leqslant \varepsilon \text{ на } \alpha' + \delta'. \tag{43}$$

$$|P_1(\rho,\vartheta)| \leqslant M_2 k^n 2^{\frac{n}{2}} |\vartheta|^n \text{ на } \alpha'. \tag{44}$$

Рассмотрим далее принадлежащий $B'(k)$ сектор

$$B'':\ |\vartheta| < \arccos\frac{k}{2},\ \rho < 1. \tag{45}$$

По принципу максимума для гармонических функций $P_1(\rho,\vartheta)$ принимает на границе сектора B'' значения, меньшие ε по модулю. Таким образом, $P_1(\rho,\vartheta)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, если в качестве области, рассматриваемой в этой теореме, взять сектор B'', и принять:

$$M_1 = M_2 k^n\ 2^{\frac{n}{2}}, \tag{46}$$

$$\beta = \arccos\frac{k}{2} \quad [1] \tag{47}$$

Следовательно, по теореме 3, предельные значения $F_1'(1)$, $F_1''(1), \ldots\ldots F_1^{(n-1)}(1)$ производных по ζ от аналитической в $B'(k)$ функции

$$F_1(\zeta) = F(z(\zeta))$$

[1] Условие (21) удовлетворяется в силу предположения (36).

удовлетворяют неравенствам:

$$|F_1^{(s)}(1)| \leqslant C_s' M_2^{\frac{s}{n}} k^{s} 2^{\frac{s}{2}} \varepsilon^{n-s}. \qquad (48)$$

Пользуясь этими неравенствами и имея в виду, что

$$\left|\left(\frac{d^p\zeta}{dz^p}\right)_{z=1}\right| < 2\frac{p!}{k^p},$$

справедливость указанных в теореме неравенств для предельных значений $F'(1), F''(1), \ldots . F^{(n-1)}(1)$ производных (по z) от функции $F(z)$—установим таким же путем, как в теореме 3 (см. формулы 30—33).

§ 3.

Рассмотрим специальные области $B_m(k,A)$, которые определим следующим образом:

а) Если $m>1$ нечетное число, $m=2p+1$, то $B_m(k,A)$—область, на которую отображается круговой двуугольник

$$B(k): |\zeta|<1, |\zeta-1|<k$$

функцией

$$z=w_m(\zeta)=\zeta+(-1)^p Ai(\zeta-1)^m-$$

$$-\frac{2(-1)^p}{\pi}A(\zeta-1)^m\log\left[(\zeta-1)e^{-i\frac{\pi}{2}}\right], \qquad (50)$$

где для логарифма выбирается ветвь, принимающая вещественные значения при $\zeta-1=\sigma e^{i\frac{\pi}{2}}$.

При этом, для обеспечения конформности отображения, положительный параметр A ограничим неравенством:

$$A \leqslant \frac{1}{3mk^{m-2}}. \qquad (51)$$

б) Если m—четное, $m=2p$, то $B_m(k,A)$—область, на которую отображается $B(k)$ функцией

$$z=w_m(\zeta)=\zeta+(-1)^{p-1}A(\zeta-1)^m, \qquad (50')$$

где

$$0 < A \leqslant \frac{1}{2mk^{m-1}} . \qquad (51')$$

Кроме того, в обоих случаях примем, что

$$k \leqslant \sin\frac{\pi}{2(m-1)},\ k \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (52)$$

Обозначим через δ_m и соответственно α_m—дуги границы $B_m(k,A)$, в которые переходят при отображении дуги $\delta : |\zeta - 1| = k$ и $\alpha : |\zeta| = 1$ границы $B(k)$.

При указанных ограничениях параметров k и A мы установим следующие свойства области $B_m(k,A)$.

1) Область $B_m\ (k,A)$ принадлежит сектору

$$|z| \leqslant 1,\ |\arg z| \leqslant \arcsin\frac{5}{4}k. \qquad (53)$$

2) В точках дуги α_m удовлетворяются неравенства;

$$K_m A\,|\arg z|^m \leqslant 1 - |z| \leqslant L_m A\,|\arg z|^m, \qquad (54)$$

где

$$K_m = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5\pi}\right)^m$$

и

$$L_m = 2^{m-1}(m+2).$$

(Для четного m можно также принять $L_m = 2^{m+1}$).

3) Аргументы соответствующих при отображении точек дуг α и α_m удовлетворяют неравенству

$$|\arg z| \leqslant \frac{5}{8}\pi\,|\arg\zeta|. \qquad (56)$$

4) На α_m радиус—вектор точки z является однозначной функцией аргумента z.

Ограничимся доказательством этих свойств для случая нечетного m, так как для случая четного m доказательство осуществляется аналогично.

Установим некоторые вспомогательные неравенства, которым удовлетворяет функция (50).

а) При $\zeta \subset \overline{B}\ (k)$

$$\frac{3}{4}|\zeta - 1| \leqslant |z - 1| \leqslant \frac{5}{4}|\zeta - 1|. \qquad (57)$$

В самом деле, полагая

$$\zeta - 1 = \sigma e^{i\theta} \tag{58}$$

и используя удовлетворяющееся при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ неравенство

$$\sigma \log \frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{1}{e}, \tag{59}$$

имеем $\left(\text{при } 0 \leqslant \sigma \leqslant k \leqslant \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$:

$$|z - 1| \geqslant |\zeta - 1| \left\{ 1 - A\sigma^{m-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} A \sigma^{m-2} \sqrt{(\sigma \log \sigma)^2 + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant |\zeta - 1| \left\{ 1 - \frac{1}{3m} \left(\frac{1}{2} + 2 \sqrt{\frac{1}{e^2 \pi^2} + \frac{1}{4}} \right) \right\} \geqslant \frac{3}{4} |\zeta - 1|.$$

Аналогично доказывается второе из неравенств (57).

б) При $\zeta \subset \overline{B}(k)$

$$|\arg z| \leqslant \frac{5}{8} \pi \sigma. \tag{60}$$

Действительно, так как по неравенству (57) при $k \leqslant \frac{1}{2}$

$$|z - 1| < 1,$$

то имеет место неравенство:

$$|\arg z| \leqslant \arcsin |z - 1| \leqslant \frac{\pi}{2} |z - 1|. \tag{61}$$

Из (57) и (61) следует неравенство (60).

в) При $\zeta \subset \alpha$ выполняются неравенства:

$$\frac{1}{2} \sigma \leqslant |\arg z| \leqslant \frac{5}{8} \pi \sigma. \tag{62}$$

В самом деле, из (50) легко видеть, что при условиях (51) и при $k \leqslant \frac{1}{2}$ на α выполняются неравенства:

$$|\arg z| \geqslant |\arg \zeta| - \arcsin |z - \zeta| \geqslant \arg \zeta - 2 |z - \zeta|.$$

Но на α

$$|\arg \zeta| = 2 \arcsin \frac{\sigma}{2} \geqslant \sigma.$$

С другой стороны, по (50), (51)

$$|z-\zeta| \leqslant A\,\sigma^m + \frac{2}{\pi} A\,\sigma^{m-1} \sqrt{\left(\sigma \log \sigma\right)^2 + \sigma^2 \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2} \leqslant \frac{1}{4}\sigma.$$

Отсюда следует левая часть неравенства (62).

г) При $\zeta \subset \alpha$

$$\frac{1}{2} A\,\sigma^m \leqslant 1 - |z| \leqslant \frac{2}{5}(m+2) A\,\sigma^m. \tag{63}$$

Действительно, полагая

$$\zeta = 1 + \sigma\, e^{i\theta} = e^{i\vartheta},\ \sigma = 2 \sin \frac{|\vartheta|}{2}, \tag{64}$$

можем представить $1 - |z|^2$ в виде

$$1 - |z|^2 = 2 A\,\sigma^m \cos\left(\frac{m-2}{2}|\vartheta|\right)\left\{1 - \frac{|\vartheta|}{\pi} + \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{\sigma} \operatorname{tg}\left(\frac{m-2}{2}|\vartheta|\right)\right\} - A^2 \sigma^{2m}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{\pi^2}\right) - \frac{4A^2}{\pi^2}\sigma^{2m-2}(\sigma \log \sigma)^2 + \frac{2A^2|\vartheta|}{\pi}\sigma^{2m}. \tag{65}$$

Пользуясь для оценки удовлетворяющимися на α при условиях (51), (52) неравенствами:

$$|\vartheta| \leqslant \arcsin k \leqslant \frac{\pi}{2(n-1)}, \tag{66}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos\left(\frac{m-2}{2}|\vartheta|\right) \leqslant 1,$$

$$\frac{3}{4} \leqslant 1 - \frac{|\vartheta|}{\pi} + \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{\sigma} \operatorname{tg}\left(\frac{m-2}{2}|\vartheta|\right) \leqslant 1 + \frac{m-2}{e\sqrt{2}},$$

$$0 \leqslant A^2 \sigma^{2m}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{\pi^2}\right) \leqslant \frac{17}{192\,m} A\,\sigma^m,$$

$$0 \leqslant 2A^2 \frac{|\vartheta|}{\pi} \sigma^{2m} \leqslant \frac{1}{24\,m} A\,\sigma^m$$

$$0 \leqslant \frac{4\,A^2}{\pi^2}\ \sigma^{2m-2}\ (\sigma \log \sigma)^2 \leqslant \frac{4}{3\,\pi^2\,e^2\,m} A\sigma^m,$$

получим из (65) неравенства:

$$A\,\sigma^m \leqslant 1 - |z|^2 \leqslant \frac{2}{3}(m+2)\,A\,\sigma^m < 0{,}1. \tag{67}$$

Деля на $1+|z|$ и замечая, что из (67) для модуля z следует неравенства

$$0{,}9 \leqslant |z| \leqslant 1,$$

легко получим неравенства (63).

e) При $\zeta \subset \alpha$

$$\left|\arg \frac{\zeta}{z}\frac{dz}{d\zeta}\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{68}$$

Для доказательства заметим, что при $\zeta \subset \alpha$ имеет место неравенство:

$$\left|\arg \frac{\zeta}{z}\frac{dz}{d\zeta}\right| \leqslant \left|\arg \frac{z}{\zeta}\right| + \left|\arg \frac{dz}{d\zeta}\right| \leqslant \arcsin\left|\frac{z}{\zeta} - 1\right| +$$

$$+ \arcsin\left|\frac{dz}{d\zeta} - 1\right|,$$

и тем более

$$\left|\arg \frac{\zeta}{z}\frac{dz}{d\zeta}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\left|\frac{z}{\zeta} - 1\right| + \left|\frac{dz}{d\zeta} - 1\right|\right).$$

Производя оценки, аналогичные выполненным при доказательстве неравенства (57), получим:

$$\left|\frac{z}{\zeta} - 1\right| < \frac{1}{4},$$

$$\left|\frac{dz}{d\zeta} - 1\right| < \frac{3}{4}.$$

Таким образом, неравенство (68) доказано.

Из полученнных вспомогательных неравенств свойства области которые мы хотим доказать, следуют непосредственно. Именно: неравенство (56) следует из (62), так как на α

$$\sigma \leqslant |\arg \zeta|.$$

Неравенства (53) следуют из (63), (61), (57). Неравенства (54) следуют из (63) и (62). Наконец, свойство 4 вытекает из неравенства (68). В самом деле, известно, что при конформном отображении $\arg \frac{\zeta}{z}\frac{dz}{d\zeta}$ равен изменению угла отклонения линейного элемента от радиального направления. Таким образом, из неравенства (68) следует, что элемент дуги α_m, соответствующий при отображении какому-либо элементу дуги α, образует с радиусом—вектором точки z угол, меньший π, и, следовательно, при движении по α в направлении возрастания аргумента ζ, аргумент соответствующей точки на α_m также монотонно возрастает.

§ 4.

Докажем теперь теорему, аналогичную теоремам 3, 3а, для функций, гармонических в области $B_m(k, A)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть граничные значения функции $P(r, \varphi)$, гармонической в $B_m(k, A)$, интегрируемы и удовлетворяют условиям:

а) $|P(r, \varphi)| \leqslant \varepsilon$ на $\alpha_m + \sigma_m$; (69)

б) $|P(r, \varphi)| \leqslant M_3 |\varphi|^n$ на α_m. (70)

Пусть, кроме того, $n \leqslant m$ и

$$k \geqslant \frac{48}{5\pi^3}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{M_3}}. \tag{71}$$

Тогда аналитическая в $B_m(k, A)$ функция

$$F(z) = P(r, \varphi) + i\,Q(r, \varphi)$$

и ее производные $F'(z)$, $F''(z)$, $F^{n-1}(z)$ стремятся к определенным предельным значениям $F(1)$, $F'(1)$, $F^{(n-1)}(1)$ при приближении z изнутри $B_m(k, A)$ к точке $z_0 = 1$, причем

$$\left| F^{(s)}(1) \right| \leqslant D_s M_3^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}}, \tag{72}$$

где D_s — числовые постоянные.

Доказательство. Отобразим область $B_m(k, A)$ посредством функции $z = w_m(\zeta)$ (см. (50), (50′) на круговой двуугольник $B(k)$.

Вещественная часть аналитической в $B(k)$ функции $F_1(\zeta) = F(z(\zeta))$ в силу неравенства (56), удовлетворяет условиям теоремы 3а, если принять:

$$M_2 = \left(\frac{5\pi}{8}\right)^n M_3$$

(Условие (36) удовлетворяется в силу неравенства (71).

Следовательно, предельные значения производных (по ζ) этой функции удовлетворяют неравенствам:

$$\left| F_1^{(s)}(1) \right| \leqslant \left(\frac{5\pi}{8}\right)^s C''_s M_3^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}} \qquad (s = 1, 2 \ldots . n-1).$$

Но при $s < n$, как нетрудно проверить, значение, к которому стремится $F^{(s)}(z)$ при стремлении z к 1, равно $F_1^{(s)}(1)$:

$$F^{(s)}(1) = F_1^{(c)}(1).$$

Таким образом:

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant D_s M_3^{\frac{s}{n}} \varepsilon^{\frac{n-s}{n}},$$

где

$$D_s = \left(\frac{5\pi}{8}\right)^s C''_s.$$

§ 5.

Пусть непрерывные и однозначные [1]) в интервале

$$-\beta \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi \tag{73}$$

функции $\chi(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$ удовлетворяют в этом интервале неравенствам:

а) $|\chi(\varphi) - 1| \leqslant M |\varphi|^n$; (74)

б) $|\lambda(\varphi) - 1| \leqslant M' |\varphi|^n$; (75)

в) $|0 < \lambda(\varphi) \leqslant \chi(\varphi)$. (76)

Рассмотрим область G_β. ограниченную лучами $\varphi = \pm\beta$ и кривой

$$\Gamma: \quad r = \chi(\varphi). \tag{77}$$

Заметим, что кривая

$$\Gamma': \quad r = \lambda(\varphi). \tag{78}$$

принадлежит G_β.

Докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 5. Пусть граничные значения функции [2]) $P(r, \varphi)$, *гармонической в* G_β, *удовлетворяют условиям:*

а) $|P(r, \varphi)| \leqslant \varepsilon$ *на границе* G_β; (79)

---

[1]) Предположение, что функции $\chi(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$ однозначны, не является существенным.

[2]) Известно, как можно изменить формулировку теоремы и доказательство если не предполагать существования граничных значений функции $P(r, \varphi)$; см. Julia: „Principes géometriques d, analyse", 1932, т. 2, стр. 2.

$$\text{б) } |P(r,\varphi)| \leqslant N|\varphi|^n \text{ на } \Gamma \ (n>1). \tag{80}$$

Пусть, кроме того,

$$M\pi\beta^{n-1} \leqslant 1,\ M'\pi\beta^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{81}$$

Тогда значения, которые принимает $P(r, \varphi)$ на кривой Γ', удовлетворяют неравенству:

$$|P(r,\varphi)| \leqslant K|\varphi|^{n-1} \text{ при } -\frac{\beta}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\beta}{2}, \tag{82}$$

где

$$K = 2^n N + \varepsilon(2^{n+2}M + M'). \tag{83}$$

Доказательство.

Заметим, прежде всего, что при выполнении условий (81) при $|\varphi| \leqslant \beta$ справедливы неравенства:

$$\log\left(1+M|\varphi|^n\right) \leqslant \frac{2|\varphi|}{\pi} \log\left(1+M\pi|\varphi|^{n-1}\right),$$

$$\log\left(1-M'|\varphi|^n\right) \geqslant \frac{2|\varphi|}{\pi} \log\left(1-M'\pi|\varphi|^{n-1}\right).$$

Поэтому

$$\chi(\varphi) \leqslant 1+M|\varphi|^n \leqslant \left(1+M\pi|\varphi|^{n-1}\right)^{2\frac{|\varphi|}{\pi}} \tag{84}$$

и

$$\lambda(\varphi) \geqslant 1-M'|\varphi|^n \geqslant \left(1-M'\pi|\varphi|^{n-1}\right)^{2\frac{|\varphi|}{\pi}}. \tag{85}$$

Рассмотрим теперь область $G_\omega \subset G_\beta$, ограниченную лучами $\varphi = \pm\omega \leqslant \beta$ и дугой Γ_ω кривой Γ, принадлежащей сектору $|\varphi| \leqslant \omega$.

По принципу максимума значения, которые принимает $P(r, \varphi)$ на границе G_ω, удовлетворяют неравенству:

$$|P(r,\varphi)| \leqslant \varepsilon. \tag{86}$$

Кроме того, по (80), для граничных значений $P(r, \varphi)$ на дуге Γ_ω имеет место неравенство:

$$|P(r,\varphi)| \leqslant N\omega^n. \tag{87}$$

Оценим далее значения $P(r, \varphi)$ внутри G_ω. Воспользуемся для этого неравенством Неванлинна—Островского,[1]) которое в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$-\Lambda(z)\,\varepsilon-(1-\Lambda(z)\,N\,\omega^{n}\leqslant P(r,\varphi)\leqslant\Lambda(z)\,\varepsilon+$$

$$+(1-\Lambda(z))\,N\,\omega^{n}. \tag{88}$$

Здесь $\Lambda(z)$ — гармоническая в G_ω функция, принимающая значение 0 на Γ_ω и 1 на остальной части границы G_ω.

Для оценки функции $\Lambda(z)$ используем метод, предложенный Julia. Именно, построим круговой сектор K_ω, ограниченный лучами $\varphi=\pm\omega$ и дугой окружности радиуса

$$r_\omega=R^{\frac{2\omega}{\pi}},$$

где

$$R=1+M\,\pi\omega^{n-1} \tag{89}$$

Из неравенства (84) следует, что этот сектор содержит G_ω.

Определим далее функцию

$$\Lambda_1(z)=1-\frac{2}{\pi}\arg\frac{iR-z^{\frac{\pi}{2\omega}}}{iR+z^{\frac{\pi}{2\omega}}}, \tag{20}$$

гармоническую в K_ω и принимающую значение нуль на принадлежащей границе области K_ω дуге круга $|z|=r_\omega$ и значение 1 на остальной части границы K_ω.

Так как $G_\omega \subset K_\omega$, то по принципу максимума в G_ω

$$0\leqslant\Lambda(z)\leqslant\Lambda_1(z)\leqslant 1.$$

Поэтому из (88) следует неравенство:

$$-\Lambda_1(z)\,\varepsilon-N\,\omega^{n}\leqslant \mathrm{P}(r,\varphi)\leqslant\Lambda_1(z)\,\varepsilon+N\,\omega^{n} \tag{91}$$

Применим это неравенство в принадлежащей G_ω точке

$$z=r'e^{\frac{1}{2}i\omega},\quad r'=\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

[1]) См., напр., уже цитированную книгу Julia, стр. 43

кривой Γ'. Имеем:

$$\Lambda_1\left(r' e^{\frac{1}{2} i \omega}\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R^2 - r'^{\frac{\pi}{\omega}}}{\sqrt{R^4 + r'^{\frac{2\pi}{\omega}}}} \leqslant R^2 - r'^{\frac{\pi}{\omega}}.$$

Но, по (85)

$$r'^{\frac{\pi}{\omega}} = \left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{\frac{\pi}{\omega}} \geqslant 1 - M' \pi\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1}.$$

Следовательно, (см. еще (89))

$$\Lambda_1\left(r' e^{i\frac{\omega}{2}}\right) \leqslant \left(2^n M + M' + 2^{n-1} \pi M^2 \omega^{n-1}\right) \pi\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1},$$

или, учитывая условие (81),

$$\Lambda_1\left(r' e^{i\frac{\omega}{2}}\right) \leqslant \left(M' + 2^{n+1} M\right) \pi\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1}.$$

Таким образом

$$\left|P\left(\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right), \frac{\omega}{2}\right)\right| \leqslant K\left(\frac{\omega}{2}\right)^{n-1}, \tag{92}$$

где

$$K = 2^n N + \varepsilon\left(2^{n+1} M + M'\right). \tag{93}$$

Так как в этом неравенстве $\frac{\omega}{2}$ может принимать любое значение между нулем и $\frac{\beta}{2}$, то теорема доказана.

§ 6.

Основываясь на предыдущих выводах, мы можем теперь доказать теорему, являющуюся основным результатом этой работы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть граница Γ односвязной области G является кривой Жордана, удовлетворяющей следующим условиям;

а) Γ *принадлежит кольцу* $1-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant r \leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}$; (94)

б) *На дуге* Γ_{φ_0} *границы* Γ, *принадлежащей углу* $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, *радиус вектор точки является однозначной*[1]) *функцией аргумента*, $r=f(\varphi)$, *удовлетворяющей условию*

$$|f(\varphi)-1| \leqslant Q|\varphi|^n. \tag{95}$$

Пусть, кроме того,

$$\varepsilon \leqslant \frac{K_n}{L_n},\ K_n=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{5\pi}\right)^n,\ L_n=2^{n-1}(n+2) \tag{96}$$

$$\varphi_0 \geqslant \frac{6}{\pi^2}\sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{8Q}} \tag{97}$$

$$\frac{24}{5\pi^3}\sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{8Q}} \leqslant \sin\frac{\pi}{2(n-1)} \text{ и } \leqslant \frac{1}{2}, \tag{98}$$

и, для нечетного n,

$$\frac{24}{5\pi^3}\sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{8Q}} \leqslant \sqrt[n-2]{\frac{K_n}{Q}}. \tag{99}$$

Тогда функция

$$w=\Phi(z),\ \Phi(0)=0, \tag{100}$$

отображающая область G *на единичный круг, и ее производные* $\Phi'(z), \Phi''(z), \ldots \ldots .\Phi^{(n-2)}(z)$ *стремятся к определенным предельным значениям* $\Phi(1), \Phi'(1), \ldots .\Phi^{(n-2)}(1)$ *при приближении* z *изнутри* G *к точке* $z_0=1$ *по путям, не касательным к* Γ *или имеющим в точке* z_0 *касание ниже* $n-1$*-ого порядка к единичной окружности* $|z|=1$.

При этом

$$1-L_0 Q^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-2}{n-1}} \leqslant |\Phi'(1)| \leqslant 1+L_0 Q^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-2}{n-1}},$$

$$|\Phi^{(s)}(1)| \leqslant L_s Q^{\frac{s}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-s-1}{n-1}}, \quad (s=2, 3, \ldots n-2), \tag{101}$$

где L_s — *числовые постоянные*.[1])

---

[1]) Предположение, что функция $f(\varphi)$ однозначна при $|\varphi| < \varphi_0$, не является существенным.

[1]) Условия (96)—(99) не нужны для доказательства существования предельных значений. Они используются лишь для доказательства оценок (101).

Доказательство. Возьмем числа A и k, удовлетворяющие неравенствам:

$$k \leqslant \sin\frac{\pi}{2(n-1)}, k \leqslant \frac{1}{2}, \tag{52}$$

$$2 \arcsin\frac{5}{4} k \leqslant \varphi_0, \tag{102}$$

$$\frac{Q}{K_n} \leqslant A \leqslant \frac{Q}{\varepsilon L_n}, \tag{103}$$

$$\frac{24}{5\pi^3}\sqrt[n-1]{\frac{\varepsilon}{8Q}} \leqslant k \leqslant \frac{4}{5\pi}\sqrt[n-1]{\frac{1}{2L_n A\pi}} \tag{104}$$

и неравенствам (51) или (51′), и построим область $B_n(k, A)$.[2]) При условиях (102), (103) эта область, в силу предположения (95), будет принадлежать G (см. формулы (53), (54), (55)). Кроме того, из неравенств (53), (102) следует, что $B_n(k, A)$ принадлежит углу $|\arg z| \leqslant \frac{\varphi_0}{2}$,

Рассмотрим далее дугу α_n границы области $B_n(k, A)$[3]). На α_n, по (54), выполняются неравенства:

$$K_n A|\varphi|^n \leqslant 1 - |z| \leqslant L_n A|\varphi|^n \tag{105}$$

Отметим крайние точки $t_1 = r_1 e^{i\beta_1}$, $t_2 = r_1 e^{-i\beta_1}$ дуги α_n и построим в секторах:

$$\beta_1 \leqslant \varphi \leqslant \omega, -\omega \leqslant \varphi \leqslant -\beta_1, \omega = 2\arcsin\frac{5}{4}k,$$

дуги γ', γ'', удовлетворяющие следующим условиям:

а) Дуги γ', γ'' вместе с α_n образуют непрерывную кривую Жордана Γ'_ω, на которой радиус вектор точки является однозначной функцией аргумента;

б) Γ'_ω принадлежит $\overline{G}$;

в) Неравенства (105) удовлетворяются на всей кривой Γ'_ω.

Обозначим еще через Γ_ω часть дуги Γ_{φ_0}, принадлежащую сектору $|\varphi| \leqslant \omega$.

---

[2]) При условиях (96) — (99) числа A и k, удовлетворяющие этим неравенствам, можно подобрать.

[3]) Здесь применяются те же обозначения, что в § 4.

Рассмотрим теперь гармоническую в G функцию $P(r, \varphi)$, принимающую на Γ значения

$$P(r, \varphi) = \log r. \tag{106}$$

По условию (95) граничные значения функции $P(r, \varphi)$ удовлетворяют на Γ неравенству:

$$\log\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant P(r, \varphi) \leqslant \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Поэтому и подавно

$$-\varepsilon \leqslant P(r, \varphi) \leqslant \varepsilon. \tag{107}$$

Аналогично из условий (95), (104) получим, что значения, которые принимает $P(r, \varphi)$ на Γ_ω, удовлетворяют неравенству:

$$-2Q\,|\varphi|^n \leqslant P(r, \varphi) \leqslant 2Q\,|\varphi|^n. \tag{108}$$

Оценим далее значения, принимаемые функцией $P(r, \varphi)$ на кривой α_n. Для этого мы можем воспользоваться теоремой 5. В самом деле, так как на кривой Γ'_ω выполняется неравенство

$$0 \leqslant 1 - |z| \leqslant L_n A\,|\varphi|^n,$$

то, таким образом, для $P(r, \varphi)$ удовлетворяются условия теоремы 5, если в качестве дуг Γ, Γ', рассматриваемых в этой теореме, взять соответственно дуги Γ_ω и Γ'_ω, и принять:

$$N = 2Q,\ M = Q,\ M' = L_n A,\ \beta = \omega.\ ^{1)}$$

Следовательно, значения, которые принимает функция $P(r, \varphi)$ на α_n, удовлетворяют неравенству:

$$|P(r, \varphi)| \leqslant K\,|\varphi|^{n-1}, \tag{109}$$

где

$$K = 2^{n+1}Q + \varepsilon\,(2^{n+1}Q + L_n A)$$

или (см. (103))

$$K \leqslant [(1+\varepsilon)2^{n+1} + 1]\,Q < d^{n-1}Q, \tag{110}$$

где d — числовая константа.

---

1) Условия (81) будут удовлетворяться в силу неравенств (103), (104).

Отсюда непосредственно вытекает, что $P(r,\varphi)$ удовлетворяет в области $\overline{B}_n(k, A)$ условиям теоремы 4 при замене n на $n-1$ и при $M_s = d^{n-1} Q$ [1])

Применяя эту теорему, заключаем, что аналитическая в G функция

$$F(z) = P(r,\varphi) + i\,Q(r,\varphi)$$

и ее производные $F'(z), F''(z), \ldots . F^{(n-2)}(z)$ стремятся к определенным предельным значениям при приближении z изнутри $B_n(k, A)$ к точке $z_0 = 1$. Но отсюда следует, что $F(z)$, $F'(z), \ldots$ $\ldots F^{(n-2)}(z)$ стремятся к $F(1)$, $F'(1)$, $F''(1), \ldots \ldots F^{(n-2)}(1)$ при приближении z изнутри G к точке z_0 по любому пути, некасательному к Γ в z_0 или по пути, имеющему в точке z_0 касание ниже $n-1$ — ого порядка к единичной окружности, так как такой путь в достаточно малой окрестности точки z_0 будет проходить в $B_n(k, A)$.

Кроме того, по теореме 4, предельные значения $F^{(s)}(1)$ будут удовлетворять неравенствам:

$$|F^{(s)}(1)| \leqslant D_s' Q^{\frac{s}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-s-1}{n-1}}, \tag{111}$$

где

$$D_s' = d^s D_s.$$

Но из этого результата доказываемая теорема следует очевидным образом. В самом деле, функция, отображающая область G на единичный круг и переводящая нуль в нуль, выражается в G через $F(z)$ формулой:

$$w = \Phi(z) = e^{i\gamma} z e^{-F(z)}, \tag{112}$$

и производные ее выражаются суммами вида:

$$\Phi'(z) = e^{i\gamma} e^{-F(z)} [1 - zF'(z)]$$

и

$$\Phi^{(s)}(z) = e^{i\gamma - F(z)} \Big\{ -zF^{(s)}(z) - sF^{(s-1)}(z) + sF'(z)F^{(s-1)}(z) + \ldots \ldots .$$

$$\ldots . + (-1)^s z [F'(z)]^s \Big\} \qquad (s = 2, 3, 4 \ldots .),$$

причем сумма произведений порядков производных на степень, в которую возвышается данная производная, для каждого члена суммы (114) не превышает s.

[1]) Условие (71) выполняется в силу левого из неравенств (104).

Из этих формул видно, что вместе с существованием предельных значений для $\overset{(s)}{F}(z)$ существуют также предельные значения и для $\overset{(s)}{\Phi}(z)$. И далее, производя обычным способом оценки этих предельных значений (см. аналогичные оценки в теоремах 3, 3а) и используя неравенства (111) и (97), получим:

$$1 - L_0 Q^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-2}{n-1}} \leqslant |\Phi'(1)| \leqslant 1 + L_0 Q^{\frac{1}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-2}{n-1}},$$

$$|\overset{(s)}{\Phi}(1)| \leqslant L_s Q^{\frac{s}{n-1}} \varepsilon^{\frac{n-s-1}{n-1}} \qquad (s = 2, 3, \ldots n-2), \tag{100}$$

где L_s — числовые постоянные.

Теорема доказана.

В заключение укажем еще одно вытекающее из теоремы 6 следствие. Рассмотрим бесконечную последовательность областей G_1 G_2, $G_3 \ldots\ldots$, обладающую следующими свойствами:

1. Каждая из областей G_m удовлетворяет условиям теоремы 6, при

$$\varepsilon = \varepsilon_m, \; Q = Q_m, \; \varphi_0 = \varphi_{0m};$$

2. $\lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$;

3. $\overline{\lim\limits_{m \to \infty}}\, Q_m < \infty$.

Пусть $w_m = \Phi_m(z)$, $\Phi_m(0) = 0$, — функция, отображающая область G_m на единичный круг.

Тогда

$$\lim_{m \to \infty} |\Phi'_m(1)| = 1 \tag{114}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \overset{(s)}{\Phi}_m(1) = 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots n-2). \tag{115}$$

Zur Frage nach dem Verhalten der abbildenden Funktion am Rande.

P. P. Kufareff (*Tomsk*).

In dieser Arbeit wird ein einfach zusammenhängender Bereich G in der komplexen Ebene betrachtet, dessen Begrenzung Γ folgenden Bedingungen genügt:

a) Γ ist eine Jordansche Kurve;

b) Γ gehört dem Ringe $1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |z| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ an;

c) Auf dem Bogen $\Gamma\varphi_0$ des Randes Γ, der zum Winkel $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ gehört, ist der Radiusvektor eine einwertige Funktion des Arguments $r = f(\varphi)$, welche der Bedingung

$$|f(\varphi) - 1| \leqslant Q\,|\varphi|^n$$

genügt. Ausserdem wird angenommen, dass für konstantes ε, φ_0, Q gewisse Einschränkungen statthaben (Formeln 96—98).

Für solche Bereiche wird folgender Satz bewiesen:

Die Funktion

$$w = \Phi(z),\ \Phi(0) = 0,$$

die den Bereich G konform auf den Einheitskreis

$$|w| < 1$$

abbildet, u. ihre Ableitungen $\Phi'(z)$, $\Phi''(z) \ldots \Phi^{(n-2)}(z)$ konvergieren nach bestimmten Randwerten $\Phi(1)$, $\Phi'(1) \ldots \Phi^{(n-2)}(1)$ bei Annäherung, von z aus dem Inneren des Bereichs G an den Randpunkt $z_0 = 1$ auf Wegen, die Γ nicht berühren.

Ausserdem gelten für die Randwerte die Abschätzungen

$$|\Phi(1) - 1| \leqslant L_0\, Q^{\frac{1}{n-1}}\, \varepsilon^{\frac{n-1}{n-1}};$$

$$|\Phi^{(s)}(1)| \leqslant L_0\, Q^{\frac{s}{n-1}}\, \varepsilon^{\frac{n-s-1}{n-1}},$$

wo L_s numerische Konstanten sind. Jch nehme an, dass die Methode, die den Satz in der vorliegenden Arbeit beweist, auch die Möglichkeit geben wird, allgemeinere Sätze über das Verhalten der Abbildungsfunktion am Rande zu beweisen. Augenscheinlich kann man mit dieser Methode Resultate erhalten, die den in der Arbeit Seidels aufgestellten analog sind, aber in gewisser Beziehung allgemeiner sind.

К ТЕОРИИ РОСТА ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ НУЛЬ-ПОВЕРХНОСТЯМИ.

Е. Н. Аравийская. (Томск).

Настоящая работа имеет целью доказать одну теорему, касающуюся роста аналитической в данной области функции двух комплексных переменных при некоторых условиях, налагаемых на границу области и расположение нуль—поверхностей [1]) функции.

Пусть B односвязная, однолистная, конечная область в пространстве—z_1, z_2 и $f(z_1,z_2)$—аналитическая функция в B; причем

$$A=\int\limits_B (\ln|f(z_1,z_2)|)^2\, dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty.$$

$\ln|f(z_1,z_2)|$ будет правильной бигармонической функцией в области B', полученной из B исключением всех нуль-поверхностей функции $f(z_1,z_2)$. Известно [2]), что для всякой односвязной однолистной области B существует положительная непрерывная функция $H(z_1,z_2)$ (так называемая ядровая функция области B для класса бигармонических функций) такая, что для каждой аналитической в B бигармонической функции $g(z_1,z_2)$ с интегрирующимся квадратом имеет место неравенство:

$$|g(z_1,z_2)|\leqslant\sqrt{\Gamma H(z_1,z_2)},$$

где

$$\Gamma=\int\limits_B g^2(z_1,z_2)dx_1,dy_1dx_2dy_2.\ (z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2).$$

Следовательно, для нашего случая

$$|\ln|f(z_1,z_2)||\leqslant\sqrt{AH(z_1,z_2)}. \tag{1}$$

Это неравенство дает возможность поставить вопрос об оценке роста аналитических функций в данной области при помощи ядровой функции.

Принимая во внимание известные [3]) основные свойства ядровой функции, а именно:

a) $$H_B(z,\bar z)\geqslant H_{B^*}(z,\bar z), \tag{2}$$

если $B\subset B^*$

и

[1]) О нуль—поверхностях см. Bergmann. Über die Nullstellen... Proceedings Acad. Amsterdam 35 (1932).

[2]) Bergmann. Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas.

[3]) Bergmann. Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande I. Journ. f. die reine und angewandte Mathematik. Bd. 169, Heft I, p 4.

в)
$$H_{B*}(z_1{}^*,z_2{}^*;\bar{z}_1{}^*,\bar{z}_2{}^*)=$$
$$=H_B(h_1(z_1{}^*,z_2{}^*),h_2(z_1{}^*,z_2{}^*);\ \overline{h_1(z_1{}^*,z_2{}^*)},\overline{h_2(z_1{}^*,z_2{}^*)})\left|\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(z_1{}^*,z_2{}^*)}\right|^2, \qquad (3)$$
где $z_1=h_1(z_1{}^*,z_2{}^*)$, $z_2=h_2(z_1{}^*,z_2{}^*)$ две аналитические функции, дающие псевдоконформное отображение области B на область B^*, нужно, очевидно, для исследования роста функции построить такие области в пространстве—z_1,z_2, которые представляли бы собою часть данной области B, были бы свободны от нуль-поверхностей данной функции и для которых функция $H(z_1,z_2)$ могла бы быть легко вычислена.

Пусть Q точка на границе области B и пусть область B и расположение нуль—поверхностей функции $f(z_1,z_2)$ обладают тем свойством, что существуют прямая, проходящая через точку Q (пусть это будет ось ox_2), и угол α такие, что все точки достаточно близкие к Q и лежащие внутри конуса с вершиною в Q, осью ox_2 и раствора α, принадлежат области B и не принадлежат ни одной из нуль-поверхностей функции $f(z_1,z_2)$. Если только что указанные условия выполнены, то мы будем говорить, что точка Q удовлетворяет условию A_α.

Так как ни одна внутренняя точка области не может являться местом накопления нуль-поверхностей функции $f(z_1,z_2)$, то, очевидно, существует кусок непрерывной кривой L, лежащий целиком, за исключением точки Q, внутри области B и свободный от нуль-поверхностей. Опишем около точки Q гиперсферу достаточно малого радиуса. Тогда около каждой точки куска кривой L, вне упомянутой гиперсферы, можно описать гиперсферу достаточно малого радиуса $r>\delta>0$ так, чтобы она целиком находилась в области, свободной от нуль-поверхностей. Следовательно, можно утверждать, что внутри области, свободной от нуль-поверхностей, в наших предположениях, помещается область B', сконструированная следующим образом. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что кривая L задана уравнениями:
$$\begin{aligned}x_1&=f_1(t),\\ y_1&=f_2(t),\\ x_2&=f_3(t),\\ y_2&=f_4(t),\end{aligned}$$
где f_1,f_2,f_3,f_4 дважды дифференцируемые в окрестности точки Q функции; причем $f_1(t_0)=f_2(t_0)=f_4(t_0)=0, f_3(t_0)=1, f'_1(t_0)=f'_2(t_0)=$ $=f'_4(t_0)=0$. Возьмем за границу области B' огибающую семейства гиперсфер, центры которых находятся на кривой L, т. е. граница области B' в окрестности Q задается уравнениями:
$$(x_1-f_1(t))^2+(y_1-f_2(t))^2+(x_2-f_3(t))^2+(y_2-f_4(t))^2=R^2(t), \qquad (2)$$
$$(x_1-f_1(t))f'_1(t)+(y_1-f_2(t))f'_2(t)+(x_2-f_3(t))f'_3(t)+(y_2-f_4(t))f'_4(t)=$$
$$=-R(t)R'(t), \qquad (3)$$
т.-е. B' может быть представлена следующим образом:

$$x_1^2+y_1^2+y_2^2+\frac{f_3''-R'^2}{f_3'^2+f_3''-R'^2}(1-x_2)^2+\ldots=0. \tag{4}$$

§ 2. Чтобы получить возможность рассмотреть вопрос о росте функции при помощи неравенства (1), построим специальную область $З^4$, содержащуюся в области B', и вычислим для нее ядровую функцию $H(z_1,z_2)$. Возьмем область R^4:

$$|z_2|^2+a|z_1|^{\frac{2}{p}}\leqslant 1.$$

Заметим, что гиперповерхность

$$\varphi\equiv|z_2|^2+a|z_1|^{\frac{2}{p}}-1=0$$

может являться естественной границей функции двух комплексных переменных, рассматриваемой в области $\varphi\leqslant 0$, так как для нее выражение *Levi* [4])

$$L(\varphi)=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial\bar z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial\bar z_1} & \frac{\partial_2\varphi}{\partial z_1\partial\bar z_1} \end{vmatrix}\leqslant 0.$$

Как известно, частный случай формулы Шварца

$$z_2^*=1-e^{-\frac{\pi}{2\nu}i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}\right)}\int_0^{i\frac{1-z_2}{1+z_2}} t^{\frac{1}{\nu}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}dt\equiv f_\nu(z_2) \tag{6}$$

дает отображение круга $|z_2|\leqslant 1$ на равнобедренный треугольник в плоскости z_2^* с вершинами (1,0); $\left(1-\cos\frac{\pi}{2\nu},\sin\frac{\pi}{2\nu}\right)$; $\left(1-\cos\frac{\pi}{2\nu},-\sin\frac{\pi}{2\nu}\right)$ и углом при вершине $\frac{\pi}{2\nu}$, причем точка $z_2=1$ переходит в точку $z_2^*=1$. Воспользуемся только что указанной функцией и отобразим область R^4 на $З_1^4$, полагая

$$\begin{aligned} z_1^*&=z_1,\\ z_2^*&=f_\nu(z_2). \end{aligned} \tag{7}$$

[4]) Levi E. Ann. Math. pur. appl (3) т. 18 (1911).

При отображении (7) плоскости $z_1 = \text{const.}$ и точка (0,0,1,0) остаются неподвижными. Сечение области $З_1^4$. ($z_1 = 0$) есть вышеупомянутый равнобедренный треугольник с углом при вершине Q (0,0,1,0) равным $\frac{\pi}{2\nu}$. В сечениях $З_1^4$. ($z_1 = \gamma, \gamma \neq 0$) $|z_2|$ будет очень быстро стремиться к нулю с возрастанием γ, если ν велико, так что эти сечения очень быстро становятся двумерными областями, расположенными вблизи нуля. Во всей области $З_1^4$ $x_2 \geqslant 0$. Обозначим через B_1' область B' в том случае, когда кривая L является куском оси ox_2. Опишем около точки Q, как центра, гиперсферу произвольно малого радиуса $\delta > 0$. Для точек области $З_1^4$, лежащих вне этой гиперсферы, выполняются неравенства: $|z_1| \leqslant \frac{1}{a^{\frac{p}{2}}}$ и $|y_2| < \sin\frac{\pi}{2\nu}$, т.е. выбирая a и ν достаточно большими, можно добиться того, чтобы любая точка области $З_1^4$, для которой $|z_1|^2 + |1 - z_2|^2 > \delta$, помещалась бы внутри B'_1, если только ее проэкция на ось ox_2 принадлежит области B'_1.

В окрестности точки Q границу области $З_1^4$ представляем следующим образом. Введем обозначения:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1\nu}\right)} = A, \quad \frac{1 - z_2}{1 + z_2} = u.$$

Тогда вместо (6) имеем:

$$1 - z_2^* = e^{-\frac{\pi}{2\nu}i} \int\limits_0^{iu} t^{\frac{1}{\nu} - 1} (1 - t)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu}} dt; \tag{8}$$

причем $|u| < 1$ при $x_2 > 0$.

Неревенство (5) переписываем в виде

$$a|z_1|^{\frac{2}{p}} \leqslant \frac{2(u + \bar{u})}{(1 + u)(1 + \bar{u})} \equiv \Phi\ (\zeta, \bar{\zeta}),$$

где $\zeta = 1 - z_2^*$.

Разлагая функцию $\Phi\ (\zeta, \bar{\zeta})$ в ряд в окрестности точки Q, получаем:

$$\Phi(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{2}{(A\nu)^\nu}(\zeta^\nu + \bar{\zeta}^\nu) + \text{члены с более высокими степенями } \zeta \text{ и } \bar{\zeta}.$$

Следовательно, в окрестности точки Q точки области $З_1^4$ удовлетворяют неравенству:

$$a\,|z_1|^{\frac{2}{p}} - \frac{2}{(A\nu)^{\nu}}(\zeta^{\nu}+\bar{\zeta}^{\nu}) + \ldots \leqslant 0$$

или иначе:

$$a|z_1|^{\frac{2}{p}} + y_2^2 - y_2^2 - \frac{2}{(A\nu)^{\nu}}(\zeta^{\nu}+\bar{\zeta}^{\nu}) + \ldots \leqslant 0. \qquad (9)$$

Точки, лежащие в окрестности Q и принадлежащие области B'_1, удовлетворяют неравенству, которое получается из неравенства (4), если там положить $f'_3(1)=1; f''_3(1)=0$, т. е.

$$|z_1|^2 + y_2^2 - \frac{R'^2(1)}{1-R'^2(1)}(1-x_2)^2 + \ldots \leqslant 0. \qquad (10)$$

В силу того, что в точке Q выполняется условие A_α, можно считать, что $R'(1)\neq 0$, и, следовательно, число ν можно подобрать настолько большим, чтобы в окрестности Q

$$\frac{R'^2(1)}{1-R'^2(1)}(1-x_2^2) > y_2^2,$$

Действительно, всякое сечение $З_1^4$. ($z_1 = \text{const}$) помещается внутри равнобедренного треугольника с вершиной в Q и с углом при вершине Q, равным $\frac{\pi}{2\nu}$; следовательно, для каждого сечения $\left|\frac{y_2}{1-x_2}\right| \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu}$, и, чтобы выполнить неравенство (11), достаточно ν подобрать настолько большим, чтобы

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu} \leqslant \left|\frac{R'(1)}{\sqrt{1-R'^2(1)}}\right|,$$

т. е.

$$\nu > \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Подобрав ν только что указанным образом, мы можем утверждать, что если выполняется условие (9), то выполнено и условие (10), т. е. в окрестности точки Q зонд $З_1^4$ находится внутри области B'_1.

Покажем, что можно постоянную a подобрать так, чтобы вся область $З_1^4$ находилась внутри конуса условия A_α. Функция $f_\nu(z_2)$ в (7) регулярна и удовлетворяет неравенству $|f_\nu(z_2)|<1$ в круге $|z_2|<1$, следовательно, в этом круге

$$|f_\nu(z_2)| \leqslant \frac{|z_2|+|f(0)|}{1+|f(0)|\,|z_2|}. \text{ [5]}$$

[5]) Каратеодори. Конформное отображение 1934 г.

Для краткости введем следующие обозначения:

$$|f(0)| = k, |z_1| = r_1, |z_2| = r_2.$$

Рассмотрим кривую, которая получится, если ординату r_2 каждой точки кривой $r_2^2 + ar_1^{\frac{2}{p}} = 1$ заменить через $\dfrac{r_2 + k}{1 + kr_2}$.

Тогда, принимая r_2 за параметр t и обозначая координаты точек новой кривой через r_1 и r_2, получим рассматриваемую кривую в виде:

$$ar_1^{\frac{2}{p}} = 1 - t^2,$$

$$r_2 = \frac{t + k}{1 + kt}$$

или

$$ar_1^{\frac{2}{p}} = \frac{(1 - r_2^2)(1 - k^2)}{(1 - r_2 k)^2}. \tag{14}$$

Из пучка прямых через точку Q выберем касательные к только что полученной кривой. Так как из (14) следует, что

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{ar_1^{\frac{2}{p} - 1} (1 - r_2 k)^3}{p(1 - k^2)(k - r_2)},$$

то координаты точки касания (ξ_1, ξ_2) определятся из уравнения

$$\xi_2 - 1 = \frac{1}{p} \frac{(1 - \xi_2^2)(1 - k\xi_2)}{k - \xi_2},$$

следовательно, кроме решения $\xi_2 = 1$, имеется еще только одно (при $\xi_2 > 0$):

$$\xi_3 = \frac{-(k - 1 + p)\sqrt{(k - 1 + p)^2 + 4(pk + 1)k}}{2k}.$$

Нас интересует случай когда $\xi_2 > 1$. Это будет выполнено при $k > 1$ и $p > 2$. Поэтому в дальнейшем можно положить $p = 3$. Если через ψ обозначить угол между осью ox_2 и касательной к рассматриваемой кривой, то, очевидно,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\xi_1}{1 - \xi_2} \frac{(1 - k^2)^{\frac{p}{2}} (1 + \xi_2)^{\frac{p}{2}} (1 - \xi_2)^{\frac{p}{2} - 1}}{a^{\frac{p}{2}} (1 - k\xi_2)^p} \tag{15}$$

Всякое сечение $\mathfrak{Z}_1^4$. ($y_1 = \text{const}$) находится внутри прямоугольной пирамиды с вершиной в точке Q и высотою I, основанием пирамиды является прямоугольник:

$$|y_2| < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu}, |x_1| < \operatorname{tg}\psi.$$

Сечения $\mathfrak{Z}_1^4$. ($x_1 = \text{const}$) находятся внутри такой же пирамиды с основанием: $|y_2| < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu}$, $|y_2| < \operatorname{tg}\psi$.

Сечения $\mathfrak{Z}_1^4$($y_2 = \text{const.}$)—внутри такой же пирамиды с основанием:

$$|y_1| < \operatorname{tg}\psi, |x_1| < \operatorname{tg}\psi.$$

Следовательно, подобрав ν и a так, чтобы

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}} \tag{16}$$

и

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(1-k^2)(1+\xi_2)^{\frac{p}{2}}(1-\xi_2)^{\frac{p}{2}-1}}{a^{\frac{p}{2}}(1-k\xi_2)^p} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$$

или

$$a^{\frac{p}{2}} > \frac{(1-k^2)(1+\xi_2)^{\frac{p}{2}}(1-\xi_2)^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{2}}{(1-k\xi_2)^p\operatorname{tg}\alpha},$$

(что всегда можно достигнуть подбором a, после того как ν и d выбраны), можно утверждать, что область $\mathfrak{Z}_1^4$ находится внутри конуса с вершиной в Q и раствора α. Тогда, делая еще преобразование подобия с центром в Q, т. е.

$$\tilde{z}_1 = cz_1;\ 1 - \tilde{z}_2 = c(1 - z_2),$$

где c вещественное и меньше 1, подбором c можно добиться того, чтобы вся область $\mathfrak{Z}_1^4$ лежала бы внутри B'_1.

§ 3. Рассмотрим теперь ядровую функцию $H(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ для области $\mathfrak{Z}_1^4$ и ее поведение при приближении к точке Q. Пусть $z_1 = r_1 e^{\varphi_1 i}$, $z_2 = r_2 e^{\varphi_2 i}$. Система функций

$$\frac{r_1^m r_2^n \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2)}{\sqrt{a_{mn}}}, \frac{r_1^m r_2^n \sin(m\varphi_1 + n\varphi_2)}{\sqrt{a_{mn}}}; (m,n) = (0,0),(01),(10),\ldots,$$

где $$a_{mn} = \frac{\pi^2 pn!}{(m+1)p[(m+1)p+1]\ldots[(m+1)p+n+1]2a^{(m+1)p}}$$

представляет полную ортогональную систему бигармонических функций для области B^4. Следовательно, вышеупомянутая ядровая функция $H(z_1,,z_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2)$ области B^4 относительно класса бигармонических функций

$$H_{R^4}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1{}^{2m}r^{2n}\cos^2(m\varphi_1+n\varphi_2)}{a_{mn}}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1{}^{2m}r_2{}^{2n}\sin^2(m\varphi_1+n\varphi_2)}{a_{mn}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_1{}^{2m}r_2{}^{2n}}{a^{nm}}=2K_{R_4}{}^{6)}=$$

$$=\frac{2a^p\{(p+1)\,(1-r_2{}^2)^p+(p-1)a^pr_1{}^2\}}{\pi^2(1-r_2{}^2)^{2-p}\{(1-r_2{}^2)^p-a^pr_1{}^2\}^3}\,. \tag{17}$$

При отображении области B^4 на область $B_1{}^4$, в силу (8),

$$\frac{du}{d\zeta}=\frac{1}{A}u^{1-\frac{1}{\nu}}(1-iu)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\nu}},$$

$$\frac{d^\nu u}{d\zeta^\nu}=\frac{1}{A^\nu}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\dots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)+$$

$+$ старшие члены.

В точке Q

$$u=\frac{du}{d\zeta}=\dots=\frac{d^{\nu-1}u}{d\zeta^{\nu-1}}=0,\ \frac{d^\nu u}{d\zeta^\nu}=\frac{(\nu-1)!}{A^\nu\nu^{\nu-1}}.$$

Следовательно, в окрестности точки Q

$$u=\frac{1}{(A\nu)^\nu}\zeta^\nu+\text{старшие члены.}$$

Откуда

$$z_2=1-\frac{2}{(A\nu)^\nu}\varepsilon^\nu+\text{старшие члены.} \tag{18}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(z_1{}^*,z_2{}^*)}\right|=\frac{2}{A^\nu\zeta^{\nu-1}}\zeta^{\nu-1}+\text{старшие члены.} \tag{19}$$

[6]) Bergmann. Математический Сборник

Если в плоскости $z_1=0$ приближение к точке Q происходило по оси ox_2, т. е. $y_1=0$, то в B'_1 ему будет соответствовать, в силу (7), приближение по кривой плоскости $z_1^*=0$

$$1-z_2=e^{-\frac{\pi}{2\nu}i}\,A\int\limits_0^{i\frac{1-x_2}{1+x_2}} t^{\frac{1}{\nu}-1}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}\,dt.$$

В окрестности точки Q при $\left|\frac{1-z_2}{1+z_2}\right|<\lambda<1$ уравнение этой кривой можно записать в таком виде:

$$1-z_2^*=A\left(\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)^{\frac{1}{\nu}}\left[\nu+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{k}\frac{i^k}{k+\frac{1}{\nu}}\left(\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)^k\right]$$

Или, полагая $\frac{1-x_2}{1+x_2}=\xi$,

$$1-x_2^*=A\xi^{\frac{1}{\nu}}\left[\nu-\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{2}\frac{1}{2+\frac{1}{\nu}}\xi^2+\right.$$

$$\left.+\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{4}\frac{1}{4+\frac{1}{\nu}}\xi^4+\dots\right],$$

$$y_2^*=A\xi^{\frac{1}{\nu}}\left[\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{1}\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}\xi-\right.$$

$$\left.-\binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\nu}}{3}\frac{1}{3+\frac{1}{\nu}}\xi^3+\dots\right].$$

Эта кривая в точке Q имеет с осью ox_2, очевидно, соприкосновение не ниже ν—того порядка.

В равенстве (17), полагая $r_1=0$, имеем

$$H_{R^4}=\frac{2a^p(p+1)}{\pi^2(1-z_2\bar{z}_2)^{p+2}}.$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что ядровая функция H есть интегральный инвариант. В силу равенств (3) и (19), имеем:

$$H_{B'_1}(0,z_2^*;0,\bar{z}_2^*)=\frac{2a^p(p+1)\left\{\frac{2\nu}{(A\nu)^\nu}\zeta^{\nu-1}+\ldots\right\}\left\{\frac{2\nu}{(A\nu)^\nu}\bar{\zeta}^{\nu-1}+\ldots\right\}}{\pi\left\{1-\left[1-\frac{2}{(A\nu)^\nu}\zeta^\nu+\ldots\right]\left[1-\frac{2}{(A\nu)^\nu}\bar{\zeta}^\nu+\ldots\right]\right\}^{p+2}}=$$

$$=\frac{(p+1)|\zeta|^{2\nu-2}[1+\ldots](A\nu)^{p\nu}a^p}{\pi^2 2^{p-1}\{\zeta^\nu+\bar{\zeta}^\nu\}^{p+2}[1+\ldots]^{p+2}}.$$

И так как в силу (19)

$$\lim_{\zeta\to0}\frac{|\zeta|^{p\nu+2a}}{(\zeta^\nu+\bar{\zeta}^\nu)^{p+2}}=\frac{1}{2^{p+2}},$$

то

$$\lim_{\tau\to0}|\zeta|^{p\nu+2}H_{B'_1}=\frac{a^p(p+1)A\nu^{p\nu}}{\pi^2 2^{2p+1}} \tag{20}$$

Принимая во внимание, что преобразование подобия с центром подобия в точке Q, которое, может быть, дополнительно придется провести, чтобы $\mathfrak{Z}_1^4$ поместилось внутрь B'_1, в силу (3), не изменит порядок роста функции H, в силу неравенства (1), получаем:

$$\Big|\ln|f(z_1,z_2)|\Big|\leqslant\frac{A_1}{|\cdot-z_2^*|^{\frac{p\nu}{2}+1}}.$$

Полагаем $p=3$ и получаем теорему.

Если граница области B^4 и расположение нуль-поверхностей аналитической в B^4 функции $f(z_1,z_2)$ таково, что в точке Q выполняется условие A_α, то

$$\lim_{z_2^*\to1}\left|1-z_2^*\right|^{\frac{3\nu}{2}+1}\big|\ln|f(z_1,z_2)|\big|<\infty,$$

z_2^* стремится к 1 по оси ox_2^*.

Мы предполагали до сих пор, что кусок оси ox_2 конечной длины, одним концом которого является точка Q, принадлежал области B и не имел общих точек с нуль-поверхностями функции $f(z_1,z_2)$; этот кусок оси ox_2 был осью конуса, в окрестности Q свободного от нуль-поверхностей. Результат не изменится, если конус будет иметь осью какую-либо другую прямую, проходящую через точку Q. Тогда, при наличии гиперсферы с центром в Q и радиуса $\delta>0$ такой, что область, ограниченная конусом и сферой, лежит внутри B и свободна от нулей, существует кусок прямой, одним концом которого является точка Q и вся остальная часть которого свободна от нулей и лежит внутри B. Пусть это будет кусок прямой

$$\frac{x_1^*}{m}=\frac{y_1^*}{n}=\frac{1-x_2^*}{p}=\frac{y_2^*}{q}; \quad m^2+n^2+p+q^2=1. \tag{22}$$

Аналитическое вращение, переводящее ось ox_2 в прямую (22) имеет вид:

$$\begin{aligned} z_1^* &= (m+in)z_2+(k+il)z_1, \\ z_2^* &= (p+iq)z_2+(r+is)z_1; \end{aligned} \tag{23}$$

причем k,l,r,s выбраны так, что

$$\begin{aligned} p^2+q^2+r^2+s^2 &= 1, \\ kr+ls+pm+qn &= 0, \\ lr-ks+pn-mq &= 0, \\ m^2+n^2+k^2+l^2 &= 1. \end{aligned}$$

Так как в этом случае $\left|\frac{\partial(z_1^*,z_2^*)}{\partial(z_1,z_2)}\right|=1$, то преобразование (23) дает взаимно однозначное отображение конуса Q_1 на конус Q_2 с вершиною в точке Q, осью—прямой (22) и прежним раствором α. Следовательно, при отображении (22) область B'_1 отобразится на область, находящуюся внутри конуса Q_2.

Sur la théorie de la croissance des fonctionsdont les variétés—zéro sont données.

E. N. Araviyskaja.

Du fait que $\int\limits_B (\ln|f(z_1, z_2)|)^2\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$ et (1) existent, on tire des conclusions sur la croissance de la fonction $f(z_1, z_2)$.

Soit la frontière du domaine B^4 et les variétés-zéro de la fonction $f(z_1, z_1)$ analytique dans B^4 sont telles, qu, en un point Q de la frontière de B^4 existe la condition A_α. Alors lorsqù, on s'apporoche du point Q, on a (21), où ν et α satisfont à la condition (16).

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЯДРОВОЙ ФУНКЦИИ ОБЛАСТИ.

П. Куфарев. (Томск).

Пусть G — конечносвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и Γ — один из граничных континуумов. Пусть, далее, часть γ континуума Γ, принадлежащая некоторой окрестности точки $P \subset L$, является аналитической правильной дугой.

Рассмотрим для определенности случай, когда γ делит достаточно малую окрестность точки P на две области, из которых одна не принадлежит G.

Примем за оси координат внутреннюю нормаль и касательную к γ в точке P. Обозначим через ρ_0 радиус кривизны кривой γ в точке P и условимся считать ρ_0 положительным, если центр кривизны лежит на внутренней нормали, и отрицательным, если центр кривизны—на внешней нормали. Обозначим далее через $K_G(z, \bar{z})$ ядровую функцию области G [1]).

При указанных предположениях имеет место следующая теорема:

Разность:

$$H_G(z, P) = K_G(z, \bar{z}) - \frac{1}{\pi(z+\bar{z})^2} - \frac{2|z|^2}{\pi\rho_0(z+\bar{z})^3} \tag{1}$$

при стремлении z к точке P изнутри G по лучу

$$\arg z = \alpha, \ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

остается ограниченной.

Докажем сначала теорему для односвязной области.

Пусть

$$\zeta = f(z), \ f(0) = 0 \tag{3}$$

— функция, отображающая G на круг

$$Q: \ |\zeta - 1| < 1. \tag{4}$$

Так как аналитической дуге γ соответствует при отображении аналитическая дуга (окружности $|\zeta - 1| = 1$)[2]), то функция $f(z)$

---

[1]) См. напр., S. Bergmann. „Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande", I, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 169. H. 1. 1932, стр. 3.

[2]) См., напр. Л. Р. Форд: „Автоморфные функции" 1936, стр. 215, 217.

продолжаема за γ и поэтому в некоторой окрестности точки P может быть представлена рядом:

$$\zeta = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots \tag{5}$$

Здесь $a_1 > 0$, так как линейный элемент дуги γ в точке P не поворачивается при отображении.

Покажем, что радиус кривизны кривой γ в точке P может быть выражен через коэффициенты a_1 и a_2 этого ряда формулой:

$$\frac{1}{\rho_0} = a_1 + \frac{a_2 + a_2}{a_1}. \tag{6}$$

Если принять за параметр длину дуги s кривой γ, отсчитываемую от точки P, то уравнение дуги γ вблизи P можно записать в виде:

$$z = \varphi(s) = -is + \frac{s^2}{2\rho_0} + \ldots \tag{7}$$

Подставляя это выражение в (5), получим параметрическое представление окружности $|\zeta - 1| = 1$ вблизи точки $\zeta = 0$:

$$\zeta = f(\varphi(s)) = -a_1 is + \left(\frac{a_1}{2\rho_0} - a_2\right)s^2 + \ldots\ldots \tag{8}$$

Вычисляя отсюда кривизну $\varkappa$ окружности $|\zeta - 1| = 1$ в точке $\zeta = 0$,

$$\varkappa = \left\{\frac{I\left[\frac{d\zeta}{ds}\,\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right]}{\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|^3}\right\}_{s=0} = \frac{1}{a_3\rho_0} - \frac{a_2 + a_2}{a_1{}^2}, \tag{9}$$

и приравнивая $\varkappa$ единице, получим соотношение (6).

Переходя теперь к рассмотрению ядровой функции области G, воспользуемся для ее представления формулой:

$$K_G(z, \bar z) = K_Q(\zeta(z), \overline{\zeta(z)}) \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 \text{[1]}, \tag{10}$$

где

$$K_Q(\zeta, \bar\zeta) = \frac{1}{\pi(\zeta + \bar\zeta - \zeta\bar\zeta)^2} \tag{11}$$

— ядровая функция круга Q[2]).

По этой формуле $K_G(z, \bar z)$, согласно (5), может быть представлена в близких к P точках области G в виде:

$$K_G(z, \bar z) = \frac{|a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots|^2}{\pi[a_1(z + \bar z) + a_2 z^2 + \overline{a_2 z^2} + \ldots - |a_1 z + a_2 z^2 + \ldots|^2]^2} \tag{12}$$

---

[1]) См. цитированную работу S. Bergmann'a стр. 4

[2]) Там же, стр. 3, примечание.

Составляя теперь выражение $H_G(z, P)$ и производя вычисления, получим:

$$H_G(z, P) = \\ = \frac{a_1{}^2 x^2 z^2 \left(\frac{a_2 + \bar{a}_2}{a_1} + a_1 - \frac{1}{2\rho_0}\right) + x^5 C(a_1, a_2, a_3, \arg z) + 0(x^6)}{4\pi a_1{}^2 x^5 + 0(x^6)} \qquad (13)$$

или, по (6)

$$H_G(z, P) = \frac{1}{4\pi a_1{}^2} C(a_1, a_2, a_3, \arg z) + 0(x). \qquad (14)$$

Здесь $C(a_1, a_2, a_3, \arg z)$ — полином относительно $tg(\arg z)$ и $a_k, \bar{a}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, и $0(x)$ — величина, стремящаяся к нулю при стремлении z к точке P по лучу $\arg z = \alpha, |\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

Итак, при приближении z к P по лучу $\arg z = \alpha, |\alpha| < \frac{\pi}{2}$, $H_G(z, P)$ стремится к определенному пределу:

$$\lim H_G(z, P) = \frac{1}{4\pi a_1{}^2} C(a_1, a_2, a_3, \alpha) \qquad (15)$$

Переходя к доказательству теоремы для многосвязной области, построим односвязные области G_e и G_a, удовлетворяющие условиям: а) $G_e \subset G \subset G_a$; б) точка P принадлежит границе области $G_e(G_a)$; в) часть границы области $G_e(G_a)$, принадлежащая некоторой окрестности точки P, совпадает с принадлежащей этой окрестности частью дуги γ.

Как только что доказано, при приближении z изнутри $G_e(G_a)$ по лучу $\arg z = \alpha$, $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$, $H_{G_e}(z, P)\left(H_{G_a}(z, P)\right)$ стремится к определенному конечному пределу. Но из неравенств:

$$H_{G_a}(z, P) \leqslant H_G(z, P) \leqslant H_{G_e}(z, P), \qquad (16)$$

выполняющихся во всякой точке $z \subset G_e$[1]), следует, что при стремлении z к P по лучу $\arg z = \alpha$

$$\overline{\lim}\, H_D(z, P) \leqslant \lim H_{G_e}(z, P) < \infty \qquad (17)$$

и

$$\underline{\lim}\, H_G(z, P) \geqslant \lim H_{G_a}(z, P) > -\infty. \qquad (18)$$

Теорема остается справедливой и в случае, когда дуга γ не является аналитической, но обладает дважды дифференцируемой по s кривизной и делит некоторую окрестность точки P на две области, из которых одна не принадлежит G. Это может быть доказано так же, как выше, при помощи построения односвязных областей G_e и G_a, $G_e \subset G \subset G_a$, границы которых содержат P и в некоторой окрестности точки P являются правильными аналитическими дугами, имеющими в P касание 3-го порядка к γ.

[1]) См. цитированную работу Бергмана.

СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ С ОБЩИМИ ОСЯМИ

С. Фиников (Москва)

Если точка M при изменении параметров u и v описывает сопряженную сеть линий, то линия пересечения соприкасающихся плоскостей линий u и v, проходящих через точку M, называется первой осью сопряженной сети.

Если касательные в точке M к линиям u и v касаются в то же время во втором фокусе соответственно поверхностей (M_1) и (M_2), то касательная плоскость поверхности (M_1) служит соприкасающейся плоскостью линии u на поверхности (M), а касательная плоскость поверхности (M_2) — соприкасающейся плоскостью линии v. Следовательно, первая ось сопряженной сети является линией пересечения касательных плоскостей двух первых преобразований Лапласа. Второй осью называется прямая, соединяющая соответствующие точки M_1 и M_2 этих преобразований.

Мы будем искать сопряженные сети с одними и теми же осями в соответствующих точках.

Пусть мы имеем две поверхности (M) и (N), между точками которых установлено взаимно-однозначное соответствие. Такие поверхности всегда имеют, по крайней мере, одну общую сопряженную систему, которая может выродится в одно семейство асимптотических линий. Допустим, что линии этой сопряженной системы различны; примем их за координатные линии u и v. Может ли случиться, чтобы две оси сопряженной системы (u, v) поверхности (M) совпадали с осями системы (u, v) на поверхности (N)?

Задачу эту можно поставить в двух видах: можно требовать совпадения одноименных осей, т. е. первой оси с первой и второй со второй, или же совпадения первых осей поверхности (M) со вторыми осями поверхности (N) и наоборот. Сообразно этому настоящая статья делится на две части.

Первая из этих двух задач имеет очевидное решение: периодическая с периодом 4 последовательность Лапласа.

В этом случае первые преобразования Лапласа поверхности (M) относительно системы (u, v), т. е. поверхности (M_1) и (M_2), совпадают с первыми преобразованиями поверхности (N). Следовательно, обе оси естественно тоже совпадают.

Если этот случай исключить, то задача имеет только одно решение: обе конгруэнции (MM_1) и (MM_2) должны быть конгруэнциями Вильчинского. Так называются конгруэнции, которые сами принадлежат линейным комплексам и все их преобразования Лапласа тоже принадлежат различным линейным комплексам. Будем называть фокальные сети такой последовательности сетями Вильчинского. Тогда можно сказать, что сопряженные сети с общими осями суть сети Вильчинского. При этом ко всякой сети Вильчинского присоединено ∞^1 сетей того же рода так, что все сети имеют одни и те же оси.

Те же оси Вильчинского являются и решением второй задачи: пара осей сети Вильчинского несет два семейства поверхностей, каждое семейство имеет общие оси. Прямая, служащая первой осью поверхностей первого семейства, является осью поверхностей второго семейства.

Кроме этого очевидного решения, вторая задача имеет не тривиальное решение, именно: выделяется особый класс сетей R, зависящих от 4-х произвольных функций одного аргумента; с каждой поверхностью R этого класс связывается одна поверхность R того же класса так, что они находятся в отношении преобразования Йонаса, и соответствующие друг другу сети имеют общие оси. Конгруэнция, осуществляющая это преобразование Йонаса, принадлежит некоторому линейному комплексу.

При исследовании этих вопросов мы будем пользоваться методом подвижного тетраэдра и в частности каноническим тетраэдром конгруэнции.

Теория эта подробно изложена в моей книге „Проективно-диференциальная геометрия“, стр. 118 и следующие. В частности мы будем пользоваться установленными там обозначениями.

I

2. Будем называть аналитической точкой или, коротко, точкой и обозначать одной буквой прямого шрифта M четыре однородных координаты геометрической точки M.

Система уравнений

$$\mathrm{M}_{iu} = \sum_{k=o}^{3} a_i^k \mathrm{M}_k, \quad \mathrm{M}_{iv} = \sum_{k=o}^{3} b_i^k \mathrm{M}_k \tag{1}$$

вполне интегрируема, если функции a_i^k, b_i^k удовлетворяют уравнениям

$$a^k_{iv} - b^k_{iu} = \sum_{l=o}^{3} (b_i^l a_l^k - a_i^l b_l^k) \tag{2}$$

и определяет семейство ∞^2 тетраэдров вплоть до проективного преобразования.

Если точки M_0 и M_1 поместить в фокусах луча $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$, точки M_2 и M_3 в фокальных плоскостях его и параметры u и v выбрать так, чтобы $u = \mathrm{Const}$ и $v = \mathrm{Const}$ определяли развертывающиеся поверхности конгруэнции, то таблицу компонент a_i^k, b_i^k можно привести к виду

$$\begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & q_1 & p_1 & 0 & 0 \\ 2 & m & n & 0 & -q \\ 3 & N_1 & R_1 & -\Delta_1 & -P_1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & p & q & 1 & 0 \\ 1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & R & N & -P & -\Delta \\ 3 & n_1 & m_1 & -q_1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad (3)$$

где левая таблица дает a_i^k, правая b_i^k, а указатели i и k означают номер строки и столбца таблицы.

Величины p, q, p_1, q_1 — произвольны и определяют положение точек M_2, M_3 в фокальных плоскостях.

Уравнения (2) принимают вид

$$\begin{array}{ll} p_u - P_u = \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 & p_{1v} - P_{1v} = \delta\delta_1 \\ p_u = \delta\delta_1 - qq_1 - m & p_{1u} = \delta\delta_1 - qq_1 - m_1 \\ \delta_v - q_u = p\delta + p_1 q + n & \delta_{1u} - q_{1v} = p_1\delta_1 + pq_1 + n_1 \\ \Delta_u - q_v = P_1\Delta + Pq + N & \Delta_{1v} - q_{1u} = P\Delta_1 + P_1 q_1 + N_1 \\ \multicolumn{2}{l}{m_v - R_u = -m\,(P+p) - \Delta N_1 - \delta_1 n + Nq_1 + n_1 q} \\ \multicolumn{2}{l}{m_{1u} - R_{1v} = -m_1\,(P_1+p_1) - \Delta_1 N - \delta n_1 + N_1 q + nq_1} \\ \multicolumn{2}{l}{n_v - N_u = R\delta - R_1\Delta + Np_1 - Pn - q\,(m - m_1)} \\ \multicolumn{2}{l}{n_{1u} - N_{1v} = R_1\delta_1 - R\Delta_1 + N_1 p - P_1 n_1 - q_1\,(m_1 - m)} \end{array} \qquad (4)$$

3. Пусть мы имеем пару поверхностей (M) и (M') с общей первой MM' и второй M_1M_2 осями сопряженных систем (u, v).

Так как вторая ось соединяет первые преобразования Лапласа точек M или M' относительно системы (u, v), то мы можем выбрать точки M_1 и M_2 в фокусах касательных MM_u и MM_v.

Рассмотрим конгруэнцию (MM_1). Точки M и M_1 служат фокусами луча MM_1; точка M_2 лежит в касательной плоскости поверхности (M), т. е. в фокальной плоскости луча MM_1. По условию MM' — первая ось системы (u, v) на поверхности (M), следовательно, является линией пересечения касательных плоскостей в точках M_1 и M_2 поверхностей (M_1) и (M_2). В частности M' лежит в касательно плоскости поверхности (M_1), т. е. в другой фокальной плоскости луча MM_1. Наконец, параметры u, v являются параметрами фокальной сети (u, v) конгруэнции (MM_1), т. е. $u = \mathrm{Const}$, $v = \mathrm{Const}$ определяют развертывающиеся поверхности конгруэнции. Следовательно, точки M, M_1, M_2, M' можно принять за вершины нормального тетраэдра конгруенции (MM_1).

Примем таблицу компонентов (3). На эти компоненты налагается теперь целый ряд требований.

При условии задачи ребра MM_1 и MM_2 касаются соответственно линий u и v на поверхности (M).

Записывая тремя буквами в скобках $(M\ M_1\ M_{1u})$ шесть миноров матрицы, составленной из координат точек M, M_1, M_{1u} мы выразим эти требования равенствами

$$(M\ M_1\ M_{1u})=0,\quad (MM_2\ M_{2v})=0,$$

или, внося M_{1u}, M_{2v} с помощью таблицы (3),

$$(M,\ M_1,\ \delta M_1)=0,\quad (M,\ M_2,\ pM+qM_1+M_2)=0.$$

Первое равенство удовлетворяется тождественно, ибо δ выходит за скобку, как общий множитель у элемента одного столбца, а скобка с двумя равными множителями равна нулю, как определитель с двумя равными столбцами.

Разлагая скобку, стоящую в левой части второго уравнения, как определитель, где элементы одного столбца представляют суммы членов, получим

$$p\,(MM_2M)+q\,(M\,M_2\,M_1)+(M\,M_2\,M_2)=0.$$

Первая и последняя скобки равны нулю, как определители с равными столбцами. Средняя скобка—не нуль, иначе три точки M, M_1, M_2 лежали бы на одной прямой. Значит мы имеем

$$q=0. \tag{5a}$$

По условиям задачи ребра MM_1 и MM_2 касаются соответственно линии v на поверхности (M_1) и линии u на поверхности (M_2).

Следовательно,

$$(M\ M_1\ M_{1v})=0,\quad (M\ M_2\ M_{2u})=0$$

или, с помощью таблицы (3),

$$(M,\ M_1,\ \delta_1 M)=0,\quad (M,\ M_2,\ m\,M+n\,M_1)=0.$$

Первое уравнение удовлетворено тождественно, второе по раскрытии скобок дает

$$n=0. \tag{5}$$

При этих условиях ребро M_1M_2 является второй осью сопряженной сети (M). Чтобы ребро MM' было первой осью, необходимо и достаточно, чтобы плоскости $M\ M'\ M_1$ и $M\ M'\ M_2$ были соответственно касательными плоскостями поверхностей (M_1) и (M_2). Так как касательные к линиям v на поверхности (M_1) и u на поверхности (M_2) уже лежат в этих плоскостях, то надо потребовать, чтобы там лежали касательные к линиям u поверхности (M_1) и v поверхности $({}_2M)$, т. е., чтобы имели место равенства

$$(MM_1\ M'\ M_{1u})=0,\quad (MM_2\ M'\ M_{2v})=0.$$

Пользуясь таблицей (3), мы преобразуем их к виду

$$(M,\ M_1,\ M',\ q_1 M + p_1 M_1 + M') = 0$$

$$(M,\ M_2,\ M',\ R\ M + N\ M_1 - P M_2 - \Delta M') = 0.$$

Развертывая и отбрасывая скобки с равными множителями, мы приведем первое равенство к тождеству, а из второго получим

$$N = 0. \tag{5c}$$

Обращаемся к поверхности (M'). Таблица (3) дает нам

$$M'_u = N_1\ M + R_1\ M_1 - \Delta_1\ M_2 - P_1\ M',$$

$$M_v' = n_1\ M + m_1\ M_1 - q_1\ M_2.$$

Так как ребро $M_1 M_2$ должно быть второй осью системы (u, v) на поверхности (M'), то плоскость $M'\ M_1\ M_2$ должна быть касательной плоскостью поверхности (M') и, следовательно, должна содержать точки M_u', M_v'.

Следовательно, мы имеем

$$N_1 = 0,\ n_1 = 0 \tag{5d}$$

и касательные к линиям u и v поверхности (M') пересекают ребро $M_1 M_2$ в точках

$$M_1' = R_1\ M_1 - \Delta_1\ M_2,$$

$$M_2' = m_1\ M_1 - q_1\ M_2. \tag{6}$$

Эти точки должны быть фокусами лучей $M'M_1'$ и $M'M_2'$. Это значит, что они касаются соответственно на поверхности (M_1') линии v и на поверхности (M_2') линии u, т. е.

$$(M'\ M_1'\ M'_{1v}) = 0, \quad (M'\ M'_2\ M'_{2u}) = 0,$$

или, внося сюда M_1', M_2' по формулам (6) и подсчитывая производные с помощью таблицы (3),

$$(M',\ R_1\ M_1 - \Delta_1 M_2,\ (\delta_1\ R_1 - \Delta_1\ R)\ M + R_{1v}\ M_1 +$$

$$+ (-\Delta_{1v} + P\Delta_1)\ M_2 + \Delta\Delta_1\ M') = 0,$$

$$(M',\ m_1\ M_1 - q_1\ M_2,\ q_1\ (m_1 - m)\ M +$$

$$(m_{1u} + p_1\ m_1)\ M_1 - q_{1u}\ M_2 + m_1\ M') = 0,$$

откуда, раскрывая эти произведения и отбрасывая скобки с двумя равными точками, имеем

$$(M', R_1 M_1 - \Delta_1 M_2, M)\,(\delta_1 R_1 - \Delta_1 R) +$$
$$+ (M' M_1 M_2)\left\{\frac{\partial}{\partial v} \ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right) + P\right\} R_1 \Delta_1 = 0,$$
$$(M', m_1 M_1 - q_1 M_2, M)\,(m_1 - m)\, q_1 +$$
$$+ (M' M_1 M_2)\left\{\frac{\partial}{\partial u} \ln\left(\frac{m_1}{q_1}\right) + p_1\right\} m_1 q_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta_1 R_1 - \Delta_1 R = 0, \tag{5e}$$

$$q_1 (m - m_1) = 0, \tag{5f}$$

$$R_1 \Delta_1 \left\{\frac{\partial}{\partial v} \ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right) + P\right\} = 0, \tag{5g}$$

$$m_1 q_1 \left\{\frac{\partial}{\partial u} \ln\left(\frac{m_1}{q_1}\right) + p_1\right\} = 0. \tag{5h}$$

Наконец, надо потребовать, чтобы ребро MM' было первой осью системы (u, v) на поверхности (M'), т. е. чтобы касательные плоскости к поверхностям (M_1') и (M_2') проходили через MM'. Так как касательные к линии v на поверхности (M_1') и к линии u на поверхности (M_2') совпадают с прямыми $M_1' M'$ и $M_2' M'$, т. е. уже лежат в плоскостях $M_1' M M'$, $M_2' M M'$, то надо только потребовать, чтобы там же лежали касательные к линии u поверхности (M_1') и к линии v поверхности (M_2').

Мы получаем таким образом условия

$$(M M' M_1' M_{1u}') = 0, \quad (M M' M_2' M_{2v}') = 0,$$

или, внося сюда значения (6), пользуясь таблицей (3) и опуская члены, пропорциональные первым двум точкам,

$$(M, M', R_1 M_1 - \Delta_1 M_2, (R_{1u} + p_1 R_1) M_1 - \Delta_{1u} M_2) = 0,$$
$$(M, M', m_1 M_1 - q_1 M_2, m_{1v} M_1 - (q_{1v} - P q_1) M_2) = 0,$$

или, развертывая и обращая в нуль коэфициент при $(M M' M_1 M_2)$,

$$R_1 \Delta_1 \left\{\frac{\partial}{\partial u} \ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right) + p_1\right\} = 0, \tag{5i}$$

$$m_1 q_1 \left\{\frac{\partial}{\partial v} \ln\left(\frac{m_1}{q_1}\right) + P\right\} = 0. \tag{5j}$$

4. Искомая конфигурация определяется системой уравнений (4), к которым надо присоединить уравнения ($5a - j$).

В силу (5a, b, c, d, e) уравнения (4) принимают вид:

$$P_u = \Delta\Delta_1 - m, \qquad P_{1v} = \Delta\Delta_1 - m_1, \tag{7a}$$

$$p_u = \delta\delta_1 - m, \qquad p_{1v} = \delta\delta_1 - m_1, \tag{7b}$$

$$\delta_v = p\delta, \qquad \delta_{1v} - q_{1v} = p_1\delta_1 + pq_1, \tag{7c}$$

$$\Delta_u = P_1\Delta, \qquad \Delta_{1v} - q_{1u} = P\Delta_1 + P_1 q_1, \tag{7d}$$

$$m_v - R_u = -m(P + p), \quad m_{1u} - R_{1v} = -m_1(P_1 + p_1), \tag{7e}$$

$$R\delta - R_1\Delta = 0, \qquad R_1\delta_1 - R\Delta_1 = 0. \tag{7f}$$

$$q_1(m - m_1) = 0. \tag{7g}$$

Остановимся сначала на предположении, что касательные сопряженных сетей (u, v) на поверхностях (M) и (M′) не пересекаются. Следовательно, R_1, Δ_1, m_1, q_1 отличны от нуля.

Уравнение ($7g$) дает теперь

$$m = m_1. \tag{8}$$

Уравнения ($5g$, h, i, j) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right) = -p_1, \quad \frac{\partial}{\partial v}\ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right) = -P, \tag{9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\ln\left(\frac{m_1}{q_1}\right) = -p_1, \quad \frac{\partial}{\partial v}\ln\left(\frac{m_1}{q_1}\right) = -P. \tag{9b}$$

Условие совместности уравнений ($9a$) или ($9b$)

$$p_{1v} = P_u$$

в силу ($7b$, c) и (8) принимает вид

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0. \tag{10}$$

Так как асимптотические линии на поверхностях (M) и (M_1) определяются уравнениями (Проективно-дифференциальная геометрия, 130)

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0,$$

$$\Delta_1\, du^2 - \delta_1 dv^2 = 0, \tag{11}$$

то уравнение (10) показывает, что асимптотические на (M) и (M_1) соответствуют другу другу, т. е. что конгруэнция (MM_1) есть конгруэнция W.

Уравнения ($7\ a$, b) теперь дают

$$(P - p)_u = 0, \quad (P_1 - p_1)_v = 0.$$

Следовательно, $P - p$ есть функция одного v, а $P_1 - p_1$ — одного u.

Таблица компонент (3) допускает замену параметров u, v на $u^* = \varphi(u)$, $v^* = \psi(v)$ и умножение M и M_2 на $V = f_1(v)$ и M_1, M' на $U = f_2(u)$, при чем новые компоненты выражаются через старые по формулам (Проективно-диференциальная геометрия, 124).

$$\delta^* = \delta \frac{V}{U} \frac{du}{du^*}, \quad \Delta^* = \Delta \frac{V}{U} \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2 \frac{du^*}{du},$$

$$R^* = R \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \quad m^* = m \frac{du}{du^*} \frac{dv}{dv^*},$$

$$n^* = n \frac{V}{U} \frac{du}{du^*} \frac{dv}{dn^*}, \quad N^* = N \frac{V}{U} \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \quad q^* = q \frac{V}{U} \frac{dv}{dv^*}, \tag{12}$$

$$p^* = p \frac{dv}{dv^*} + \frac{d \ln V}{dv^*}, \quad P^* = P \frac{dv}{dv^*} - \frac{d}{dv} \ln \left(V \frac{dv}{dv^*}\right)$$

аналогичным, получаемым заменой u на v.

Так как

$$P^* - p^* = (P - p) \frac{dv}{dv^*} - \frac{d}{dv^*} \ln \left(V^2 \frac{dv}{dv^*}\right),$$

то выбирая подходящим образом параметры u, v и нормирование координат, мы достигнем

$$P = p, \quad P_1 = p_1. \tag{13}$$

Исключая из (7 c, d) и (9a) величины p_1 и P, получим, интегрируя,

$$\frac{R_1}{\Delta_1} = \frac{V_1}{\Delta} = \frac{U_1}{\delta}, \quad U_1 = \varphi_1(u), \quad V_1 = \psi_1(v).$$

Между тем, из формул (12) следует при условии, что уравнения (13) сохраняются, т. е., что $V^2 \dfrac{dv}{dv^*} = b^2$,

$$U^2 \frac{du}{du^*} = a^2, \quad a, b = \text{Const}.$$

$$\frac{R_1^* \Delta^*}{\Delta_1^*} = \frac{R_1 \Delta}{\Delta_1} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \quad \frac{R_1^* \delta^*}{\Delta_1^*} = \frac{R_1 \delta}{\Delta_1} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{du}{du^*}\right).$$

Следовательно, выбирая параметры u, v, мы достигнем

$$\Delta = \delta, \qquad R_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \tag{14a}$$

и уравнения (7f) дадут

$$R = R_1 = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad \Delta_1 = \delta_1. \tag{14b}$$

При условиии (14a) уравнения асимптотических (11) принимают вид

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

Следовательно, (Проективно-диференциальная геометрия, 142) система (u, v) на поверхности (M) есть система линий R, обе конгруэнции сети (MM_1) и (MM_2) суть конгруэнции R.
Исключая p_1 и P из уравнений (9b) и интегрируя, получим

$$m = \frac{q_1}{\delta} c, \qquad c = \text{Const}. \tag{15}$$

Вносим значения R и m из уравнений (15b), (15) в систему (7e); мы получим

$$(c-1)\left(\frac{\partial \ln q_1}{\partial v} + p\right) = 0, (c-1)\left(\frac{\partial \ln q_1}{\partial u} + p_1\right) = 0. \tag{16}$$

Уравнения (16) удовлетворены, если

$$c = 1,$$

но в таком случае таблица (3) в силу (14 b), (15) дает

$$M'_u = \frac{\delta_1}{\delta} M_1 - \delta_1 M_2 - p_1 M',$$

$$M'_v = \frac{q_1}{\delta} M_1 - q_1 M_2,$$

т. е.

$$(M' M'_u M'_v) = 0$$

и поверхность (M') вырождается в линию.

Если $c \gtrless 1$, то уравнения (7 c,d), (16) принимают вид:

$$q_{1u} = -p_1 q_1, \quad q_{1v} = -p q_1,$$
$$\delta_u = p_1 \delta, \quad \delta_v = p\delta,$$
$$\delta_{1u} = p_1 \delta_1, \quad \delta_{1v} = p\delta_1.$$

Откуда, исключая p, p_1 и интегрируя

$$q_1 = \frac{q}{\varepsilon}, \ \delta_1 = c_2 \delta, \qquad c_1, c_2 = \text{Const}. \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что уравнения (13), (14a) при преобразованиях (12) будут сохраняться, если

$$\frac{du}{du^*} = \frac{a}{b}, \quad \frac{dv}{dv^*} = \frac{a}{b}, \quad U^2 = ab, \quad V^2 = \frac{b^3}{a}.$$

При этом

$$\frac{\delta_1^*}{\delta} = \frac{\delta_1}{\delta} \frac{a^2}{b^2}.$$

Следовательно, выбирая a,b, мы приведем c_2 к единице.

Мы получаем таблицу компонент

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\
1 & \frac{c_1}{\delta} & \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} & 0 & 1 \\
2 & \frac{cc_1}{\delta^2} & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & -\delta & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial u}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & 0 & 1 & 0 \\
1 & \delta & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & -\delta \\
3 & 0 & \frac{cc_1}{\delta^2} & -\frac{c_1}{\delta} & 0
\end{array}
\tag{18}$$

где δ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 ln \delta}{\partial u \, \partial v} = \delta^2 - \frac{cc_1}{\delta^2}. \tag{19}$$

Эти уравнения определяют наиболее общую конгруэнцию Вильчинского (Проективно-диференциальная геометрия, 135).

Конгруэнции (MM_1) и (MM_2) принадлежат различным линейным комплексам.

Итак, ко всякой сети Вильчинского можно найти вторую сеть, очевидно, тоже сеть Вильчинского, так что они будут иметь общими первые и вторые оси.

5. Поверхность (M_1) является первым преобразованием Лапласа для поверхности (M) относительно сопряженной системы (u,v). Чтобы найти второе преобразование, надо найти второй фокус конгруэнции ($M_1 M_{1u}$).

Если

$$N_1 = c_1 \, M + \delta \, M' + \delta_1 \, M_1$$

—второй фокус луча $M_1 \; M_{1u}$, то

$$(M_1 \; N_1 \; N_{1v}) = 0.$$

Диференцируя N_1 с помощью таблицы (18) и внося производную сюда, мы получим

$$\left(M_1, \; c_1 \, M + \delta \, M', \left(c_1 \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} + \lambda \; \delta \right) M + \delta_v \, M' \right) = 0$$

или, развертывая,

$$\lambda \, \delta^2 \, (MM_1M') = 0,$$

откуда $\delta_1 = 0$ и, следовательно, N лежит на оси MM'.

Как известно (Проективно—диференциальная геометрия, 137), соответствующие точки последовательных преобразований Лапласа сети Вильчинского располагаются на двух прямых. Этими прямыми являются, следовательно, оси MM' и M_1M_2. Все преобразования четного порядка лежат на прямой MM', которая для них будет первой осью; прямая M_1M_2—второй осью. Нечетные преобразования имеют те же оси, но в обратном порядке.

Следовательно, ось MM' несет бесконечную последовательность сетей с общими осями.

Если вместо вершины M' ввести точку.

$$N = \frac{\mu}{\delta} M + M',$$

то таблица (18) примет вид

$$\left|\begin{matrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \dfrac{c_1-\mu}{\delta} & \dfrac{\partial \ln \delta}{\partial u} & 0 & 1 \\ \dfrac{cc_1}{\delta^2} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_u}{\delta} & 1+\mu & -\delta & -\dfrac{\partial \ln \delta}{\partial u} \end{matrix}\right| \qquad \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial \ln \delta}{\partial v} & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ 1+\mu & 0 & -\dfrac{\partial \ln \delta}{\partial v} & -\delta \\ \dfrac{\mu_v}{\delta} & \dfrac{cc_1}{\delta^2} & -\dfrac{c_1-\mu}{\delta} & 0 \end{matrix}\right| \qquad (18')$$

Отсюда следует, что при $\mu = \mathrm{Const}$ таблица (18') будет отличаться от таблицы (18) только тем, что c_1 будет заменено на $c_1 - \mu$. и $R = R_1$ примет значение $1 + \mu$. Это последнее значение можно привести к единице выбором параметров u, v; следовательно, с произвольным постоянным μ можно выбирать точки N на оси MM' так, что они описывают сети с общими первыми MM' и вторыми M_1M_2 осями. Отсюда следует, что с парой конгруэнций (MM'), (M_1M_2) связано ∞^1 последовательностей Вильчинского так, что лучи этих конгруэнций служат осями фокальных сетей последовательностей.

Обе прямых MM' и $M_1 M_2$ описывают (Проективно—диференциальная геометрия, 137). одну и ту же линейную конгруэнцию.

6. Переходим к рассмотрению особых случаев и допустим прежде всего

$$q_1 = 0, \; m \; R_1 \Delta_1 \gtrless 0.$$

Формулы (6) показывают, что в этом случае M_2' совпадает с точкой M_1, т. е.,. касательная к линии v на (M') и касательная к линии u на (M) служат сопряженными касательными одной и той же поверхности (M_1), ломанная $M_2 M M_1 M'$ описывает три звена одной последовательности Лапласа.

Уравнения (5 h, j) обращаются в тождество, уравнения (5 g,i) с помошью (7 c, d) интегрируются:

$$R_1 = U_1, \frac{R_1 \delta_1}{\Delta_1} = V_1, \ U_1 = \varphi_1(u), \ V_1 = \psi_1(v).$$

Подходящий выбор параметров u, v приведет U_1, V_1 к единице.

Уравнения (7 f) дадут

$$R = R_1 = 1, \ \Delta = \delta, \ \Delta_1 = \delta_1. \tag{20a}$$

Так как

$$(P - p)_u = (P_1 - p_1)_v = 0,$$

то выбором нормирования U, V получим

$$P = p, \ P_1 = p_1. \tag{20в}$$

По исключении p, p_1 система (7 c, d) дает две интегрируемые комбинации, откуда получаем

$$\delta_1 = c\,\delta, \ c = \text{Const}.$$

и это постоянное с опять приведем к единице.

Мы приходим, следовательно, опять к сетям Вильчинского, но на этот раз поверхность (M') является вторым преобразованим Лапласа от поверхности (M).

7. Случай

$$R_1 = 0, \ m\,q_1\,\Delta_1 \gtrless 0,$$

по внешности отличный от предыдущего, по существу соответствует ему с заменой u на v. В этом случае M'_1 совпадает с M_2, ломанная $M_1\,MM_2\,M'$ описывает три звена последовательности Вильчинского и т. д.

Если

$$R_1 = 0, \ q_1 = 0,$$

то обе точки M_1' и M_2' совпадут с M_2 и M_1, ломаная $M_1\,MM_2\,M'$ опишет периодическую с периодом 4 последовательность Лапласа. Она, конечно, не будет связана никакими другими требованиями.

Обращение в нуль одновременно R_1 или q_1 и Δ_1, или m_1 приведет к вырождению, как это сейчас же следует из формул (6). Нам остается, следовательно, рассмотреть, когда Δ_1 и m_1 порознь или одновременно обращаются в нуль.

Если

$$m_1 = 0$$

и $q_1 \lessgtr 0$, то уравнение (7 g) даст

$$m = 0.$$

Уравнения (7 e) дадут $R_u = R_{1v} = 0$, следовательно, выбором параметров u, v приведем R, R_1 к единице

$$R = R_1 = 1$$

и из (7 f) получим

$$\Delta = \delta, \ \Delta_1 = \delta_1.$$

Значит, выбором нормирования U, V можно достигнуть

$$R = p, \ R_1 = p_1.$$

Уравнения (5 h,j) удовлетворены тождественно, уравнения (5 g,i) интегрируются и дают

$$\delta_1 = c\delta, \ c = \mathrm{Const}.$$

Постоянное c приведем к единице изменением нормирования.

Уравнения (7 c,d) после исключения δ, δ_1, p, p_1 и интеграции дают

$$q_1 = \frac{c_1}{\delta}.$$

Таблица компонент принимает вид

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{\delta} & \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{cccc} \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & -\delta \\ 0 & 0 & -\frac{q}{\delta} & 0 \end{array}\right| \qquad (21)$$

где δ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u \partial v} = \delta^2. \qquad (22)$$

Поверхность (M_2) вырождается в линию. Сеть (u,v) на поверхности (M) и на поверхности (M') является тоже сетью Вильчинского, но частного типа: последовательность Лапласа обрывается на поверхности (M_2).

Вводя вместо M' новую вершину тетраэдра

$$N = \frac{\lambda}{\delta} M + M',$$

заметим, что при $\lambda_1 = \mathrm{Const}$ таблица компонент (21) сохранит свой вид с заменой c_1 на $c_1 - \lambda_1$ и $R = R_1$ на $1 + \lambda$. Следовательно, луч MM' несет ∞^1 точек N, описывающих такие же сети Вильчинского.

Так как

$$M_{2u}=0,\ M_{2v}=(M-\delta M')-M_2\frac{\partial\ln\delta}{\partial v},$$

$$(M-\delta M')_u=\delta^2 M_2,\ (M-\delta M')_v=(1+c_1)M_2+(M-\delta M')\frac{\partial\ln\delta}{\partial v},$$

$$(c_1M+\delta M)_u=\delta\,[(c_1+1)M_1-\delta M_2],\ (c_1M+\delta M')_v=(c_1M+\delta M')\frac{\partial\ln\delta}{\partial v},$$

$$[(c_1+1)M_1-\delta M_2]_u=\frac{c_1+1}{\delta}(c_1M+\delta M')+[(c_1+1)M_1-\delta M_2]\frac{\partial\ln\delta}{\partial u},$$

$$[(c_1+1)M_1-\delta M_2]_v=\delta(c_1M+\delta M'),$$

то прямые, соединяющие точки M_2 и $M-\delta M'$ или $c_1M+\delta M'$ и $(c_1+1)\ M_1-\delta M_2$, остаются при всех перемещениях тетраэдра неподвижными. Это—две директрисы линейной конгруэнции, которая содержит все лучи MM' и M_1M_2.

Последовательность, построенная на сети (M), содержит только две фокальных поверхности (M) и (M_1), упираясь одним концом в точку M_2—фокус второй оси M_1M_2, а другим концом в точку $c_1M+\delta M'$—фокус первой оси MM'.

Аналогично формулы

$$(\lambda_1 M+\delta M')_u=\delta[(\lambda_1+1)M_1-\delta M_2],(\lambda_1M+\delta M')_v=$$
$$=(\lambda-c_1)M_2+(\lambda M+\delta M')\frac{\partial\ln\delta}{\partial v},$$

$$[(\lambda+1)M_1-\delta M_2]_u=\frac{\lambda+1}{\delta}(c_1M+\delta M')+[(\lambda+1)\ M-\delta M']\ \frac{\partial\ln\delta}{\partial u},$$

$$[(\lambda+1)M_1-\delta M_2]_v=\delta(\lambda M+\delta M')$$

показывают, что каждая поверхность, описанная точкой $N=\frac{\lambda}{\delta}M+M'$ ($\lambda=\text{const}$), дает последовательность Вильчинского, состоящую из трех звеньев, которая упирается в фокус M_2 оси (M_1M_2) и в фокус $c_1M+\delta M'$ оси (MM').

8. Случай

$$\Delta_1=0,\quad R_1m_2q_1\lesseqgtr 0$$

не даст ничего нового, ибо получается из предыдущего заменой u и v.

Если одновременно

$$m_1=0,\ \Delta_1=0,\ R_1q\lesseqgtr 0,$$

то обе пары касательных к одноименным линиям u, v сетей (M) и (M') пересекаются.

Как и в предыдущем параграфе, мы получим, выбирая параметры и нормирование,

$$m = m_1 = 0, R_1 = R_1 = 1, \Delta = \delta, \Delta_1 = \delta_1 = 0.$$

Уравнения ($5\,g - j$) исчезают тождественно, а система ($7\,c,d$) дает после добавочного нормирования

$$q_1 = \frac{1}{\delta}.$$

Таблица компонент принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta & 0 & 0 \\ \frac{1}{\delta} & \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & -\delta \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} & 0 \end{vmatrix} \tag{23}$$

где δ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u \partial v} = \delta^2. \tag{24}$$

Оба преобразования Лапласа сети (u,v) на (M) или (M') вырождаются в линии. Нетрудно убедиться в том, что M_1 и M_2 суть фокусы луча M_1M_2, именно

$$(M_1, M + \delta M'),\ (M_2, M - \delta M')$$

суть директрисы той линейной конгруэнции, которая содержит обе оси MM' и M_1M_2.

Всякая точка

$$N = \lambda\, M + \delta M'$$

описывает сеть, оба преобразования Лапласа которой совпадают с линиями (M_1) и $M_2)$.

II.

9. Допустим теперь, что совпадают разноименные оси, т. е. первая ось сети (u,v) на поверхности (M) совпадает со второй осью такой же сети на поверхности (M') и наоборот.

Воспользуемся каноническим тетраэдром (3) для конгруэнции (MM_u).

Точки M_1 и M_2 будут первыми преобразованиями Лапласа поверхности (M) относительно сети (u,v), следовательно, прямая M_1M_2 будет второй осью этой сети. Выберем M_3 так, чтобы MM_3 было первой осью. При этом мы можем еще перемещать M_3 по прямой MM_3 и совместить, например, с преобразованием Лапласа точки N относительно сети (u,v) в сторону v.

Тогда касательная к линии u на поверхности (M_3) пройдет через точку N; так как точка N должна лежать на прямой M_1M_2, которая служит для сети (u,v) на поверхности (N) первой осью, то, очевидно,

$$\mathrm{N} = R_1\mathrm{M}_1 - \Delta_1\mathrm{M}_2. \tag{25}$$

Так как M_2, как и в § 4, является вторым фокусом луча (MM_v), то имеют место уравнения $(5\,a,b)$

$$n = 0, q = 0. \tag{26a}$$

Так MM_3 служит первой осью сети (u,v) на (M), то уравнение $(5a)$ должно быть удовлетворено.

$$N = 0. \tag{26b}$$

Условия для поверхности (N): 1) Условие, что $\mathrm{N}_2 \equiv M_3$ есть фокус касательной (NN_u), выражается посредством равенств

$$(\mathrm{M}_3\mathrm{M}_{3u}\mathrm{N}) = 0,\ (\mathrm{NN}_v\mathrm{M}_3) = 0.$$

После подстановки значения (25) эти равенства принимают вид

$$(\mathrm{M}_3, \mathrm{N}_1\mathrm{M}, R_1\mathrm{M}_1 - \Delta_1\mathrm{M}_2) = 0,$$

$$(R_1\mathrm{M}_1 - \Delta_1\mathrm{M}_2, (\delta_1 R_1 - \Delta_1 R)\mathrm{M} + R_{1v}\,\mathrm{M}_1 - (\Delta_{1v} - P\Delta_1)\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3) = 0,$$

откуда имеем

$$N_1 = 0,\ \delta_1 R_1 - \Delta_1 R = 0, \tag{26c}$$

$$R_1\Delta_1\left[\frac{\partial}{\partial u}\ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right) + P\right] = 0. \tag{26d}$$

2) Условие, что касательная плоскость поверхности $(\mathrm{N}_2) \equiv (\mathrm{M}_3)$ проходит через M_1M_2, выражается равенством

$$(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_{3v}) = 0$$

или,

$$n_1 = 0. \tag{26e}$$

3) Так как

$$\mathrm{N}_u = (q_1R_1 - m\Delta_1)\,\mathrm{M} + (R_{1u} + p_1R_1)\mathrm{M}_1 - \Delta_{1u}\mathrm{M}_2 + R_1\mathrm{M}_3$$

и второй фокус N_1 луча NN_u лежит на прямой MM', то

$$\mathrm{N}_1 = (R_1q_1 - m\Delta_1)\,\mathrm{M} + R_1\mathrm{M}_3.$$

Условия, что N_1 является вторым фокусом луча NN_u, запишутся в виде равенств

$$(NN_1N_u)=0,\ (NN_1N_{1v})=0$$

или

$$\{R_1M_1-\Delta_1M_2, (R_1q_1-m\Delta_1)M+R_1M_3, (R_{1u}+p_1R_1)M_1-\Delta_{1u}M^2\}=0,$$

$$\{R_1M_1-\Delta_1M_2, (R_1q_1-m\Delta_1)M+R_1M_3, [(R_1q_1-m\Delta_1)_v+$$
$$+p(R_1q_1-m\Delta_1)]M+m_1R_1M_1-m\Delta_1M_2+R_{1v}M_3\}=0,$$

откуда

$$R_1\Delta_1\left[\frac{\partial}{\partial u}\ln\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\right)+p_1\right]=0, \tag{26f}$$

$$R_1\Delta_1(m-m_1)=0, \tag{25g}$$

$$R_1(R_1q_1-m\Delta_1)\left[\frac{\partial}{\partial v}\ln\left(q_1-\frac{m\Delta_1}{R_1}\right)+p\right]=0. \tag{26h}$$

4) Наконец, касательная плоскость поверхности (N_1) должна проходить через прямую M_1M_2, следовательно,

$$(M_1M_2N_1N_{1u})=0$$

или

$$\{M_1, M_2, (R_1q_1-m\Delta_1)M+R_1M_3, (R_1q_1-m\Delta_1)_uM+(R_{1u}-P_1R_1)M_3\}=0,$$

откуда

$$R_1(R_1q-m\Delta_1)\left[\frac{\partial}{\partial u}\ln\left(q_1-\frac{m\Delta_1}{R_1}\right)+P_1\right]=0. \tag{26k}$$

10. Уравнения (26 $a-h$) вместе с основными уравнениями таблицы (4) определяют искомые пары сетей (M), (N).

Внося значения (26 a—c) в уравнения (4), мы снова приведем их к виду (7 a—g); на этот раз второе уравнение (7 f) нам дано и уравнение (7 g) получается отсюда, как следствие, с помощью последнего уравнения (4).

Таким образом, уравнения (7 $a-q$), (26g) и (26d,f,h,k) составляют все уравнения проблемы.

Мы должны предположить, что

$$R_1q_1-m\Delta_1 \lessgtr 0,$$

ибо иначе N_1 совпадет с M_3, т. е. с N_2 и поверхность (N) вырождится.

Допустим, кроме того, что N не совпадает с точками M_1 или M_2, т. е. что

$$R_1\Delta_1 \lessgtr 0.$$

Тогда из (26g) следует

$$m = m_1. \tag{27a}$$

Сокращая уравнения (26 d,f) на $R_1\Delta_1$ и устанавливая совместность их, получим

$$P_u = p_{1v}.$$

Следовательно, в силу (7 a,b), (27a)

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0 \tag{28b}$$

конгруэнция (MM_1) есть конгруэнция W.

Выбирая нормирование координат мы достигнем, как и выше,

$$P = p,\ P_1 = p_1. \tag{27c}$$

Исключая теперь P, p_1 из уравнений (26 d,f) с помощью (7 c,d) и (27 c) и интегрируя, получим

$$\frac{R_1}{\Delta_1} = \frac{V_1}{\Delta} = \frac{U_1}{\delta}.$$

Выбором параметров u,v приведем произвольные функции U_1, V_1 к единице.

$$\Delta = \delta,\ \Delta_1 = \delta_1,\ R_1 = \frac{\delta_1}{\delta}. \tag{27d}$$

Следовательно, система (u,v) на поверхности (M) есть система R.

Уравнения (7 f) дадут теперь

$$R = R_1. \tag{27e}$$

Уравнения (26 h,k) по сокращении на R_1 ($R_1q_1 - m\Delta_1$) и интегрировании дают

$$q_1 - \frac{m\Delta_1}{R_1} = \frac{c}{\delta},\ c = \text{Const.},$$

откуда в силу (27 d)

$$q_1 = m\delta + \frac{c}{\delta} \tag{27f}$$

и это выражение удовлетворяет уравнениям (7 c,d) правой колонны, если воспользоваться уравнениями (7 e). Добавочным нормированием постоянное c можно привести к единице, если оно не равно нулю. Таким образом, поверхности (M), (N) определяются системой уравнений

$$\begin{gathered} p_u = p_{1v} = \delta\delta_1 - m, \\ \delta_v = p\delta,\ \delta_u = p_1\delta, \\ m_v = -2mp + \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)_v, \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)_v = m_u + 2mp_1, \end{gathered} \tag{28}$$

которая определяет пару поверхностей (M), (N) с четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Таблица компонент принимает вид

$$
\begin{array}{|cccc|}
0 & \delta & 0 & 0 \\
m\delta + \frac{c}{\delta} & \frac{\partial \ln \delta}{\partial u} & 0 & 1 \\
m & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\delta_1}{\delta} & -\delta_1 & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial u}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|cccc|}
\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & 0 & 1 & 0 \\
\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\delta_1}{\delta} & 0 & -\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} & -\delta \\
0 & m & -m\delta - \frac{c}{\delta} & 0
\end{array}
$$

Уравнения ($27\,d$) показывают (Пр.-д. геом., стр. 142), что сеть (u,v) на поверхности (M) является сетью R. Из соображений симметрии следует, что тем же свойством обладает сеть (u,v) на поверхности (N).

Так как точки M и N находятся соответственно в касательных плоскостях поверхностей (N) и (M′), то луч MN касается в точке M поверхности (M) и в точке N поверхности (N). Более того, нетрудно заметить, что асимптотические линии на фокальных поверхностях (M) и (N) конгруэнции (MN) соответствуют друг другу.

Действительно, асимптотические линии на поверхности (M) определяются уравнением (11), которое теперь принимает вид

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

Уравнение асимптотических линий на поверхности (N), если внести сюда N по формуле (25), или, лучше, умножая на $\frac{\delta}{\delta_1}$

$$N = M_1 - \delta M_2,$$

примет вид

$$\left(M_1 - \delta M_2,\ \frac{c}{\delta} M + M_3,\ M_3, cM_1 du^2 - c\delta M_2 dv^2\right) = 0.$$

или

$$c\,(du^2 - dv^2) = 0.$$

Следовательно, конгруэнция (MN) есть конгруэнция W, а так как она переводит сеть R в сеть R, то она определяет преобразование Йонаса. Мы увидим, что это—не общее преобразование Йонаса.

11. Рассмотрим произвольную сеть линий R на некоторой поверхности (M). Примем эту сеть линий за сеть координатных линий u,v. Пусть M_1 второй фокус касательной MM_u. Присо-

единим к конгруэнции (MM_1) тетраэдр с компонентами (3). В силу произвола в выборе точек M_2 и M_3 в фокальных плоскостях мы можем всегда их выбрать так, чтобы

$$v = q = p_1 = q_1 = 0.$$

Так как конгруэнция (MM_1) есть конгруэнция R, то при подходящем выборе параметров u, v имеем (Проективно—диференциальная геометрия, 141) равенства

$$\Delta = \delta,\ \Delta_1 = \delta_1,$$

которые выражают требование, чтобы фокальная сеть на обоих поверхностях (M) и (M_1) была изотермически сопряженная и асимптотические соответствовали друг другу. Выбирая нормирование координат, мы достигнем

$$\bar{P} = \bar{P}_1 = 0.$$

Снабжая чертой наверху компоненты движений этого тетраэдра (кроме δ, δ_1, которые не зависят от выбора p, q, p_1, q_1), мы получим для определения сети R из координатных линий на поверхности (M) систему уравнений

$$\bar{m} = \bar{m}_1 = \delta\delta_1,\ \bar{n} = \delta_v,\ \bar{n}_1 = \delta_{1u},\ \bar{N} = \delta_u,\ \bar{N}_1 = \delta_{1v}. \tag{30a}$$

$$\bar{R}_u = 2\ (\delta\delta_1)_v,\ \bar{R}_{1v} = 2\ (\delta\delta_1)_u, \tag{30b}$$

$$\bar{n}_u - \bar{N}_v = 0,\ \bar{n}_v - \bar{N}_u = (\bar{R} - \bar{R}_1)\ \delta, \tag{30e}$$

$$\bar{n}_{1v} - \bar{N}_{1u} = 0,\ \bar{n}_{1u} - \bar{N}_{1v} = (\bar{R}_1 - \bar{R})\ \delta_1. \tag{30d}$$

Эта система определяет сети R с 6 произвольными функциями одного аргумента, именно, произвольны начальные значения $\bar{R}$, $\bar{R}_1$, $\bar{n}$, $\bar{n}_1$, $\bar{N}$, $\bar{N}_1$. Начальные значения δ и δ_1 суть постоянные, которые добавочным нормированием можно привести к единице.

Выберем теперь точку N в касательной плоскости поверхности (M) так, чтобы она описывала сеть R, соответствующую в преобразовании Йонаса сети (M). Тогда можно выбрать N_1 так, чтобы луч NN_1 описывал конгруэнцию R и огибал на поверхности (N) линии u. По свойству преобразований Йонаса точка N_1 будет вторым фокусом луча NN_1 поверхности. Четыре точки M, M, N, N_1 можно принять за вершины канонического тетраэдра (3), присоединенного к конгруэнции (MM_1). Будем обозначать компоненты этого тетраэдра теми же буквами, как и компоненты тетраэдра M, M_1, M_2, M_3, но без черты наверху. Компоненты $\Delta = \delta$ и $\Delta_1 = \delta_1$ остаются без изменения.

Связь между другими компонентами обоих тетраэдров устанавливается формулами (Проективно—диференциальная геометрия, 121):

$$P - p = \bar{P} = 0,\ m = \bar{m} - p_u - qq_1,\ n = \bar{n} - q_u - p_1\, q - p\delta, \tag{31}$$

$$R = \bar{R} - p^2 - q_1\delta - p_v - q\,\delta_1,\ \ N = \bar{N} - pq - p_1\,\delta - q_v.$$

На компоненты p, q, p_1, q_1 налагаются следующие требования:

1) Точки N и N_1 служат вторыми фокусами лучей MN и $M_1 N_1$, а также фокусами луча NN_1, т. е. касательной плоскостью поверхности (N) служит плоскость MNN_1, поверхности (N_1)— плоскость $M_1 NN_1$.

$$(M N N_1 N_u) = (M N N_1 N_v) = (M_1 N N_1 N_{1u}) = (M_1 N N_1 N_{1v}) = 0$$

или, с помощью таблицы (3),

$$n = n_1 = N = N_1 = 0. \tag{32a}$$

2) Развертывающиеся поверхности конгруэнций (MM_1) и (NN_1) соответствуют друг другу, т. е. луч NN_1 касается на поверхности (N) линии u, на поверхности (N_1) линии v.

$$(N N_1 N_u) = 0, \ (N N_1 N_{1v}) = 0$$

или, с помощью таблицы (3),

$$m = m_1 = 0. \tag{32b}$$

Все четыре конгруэнции, описанные сторонами косого четыреугольника $M M_1 \ N_1 N$, суть конгруэнции W, т. е. на поверхностях (N), (N_1) асимптотические линии определяются уравнением

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями

$$(M N N_1 d^2 N) = 0, \ (M_1 N N_1 d^2 N_1) = 0$$

или

$$(M N N_1 M_1)\ (-q R_1\ du^2 + Rq\ dv^2) = 0,$$

$$(M_1 N N_1 M)\ (R\, q_1\ du^2 - R\, q_1\ dv^2) = 0,$$

получим

$$R = R_1. \tag{32c}$$

При выполнении условий (32 a—c) конгруэнция (NN_1) будет конгруэнцией R, ибо это—конгруэнция W, фокальная сеть которой—изотермически сопряженная.

Формулы (31) позволят представить условия (32a—c) как уравнения на p, q, p_1, q_1:

$$q_u = n - p_1 q - p\delta, \ q_v = \bar{N} - pq - p_1\delta, \tag{33a}$$

$$q_{1u} = \bar{N}_1 - p_1 q_1 - p\delta_1, \ q_{1v} = \bar{n}_1 - pq_1 - p_1 \delta_1, \tag{33b}$$

$$p_u = \delta\delta_1 - qq_1, \ p_v = \bar{R} - p^2 - q_1 \delta - q\delta_1 - R, \tag{33c}$$

$$p_{1u} = \bar{R}_1 - p_1{}^2 - q\delta_1 - q_1\delta - \bar{R}, \ p_{1v} = \delta\delta_1 - qq_1. \tag{32d}$$

Здесь R надо рассматривать как новую неизвестную функцию. Условие совместности для уравнений (33a,b) удовлетворяется в силу ($33c,d$), (30). Условие совместности для уравнений ($33c,d$) дает два уравнения для R.

$$R_u = 0, \ R_v = 0,$$

откуда

$$R = \text{Const}.$$

Система ($33a - d$) определяет p, q, p_1, q_1, с 5 произвольными постоянными, считая в том числе и $R = \text{Const}$. Этим определяется наиболее общее преобразование Йонаса (Проективно—диференциальная геометрия, 201).

12. Потребуем теперь, чтобы сети R на поверхности (M) и на поверхности (N) имели общие оси. Так как M_1 — преобразование Лапласа для M, то вторая ось сети (M) должна совпасть с прямой $M_1 N$, аналогично вторая ось сети (N) совпадает с прямой $N_1 M$.

Обратно, $N_1 M$ должна быть первой осью сети (M), $M_1 N$ — сети (N).

Следовательно, точка M'_1, точка пересечения касательной MM_v с ребром $M_1 N$, служит фокусом этой прямой, а касательная плоскость к поверхности (M'_1) в этой точке проходит через ребро MN_1.

Таблица (3) дает для M'_1 значение

$$M_1' = M_1 q + N.$$

Внося это значение в уравнения

$$(M N_1 M_1' M_1'{}_u) = 0, \ (M N M_1' M_1'{}_v) = 0,$$

мы выразим аналитически все требования наложенные на точку M_1'. С помощью таблицы (3) эти уравнения принимают вид

$$n = p\delta, \ N = p_1 \delta. \tag{34}$$

Аналогично, касательная к линии v на поверхности (N) пересекает ребро $M N_1$ в точке

$$N_1' = RM - \delta N_1.$$

Касательная плоскость к поверхности (N_1') в точке N_1' должна проходить через ребро $N M_1$, следовательно

$$(N M_1 N_1' N_1'{}_u) = 0, \ (N M_1 N_1' N_1'{}_v) = 0.$$

В силу (34) оба уравнения удовлетворены тождественно.

Итак, пара поверхностей (M), (N) с общими осями определяется системой уравнений (30), ($33 \ a - d$), к которым надо присоединить уравнения (34).

Нетрудно заметить, что поверхность (10) не является произвольной поверхностью R. Будем рассматривать уравнения (30), (33 $a-d$), (34) совместно. Исключая n и N при помощи уравнения (34), мы заметим, что уравнения (33a) интегрируются и дают

$$q=\frac{c}{\delta},\ c=\mathrm{Const.} \tag{35}$$

Уравнения (30c) будут удовлетворены в силу (30c,d). Мы получим систему

$$\delta_u=p_1\delta, \qquad \delta_v=p\delta, \tag{36a}$$

$$\delta_{1u}=n, \qquad \delta_{1v}=N_1, \tag{36b}$$

$$q_{1u}=N_1-p_1q_1-p\delta_1, \qquad q_{1v}=n_1-pq_1-p_1\delta_1, \tag{36c}$$

$$p_u=\delta\delta_1-c\,\frac{q_1}{\delta}, \qquad p_v=R-p^2-q_1\delta-c\,\frac{\delta_1}{\delta}-R, \tag{36d}$$

$$p_{1u}=R_1-p_1{}^2-c\,\frac{\delta_1}{\delta}-q_1\delta-R, p_{1v}=\delta\delta_1-c\,\frac{q_1}{\delta}, \tag{36e}$$

$$\begin{aligned} &R_u=2\,p\,\delta\delta_1+2\,\delta N_1,\\ &R_{1v}=2\,p_1\,\delta\delta_1+2\,\delta\,n_1, \end{aligned} \tag{36f}$$

$$\begin{aligned} &n_{1v}=N_{1u},\\ &n_{1u}=N_{1v}+(R_1-R)\,\delta_1, \end{aligned} \tag{26g}$$

которая определяет поверхность (M) с 4 произвольными функциями одного аргумента.

Постоянное c можно привести к единице добавочным нормированием.

13. Нетрудно обнаружить характеристическое свойство конгруэнции Йонаса, преобразующей сеть (M) в сеть (N) с общими осями.

Вернемся к общему преобразованию Йонаса, определяемому формулами (33 $a-d$), и потребуем, чтобы конгруэнция (MN) принадлежала некоторому линейному комплексу.

Если уравнение линейного комплекса написать в виде

$$\Sigma A_{ik}\,p^{ik}=0,$$

где p^{ik} — линейные координаты луча, или короче, опуская указатели, в виде

$$\Sigma A p=0,$$

то условие, что конгруэнция (MN) принадлежит этому комплексу, примет вид

$$\Sigma A\,(\mathrm{M\,N})=0. \tag{a}$$

Здесь коэфициенты A_{ik} — постоянные, а M и N — функции от u, v, производные от которых определяются таблицей (3) со значением компонентов (33 $a-d$). Диференцируя тождество (a)

последовательно по u и по v и каждый раз используя предыдущие соотношения, мы получим

$$\delta \Sigma A(M_1 N) - q \Sigma A(M N_1) = 0,$$
$$q \Sigma A(M_1 N) - \delta \Sigma A(M N_1) = 0.$$

Если $q = \pm \delta$, то прямая MN касается на поверхности (M) асимптотической линии, конгруэнция (MN) вырождается. Если $q^2 \lessgtr \delta^2$, то полученные уравнения эквивалентны системе

$$\Sigma A(M_1 N) = 0, \quad \Sigma A(M N_1) = 0. \tag{b}$$

Диференцируя еще раз по u и по v, получим

$$\Sigma A(N N_1) + q \Sigma A(M_1 N_1) = 0,$$
$$R \Sigma A(M M_1) + \delta \Sigma A(M_1 N_1) = 0. \tag{c}$$

Новое диференцирование дает

$$\Sigma A(M_1 N_1).(q_u + p_1 q) = 0,$$
$$\Sigma A(M_1 N_1).(q_v + pq) = 0,$$
$$\Sigma A(M_1 N_1).(\overline{N} - p_1 \delta) = 0,$$
$$\Sigma A(M_1 N_1).(\overline{n} - p \delta) = 0.$$

Если $\Sigma A(M_1 N_1)$ равна нулю, то из уравнений (a) получим, что все 6 ребер тетраэдра принадлежат линейному комплексу, что невозможно. Мы приходим таким образом к уравнениям

$$q_u + p_1 q = 0, \; q_v + p q = 0, \; \overline{N} = p_1 \delta, \; \overline{n} = p \delta.$$

В силу уравнений (33a) эти условия эквивалентны равенствам (39), которые определяют пару сетей с общими осями.

Итак, если конгруэнция W, осуществляющая преобразование Йонаса сети R, принадлежит линейному комплексу, то обе сети R имеют общие оси. Мы будем называть такие сети сетями R_1.

Уравнения (b) показывают, что обе оси принадлежат тому же самому линейному комплексу.

Нетрудно увидеть, что они описывают расслояемую пару конгруэнций. Для этого надо показать, что существует семейство ∞^1 поверхностей, касательные плоскости которых, проведенные в точках пересечения поверхности с лучем MN_1, проходят через луч $M_1 N$, и второе семейство поврхностей, касательные плоскости которых, проходящие через MN_1, имеют точки касания на луче M_1N.

Если

$$P = \lambda M + N_1$$

— какая-нибудь точка одной из поверхностей первого семейства, то ее касательная плоскость определяется тремя точками P, M_1 и N; следовательно

$$(PM_1NP_u)=0, \quad (PM_1NP_v)=0,$$

или, если внести значение P,

$$(\lambda M+N_1, M_1, N, \lambda_u M-p_1N_1)=0, (\lambda M+N_1, M_1, N, (\lambda_v+\lambda p)M)=0$$

или

$$\lambda_u+\lambda p_1=0, \quad \lambda_v+\lambda p=0.$$

Эта система вполне интегрируема и определяет λ с произвольным постоянным, т. е. определяет ∞^1 поверхностей первого семейства.

Аналогично, если

$$Q=\mu M_1+N$$

какая-либо точка одной из поверхностей второго семейства, то

$$(QMN_1Q_u)=0, \quad (QMN_1Q_v)=0,$$

или, если внести значение Q,

$$(\mu M_1+N, M, N_1, \quad (\mu_u+\mu p_1)M_1)=0,$$

$$(\mu M_1+N, M, N_1, \quad (\mu_v M_1-pN)=0,$$

или

$$\mu_u+\mu p_1=0, \quad \mu_v+\mu p=0.$$

Эта система определяет ∞^1 поверхностей второго семейства.

14. Если поверхность (M), удовлетворяющая системе (35), дана, то с ней связана вообще только одна поверхность (N). Действительно, по заданным $\bar{n}, \bar{N}, \bar{n}_1, \bar{N}_1, R, \bar{R}_1, \delta, \delta_1$ уравнения (36a) определят p и p_1 единственным образом.

Уравнение (35) определит q, если известно постоянное c, а тогда первое уравнение (36a) определит q_1.

Диференцируя второе уравнение (36d) по u или первое (36e) по v, чтобы исключить произвольное постоянное R, мы получим

$$\frac{c}{\delta}(\bar{n}_1-p_1\delta_1)=-p_{uv}-2pp_u+3p\delta\delta_1+\delta\bar{N}_1,$$

$$\frac{c}{\delta}(\bar{N}_1-p\delta_1)=-p_{1uv}-2p_1p_{1v}+3p_1\delta\delta_1+\delta\bar{n}_1.$$

Эти уравнения определяют c единственным образом, за исключением случая

$$\bar{n}_1=p_1\delta_1, \quad \bar{N}_1=p\delta_1. \tag{37}$$

Из уравнений (36a, b), (37) по исключении $p, p_1, \bar{n}_1, \bar{N}_1$ получаем

$$\delta\delta_{1u}-\delta_1\delta_u=0, \quad \delta\delta_{1v}-\delta_1\delta_v=0,$$

откуда

$$\delta : \delta_1 = \text{Const.}$$

и конгруэнция (MM_1) есть конгруэнция Вильчинского.

Для конгруэнции Вильчинского постоянное c останется произвольным.

Добавочным нормированием приведем

$$\delta_1 = \delta.$$

Из уравнений (36c) после интеграции получим

$$q_1 = \frac{c_1}{\delta}, \; c_1 = \text{Const.}$$

Полагая

$$c_1 = \frac{a}{c}, \; R = R' - 2c,$$

мы приведем систему (36 a — e) к виду

$$\begin{aligned} p_u &= \delta^2 - \frac{a}{\delta^2}, & p_v &= \overline{R} - p^2 - R', \\ p_{1u} &= \overline{R}_1 - p_1{}^2 - R', & p_{1v} &= \delta^2 - \frac{a}{\delta^2}, \\ \delta_u &= p_1 \delta, & \delta_v &= p\delta, \\ R_u &= 4p\,\delta^2, & \overline{R}_{1v} &= 4\,p_1\,\delta^2. \end{aligned} \tag{38}$$

Эта система определяет поверхность (M) с двумя произвольными функциями одного аргумента. Постоянное c остается неопределенным. Следовательно, с каждой поверхностью (M) связано ∞^1 поверхностей (N).

15. Нам осталось рассмотреть случаи совпадения поверхности (N) с одним из преобразований Лапласа поверхности (M), т. е. с поверхностью (M_1) или (M_2). В первом случае $\Delta_1 = 0$, во втором $R_1 = 0$.

Если

$$\Delta_1 = 0$$

и, следовательно, R_1 отлично от нуля (если поверхность (N_1) $\equiv$ (M_3) не вырождается), то из (7f) следует $\delta_1 = 0$ и поверхность (M_1) $\equiv$ (N) вырождается.

Если

$$R_1 = 0,$$

то из первого уравнения (7f) следует

$$R = 0,$$

ибо $\delta = 0$ приводит к вырождению поверхности (M).

Допустим, что q_1 отлично от нуля, тогда

$$m = m_1,$$

уравнения (26 d, f, g, h, k) удовлетворены тождественно и система (7 $a - g$) принимает вид

$$\begin{aligned} &P_u = \Delta\Delta_1 - m, \quad P_{1v} = \Delta\Delta_1 - m, \quad p_u = \delta\delta_1 - m, p_{1v} = \delta\delta_1 - m,\\ &\delta_v = p\delta, \qquad\qquad \delta_{1u} - q_{1v} = p_1\delta_1 + p q_1,\\ &\Delta_u = P_1\Delta, \qquad\qquad \Delta_{1v} - q_{1u} = P\Delta_1 + P_1 q_1,\\ &m_v = -m(P+p), \qquad m_u = -m(P_1 + p_1). \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь q_1 можно задать произвольно, как функцию двух переменных u, v; при этом условии система (39) определит $\delta, \Delta, \delta_1, \Delta_1, p, p_1, P, P_1, m$ с 8 произвольными функциями одного аргумента.

Таблица компонент проективных движений тетраэдра

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta & 0 & 0\\ q_1 & p_1 & 0 & 1\\ m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\Delta_1 & -P_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & 1 & 0\\ \delta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -P & -\Delta\\ 0 & m & -q_1 & 0 \end{vmatrix} \tag{40}$$

показывает, что ломаная $M_1 M M_2 M_3$ описывает три звена последовательности Лапласа.

Поверхности (M) и $(M_2) \equiv (N)$ суть две соседние фокальные поверхности последовательности. Следующее звено последовательности в сторону v описывается касательной $M_3 M_{3v}$. Таблица (40) показывает, что эта касательная лежит в плоскости $M_1 M_2 M_3$. Три последовательных преобразования Лапласа точки M в сторону v, т. е. точки M_2, M_3 и второй фокус касательной $M_3 M_{3v}$, и первое преобразование в сторону u, т. е. точка M_1, лежат в одной плоскости. То же самое можно сказать о трех последовательных преобразованиях точки $M_2 \equiv N$ в направлении u и в первом преобразовании в направлении v, т. е. относительно точек M, M_1, второго фокуса касательной $M_1 M_{1u}$ и точки M_2.

Будем называть сетью Розе сопряженную систему линий (u, v), описанную точкой M, если три последовательных преобразования Лапласа точки M в сторону u и первое преобразование в сторону v лежат в одной плоскости. Мы можем сказать тогда, что обе сети (u, v) на поверхности (M) и $(M_2) \equiv (N)$ суть сети Розе, направленные навстречу друг другу.

Очевидно и обратно: две сети Розе, являющиеся соседними фокальными сетями одной последовательности Лапласа и направленные навстречу друг другу, всегда дают нам конфигурацию двух сетей с общими осями.

Если в системе (36) положить

$$q_1 = 0,$$

то мы получим замечательный специальный случай. Таблица (37) покажет нам, что касательная к линии u поверхности (M_1) пройдет теперь через точку M_3 и касательная к линии v поверхности (M_3) пройдет через точку M_1. Последовательность Лапласа, описанная ломаной $M_1 M_1 M_2 M_3$, замкнется в периодическую четырех-членную последовательность Лапласа.

Система (30) при $q_1 = 0$ определяет эти последовательности с 8 произвольными функциями одного аргумента.

Réseaux conjugués aux axes communs.

S. Finicoff (*Moscou*).

Étant donné un réseau conjugué (u,v) tracé sur une surface (M), on appélle le premier axe du réseau la ligne d'intersection des plans osculateurs aux lignes u, v au point M, le second—la droite qui joint les transformés de Laplace M_1, M_2 du point M relativement au réseau (u,v).

Cela posé, examinons deux surfaces (M), (M') dont les axes relativement au réseau conjugué commun (u,v) coincident. Le problème se présente en deux espèces selon la coincidence A directe (le premier axe avec le premier axe) ou B inverse (le premier axe de (M) avec le second de (M') et vice-versa).

Deux solutions sont évidentes, à savoir:

1°. Quelle que soit une suite de Laplace périodique à période 4 décrite par le quadrilatère gauche $MM_1M'M_2$, deux réseaux focaux opposés (M) et (M') ou contigus (M) et (M_1) présentent une solution du problème A ou B.

2°. Appellons le réseau dont deux congruences appartiennent à des complexes linéaires, réseau de Wilczynski. Cela posé, deux réseaux de Wilczynski (M) et (M') appartenant á la même suite de Laplace présentent une autre solution du problème. Les transformés de Laplace successifs du point M sont situés sur les deux axes du réseau: les transformés d'ordre paire sur le premier axe, ceux d'ordre impaire sur le second. Ils composent avec le réseau (M) des solutions du problème A ou B.

Deux congruences des axes du réseau (M) appartiennent à la même congruence linéaire. Une infinité des suites de Wilczynski est attachée à ce couple de congruences, chaque réseau focal compose avec le réseau (M) une solution de A ou de B.

Les configurations citées sont toutes les solutions du problème A. Le problème B admet de plus deux solutions nouvelles.

1°. Appellons rèseau de Rozet (de v vers u) le réseau dont les points homologues de trois transformés de Laplace successifs dans la direction de u et celui du premier transformé dans la direction de v sont situés dans le même plan. La congruence dont les réseaux focaux sont des reséaux de Rozet dirigés l'un vers l'autre est une congruence la plus générale appartenant á un complexe linéaire. Les rèseaux focaux cités présentent une solution de B.

2°. Appellons R_1 le réseau R qui se transforme en réseau R (donc R_1) par une congruence d'un complexe linéaire. Les deux réseaux R_1 associés présentent une solution de B. Les congruences des axes appartiennent au même complexe et composent un couple de congruences stratifiables. Les surfaces R qui portent les réseaux R_1 composent une classe spéciale qui dépend de 4 fonctions arbitraires d'un argument. A chaque surface de la classe un seul réseau R_1 est associé et un seul réseau R_1 lui est attaché comme transformé par une congruence d'un complexe linéaire.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ОСНОВНОЙ ФУНКЦИИ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.

П. М. Булат. (*Томск*).

В аддитивной теории чисел рассматривается функция

$$f(x_1, \ldots x_{k1}; y_1, y_2, \ldots y_{k2} | n),$$

определяемая, как число целых чисел замкнутого интервала $(1, n)$, совпадающих по меньшей мере с одним из x_i, или с одним из y_j, или с одной из сумм $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, 3 \ldots k_1,\ j = 1, 2, \ldots k_2)$, где x_i и y_j суть различные или совпадающие целые числа, также расположенные в интервале $(1, n)$[1]).

Иначе, $f(x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2} | n)$ означает число членов последовательности, расположенной в интервале $(1, n)$, полученной путем сложения последовательностей $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, расположенных в том же интервале[2]).

В первой из указанных работ Н. П. Романов решает вопрос о нахождении средних значений функции $f(x_1, \ldots x_{k1}; y_1, y_2, \ldots y_{k2} | n)$.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы, исходя из найденных средних значений функции $f(x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2 \ldots y_{k_2} | n)$, оценить порядок ее роста в среднем, при некоторых частных предположениях относительно k_1 и k_2.

В случае различных последовательностей $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ установлено следующее равенство[3]):

$$\sum_{1 \leqslant x_1 \angle \ldots \angle x_{k_1} \leqslant n} \quad \sum_{1 \leqslant y_1 \angle \ldots y_{k_2} \leqslant n} f(x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2 \ldots y_{k_2} | n) =$$

$$= nC^n_{k_1} C^n_{k_2} - C^n_{k_1+1} C^n_{k_2+1} + C^n_{k_1+1} C^{n-k_1-1}_{k_2+1}, \qquad (1)$$

где внешнее суммирование распространено на все сочетания из первых n чисел натурального ряда по k_1, а внутреннее—на все сочетания по k_2. Символ C^n_m — число сочетаний из n элементов по m.

Пусть $M_1(f)$ означает среднее значение функции

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2} | n),$$

---

[1]) См. работы Н. П. Романова, „Известия НИИММ'а ТГУ" том I, выпуск III за 1937 г. стр. 190—204 и том II, выпуск I за 1938 г. стр. 13—17.

[2]) См. работу Шнирельмана, „Известия Новочеркасского Института" 1930 г., а также Mathem. Annalen 1 107 стр. 649—690.

[3]) „Известия НИИММ'а" за 1937 г. т. I, выпуск III, стр. 198.

тогда из (1) находим:

$$M_1(f) = n - \frac{(n-k_1)(n-k_2)}{(k_1+1)(k_2+1)} + \\ + \frac{(n-k_1-k_2-1)(n-k_1-k_2)}{(k_1+1)(k_2+1)} \mu_1(n), \tag{2}$$

где

$$\mu_1(n) = \frac{(n-k_1)!\,(n-k_2)!}{n!(n-k_1-k_2)!}. \tag{3}$$

Пусть, далее $k_1 = [\alpha n^s]$ и $k_2 = [\beta n^t]$, где $0 < s < 1$ и $0 < t < 1$.

Ясно, что характер асимптотики не изменится, если для удобства выкладок, величины $[\alpha n^s]$ и $[\beta n^t]$ заменим соответственно величинами αn^s и βn^t.

Вставив эти значения k_1 и k_2 в (2) и (3) и оценивая (3) по формуле Стирлинга, приходим к следующим асимптотическим равенствам:

при $s + t < 1$ и $s > t$

$$M_1(f) = \frac{3\alpha}{2} n^e + O(n^t); \tag{4}$$

при $s + t = 1$ и $s > t$

$$M_1(t) = \frac{n}{\alpha\beta} (\alpha\beta - 1 + e^{-\alpha\beta}) + O(n^s); \tag{5}$$

при $s + t > 1$ и $s > t$

$$M_1(f) = n + O(n^{-s-t}). \tag{6}$$

В случае сложения совпадающих последовательностей известно соотношение [1]):

$$\sum_{1 \leqslant x_1 \angle \ldots \angle x_k \leqslant n} f(x_1, x_2, \ldots . x_k; x_1, x_2 \ldots x_k \mid n) = \\ = nC_k^n 2C_{k+2}^n - C_{k+1}^n + 2^{k+3} C_{k+2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} + 2^{k+1}(1 + 2\varepsilon_n)\, C_{k+2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}, \tag{7}$$

где суммирование распространено на все сочетания из n первых чисел натурального ряда по k, а $\varepsilon_{2m} = 0$ и $\varepsilon_{2m+1} = 1$.

Если под $M_2(f)$ понимать среднее значение функции

$$f(x_1, x_2 \ldots x_k; x_1, x_2 \ldots x_k \mid n),$$

тогда из (7) имеем:

для $n = 2m$

$$M_2(f) = 2m - 2\frac{(2m-k)(2m-k-1)}{(k+1)(k+2)} - \\ - \frac{2m-k}{k+1} + 2^{k+1} \left\{ 4\, \frac{(m-k-1)(m-k)}{(k+1)(k+2)} + \frac{m-k}{k+1} \right\} \mu_2(m); \tag{8}$$

[1]) Известия НИИММ'а за 1937 г. т. 1, выпуск III, стр. 200.

для $n = 2m + 1$

$$M_2(f) = 2m + 1 - 2\,\frac{(2m-k)(2m-k+1)}{(k+1)(k+2)}) -$$

$$-\frac{2m-k}{k+1} + 2^{k+1}\left\{4\,\frac{(m-k)(m-k-1)(2m-k+1)}{(2m+1)(k+1)(k+2)} + \right.$$

$$\left. + 3\,\frac{(2m-k+1)(m-k)}{(k+1)(2m+1)}\right\}\mu_2(m), \tag{9}$$

где

$$\mu_2(m) = \frac{m!(2m-k)!}{(2m)!(m-k)!}. \tag{10}$$

По предыдущему, не изменяя характера асимптотики, можем положить $k = \alpha n^s$, где $0 < s < 1$.

Вставив это выражение для k в (8), (9) и (10) и оценив (10) по формуле Стирлинга, приходим к следующим, общим для n четного и n нечетного, асимптотическим равенствам:

при $s < \frac{1}{2}$

$$M_2(f) = \frac{2^{1+s} n^{1-s}}{\alpha} + \begin{cases} O\left(\frac{n^s}{2^s}\right) \\ O\left(\frac{n^{1-2s}}{2^{1-2s}}\right) \end{cases}; \tag{11}$$

при $s = \frac{1}{2}$

$$M_2(f) = \frac{n}{2\alpha^2}\left(2\alpha^2 - 8 + 8e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right); \tag{12}$$

при $s > \frac{1}{2}$

$$M_2(f) = n + O\left(\frac{n^{2-2s}}{2^{2-2s}}\right). \tag{13}$$

Наконец, если последовательность $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ фиксирована и обладает заданной плотностью α[1]), известна формула [2]):

$$\sum_{1 \leqslant x_1 < \ldots < x_{k_1} \leqslant n} f(x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2} | n) = C_{k_1}^{n} - \sum_{r=1}^{n-k_2} C_{k_1}^{n-1-\overline{y}_r + r} \tag{14}$$

[1]) Последовательность $Q_1, Q_2, \ldots Q_e$ называют последовательностью, имеющей в интервале $(1, n)$ плотность $\geqslant \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, если, взяв любое число k $(k = 1, 2 \ldots n)$ и обозначив через $N(k)$ число членов последовательности $Q_1, Q_2, \ldots Q_e$, не превосходящих k, выполняется неравенство

$$\frac{N(k)}{k} \geqslant \alpha (k = 1, 2, \ldots n).$$

[2]) Известия НИИММ'а за 1937 г. стр. 192.

где $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots \overline{y}_{n-k_2}$ расположены в возрастающем порядке и образуют в интервале $(1,n)$ дополнительную к $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ последовательность, а суммирование распространено на все сочетания из n первых чисел натурального ряда по k_1.

Так как по смыслу порядок роста функции

$$f(x_1, x_2, \ldots x_k;\, y_1, y_2 \ldots y_{k_2} \,|\, n)$$

не может превосходить n, то из (14) видно, что порядок роста $f(x_1, x_2 \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2} \,|\, n)$ будет найден, если будет найдено достаточно хорошее ограничение сверху для следующей суммы

$$\sum_{r=1}^{n-k_2} C_{k_1}^{n-1-\overline{y}_r+r} =$$

$$= \frac{1}{k_1!} \sum_{r=1}^{n-k_2} \left\{(n-1-\overline{y}_r+r)(n-2-\overline{y}_r+r)\ldots(n-k_1-\overline{y}_r+r)\right\}. \qquad (15)$$

Относительно крайних множителей, входящих в фигурную скобку под знаком суммы (15), достаточно сделать следующие предположения:

$$a)\ n-1-\overline{y}_r+r<0 \quad \text{и} \quad n-k_1-\overline{y}_r+r<0;$$
$$b)\ n-1-\overline{y}_r+r>0 \quad \text{и} \quad n-k_1-\overline{y}_r+r<0;$$
$$c)\ n-1-\overline{y}_r+r>0 \quad \text{и} \quad n-k_1-\overline{y}_r+r>0.$$

Нетрудно видеть, что предположение (a) не может иметь места. Действительно, неравенство $n-1-\overline{y}_r+r<0$ в силу условия $\overline{y}_r \leqslant n$ не выполняется даже для $r=1$. Таким образом, предположение (a) отпадает.

Вследствие того, что каждый из множителей вида $n-i-\overline{y}_r+r$ $(i=1.2,\ldots k_1)$ является целым числом и так как два соседних множителя отличаются на единицу при любом r, то, при условии, что имеет место предположение (b), среди множителей, входящих в фигурную скобку, наверняка найдется множитель, равный нулю. Стало быть, если при каком-либо значении из интервала $1 \leqslant r \leqslant n-k_2$ выполняется предположение (b), то соответствующее слагаемое в сумме (15) будет равно нулю. Следовательно, величина суммы (15) определяется лишь теми значениями r из интервала $1 \leqslant r \leqslant n-k_2$, для которых выполняется предположение (c). Вследствие этого можем написать:

$$0 < \sum_{r=1}^{n-k_2} C_{k_1}^{n-1-\overline{y}_r+r} =$$

$$= \frac{1}{k_1!} \sum_{r=1}^{n-k_2}{}' \left\{(n-1-\overline{y}_r+r)(n-2-\overline{y}_r+r)\ldots(n-k_1-\overline{y}_r+r)\right\}, \qquad (16)$$

где символ Σ' означает, что r пробегает лишь те значения из интервала $1 \leqslant r \leqslant n-k_2$, которые удовлетворяют условию (c).

Из предположения, что последовательность $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, обладает в интервале $(1,n)$ плотностью α, следуют неравенства:

$$k_2 \geqslant \alpha n;$$

$$\overline{y}_r - r \geqslant \frac{\alpha r}{1-\alpha}. \tag{17}$$

Действительно, если $N(n)$ означает число членов последовательности $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, не превосходящих n, то согласно определению плотности имеем $\frac{N(n)}{n} \geqslant \alpha$. Но $N(n) = k_2$, стало быть $k_2 \geqslant \alpha n$. Точно также, если $N(\overline{y}_r)$ означает число членов последовательности $y_1, y_2 \ldots y_{k_2}$, не превосходящих $\overline{y}_r$, то имеем $\frac{N(\overline{y}_r)}{\overline{y}_r} \geqslant \alpha$. Но $N(\overline{y}_r) = \overline{y}_r - r$, стало быть $\overline{y}_r - r \geqslant \alpha\, \overline{y}_r$ или $\overline{y}_r \geqslant \frac{r}{1-\alpha}$. Вычитая из обеих частей последнего неравенства r, приходим к указанному неравенству.

На основании неравенств (17) имеем:

$$\sum_{r=1}^{n-k_2} C_{k_1}^{\,n-1-\overline{y}r+r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k_1!} \sum_{r=1}^{[n(1-\alpha)]} \left\{ \left(n-1-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right)\left(n-2-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right) \ldots \left(n-k_1-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right) \right\}. \tag{18}$$

Пусть $k_1 = [\beta n^s]$, где $0 < s < 1$, тогда при достаточно больших n имеет место неравенство:

$$n - k_1 - \frac{\alpha r}{1-\alpha} > 0 \tag{19}$$

при любом r из интервала $1 \leqslant r \leqslant n\,(1-\alpha)$.

Действительно, при указанном k_1 и достаточно большом n очевидно неравенство:

$$n(1-\alpha) - k_1 > 0.$$

Отсюда в силу $1 \leqslant r \leqslant n\,(1-\alpha)$ следует неравенство (19).

Вследствие (19) имеем:

$$\sum_{r=1}^{n-k_2} C_{k_1}^{n-1-\bar{y}_r+r} <$$

$$< \frac{1}{k_1!} \sum_{r=1}^{[n(1-\alpha)]} \left\{ \left(n-1-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right)\left(n-2-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right)\cdots\cdots\left(n-k_1-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right)\right\}, \qquad (20)$$

где r пробегает все целые числа интервала $(1, n(1-\alpha))$.

Выражение, стоящее под знаком суммы в правой части неравенства (20), может быть записано в виде следующего отношения гамма функций:

$$\frac{\Gamma\left(n-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(n-k_1-\frac{\alpha r}{1-\alpha}\right)}.$$

Если суммирование в правой части неравенства (20) заменить интегрированием в пределах от 0 до $n(1-\alpha)$, то оно примет следующий вид:

$$\sum_{r=1}^{n=k_2} C_{k_1}^{n-1-\bar{y}_r+r} < \frac{1-\alpha}{\alpha k_1!} \int\limits_{n(1-\alpha)}^{n} \frac{\Gamma(x)dx}{\Gamma(x-k_1)}. \qquad (21)$$

Заменяя сумму определенным интегралом, мы заменяем площадь ступенчатой фигуры площадью криволинейной трапеции. Из чертежа непосредственно видно, что площадь криволинейной трапеции больше площади ступенчатой фигуры.

Привлекая асимптотическое выражение для гамма функций, имеем следующее равенство:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha k_1!} \int\limits_{n(1-\alpha)}^{n} \frac{\Gamma(x)dx}{\Gamma(x-k_1)} =$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha k_1!} e^{-k_1} \left\{1+O\left(\frac{\gamma}{n}\right)\right\} \int\limits_{n(1-\alpha)}^{n} x^{k_1}\left(1-\frac{k_1}{x}\right)^{-x+k_1+\frac{1}{2}} dx. \qquad (22)$$

Вследствие того, что функция $\varphi(x)=\left(1-\frac{k_1}{x}\right)^{-x+k_1+\frac{1}{2}}$ возрастает в интервале $n(1-\alpha) \leqslant x \leqslant n$, имеет место неравенство:

$$\int\limits_{n(1-\alpha)}^{n} x^{k_1}\left(1-\frac{k_1}{x}\right)^{-x+k_1+\frac{1}{2}} dx < \left(1-\frac{k_1}{n}\right)^{-n+k_1+\frac{1}{2}} \frac{n^{k_1-1}}{k_1}. \qquad (23)$$

Стало быть

$$0 < \sum_{r=1}^{n-k_1} C_{k_1}^{n-1-\nu_r+r} <$$

$$< \frac{1-\alpha}{\alpha k_1!} e^{-k_1} \frac{n^{k_1+1}}{k_1} \left(1 - \frac{k_1}{n}\right)^{-n+k_1+\frac{1}{2}} \left\{1 + O\left(\frac{\gamma}{n}\right)\right\}. \tag{24}$$

Разделив обе части последнего неравенства на $C_{k_1}^n$ и оценив правую часть по формуле Стирлинга, находим:

$$0 < \frac{1}{C_{k_1}^n} \sum_{r=1}^{n-k_1} C_{k_1}^{n-1-\nu_r} \leqslant \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{n}{k_1} - 1\right)\left\{1 + O\left(\frac{\gamma}{n}\right)\right\} e^{O\left\{\frac{k_1}{n(n-k_1)}\right\}}. \tag{25}$$

Если под $M_3(f)$ понимать среднее значение функции

$$f(x_1, x_2 \ldots x_{k_1};\ y_1, y_2, \ldots y_{k_2} \mid n),$$

тогда, согласно предыдущему, из (14) следует:

$$n \geqslant M_3(f) \geqslant n - O(\delta n^{1-s}). \tag{26}$$

Отсюда получаем асимптотическое равенство:

$$M_3(f) = n + O(\varepsilon n^{1-s}). \tag{27}$$

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. КОМПЛЕКС ПРЯМЫХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПОЛЕМ

Л. Ермолаев (Москва)

В приложениях теории векторных полей играют большую роль инварианты афинора, составленного из производных вектора поля, взятым по координатам точки приложения; главным образом, его первый скалярный инвариант—дивергенция, и векторный инвариант—ротор. Задачей настоящей статьи является исследование геометрических свойств афинора, которые, как оказалось, хорошо связаны со свойствами комплекса прямых линий, проведенных через вектора поля. Здесь мной отмечены, главным образом, те свойства комплекса, которые связаны с афинором из производных первого порядка. Более тонкие свойства комплекса, которые были получены, например, Наак в „Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe“ [1]) связаны с афинорами из производных высшего порядка и имеют поэтому, при отсутствии нормирования векторов поля, громоздкий вид, хотя получение их не составляет больших затруднений. Статья разбита на три параграфа.

В первом §-е установлено преобразование, перемещающее вектора поля по прямым комплекса. Установлены признаки полей, определяющих специальный комплекс, и полей, вектора которых имеют точки приложения в центрах лучей комплекса.

Во втором параграфе установлен способ разбиения комплекса на семейство конгруэнций и найдено условие, при котором конгруэнции семейства являются нормальными. Найдено условие того, что поле, определяющее комплекс, приложено в фокальных точках семейства изотропных конгруэнций.

В третьем параграфе исследуются семейства векторных полей, зависящих от одного параметра. В общем случае такое семейство векторных полей координирует совокупность всех прямых пространства; здесь найдены условия, при которых многообразие прямых, определяемых семейством векторных полей, вырождается.

Прямые, лежащие в плоскостях некоторого поля бивекторов и проходящие через соответствующие точки приложения, образуют многообразие ∞^4. Здесь найдено условие вырождения это-

---

[1]) Mathem. Zeischrift B. 40, H 4, 5, 6; B. 41 H. 2.

го многообразия и условие того, что это многообразие образует линейный комплекс.

Найдены условия, которым должно удовлетворять семейство бивекторов, плоскости которых огибают конусы комплекса.

Установлена связь с теорией криволинейных комплексов.

Обозначения

Умножение на скаляр и неопределенное произведение двух векторов обозначается поставленными рядом буквами, обозначающими множители.

Скалярное умножение векторов и афиноров обозначается точкой, поставленной между множителями.

Внешнее умножение векторов обозначается прямыми скобками, в которые заключаются множители, причем множители могут быть отделены запятой.

Смешанное произведение трех векторов обозначается простыми скобками, заключающими сомножители, которые могут быть при этом отделены запятыми. Скалярные величины обозначаются буквами латинского алфавита, векторные величины—строчными буквами греческого алфавита, а афиноры—заглавными буквами греческого алфавита.

§ 1. Перенесение векторов поля вдоль лучей комплекса

1. Пусть в каждой точке некоторой области пространства приложен вектор; совокупность этих векторов образует многообразие ∞^3, которое называется векторным полем и которое мы будем изображать вектор-функцией, выражающей зависимость поля векторов от радиус-вектора точки приложения:

$$\lambda = \lambda\ (\xi) \tag{1}$$

Если выбрать некоторое направление перемещения $d\xi$ точки приложения, то соответствующее изменение $d\lambda$ вектора поля представится диференциалом:

$$d\lambda = \Sigma \frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\, d\xi^i,$$

который можно изобразить, как скалярное произведение афинора

$$\Phi = \Sigma \frac{\partial\lambda}{\partial\xi^i}\, \varepsilon^i, \tag{2}$$

где ε^i направляющие вектора осей координат, на вектор $d\xi$:

$$d\lambda = \Phi\ d\xi. \tag{3}$$

2. Перенесем каждый вектор поля λ вдоль по его направлению, тогда получится новое поле μ, вектора которого равны соответственным векторам поля λ:

$$\mu = \lambda\ (\xi), \tag{4}$$

а точки приложения определяются радиус-вектором:

$$\eta = \xi - r\lambda(\xi). \tag{5}$$

Таким образом, уравнение нового поля можно рассматривать, как преобразование вектор-функции (1) к новому переменному η по формулам (5), если только в результате указанного переноса векторов поля, получается действительно поле. Исключением является случай, когда все перенесенные вектора приложены к точкам одной поверхности; в этом случае все значения диференциала

$$d\eta = d\xi - r\,\Phi . d\xi - \lambda . dr \tag{6}$$

должны быть компланарны, т. е. афинор

$$\mathrm{I} - r\mathrm{X} - \lambda \Sigma \frac{dr}{d\xi^i} \varepsilon^i\ , \tag{7}$$

где I — единичный афинор, должен вырождаться.

Если определитель афинора (7) не равен нулю тождественно, то при каждом данном ξ он может обращаться в нуль при некоторых значениях r; если, в частности, r не зависит от ξ, то определитель имеет третью степень относительно r. Следовательно, при постоянном r существуют три точки вдоль луча (5), в которых преобразование вырождается и элементарный объем, описанный радиус—вектором ξ, преобразуется в площадку, описанную соответствующими значениями η.

3. Если через каждую точку пространства провести прямую в направлении вектора λ, приложенного в этой точке, то либо полученное многообразие прямых образует ∞^3, либо это многообразие вырождается в ∞^2; в первом случае многообразие прямых называется комплексом, а во втором—конгруэнцией. Поставим вопрос, в каком случае все прямые многообразия касаются одной поверхности; в случае многообразия ∞^3 это будет случай специального комплекса, образованного касательными к одной поверхности.

Пусть точка η из (5) есть та точка луча, определенного вектором λ, которая является точкой касания луча с поверхностью. В этом случае все вектора $d\eta$ должны лежать в одной плоскости и эта плоскость должна проходить через λ. Представим равенство (6) в виде:

$$d\eta + \lambda\, dr = (I - r\Phi) . d\xi;$$

тогда видим, что 1) должно существовать такое r, что афинор

$$I - r\Phi \tag{8}$$

вырождается и 2) плоскость вырождения проходит через λ.

Легко видеть, что для любого данного афинора Φ может быть найдено такое r, что афинор (8) будет вырождаться и плоскостью вырождения является обязательно инвариантная плоскость афинора Ф. Таким образом, **комплекс, определенный векторным полем, будет специальным в том и только в том случае, если инвариантная плоскость афинора Ф проходит через λ.**

Если два вектора, лежащие в некоторой плоскости, преобразуются умножением на афинор в вектора, лежащие в той же плоскости, то плоскость, определенная этими векторами, является инвариантной плоскостью. Вектор λ лежит в инвариантной плоскости, следовательно, его преобразование $\Phi.\lambda$ тоже лежит в инвариантной плоскости. Отсюда вытекает аналитическая запись необходимого и достаточного условия того, что комплекс является специальным: исключая случай коллинеарности λ и $\Phi.\lambda$[1]) мы видим, **что вектора λ, $\Phi.\lambda$ и $\Phi^2.\lambda$ должны быть коллинеарны**

$$(\lambda,\ \Phi.\lambda,\ \Phi^2.\lambda)=0. \tag{9}$$

Обозначив

$$\nu=[\lambda,\ \Phi.\lambda] \tag{10}$$

мы имеем, благодаря вырождению афинора (8), равенство:

$$\nu=r\nu.\Phi. \tag{11}$$

Если, в частности, плоскость $(\lambda,\ \Phi.\lambda)$ является плоскостью вырождения афинора Ф, то r приобретает бесконечно большое значение.

4. Рассмотрим функцию

$$\mu(\eta, r)=\lambda(\xi), \tag{12}$$

где ξ выражено через r и η из равенства

$$\eta=\xi-r\lambda(\xi) \tag{15}$$

и r является параметром. Эта функция четырех переменных может быть иначе определена в неявной форме равенством:

$$\mu=\lambda(\eta+r\mu). \tag{13}$$

При каждом значении параметра r указанная функция представляет собой уравнение поля, вектора которого получены из векторов поля λ перемещением вдоль по линиям комплекса. Таким образом, уравнения (12) или (13) являются уравнениями некоторого семейства векторных полей, определяющих один и тот же комплекс прямых линий.

5. Если рассмотреть точку, определенную радиус—вектором η, то вектора семейства полей, приложенные в этой точке, зависят от одного параметра, следовательно, вообще говоря,

---

[1]) см. ниже § 5.

определяют конус, называемый **конусом комплекса**. Зафиксируем некоторое значение η, тогда с изменением параметра r точка ξ опишет кривую, определенную из (5), и разложим в этом предположении функцию (12) по степеням параметра r:

$$\mu = \lambda(\eta) + r\left[\frac{d\mu}{dr}\right]_{r=0} + \frac{r^2}{2}\left[\frac{d^2\mu}{dr^2}\right]_{r=0} + \ldots$$

При нахождении производных пользуемся равенством (13):

$$\frac{d\mu}{dr} = \sum_i \frac{\partial\lambda(\eta + r\mu)}{\partial\xi^i}\lambda^i(\eta + r\mu) + r\sum_i \frac{\partial\lambda(\eta + r\mu)}{\partial\xi^i}\frac{d\mu^i}{dr},$$

$$\frac{d^2\mu}{dr^2} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2\lambda(\eta + r\mu)}{\partial\xi^i\,\partial\xi^k}\lambda^i(\eta + r\mu)\,\lambda^k(\eta + r\mu) +$$

$$+ \sum_{i,k} \frac{\partial\lambda(\eta + r\mu)}{\partial\xi^i}\frac{\partial\lambda^i(\eta + r\mu)}{\partial\xi^k}\lambda^k(\eta + r\mu) + \sum_i \frac{\partial\lambda(\eta + r\eta)}{\partial\xi^i}\frac{\partial\mu^i}{\partial r} + r\left\{\ldots\right\}$$

Вводя обозначение:

$$\Phi'' = \sum_{i,k} \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi^i\,\partial\xi^k}\varepsilon^i\varepsilon^k, \tag{14}$$

найдем:

$$\mu = \lambda(\eta) + r\Phi.\lambda + \frac{r^2}{2}(\Phi''.\lambda.\lambda + 2\Phi^2.\lambda) + \ldots \tag{15}$$

Из этой формулы следует, что векторы λ и $\Phi.\lambda$ определяют плоскость, касательную к конусу комплекса.

Вектор $\Phi.\lambda$ может быть коллинеарен вектору λ:

$$\Phi.\lambda = k\lambda. \tag{16}$$

Если это условие коллинеарности соблюдается тождественно во всех точках пространства, то все конусы комплекса вырождаются в прямые линии и комплекс вырождается в конгруэнцию.

Необходимым и достаточным условием того, что прямые, проходящие через вектора поля образуют конгруэнцию, является коллинеарность векторов λ и $\Phi.\lambda$.

6. Продиференцируем равенство (13) по η^i.

$$\frac{d\mu}{d\eta^i} = \frac{d\lambda}{d\xi^i} + r\sum_k \frac{\partial\lambda}{\partial\xi^k}\frac{\partial\mu}{\partial\eta^i}$$

и, умножив на координаты α^i произвольного вектора α, просуммируем по i, обозначив Ψ афинор, составленный из произвольных $\frac{d\mu^k}{d\eta^i}$, найдем:

$$\Psi.\alpha = \Phi.\alpha + r\Phi.\Psi.\alpha. \tag{17}$$

Это равенство является системой трех уравнений с тремя неизвестными координатами вектора $\Psi.\alpha$, причем в коэффициенты при неизвестных линейно входит параметр r; отсюда следует, что $\Psi.\alpha$ есть рациональная функция параметра r вида:

$$\Psi.\alpha = \frac{\varphi_0 + r\varphi_1 + r^2\varphi_2}{\Delta(r)}, \tag{18}$$

где $\Delta(r)$—определитель диады $I—r\Phi$, а φ_0, φ_1, и φ_2—три вектора, подлежащих определению. Определитель $\Delta(r)$ может быть выражен через инварианты Φ_I, Φ_{II} и Φ_{III} диады Φ:

$$\Delta(r) = 1 - \Phi_I r + \Phi_{II} r^2 - \Phi_{III} r^3; \tag{19}$$

подставляя (18) в (17) и сравнивая коэффициенты при r, найдем:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \Phi.\alpha \\ \varphi_1 &= \Phi^2.\alpha - \Phi_I\Phi.\alpha \\ \varphi_2 &= \Phi_{III}\alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

7. Касательная плоскость к конусу комплекса определяется аксиальным вектором:

$$[\lambda, \Psi.\lambda] = \frac{[\lambda, \Phi.\lambda] + r[\lambda, \Phi^2.\lambda - \Phi_I\Phi.\lambda]}{\Delta(r)}. \tag{21}$$

Из этого выражения видно, что при неограниченном увеличении r предельное направление касательной плоскости определяется вектором:

$$[\lambda, \Phi^2.\lambda - \Phi_I\Phi.\lambda],$$

плоскость которого касается цилиндра комплекса, проходящего через рассматриваемый луч комплекса.

Центром луча комплекса мы назовем ту точку, в которой касательная плоскость к конусу комплекса перпендикулярна к этой плоскости. *Векторное поле, определяющее комплекс, отнесено к центрам лучей комплекса, если*

$$[\lambda, \Phi.\lambda].[\lambda, \Phi.\lambda - \Phi_I\Phi.\lambda] = 0. \tag{22}$$

Если для комплекса не выполняется тождественно равенство (9), то оно определяет конгруэнцию специальных лучей комплекса, вдоль которых все конусы имеют общую касательную плоскость.

8. Приведенные выше формулы позволяют находить векторные поля, которые определяют различного вида комплексы. Так,

например, условие того, что поле определяет специальный комплекс лучей, пересекающих одну линию, найдется, если потребовать, чтобы определитель афинора (7), где r определено из (11), имел ранг, равный единице. Все центры комплекса, определенного полем $\lambda(\xi)$, будут находиться на одной поверхности, если определитель того же афинора (7) будет равен нулю при r, найденном из уравнения

$$[\lambda, \Psi.\lambda].[\lambda, \Phi^2.\lambda - \Phi_I \Phi.\lambda] = 0.$$

§ 2. Поля, определяющие комплекс, разложенный на семейство конгруэнций.

9. Пусть комплекс прямых определен векторным полем $\lambda(\xi)$. Чтобы выделить из лучей комплекса некоторую конгруэнцию, достаточно задать уравнение поверхности

$$f(\xi) = 0,$$

на которой должны лежать точки приложения векторов, определяющих конгруэнцию. Уравнение семейства поверхностей:

$$f(\xi) = c \tag{23}$$

разбивает данный комплекс на семейство конгруэнций, и, чтобы знать уравнение семейства (23), достаточно знать векторное поле

$$\varphi(\xi) = \nabla f(\xi)$$

с симметрической диадой производных. Таким образом, разбиение комплекса на семейство конгруэнций определяется заданием потенциального поля.

Если, в частности, само поле $\lambda(\xi)$ является потенциальным или может быть сделано потенциальным изменением модуля, то его нормальные поверхности определяют разбиение комплекса на нормальные конгруэнции.

10. Для того, чтобы перейти от данного луча конгруэнции, заданной уравнением (23), к смежному лучу, достаточно передвигать точку M приложения вектора λ по поверхности (23); в этом случае радиус-вектор ξ удовлетворяет условию:

$$\varphi . d\xi = 0. \tag{25}$$

Обозначим:

$$\eta = \xi - r\lambda,$$

где r зависит от ξ, фокус конгруэнции. Тогда $d\eta$ коллинеарно λ и мы имеем:

$$d\xi - r d\lambda = k\lambda,$$

откуда, в силу (3), аналогично, как и в (18), имеем:

$$d\xi = k\,\frac{\lambda + r(\Phi.\lambda - \Phi_I.\lambda) + r^2(\Phi^2.\lambda - \Phi_I\Phi.\lambda + \Phi_{II}\lambda)}{\Delta(r)}$$

и, подставляя в (25):

$$\varphi.\lambda + r(\varphi.\Phi.\lambda - \Phi_I\varphi.\lambda) + r^2(\varphi.\Phi^2.\lambda - \Phi_I.\varphi.\Phi.\lambda + \Phi_{II}\varphi.\lambda) = 0, \qquad (26)$$

получаем квадратное уравнение, определяющее положение фокусов конгруэнции.

11. Равенство:

$$\varphi.\lambda = 0 \qquad (27)$$

является условием того, что вектора поля λ приложены в фокальных точках конгруэнций семейства φ. Потребуем, чтобы вектора поля были приложены в фокальных точках лучей параболических конгруэнций. В этом случае уравнение (26) имеет двойной корень, равный нулю:

$$\varphi.\Phi.\lambda = 0, \qquad (28)$$

но уравнения (27) и (28) составляют полную систему только в том случае, если:

$$(\lambda, \Phi.\lambda, \Phi''\lambda.\lambda) = 0, \qquad (29)$$

так как

$$(\nabla(\Phi.\lambda)).\lambda - (\nabla\lambda).(\Phi.\lambda) = \Phi''.\lambda.\lambda + \Phi^2.\lambda - \Phi^2.\lambda.$$

Таким образом, равенство (29) является необходимым и достаточным условием того, что вектора λ приложены в фокальных точках лучей семейства параболических конгруэнций, на которые разложен комплекс прямых.

В этом случае нормали ν (10) коллинеарны соответствующим векторам поля φ и, следовательно, образуют поле, приводимое изменением модуля к потенциальному полю.

12. Определим положение общего перпендикуляра двух смежных лучей комплекса: луча, проходящего через точку ξ в направлении вектора λ, и луча, проходящего через точку $\xi + d\xi$ в направлении луча $\lambda + d\lambda$. Пусть точка пересечения этого перпендикуляра с первым лучем определяется радиус-вектором

$$\eta = \xi - r\lambda; \qquad (5)$$

тогда эта точка лежит в плоскости, проходящей через точку $\xi + d\xi$ в направлении, определяемом векторами $\lambda + d\lambda$ и $[\lambda, d\lambda]$,

$$\eta = \xi - r\lambda = \xi + d\xi + a(\lambda + d\lambda) + b[\lambda d\lambda],$$

где a и b—некоторые коэфициенты. Отсюда имеем:

$$r = -\frac{d\xi.[[d\lambda],\lambda]}{\lambda.[[\lambda d\lambda],d\lambda]},$$

или, после простого преобразования, в силу (3):

$$r = \frac{[\lambda, \Phi.\lambda] . [\lambda . d\xi]}{[\lambda, \Phi.\lambda]^2}. \tag{30}$$

Если общий перпендикуляр смежных лучей комплекса пересекает луч λ в точке M приложения вектора λ, то числитель дроби (30) равен нулю. Рассмотрим картину проекций всех направлений $d\xi$ на плоскость, перпендикулярную к λ. Назовем те лучи комплекса, бесконечно близкие к исходному лучу, которые имеют общий перпендикуляр с исходным в точке M, лучами комплекса, ближайшими к точке M. Проекции тех элементарных перемещений $d\xi$, которые ведут к векторам поля, определяющим лучи, ближайшие к точке M, перпендикулярны к проекциям их преобразований $\Phi.d\xi$.

13. Все такие направления $d\xi$ определяются равенством:

$$[\lambda, \Phi.d\xi] . [\lambda, d\xi] = 0, \tag{31}$$

которое может быть переписано в виде:

$$d\xi . \{\lambda^2 \Phi - (\lambda.\Phi)\lambda\} . d\xi = 0; \tag{32}$$

они образуют конус второго порядка. Этот конус действительный, так как он имеет две действительные образующие: λ и $\Phi^{-1}.\lambda$.

Пусть комплекс разбит на семейство изотропных конгруэнций и вектора поля λ приложены в центрах лучей изотропных конгруэнций. Тогда все лучи, ближайшие к точке M, должны принадлежать одной конгруэнции и их центры должны лежать в одной центральной поверхности. Элементарные перемещения $d\xi$, которые ведут к точкам приложения векторов, определяющих прямые комплекса, ближайшие к точке M, должны удовлетворять равенству:

$$\varphi . d\xi = 0, \tag{25}$$

т. е. все $d\xi$ должны лежать в одной плоскости, и, следовательно, конус (32) должен распадаться на пару плоскостей. Одна плоскость этой пары проходит через λ, другая через Φ^{-1}; очевидно, что плоскость (25) должна совпадать со второй из этих плоскостей. Для того, чтобы поле определило таким образом семейство изотропных конгруэнций, необходимо еще, чтобы поле векторов, нормальных к семейству этих плоскостей, могло быть изменением модулей приведено к потенциальному полю φ.

Сравнивая (31) с (22) видим, что для соленоидального поля (всякое поле можно сделать соленоидальным, изменяя модуль) совпадение вектора $\Phi.\lambda$ с одной из образующих конуса (32) является отличительным признаком того, что вектор λ приложен в центре луча комплекса.

§ 3. Семейства векторных полей.

14. Пусть дано семейство векторных полей:

$$\mu = \mu(\eta, t), \tag{33}$$

где t является параметром. В общем случае это семейство определяет многообразие четвертого измерения прямых, проходящих через точку, определенную радиус-вектором η, в направлении, определенном вектором μ, т. е. координирует совокупность всех прямых пространства. Найдем условия, которым должна удовлетворять функция (33), определяющая многообразие прямых ∞^3, для этого рассмотрим комплекс прямых, определенных векторным полем $\lambda(\xi)$, и потребуем, чтобы все вектора семейства (33), приложенные в точках прямой, проходящей через вектор λ, поля $\lambda(\xi)$, были коллинеарны вектору λ. Таким образом,

$$k\mu(\eta, t) = \lambda(\xi) \tag{34}$$

при условии:

$$\eta = \xi - r\mu,$$

где k и r некоторые функции от точки η и параметра t. Дифеоенцируем тождество (34) по параметру t, тогда получим:

$$\frac{\partial k}{\partial t}\mu + k\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t}\sum \frac{\partial \mu}{\partial \eta^i}\mu^i = 0,$$

откуда видим, что три вектора μ, $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ и $\Psi.\mu$ должны быть компланарны:

$$\left(\mu, \frac{\partial \mu}{\partial t}, \Psi.\mu\right) = 0. \tag{35}$$

Докажем, что условие (35) является в то же время достаточным.

Пусть, в самом деле, эти три вектора связаны соотношением:

$$\Psi.\mu + A\frac{\partial \mu}{\partial t} = B\mu,$$

где A и B—функции от η и t. Вводя параметр k, получим диференциальные уравнения характеристик:

$$\frac{d\eta^i}{\mu^i} = \frac{dt}{A} = \frac{d\mu^i}{B\mu^i} = -\frac{dk}{Bk},$$

откуда находим, во-первых:

$$k\mu = \text{const};$$

вводя обозначение:

$$-d\,\frac{r}{k}=\frac{d\eta^i}{k\mu^i},$$

найдем:

$$\eta+r\mu=\text{const}.$$

Наконец, оставшиеся уравнения:

$$-d\,\frac{r}{k}=-\frac{dk}{Bk}=\frac{dt}{A}$$

определяют некоторую зависимость r и k от t. Таким образом, обозначив $\lambda(\xi)$ произвольную вектор-функцию, получаем общий интеграл в виде:

$$\lambda(\eta+r\mu)=k\mu.$$

Условие (35) является необходимым и достаточным для того, чтобы семейство полей (33) определяло комплекс прямых линий.

15. Функция (33) определяет в каждой точке пространства семейство векторов, образующих конус. Также конус может быть определен семейством аксиальных векторов $\nu(\eta,t)$, плоскости которых огибают конус.

Особое место занимает тот случай, когда в частном случае функция не зависит от параметра t, определяя таким образом, в каждой точке плоскость, в которой должны лежать все прямые комплекса, проходящие через точку приложения вектора ν.

Пусть l есть прямая, проходящая через точку приложения вектора ν, в направлении вектора μ:

$$\mu=[\rho\nu],\tag{36}$$

где ρ — некоторый вектор.

При перемещении точки приложения вдоль l аксиальный вектор ν может только вращаться, так, что l остается в плоскости вектора. Вектор-функция ν будет при этом перемещении зависеть от одного параметра r:

$$\nu(\eta+r\mu);$$

производная по r от этого вектора должна иметь плоскость, параллельную вектору μ:

$$\mu.\sum\frac{\partial\nu}{\partial\eta^i}\,\mu^i=0.\tag{37}$$

Это равенство должно быть удовлетворено тождественно при любом ρ. Так как левая часть этого уравнения второй степени относительно ρ, то оно равносильно равенству нулю шести коэффициентов, что дает три независимых уравнения:

$$\nu^3\nu^3\,\frac{\partial\nu^2}{\partial\eta^2}+\nu^2\nu^2\,\frac{\partial\nu^3}{\partial\eta^3}=\nu^2\nu^3\left(\frac{\partial\nu^3}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\nu^2}{\partial\eta^3}\right),\tag{38}$$

. . . .

где второе и третье уравнения системы получаются из первого круговой перестановкой индексов.

16. Решения системы:

$$\frac{\partial \nu^1}{\partial \eta^1} = \frac{\partial \nu^2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \nu^3}{\partial \eta^3} = \frac{\partial \nu^3}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \nu^2}{\partial \eta^3} = \frac{\partial \nu^1}{\partial \eta^3} + \frac{\partial \nu^3}{\partial \eta^1} =$$

$$= \frac{\partial \nu^2}{\partial \eta^1} + \frac{\partial \nu^1}{\partial \eta^2} = 0 \tag{39}$$

являются одновременно решениями системы (38). Условия интегрируемости системы (39) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \nu^1}{\partial \eta^2 \partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \nu^1}{\partial \eta^3 \partial \eta^3} = \ldots = 0,$$

откуда получаем общее решение этой системы в виде:

$$\nu = [\alpha\eta] + \beta, \tag{40}$$

где α и β — произвольные постоянные вектора.

Это поле определяет линейный комплекс, так как плюккеровы координаты прямых, определенных этим полем, $\mu^1, \mu^2, \mu^3, \mu^3\eta^2 - \mu^2\eta^3, \mu^1\eta^3 - \mu^3\eta^3, \mu^2\eta^1 - \mu^1\eta^2$, связаны линейным соотношением:

$$\{[\alpha\eta] + \beta\}.\mu = 0. \tag{41}$$

Итак, поле аксиальных векторов определяет совокупность пучков линейного комплекса в том и только в том случае, когда афинор, составленный из его производных:

$$\Xi = \Sigma \frac{\partial \nu}{\partial \eta^i} \varepsilon^i,$$

антисимметричен или может быть приведен к антисимметричному изменением модулей.

17. Пусть комплекс прямых определяется семейством полей аксиальных векторов

$$\nu = \nu(\eta, t), \tag{42}$$

плоскости которых при каждом данном значении радиус-вектора точки приложения η огибают конус. Найдем условия, которые должны быть наложены на функцию (42), для того, чтобы многообразие образующих этих конусов было ∞^3.

Поле векторов, направленных вдоль по лучам комплекса, получится из поля (42) равенством:

$$\mu = \left[\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} \right]; \tag{43}$$

Это поле должно удовлетворять условию (35). Вычисляя векторное произведение вектора μ на его производную и умножая потом скалярно на $\Psi.\mu$, найдем:

$$\left(\nu\, \frac{\partial \nu}{\partial t}\, \frac{\partial^2 \nu}{\partial^2 \nu}\right)(\nu.\Psi.\mu) = 0.$$

Первый множитель не может равняться нулю, так как в этом случае образующие каждого конуса комплекса лежали бы в одной плоскости—это случай, который мы здесь исключаем. Вычисляя выражение $\Psi.\mu$, имеем:

$$\Psi.\mu = \sum \frac{\partial \mu}{\partial \eta^i}\, \mu^i = \left[\, \Xi.\mu, \frac{\partial \nu}{\partial t}\right] + \left[\nu, \frac{\partial \Xi}{\partial t}.\mu\right],$$

и, умножая его скалярно на ν, имеем:

$$\left[\nu, \frac{\partial \nu}{\partial t}\right].\Xi.\left[\nu, \frac{\partial \nu}{\partial t}\right] = 0, \tag{45}$$

что и является условием того, чтобы многообразие прямых, определяемое полем (42), вырождалось.

Вычислим теперь, обратно, поле нормалей ν, определяемое полем (43). Перемножая векторно (43) и (44), найдем:

$$\left[\mu, \Psi.\mu\right] = \left(\left[\nu, \frac{\partial \nu}{\partial t}\right].\frac{\partial \Xi}{\partial t}.\left[\nu, \frac{\partial \nu}{\partial t}\right]\right)\nu; \tag{46}$$

для того, чтобы комплекс существовал и не вырождался бы, необходимо, чтобы коэфицент при ν в правой части этого равенства был отличен от нуля. Это есть второе условие, налагаемое на поле (42), для того, чтобы оно определяло комплекс.

Построим в каждой точке приложения векторов семейства полей (42) нормали к плоскостям векторов; уравнение (45) позволяет ответить в положительном смысле на вопрос о существовании комплексов, у которых указанное многообразие образует комплекс прямых, в этом случае поле (42) должно одновременно удовлетворять уравнениям (45) и (35).

18. Уравнение комплекса кривых линий может быть представлено в форме

$$\eta = \varphi(\xi, t), \tag{47}$$

где радиус-вектор η при каждом определенном значении радиус-вектора ξ, описывает одну из кривых комплекса.

Диференцируя это выражение по параметру t, получим при каждом значении t поле векторов, приложенных в точках η и направленных по касательным к кривым комплекса. По исключении ξ из (47) и ее производной, это поле может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mu(\eta, t). \tag{48}$$

Это поле можно назвать „элементом" криволинейного комплекса; оно определяет комплекс прямых, касательных к кривым комплекса. При переменном t уравнение (48) изображает семейство векторных полей, каждый вектор которого касается одной из кривых семейства.

Каждое из установленных выше условий, наложенных на векторные поля: (9), (22), (29) и другие, характеризуют свойства тех или иных элементов комплексов кривых линий. Каждое из этих условий может соблюдаться для некоторого семейства элементов комплекса (48); этим устанавливается, что, вообще говоря, каждый комплекс кривых линий имеет семейство элементов, обладающих одним из указанных свойств.

О ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЯХ

А. Н. Селиванов (Москва).

1°.—Известно, что произведение двух производных функций может и не быть производной.[1]) Простым примером этого факта является функция, равная нулю при $x=0$ и равная $\sin\frac{1}{x}$ для значений x, отличных от нуля. Эта функция есть производная (и при том даже ограниченная), в то время как ее квадрат уже не есть производная[2]).

Целью нашей заметки является доказательство одной простой теоремы, позволяющей утверждать, что при соблюдении некоторых условий, произведение двух производных есть также производная.

2°.—Мы имеем в виду следующую теорему:

I.—Произведение ограниченной производной на непрерывную функцию всегда есть производная.

В самом деле, пусть $f'(x)$—ограниченная производная и пусть во всех точках рассматриваемого интервала имеет место неравенство $|f'(x)|<M$. Обозначим через $\varphi(x)$ непрерывную, на этом же интервале, функцию. Очевидно, что существует последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$, имеющих непрерывные производные, равномерно сходящаяся к функции $\varphi(x)$. В качестве функций $\varphi_n(x)$ можно, например, взять полиномы классической теоремы Weierstrass'a. Функции $f'(x)\varphi_n(x)$ суть, очевидно, производные, так как мы имеем: $f'\varphi_n=(f\varphi_n)'-f\varphi_n'$. Далее, неравенство

$$|f'(x)\varphi(x)-f'(x)\varphi_n(x)|<M|\varphi(x)-\varphi_n(x)|$$

показывает, что последовательность производных $f'\varphi_n$ равномерно сходится к $f'\varphi$, откуда и заключаем, по известной теореме[3]), что $f'\varphi$ есть производная.

3°.—Из доказанной теоремы непосредственно следует, что

II.—Произведение любой производной на функцию, имеющую ограниченную производную, всегда есть производная.

---

[1])—Мы рассматриваем только всюду конечные точные производные.

[2])—В. В. Степанов сообщил мне, что это свойство рассматриваемой функции было еще известно Ю. Гольдовскому.

[3])—Равномерно сходящаяся последовательность производных всегда сходится к производной. См. Лебег.—Интегрирование и отыскание примитивных функций, стр. 81--82.

Это следует из равенства $f'\varphi = (f\varphi)' - f\varphi'$, если заметить, что $f\varphi'$ есть производная на основании теоремы I.

По поводу теоремы I можно еще заметить, что произведение неограниченной производной на непрерывную функцию может уже не быть производной. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, рассмотреть функции $F(x)$ и $\Phi(x)$, равные нулю при $x=0$ и определенные равенствами $F(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ и $\Phi(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при x отличном от нуля.

Note sur les fonctions dérivées

N. A. Sélivanoff. (*Moscou*).

1.—On sait que le produit de deux fonctions dérivées[1]) peut, en général, ne pas être une fonction dérivée. Un exemple simple est fourni par la fonction nulle pour $x=0$ et égale à $\sin \frac{1}{x}$ pour x différent de zéro. Celte fonction est bien une fonction dérivée (et même bornée), tandis que son carré ne l'est plus[2]).

Le but de cette note est de signaler un théorème fort simple permettant d'affirmer que, certaines conditions étant remplies, le produit de deux fonctions dérivées est lut lui-même une fonction dérivée.

2.—Il s'agit du théorème suivant:

I.—Le produit d'une fonction dérivée bornée par une fonction continue quelconque est toujours une fonction dérivée.

En effet, soit f' une fonction dérivée, que nous supposons être bornée; soit $|f'| < M$ pour tous les points de l'intervalle considéré. Soit φ une fonction continue dans ce même intervalle. Il est évident qu'il existe une suite de fonctions φ_n uniformement convergente vers φ, les fonctions φ_n étant assujetties à cette condition qu'elles aient des dérivées continues. On peut, par exemple, prendre pour les φ_n les polynômes du théorème classique de Weierstrass Alors les fonctions $f'\varphi_n$ sont évidemment des fonctions dérivées [puisque nous avons: $f'\varphi_n = (f\varphi_n)' - f\varphi'_n$] et l'inégalité évidente

$$|f'\varphi - f'\varphi_n| < M|\varphi - \varphi_n|$$

---

1)—Nous ne considérons, dans cette note, que les fonctions dérivées exactes partout finies.

2)—M. W. Stepanoff m'a communiqué verbalement, que cette propriété de la fonction envisagée à été reconnue depuis longtemps par G. Goldowsky.

prouve que les fonctions dérivées $f'\varphi_n$ tendent uniformement vers $f'\varphi$, donc, en vertu d'un théorème de M. Henri Lebesgue [3]), $f'\varphi$ est une fonction dérivée.

D'autre part ón voit facilement qu'il existe des fonctions non dérivées, bien qu'elles soient produits d'une fonction dérivée non bornée par une fonction continue. Telles sont, par exemple, les deux fonctions F et Φ, nulles pour $x=0$ et definies par les égalités $F=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ et $\Phi=x\sin\frac{1}{x}$ pour $x\neq 0$.

3.—On déduit immédiatement du théorème démontré la proposition suivante:

II.—Le produit d'une fonction dérivée quelconque par une fonction à dérivée bornèe est toujours une fonction dérivée.

En effet, nous avons $f'\varphi=(f\varphi)'-f\varphi'$ et la fonction $f\varphi'$ est une fonction dérivée en vertu du théorème I.

---

[3]) H. Lebesgue.—Lecons sut l'intègration. Deuxième èdition. Pages 92—93.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕ-АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ОТ ОСНОВНОЙ ФУНКЦИИ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Романов Н. П. (Томск)

В моей предыдущей работе: „Определение среднего квадратичного основной функции аддитивной теории чисел", помещенной в первом выпуске т. II „Известий НИИММ'а при Томском Государственном Университете имени Куйбышева", а также в работе „Об аддитивных свойствах общих числовых последовательностей" (III выпуск 1-го тома „Известий НИИММ'а" определено значение:

$$\mathfrak{M}_p(f,n)=\sqrt[p]{\frac{1}{C^n_{k_1}C^n_{k_2}}\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots y_{k_1}\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant y_1<y_2<\ldots y_{k_2}\leqslant n} f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y|n)^p}$$

при $p=1$ и при $p=2$. Здесь $f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1},\ y_1,\ y_2,\ldots y_{k_2}|n)$ означает основную функцию аддитивной теории чисел, определяемую как число чисел интервала $1, 2,\ldots n$, совпадающих или, по крайней мере, с одним из x-ов, или, по крайней мере, с одним из y-ов, или по крайней мере, с одной из сумм x_i+y_j. Здесь так же, как и предыдущих работах, C^n_k означает коэффициент при u^k в разложении $(1+u)^n$ по степеням, поэтому $C^n_{k_1}C^n_{k_2}$ равно числу членов в двойной сумме, стоящей под знаком корня в выражении $\mathfrak{M}_p(f,n)$. Целью настоящей работы является определение среднего кубического значения основной функции f, т. е. определение $\mathfrak{M}_3(f,n)$ или, что тоже самое, определение двойной суммы

$$S^{n,3}_{k_1,k_2}=\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots x_{k_1}\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant y_1<y_2<\ldots y_{k_2}\leqslant n} f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1\,y_2,\ldots y_{k_2}|n)^3=$$

$$=\sum_{X^n_{k_1}}\sum_{Y^n_{k_2}} f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2}|n)^3 \tag{1}$$

Покажем, что для этого достаточно определить значение суммы:

$$S'^{\,n;2}_{k_1,k_2}=\sum_{1\leqslant x_1<x_2<\ldots x_{k_1}\leqslant n}\ {\sum_{1\leqslant y_1<y_2<\ldots y_{k_2}\leqslant n}}' f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2}|n)^2=$$

$$=\sum_{X^n_{k_1}}{\sum_{Y^n_{k_2}}}' f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2}|n)^2 \tag{2}$$

где штрих при знаке суммирования означает, что суммирование распространено на все те пары сочетаний $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, у которых выполнено условие: $x_i + y_j \neq n+1$ $(i=1, 2, \ldots k_1;$ $j=1, 2, \ldots k_2)$.

В самом деле, в вышецитированной работе[1]) на стр. 30 имеется формула (36), принимающая, после элементарных упрощений, следующий вид:

$$\Phi_{n+1;p}(u,v) = (1+u)^{n+1}(1+v)^{n+1} - (1+u+v)^n +$$
$$+ (1+u)(1+v)\sum_{s=1}^{p} C_s^p \Phi_{n;s}(u,v) - \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \Phi'_{n;s}(u,v), \tag{3}$$

где $\Phi_{n;p}(u,v)$ и $\Phi'_{n;p}(u,v)$ определяются формулами:

$$\Phi_{n;p}(u,v) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} S_{k_1,k_2}^{n;p} u^{k_1} v^{k_2} \tag{4}$$

$$\Phi'_{n;p}(u,v) = \sum_{k_2=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n} S'^{n;p}_{k_1,k_2} u^{k_1} v^{k_2}, \tag{4'}$$

а $S_{k_1,k_2}^{n;p}$ и $S'^{n;p}_{k_1,k_2}$ определяются формулами (32) и (33) той же работы. Умножая обе части соотношения (3) на $\{(1+u)(1+v)\}^{m-n-1}$ и суммируя затем по n от единицы до $m-1$, получим:

$$\sum_{n=1}^{m-1}\Phi_{n+1;p}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n-1} =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1}\Phi_{n;s}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n} +$$
$$+ (m-1)(1+u)^m(1+v)^m - \sum_{n=1}^{m-1}(1+u+v)^n\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n-1} -$$
$$- \sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1}\Phi'_{n;s}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n-1}$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства

$\sum_{n=2}^{m=1}\Phi_{n;p}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n}$, получим:

$$\Phi_{m;p}(u,v) = \Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-1}\Phi_{1;p}(u,v) + (m-1)(1+u)^m(1+v)^m -$$
$$- \sum_{n=1}^{m-1}(1+u+v)^n\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n-1} +$$

[1]) Известия Научно-исследовательского института математики и механики при Томском Государственном ун-те им. В. В. Куйбышева, том 2-й выпуск 1-й „Определение средне-квадратичного“ стр. 13—36.

$$+\sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1} \Phi_{n;\,s}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n} -$$

$$\sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{n=1}^{m-1} \Phi'_{n;\,s}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{m-n-1}$$

или заменяя m на n и n на k и пользуясь равенством

$\Phi_{1;\,p}(u,v) = u + v + uv = (1+u)(1+v) - 1,$

получим: $\Phi_{n;\,p}(u,v) = n(1+u)^n(1+v)^n - (1+u)^{n-1}(1+v)^{n-1} -$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(1+u+v)^k\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{n-k-1} +$$

$$+\sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k:\,s}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{n-k} -$$

$$-\sum_{s=1}^{p-1} C_s^p \sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_{k:\,s}(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{n-k-1}. \tag{5}$$

Таким образом, мы найдем $\Phi_{n;\,p}(u,v)$, если знаем $\Phi_{n;\,1}(u,v)$, $\Phi_{n;\,2}(u,v)\ldots\Phi_{n;\,p-1}(u,v)$, $\Phi'_{n;\,1}(u,v)$, $\Phi'_{n;\,2}(u,v),\ldots\Phi'_{n;\,p-1}(u,v)$. Так как на основании формулы (26), (38) и (39) указанной[1]) работы, значения $\Phi_{n:\,1}(u,v) = \Phi_n(u,v)$, $\Phi'_{n;\,1}(u,v) = \Phi'_n(u,v)$ и $\Phi_{n;\,2}(u,v)$ известны, для определения $\Phi_{n;\,3}(u,v)$ достаточно определить $\Phi'_{n;\,2}(u,v)$, т. е. для определения значения суммы (1) достаточно определить сумму (2).

Начнем, поэтому, с определения суммы $S'^{\,n;\,2}_{k_1,\,k_2}$ и ее производящей функции $\Phi'_{n;\,2}(u,v)$. Для этого определим число пар из сочетаний $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots\ldots y_{k_2}$, где $(1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots\ldots \ldots x_{k_1} \leqslant n \quad 1 \leqslant y_1 < y_2 < \ldots y_{k_2} \leqslant n)$ $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ суть сочетания из первых n цифр натурального ряда чисел по k_1 и k_2 соответственно, удовлетворяющие условиям:

$$x_i + y_j \neq n+1;\; x_i + y_j \neq m_1;\; x_i + y_j \neq m_2;\; x_i \neq m_1;\; y_j \neq m_2;$$
$$x_i \neq m_2;\; y_j \neq m_2 \quad (i = 1, 2, \ldots k_1;\; j = 1, 2, \ldots k_2), \tag{6}$$

---

[1]) Формула (39) в указанной работе напечатана неверно, именно, последний член следует читать $-2\sum_{k=1}^{n-1}\Phi'_k(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{n-k-1}$, а не

$+2\sum_{k=1}^{n-1}\Phi'_k(u,v)\Big\{(1+u)(1+v)\Big\}^{n-k-1}$.

где m_1 и m_2 любые заданные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant m_1 \leqslant n$, $1 \leqslant m_2 \leqslant n$. Для определения числа указанных пар сочетаний воспользуемся приемом, использованным в вышецитированной работе при определении числа пар сочетаний, удовлетворяющих условиям (5) и (8) этой работы. Воспользуемся и здесь также теоремой: (см. 15 стр. указ. работы). Если дана совокупность из N объектов и S условий $A_1, A_2, \ldots A_s$, то тогда число объектов $\overline{N}$, не удовлетворяющих ни одному из условий A_i, равно $N - N_{A_1} - N_{A_2} - \ldots - N_{A_s} + N_{A_1 A_2} + \ldots + N_{A_{s-1} A_s} - \ldots \mp N_{A_1 A_2 A_3 \ldots A_s}$, где $N_{Ai_1 Ai_2 \ldots Ai_p}$ означает число объектов, удовлетворяющих условиям $Ai_1, Ai_2, \ldots Ai_p$. В качестве указанной совокупности из N элементов возьмем все пары сочетаний $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}$; $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, удовлетворяющие условиям $x_i + y_j \neq n + 1$ $(i = 1, 2, \ldots k_1; j = 1, 2, \ldots k_2)$, а в качестве условий A_i следующие условия:

$$A_1 = \begin{Bmatrix} * \\ m_1 \end{Bmatrix},\ A_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ m_1 - 1 \end{Bmatrix}, \ldots A_{m_1} = \begin{Bmatrix} m_1 - 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\ A_{m_1+1} = \begin{Bmatrix} m_1 \\ * \end{Bmatrix},$$

$$A_{m_1+2} = \begin{Bmatrix} * \\ m_2 \end{Bmatrix},\ A_{m_1+3} = \begin{Bmatrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{Bmatrix}, \ldots A_{m_1+m_2+2} = \begin{Bmatrix} m_2 \\ * \end{Bmatrix},$$

где условие $\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$ означает, что в сочетание $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}$ пары входит α, а в сочетание $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ входит β и, кроме того, условие $\begin{Bmatrix} * \\ m \end{Bmatrix}$ означает, что во второе сочетание пары входит m, а условие $\begin{Bmatrix} m \\ * \end{Bmatrix}$ означает, что в первое сочетание пары входит m.

Очевидно, что искомое число пар сочетаний равно числу пар сочетаний, удовлетворяющих условиям:

$$x_i + y_j \neq n + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots k_1;\ j = 1, 2, \ldots k_2) \tag{7}$$

и не удовлетворяющих ни одному из условий A_i. (см. указ. работу, стр. 17—19.). Назовем сочетание из условий $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{ip}$ совместимым, если $N_{A_{2}, Ai_{4} \ldots Aip} \neq 0$ и определим число совместимых сочетаний из условий A_i по p $(1 \leqslant p \leqslant m_1 + m_2 + 2)$. Кроме того, определим число совместимых сочетаний по p каждого из следующих шестнадцати типов:

$$(\overline{A}_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2}); (A_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$

$$(\overline{A}_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2})$$

$$(A_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2}); (A_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$

$$(\overline{A}_1, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_1+2})$$

$$(\overline{A}_1, A_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+1}, A_{m_1+m_2+2}); (\overline{A}_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \overline{A}_{m_1+m_2+2});$$

$$(A_1, \overline{A}_{m_1+1}, \overline{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2})$$

$$(A_1, \bar{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, \bar{A}_{m_1+m_2+2}); (A_1, A_{m_1+1}, \bar{A}_{m_1+2}, \bar{A}_{m_1+m_2+2});$$

$$(\bar{A}_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2})$$

$$(A_1, \bar{A}_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2}); (A_1, A_{m_1+1}, \bar{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2});$$

$$(A_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+1}, \bar{A}_{m_1+m_2+2}) \quad (A_1, A_{m_1+1}, A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2})$$

где под сочетаниями типа $(A_1, \bar{A}_{m_1+1}, \bar{A}_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2})$ например подразумеваются сочетания, содержащие A_1, A_{m_1+1}, но не содержащие $A_{m_1+2}, A_{m_1+m_2+2}$ и т. д. Иначе говоря, в названии типа сочетаний условия, заведомо не входящие в сочетания, отмечены черточками, а заведомо входящие в сочетания отмечены без изменения. Обозначим через C_p^{*s} число всех совместимых сочетаний из $A_1, A_2, \ldots A_{m_1+m_2+2}$ по p, а через $C_p^{*k,s}$ $(k = 1, 2, \ldots 16)$ число всех совместимых комбинаций k-го типа из $A_1, A_2, \ldots \ldots A_{m_1+m_2+2}$ по p. Очевидно, что

$$C_p^{*s} = \sum_{k=1}^{16} C_p^{*k,s}, \tag{8}$$

Обозначим через $T_k(m_1, m_2, \mu, \nu, p)$ число совместимых сочетаний k-того типа из условий $\begin{Bmatrix} * \\ m_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ m_1-1 \end{Bmatrix} \ldots \begin{Bmatrix} m_1-1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} m_1 \\ * \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} * \\ m_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ m_2-1 \end{Bmatrix} \ldots \begin{Bmatrix} m_2 \\ * \end{Bmatrix}$ по p, таких, что среди верхних чисел символов $\begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} * \\ k \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k \\ * \end{Bmatrix}$, входящих в сочетание, имеются μ, а среди нижних чисел тех же символов имеется ν различных между собой чисел. Обозначим далее через $T(m_1, m_2, \mu, \nu, p)$ число всех совместимых сочетаний из условий вышеуказанного вида. Очевидно:

$$T(m_1, m_2, \mu, \nu, p) = \sum_{k=1}^{16} T_k(m_1, m_2, \mu, \nu, p), \tag{9}$$

Определим значение суммы $\sum N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$, распространенной на все совместимые сочетания из условий A_i. Покажем сначала, что если среди верхних чисел условий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_p}$ имеется μ и среди нижних ν различных между собою чисел, то

$$N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}} = C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,\, k_2-\nu}$$

где $C^m_{k_1, k_2} = C^m_{k_1} C^{m-k_1}_{k_2}$ (ср. стр. 18 указанной работы).

В самом деле, обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ все различные между собою верхние числа символов $A_{i_1}, A_{i_2} \ldots A_{i_p}$ а через $p_1, p_2, \ldots \beta_\nu$ все различные между собою нижние числа тех же символов. Тогда число пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$, удовлетворяющих условиям (7) и условиям $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_p}$, равно числу пар сочетаний, удовлетворяющих условиям (7) и условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu\ (\bar{\beta}_1)\,(\bar{\beta}_2)\ldots(\bar{\beta}_\nu), \\ &\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu\ (\bar{\alpha}_1)\,(\bar{\alpha}_2)\ldots(\bar{\alpha}_\mu), \end{aligned} \tag{10}$$

которые означают, что в первое сочетание пары $x_1, x_2, \ldots x_{k_1}$ заведомо входят числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ и заведомо не входят $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots \ldots \bar{\beta}_\nu$ и, кроме того, в сочетание $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ пары заведомо входят $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ и заведомо не входят $\bar{\alpha}_1, \ldots \ldots \bar{\alpha}_\mu$, причем $\bar{\alpha}_i = n + 1 - \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots \mu)$ и $\bar{\beta}_i = n + 1 - \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots . \nu)$. Очевидно, что все числа верхней строчки условий (10), а равно и все числа нижней строчки, между собой различны, так как из предложения $\alpha_i = \bar{\beta}_j$ следует $\alpha_i + \beta_j = n + 1$, что противоречит тому, что $A_{i_1}\ A_{i_2} \ldots A_{i_p}$ суть совместимые условия, т. е. условия не противоречащие (7). Если мы выбросим из сочетаний $x_1, x_2, \ldots y_{k_1}$ и $y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ числа, заведомо в них входящие, то, убедимся в том что число $N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}}$ указанных пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots \ldots x_{k_1}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2}$ равно числу пар сочетаний $x_1, x_2, \ldots \ldots x_{k_1-\mu}; y_1, y_2, \ldots y_{k_1-\nu}$ удовлетворяющих условиям (7) и условиям:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1)\ (\alpha_2) \ldots (\alpha_\mu)\ \ (\bar{\beta}_1)\ (\bar{\beta}_2) \ldots (\bar{\beta}_\nu) \\ &(\beta_1)\ (\beta_2) \ldots (\beta_\nu)\ \ (\bar{\alpha}_1)\ (\bar{\alpha}_2) \ldots (\bar{\alpha}_\mu) \end{aligned} \tag{11}$$

Если мы обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{n-\mu-\nu}$ все различные числа из числового интервала $1, 2, \ldots n$, отличные от чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots \bar{\beta}_\nu$, расположенные в возрастающем порядке, а через $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{n-\mu-\nu}$ все различные числа того же интервала, отличные от $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots \bar{\alpha}_\mu$ и расположенные в возрастающем порядке, то будем иметь (так как вычитая из $n + 1$ все числа верхней строчки (11) мы получим все числа нижней строчки) $\gamma_i = n + 1 - \delta_{n+1-\mu-\nu-i}$ $(i = 1, 2, \ldots . n - \mu - \nu)$ то есть $\gamma_i + \delta_j$ равно $n + 1$ тогда и только тогда, когда $i + j = n + 1 - \mu - \nu$. Рассматриваемые пары сочетаний $x_1, x_2, \ldots \ldots {}_{k_1-\mu}; y_1, y_2, \ldots y_{k_2-\nu}$, удовлетворяющие условиям (7) и (11) можно записать как пары сочетаний $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots \gamma_{i_{k_1-\mu}}; \delta_{i_1}, \delta_{j_2}, \ldots \ldots \delta_{j_{k_2-\nu}}$, удовлетворяющие условиям $i_u + j_v \neq n + 1 - \mu - \nu$. Число же пар сочетаний, $i_1, i_2, \ldots i_{k_1-\mu}; j_1, j_2, \ldots j_{k_2-\nu}$ $(i_n + j_v \neq n + 1 - \mu - \nu)$, равно $C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu, k_2-\nu}$ (ср. стр. 15 цитированной работы). Поэтому имеем:

$$\sum N_{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_p}} = \sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1} \sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1} T(m_1, m_2, \mu, \nu, p)\, C^{n+1-\mu-\nu}_{k_1-\mu, k_2-\nu} \tag{12}$$

Поэтому, на основании формулы

$$\bar{N}=N-N_{A_1}-N_{A_2}-\ldots-N_{A_s}+N_{A_1A_2}+\ldots+N_{A_{s-1}A_s}-\ldots\ldots\pm$$
$$\pm N_{A_1A_2\ldots A_s}\ (s=m_1+m_2+2) \tag{13}$$

имеем для числа $\bar{N}$ всех пар сочетаний $x_1, x_2,\ldots x_{k_1}; y_1, y_2,\ldots$ $\ldots y_{k_2}$ удовлетворяющих условиям (6):

$$\bar{N}=C^n_{k_1,k_2}+\sum_{p=1}^{m_1+m_2+2}(-1)^p\sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1}T(m_1,m_2,\mu,\nu,p)\,C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,k_2-\nu} \tag{14}$$

Введем символ $\varepsilon(m; x_1, x_2,\ldots x_{k_1}; y_1, y_2,\ldots y_{k_2})$, равный единице, если m входит в состав аддитивной суммы Шнирельмана последовательностей $x_1, x_2,\ldots x_{k_1}$ и $y_1, y_2,\ldots y_{k_2}$, и равный нулю в противном случае, т. е. равен единице, если только пара сочетаний: $x_1, x_2,\ldots x_{k_1}; y_1, y_2,\ldots y_{k_2}$ нарушает по крайней мере одно из условий: $x_i\neq m$, $y_j\neq m$, $x_i+y_j\neq m$ $(i=1, 2,\ldots k_1;\ j=1, 2,\ldots k_2)$. Очевидно, что

$$\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}\varepsilon(m_1;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2})\,\varepsilon(m_2;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2})=$$
$$=\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}\{[1-\varepsilon(m_1;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2})]\times$$
$$\times[1-\varepsilon(m_2;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2})]-1\}+$$
$$+\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}[\varepsilon(m_1;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1\,y_2\ldots y_{k_2})+$$
$$+\varepsilon(m_2;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2})]=f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2\ldots y_{k_2}|n)^2.$$

Суммируя обе части полученного соотношения по всем парам $x_1, x_2,\ldots x_{k_1}: y_1, y_2,\ldots y_{k_2}$, удовлетворяющим условиям $x_i+y_j\neq n+1$ $(i=1, 2,\ldots k_1\ j=1, 2,\ldots k_2)$ и пользуясь (14), получим:

$$\sum_{X^n_{k_1}}\sum_{Y^n_{k_2}}{}' f(x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2}|n)^2=$$
$$=\sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1}\sum_{p=1}^{m_1+m_2+2}(-1)^p\,T(m_1,m_2,\mu,\nu,p)\,C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu,k_2-\nu}+$$
$$+2n\sum_{X^n_{k_1}}\sum_{Y^n_{k_2}}{}'\sum_{m=1}^{n}\varepsilon(m;x_1,x_2,\ldots x_{k_1};y_1,y_2,\ldots y_{k_2}),$$

где штрих при знаке двойной суммы $\sum\limits_{X^n_{k_1}} \sum\limits_{Y^n_{k_2}}{}'$ означает, что суммирование распространено на все пары сочетаний $x_1, x_2, \dots x_{k_1}$; $y_1, y_2, \dots y_{k_2}$ удовлетворяющих условиям: $x_i + y_j \neq n+1$ $(i = 1, 2, \dots \dots k_1;\ j = 1, 2, \dots k_{k_2})$ на основании формул (6) и (12) моей вышецитированной работы получим из последнего соотношения:

$$\sum_{X^n_{k_1}} \sum_{Y^n_{k_2}}{}' f(x_1, x_2, \dots x_{k_1}; y_1, y_2, \dots y_{k_2} | n)^2 =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{n} \sum_{m_2=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m_1+m_2+1} \sum_{\nu=0}^{m_1+m_2+1} \sum_{p=1}^{m_1+m_2+2} (-1)^p T(m_1 m_2, \mu, \nu, p) C^{n-\mu-\nu}_{k_1-\mu, k_2-\nu} +$$

$$+ 2n \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \Big[C_p^{m-1;\, n+1-m} \; C^{n-2p}_{k_1-p,\, k_2-p} +$$

$$+ \Big(C_p^{m+1;\, n+1-m} - C_p^{m-1;\, n+1-m} - C'^{\,m-1;\, n+1-m}_{p-1} \Big) C^{n-2p+2}_{k_1-p+1,\, k_2-p+1} \Big] +$$

$$+ 2n \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=1}^{m+1} (-1)^p C'^{\,m-1;\, n+1-m}_{p-1} \; C^{n-2p+1}_{k_2-p+1,\, k_2-p+1} \qquad (15)$$

где $C^{n;\,d}_k$ означает число всех сочетаний из первых n чисел натурального ряда по k, таких, что ни одна пара чисел, входящих в сочетание, не имеет разности, равной d, а $C'^{\,n;\,d}_k$ означает число таких сочетаний, все числа которых, сверх того, отличны от d.

Умножая обе части формулы (15) на $u^{k_1} v^{k_2}$ и суммируя по k_1, k_2 от нуля до n, получим:

$$\Phi'_{n;\,2}(u, v) =$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2=1}^{n} \sum_{\mu,\nu=0} \sum_{p=1}^{2n+2} (-1)^p T(m_1, m_2, \mu, \nu, p) u^\mu v^\nu (1+u+v)^{n-\mu-\nu} +$$

$$+ 2n \Phi'_n(u, v) = W_n(u, v) + n^2 (1+u+v)^n +$$

$$+ \frac{2n(1+u+v)^{n+2}}{uv} \sum_{m=1}^{n} \big[\varphi_{m;\, n+1-m}(x) +$$

$$+ x\varphi_{m-1;\, m+1-m}(x) - \varphi_{m+1;\, n+1-m}(x) \big] +$$

$$+ \frac{2n(1+u+v)^{n+1}}{uv} \sum_{m=1}^{n} \big[\varphi_{m;\, m+1-m}(x) - \varphi_{m-1;\, n+1-m}(x) \big] =$$

$$= W_n(u, v) + n^2 (1+u+v)^n + 2n\,\theta_n(u, v), \qquad (16)$$

где $W_n(u, v)$, $\varphi_{n;d}(x)$, x, $\theta_n(u, v)$ и $\Phi'_n(u, v)$ определяются формулами:

$$x = -\frac{uv}{(1+u+v)^2}, \quad \theta_n(u, v) = \Phi'_n(u, v) - n(1+u+v)^n,$$

$$\Phi'_n(u, v) = \Phi'_{n;1}(u, v) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n} S'^{n}_{k_1,k_2} u^{k_1} v^{k_2}$$

и

$$W_n(u,v) =$$

$$= \sum_{m_1 m_2=1}^{n} \sum_{\mu,\nu=0}^{n} \sum_{p=0}^{2n+2} (-1)^p T(m_1, m_2, \mu, \nu, p) u^{\mu} v^{\nu} (1+u+v)^{n-\mu-\nu} \tag{17}$$

$$(T(m_1, m_2, 0, 0, 0) = 1, \quad T(m_1, m_2, \mu, \nu, 0) = 0 \text{ при } \mu + \nu \neq 0)$$

Подставляя в формулу (5) настоящей работы $p = 3$ и, пользуясь элементарной формулой

$$\sum_{k=1}^{n-1} (1+u+v)^k [(1+u)(1+v)]^{n-k-1} =$$

$$= \frac{(1+u)^{n-1}(1+v)^{n-1} - (1+u+v)^{n-1}}{uv} (1+u+v) \tag{18}$$

получим:

$$\Phi_{n;3}(u, v) = n(1+u)^n (1+v)^n - \frac{(1+u)^n (1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv} +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k;1}(u, v) [(1+u)(1+v)]^{n-k} +$$

$$+ 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k;2}(u, v) [(1+u)(1+v)]^{n-k} -$$

$$- 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_{k;1}(u, v) [(1+u)(1+v)]^{n-k-1} -$$

$$- 3\sum_{k=1}^{n-1} \Phi'_{k;2}(u, v) [(1+u)(1+v)]^{n-k-1}, \tag{19}$$

где

$$\Phi_{n;1}(u,v) = \Phi_n(u, v) = n[(1+u)(1+v)]^n -$$

$$- \frac{(1+u)^n (1+v)^n - (1+u+v)^n}{uv} \tag{20}$$

(см. формулу (38) цитированной работы)

$$\Phi'_{n;1}(u,v)=\Phi'_n(u,v)=n(1+u+v)^n+\frac{(1+u+v)^{n+2}}{uv}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{n}[\varphi_{m;n+1-m}(x)+x\varphi_{m-1;n+1-m}(x)-\varphi_{m+1;n+1-m}(x)]+$$

$$+\frac{(1+u+v)^{n+1}}{uv}\sum_{m=1}^{n}[\varphi_{m;n+1-m}(x)-\varphi_{m-1;n+1-m}(x)],$$

$$\left(x=-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right) \tag{21}$$

(см. формулу (27) там же).

Подставляя в формулу (5) $p=2$, точно также получим:

$$\Phi_{n;2}(n,v)=n(1+u)^n(1+v)^n-\frac{(1+u)^n(1+v)^n-(1+u+v)^n}{uv}+$$

$$+2\sum_{k=1}^{u-1}\Phi_{k;1}(u,v)[(1+u)(1+v)]^{n-k}-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n-1}\Phi'_{k;1}(u,v)[(1+u)(1+v)]^{n-k-1}$$

или, на основании (18), (20), (21) и элементарной формулы:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k(1+u+v)^k[(1+u)(1+v)]^{n-k-1}=$$

$$=\frac{(n-1)(1+u+v)^n-n(1+u)(1+v)(1+u+v)^{n-1}}{u^2v^2}(1+u+v)+$$

$$+\frac{(1+u)^n(1+v)^n}{u^2v^2}(1+u+v) \tag{22}$$

получаем, после элементарных упрощений:

$$\Phi_{n:2}(u,v)=$$

$$=n^2(1+u)^n(1+v)^n-(2n-1)\frac{(1+u)^n(1+v)^n-(1+v+v)^n}{uv}-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}\theta_k(u,v)[(1+u)(1+v)]^{n-k-1}, \tag{23}$$

где, для простоты, положено:

$$\theta_n(u,v)=\Phi'_n(u,v)-n(1+u+v)^n=\frac{(1+u+v)^{n+2}}{uv}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{n}[\varphi_{m;n+1-m}(x)+x\varphi_{m-1;n+1-m}(x)-\varphi_{m+1;m+1-m}(x)]+$$

$$+\frac{(1+u+v)^{n+1}}{uv}\sum_{m=1}^{n}[\varphi_{m;n+1-m}(x)-\varphi_{m-1;n+1-m}(x)]. \qquad (24)$$

Подставляя в (19) $\Phi_{k;2}(u,v)$ из формулы (23) и пользуясь при этом (16), (18), (20), (21), (22) (24) и элементарной формулой:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2(1+u+v)^k[(1+u)(1+v)]^{n-k-1}=$$

$$=\frac{-(n-1)^2(1+u+v)^{n+2}+}{u^3v^3}+$$

$$+\frac{(2n^2-2n-1)(1+u)(1+v)(1+u+v)^{n+1}}{u^3v^3}-$$

$$-\frac{n^2(1+u+v)^n(1+u)^2(1+v)^2}{u^3v^3}+$$

$$+\frac{(1+u)^n(1+u)^n(1+u+v)^2+}{u^3v^3}+$$

$$+\frac{(1+u)^{n+1}(1+v)^{n+1}(1+u+v)}{u^3v^3} \qquad (25)$$

получаем:

$$\Phi_{n;3}(u,v)=n^3(1+u)^n(1+v)^n-$$

$$-(3n^2-3n+1)\frac{(1+u)^n(1+v)^n-(1+u+v)^n}{uv}-$$

$$-3\sum_{k=1}^{n-1}W_k(u,v)[(1+u)(1+v)]^{n-k-1}-$$

$$-3\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)\theta_k(u,v)[(1+u)(1+v)]^{n-k-1} \qquad (26)$$

Для исследования формулы (26), необходимо видоизменить выражение для $\Phi'_n(u,v)$ и $W_n(u,v)$. Оставляя пока в стороне вторую задачу как более трудную, преобразуем $\Phi'_n(u,v)$ к форме явного алгебраического выражения от u и v.

Для этого нужно найти, прежде всего, явные выражения для производящих функций $\varphi_{n;d}(x)$ чисел $C_k^{n;d}$.

Докажем сначала формулы:

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2}=\varphi_n(x)+2x\varphi_{n-1}(x)+\varphi_n(x)\sqrt{1+4x} \qquad (27)$$

$$2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2}=\varphi_n(x)+2x\varphi_{n-1}(x)-\varphi_n(x)\sqrt{1+4x} \qquad (28)$$

где

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n\,;\,1}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k^{n;\,1}\, x^k$$

Функция $\varphi_n(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(x)+x\varphi_{n-2}(x) \qquad (29)$$

(см. формулу (15) цитированной работы).

Поэтому правые части доказываемых равенств (27) и (28) удовлетворяют тому же соотношению, как линейные комбинации $\varphi_n(x)$ и $\varphi_{n-1}(x)$ с постоянными относительно n коэффициентами. Непосредственной элементарной подстановкой убеждаемся в том, что и левые части (27), (28) удовлетворяют соотношению (29).

Далее, так как левые и правые части (27) и (28) удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению и совпадают при $n=0$ и $n=1$, то равенства (27) и (28) доказаны.

Докажем теперь формулу

$$\varphi_{n:d}(x)=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+d+2}}{(\sqrt{1+4x})^{d+1}}\times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{q+2}\right]^{d-r}\times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{q+3}\right]^{r}+$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+d+2}}{(-\sqrt{1+4x})^{d+1}}\times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{d+2}\right]^{d-r}\times$$

$$\times\left[1-\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)^{q+3}\right]^r \tag{30}$$

где

$$q=\left[\frac{n}{d}\right]$$

и

$$r=n-qd,\quad n=qd+r$$

Для доказательства этой формулы, подставим в формулу

$$\varphi_{n:d}(x)=\sum_{s=0}^{n+d} C(s|m_1, m_2,..m_d)(-x)^s\varphi_{n+d-2s}(x) \tag{31}$$

(формула (22) моей цитированной выше работы), где $C(s|m_1,m_2,\ldots$ $\ldots m_d)=C(s|n,d)$ означает число всех разложений числа s на d слагаемых следующего вида: $s=z_1+z_2+\ldots z_d$ $(0\leqslant z_i\leqslant m_i+1,$ $i=1,2,\ldots d)$ где $m_i=\left[\dfrac{n+i-1}{d}\right]$ $(i=1,2,\ldots d)$

Производящая функция чисел $C(s|n,d)$ очевидно равна

$$f_{n:d}(z)=\sum_{s=0}^{n+d} C(s|n,d)z^s=\prod_{s=1}^{d}(1+z+z^2+\ldots+z^{m_i+1})=$$

$$=\frac{(1-z^{q+2})^{d-r}(1-z^{q+3})^r}{(1-z)^d}, \tag{32}$$

так как среди m_i имеется ровно $d-r$ чисел равных $q+1$. На основании (58), (29), (31) и (32) имеем теперь:

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+4x}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2}\right];$$

$$\varphi_{n:d}(x)=\sum_{s=0}^{n+d} C(s|n,d)\frac{(-x)^s}{\sqrt{1+4x}}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d-2s}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d-2s}\right]=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d}}{\sqrt{1+4x}}f_{n:d}\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^2}\right)-$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{n+2+d}}{\sqrt{1+4x}}\,f_{n;\,d}\left(\frac{-x}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}\right)^{2}}\right).$$

После элементарных преобразований, как легко видеть последнее соотношение переходит в формулу (30). Другое [1]), удобное для определения $S^{n;3}_{k_1,k_2}$ выражение для $\Phi'_n(u, v)$ мы получим, если докажем формулу:

$$(1+u+v)^n\,\varphi_{n-1}\left(-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}D^n_{k_1,k_2}\;u^{k_1}v^{k_2} \tag{33}$$

где

$$D^n_{k_1,k_2}=C^{n-k_1}_{k_2}\,C^{n-k_2}_{k_1}$$

Легко показать, пользуясь правилом треугольника Паскаля

$C^{m-1}_{k}+C^{m-1}_{k-1}=C^{m}_{k}$, соотношение:

$$D^n_{k_1,k_2}=D^{n-1}_{k_1,k_2}+D^{n-1}_{k_1-1,k_2}+D^{n-1}_{k_1,k_2-1}-D^{n-2}_{k_1-1,\;k_2-1}. \tag{34}$$

Помножая обе части соотношения (34) на $u^{k_1}v^{k_2}$ и суммируя по всем неотрицательным значениям k_1, k_2, получим для суммы

$$V_n(u,v)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}D^n_{k_1,k_2}u^{k_1}v^{k_2}$$

рекурентное соотношение:

$$V_n(u,v)=(1+u+v)\,V_{n-1}(u,v)-uv\,V_{n-2}(u,v).$$

Так как тому же соотношению удовлетворяет и

$\psi_n(u,v)=(1+u+v)^n\varphi_{n-1}\left(-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right)$(в чем нетрудно убедиться на основании (29)) и так как совершенно очевидно, что $V_1(u,v)=\psi_1(u,v)=1+u+v$, $V_2(u,v)=\psi_2(u,v)=1+2n+2v+uv+u^2v^2$, то имеем при всяком $n>0$: $V_n(u,v)=\psi_n(u,v)$ так как две функции $\psi_n(u,v)$, $V_n(u,v)$ удовлетворяющие одному и тому же рекурентному соотношению и совпадающие при $n=1$, 2, должны совпадать при всех положительных значениях. Таким образом, равенство (33) доказано. Мы видим, что выражение $\psi_n(u,v)=(1+u+v)^n\varphi_{n-1}\left(-\frac{uv}{(1+u+v)^2}\right)$, имеющее смысл [1]) при вся-

[1]) Формула (33) была мною получена на основании интересных соображений, любезно сообщенных мне В. П. Симоновым.

[1]) См. цитированную работу. Рекурентное соотношение (29) позволяет определить $\varphi_n(x)$ при $n=0,-1,-2,\ldots$

ком n, имеет очень простые коэффициенты при $n>0$. Кроме того, на основании формулы (16) цитированной работы:

$$\varphi_{-m}(x) = -\frac{\varphi_{m-4}(x)}{(-x)^{m-2}},$$

имеем при

$$x = -\frac{uv}{(1+u+v)^2}$$

$$\psi_{-n}(u, v) = -\frac{\psi_{n-1}(u, v)}{(uv)^{n-1}} \tag{35}$$

Помножая, далее, формулу (17) цитированной работы: $\varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_2+1} \varphi_{m_1+m_2+1-2\mu}(x) \cdot (-x)^{\mu}$ на $\varphi_{m_3}(x)$ и пользуясь той же формулой, получим:

$$\varphi_{m_1}(x)\,\varphi_{m_2}(x)\,\varphi_{m_3}(x) =$$

$$= \sum_{\mu_1=0}^{m_2+1} \sum_{\mu_2=0}^{m_3+1} (-x)^{\mu_1+\mu_2} \varphi_{m_1+m_2+m_3+2-2(\mu_1+\mu_2)}(x).$$

Продолжая этот процесс дальше, получим:

$$\varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x)\ldots\varphi_{m_s}(x) = \sum_{\mu_1=0}^{m_2+1,} \; \sum_{\mu_2=0}^{m_3+1} \ldots \sum_{\mu_s=0}^{m_s+1} (-x)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{s-1}} \times$$

$$\times \varphi_{m_1+m_2+\ldots+m_s+s-1-2(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{s-1})}(x)$$

или

$$\varphi_{m_1}(x)\,\varphi_{m_2}(x)\ldots\varphi_{m_s}(x) =$$

$$\sum_{\nu=0}^{n+s-1-m_1} C(\nu|m_2,\ m_3,\ldots m_s)\,(-x)^{\nu}\,\varphi_{n+s-1-2\nu}(x), \tag{36}$$

где $C(u|m_2, m_3, \ldots m_s)$ равно числу решений уравнения $u = z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_{s-1}$ в целых z_i удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant z_i \leqslant m_{i+1} + 1$ $(i = 1, 2, \ldots s-1)$ и $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$.

Подобно тому, как в цитированной работе была доказана формула (22), из (19), получим:

$$\varphi_{n;d}(x) = \sum_{s=0} \bar{C}(s|n, d)\,(-x)^s\,\varphi_{m+d-1-2s}(x), \tag{37}$$

где

$$\bar{C}(s|n, d) = C(s|m_2, m_3, \ldots m_d);\ m_i = \left[\frac{n+i-1}{d}\right]\ (i = 2, 3, \ldots\ldots d)$$

при $d > 1$, $(\bar{C}(0|n, 1) = 1, \sum_{s=0} \bar{C}(s|n, d) z^s = f_{n;d}(z) =$

$$= \frac{(1-z^{q+2})^{d-r-1}(1-z^{q+3})^r}{(1-z)^{d-1}}.$$

На основании (21) (37), (31) и (36) имеем:

$$\Phi'_n(n, v) = n(1+u+v)^n + \frac{1}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1} C(s|m, n+1-m) =$$

$$= u^s v^s \psi_{n+2-2s}(u, v)$$

$$-\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}\bar{C}(s|m-1, n+1-m) u^s v^s \psi_{n-2s}(u, v) -$$

$$-\frac{1}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}\bar{C}(s|m+1, n+1-m) u^s v^s \psi_{n+2-2s}(u, v) +$$

$$+\frac{1}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1} C(s|m, n+1-m) u^s v^s \psi_{n+1-2s}(u, v) -$$

$$-\frac{1}{uv}\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1} C(s|m-1, n+1-m) u^s v^s \psi_{v+1=2s}(u, v)$$

или

$$\Phi'_n(u, v) = n(1+u+v)^n +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=0}[C(s+1|m, n+1-m) - \bar{C}(s|m-1, n+1-m) -$$

$$-C(s+1|m+1, n+1-m)] u^s v^s \psi_{n-2s}(u, v) +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}[\bar{C}(s+1|m, n+1-m) -$$

$$-C(s+1|m-1, n+1-m)] u^s v^s \psi_{n-1-2s}(u, v) \qquad (38)$$

Выражение (38) для $\Phi'_n(u, v)$ удобнее других в том отношении, что в него входят $\psi_n(u, v)$, коэффициенты которых легко найти по формуле (13).

В тех членах (38), в которых индексы при $\psi_n(u, v)$ отрицательные, мы легко найдем коэффициенты, выразив $\psi_n(u, v)$ с отрицательным индексом через $\psi_n(u, v)$ с положительным индексом на основании (35) и, таким образом, определим $S'^{n;1}_{k_1, k_2}$ в виде сравнительно простого выражения.

Über die Bestimmung der höherer Mittelwerte der Fundamentalfunktion der additiven Zahlentheorie

Romanoff N. P. (*Tomsk*)

Diese Arbeit ist der Bestimmung der Summe $\sum\limits_{X^n_{k_1}} \sum\limits_{Y^n_{k_2}} f(x_1, x_2, \dots x_{k_1}; y_1, y_2, \dots y_{k_2} | n)^3$ gewidmet, wo die Bezeichnung und die Fragestellung aus meiner vorhergehender Arbeit entnommen sind (sieh diese Zeitschrift № II, 2 S 13—37).

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ВОПРОСАМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Н. П. Романов (*Томск*).

В беседе со мной в 1935 г. Л. Г. Шнирельман сообщил мне о своих соображениях по поводу возможных применений функционального анализа к вопросам теории распределения простых чисел, а также указал на то обстоятельство, что ряд числовых тождеств, связанных с распределением чисел, может быть получен путем рассмотрения введенной им „функциональной" дзета-функции. Целью настоящей работы является изложение идей Л. Г. Шнирельмана и дальнейшее их развитие и обобщение, к которому я недавно пришел. Рассмотрим семейство функций F, определенных на области B. (Термин „область понимается здесь просто в смысле любого множества вещественных или комплексных чисел). Рассмотрим последовательность дистрибутивных функциональных операторов $L_1, L_2, \ldots$ отображающих функции семейства F в семейство F, и обладающих, сверх того свойством $L_n L_m = L_{nm}$ $(n=1, 2, \ldots m=1, 2 \ldots)$, которое мы в дальнейшем будем называть M—свойством. Например, рассматривал в области $(-\infty, \infty)$ множество функций, обладающих тем свойством, что вместе с $f(x)$, $f(nx)$ где n любое целое положительное число, принадлежит тому же семейству (т. е. из $f(x) \in F$ следует $f(nx) \in F$) можем положить $L_n f(x) = f(nx)$

Тогда, очевидно, имеем

$$L_n(L_m f(x)) = L_n f(mx) = f(nm x) = L_{nm} f(x)$$

т. е.

$$L_n L_m = L_{nm}$$

Также можно взять операторы $L_n f(x) = \chi(n) f(nx)$, где $\chi(n)$ характер Дирихле для модуля k и F таково, что из $f(x) \in F$ следует $\chi(n) f(nx) \in F$

Из данной последовательности операторов, обладающих M—свойством, можно получить другие последовательности, обладающие тем же свойством на основании теоремы: если $L_n (n = 1, 2, 3 \ldots)$ есть последовательность операторов, обладающая M—свойством, то и $L'_n = A L_n A^{-1}$ где A и A^{-1} два взаимно обратных линейных функциональных оператора, отображающих F само на себя, также образует последовательность, обладающую M—свойством:

$$L'_n L'_m = A L_n A^{-1} A L_m A^{-1} = A L_n L_m A^{-1} = A L_{nm} A^{-1} = L'_{nm}$$

Приведем примеры последовательностей фукциональных операторов, обладающих M—свойством:

$$L_n f(x) = f(n^\alpha x) \quad \alpha \gtreqless 0, \quad L_n f(x) = f(x + a \log n), \quad L_n f(x) = f(x^n),$$

$$L_n f(x) = f(nx - (n-1)a),$$

$$L_n f(x) = \int\limits_0^x f'(x^n)dx, \quad L_n f(x) = f(\varphi(n\psi(x)), \ (\varphi\psi(x)) = x)$$

определенных, разумеется, на соответствующим образом—подобранных множествах F. Большое количество примеров можно получить на основании того замечания, что последовательность функциональных операторов

$$L_n = n^\lambda = e^{\lambda \log n} = 1 + \frac{\log n}{1!}\lambda + \frac{(\log n)^2}{2!}\lambda^2 + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots.)$$

где λ есть произвольный линейный функциональный оператор обладает M—свойством, еслн при этом все ряды здесь рассматриваемые:

$$L_n f(x) = f(x) + \frac{\log n}{1!}\lambda f(x) + \frac{(\log n)^2}{2!}\lambda^2 f(x) + \ldots..,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log m)^k}{k!}\lambda^k (L_n f(x)), \qquad (f(x \in F, \lambda^2 f(x) = \lambda(\lambda f(x))\ldots)$$

будут аасолютно сходящимися и полученное применение операций λ^p $(p = 1, 2 \ldots.)$ к рассматриваемым рядам предполагается законным. В этих предположениях проверка M—свойства совершается формально также, как проверка элементарного соотношения $n^\mu m^\mu = (nm)^\mu$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{k!}\mu^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log m)^l}{l!}\mu^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n\, m)^k}{k!}\mu^k,$$

где μ—число.

Этим способом можно получить и ранее рассмотренные примеры. Напр. для $f(x)$ разлагающейся в ряд Тэйлора

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \ldots..$$

имеем:

$$L_n f(x) = f(x + a \log n) = e^{\log n.\, a \frac{d}{dx}} f(x) = n^{a \frac{d}{dx}} f(x).$$

Далее для аналитической $f(x)$:

$$L_n f(x) = f(nx) = e^{\log n\, x \frac{d}{dx}} f(x), \ L_n f(x) = f(x^n) = e^{\log n\, x \log x \frac{d}{dx}} f(x) =$$

$$= n^{x \log x \frac{d}{dx}} f(x), \quad L_n f(x) = e^{\log n\, \Delta} f(x) = n^{\Delta} f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{k!} \Delta^k f(x) \quad . \quad (\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)).$$

Рассмотрим теперь функциональный оператор следующего вида, определенный на функциональном множестве F

$$\zeta(s, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{n^s}$$

на основании следующего соотношения:

$$\zeta(s, L) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n f(x)}{n^s}$$

где ряд справа предполагается абсолютно сходящимся для $R(s) > \sigma_0$ и последовательность L_n обладает M—свойством.

Оператор $\zeta(x, L)$ таким образом определен для всех $f(x)$ рассматриваемого семейства F и для всех значений комплексного параметра $s = \sigma + ti$ лежащих правее линии $\sigma = \sigma_0$. В частности, при соответствующих ограничениях легко определяется функциональный оператор

$$\zeta(s + \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-\lambda}}{n^s}$$

где λ некоторых дистрибутивный функциональный оператор и $n^{-\lambda} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\log n)^p}{p!} \lambda^p$ при чем легко видеть, что для $L_n = n^{-\lambda}$ M — свойство выполняется. В частности, при соответствующих ограничениях для F имеем при $\lambda f(x) = -x f'(x)$ или $\lambda = -x \frac{d}{dx}$:

$$\zeta(s + \lambda) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nx)}{n^s}$$

Также точно для $\lambda = -x \log x \frac{d}{dx}$ имеем (на основании $f(x^n) = e^{\log n \log x \frac{d}{dx}} f(x)$)

$$\zeta(s + \lambda) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n^s}$$

Приложения рассматриваемой здесь функциональной дзета-функции основано на следующем замечании: если на функциональном множестве F определена последовательность функциональных операторов $L_1 L_2 \ldots\ldots$ такая что из $f(x) \varepsilon F$ и обладающая M—свойством $L_n L_m = L_{nm}$ т. е. $L_n(L_m f(x)) = L_{mn} f(x) \varepsilon F$. Если, кроме того, для всех значений комплексного параметра s вещественная часть которого больше σ_0 и для любой $f(x)$ из F, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n f(x)}{n^s} = \zeta(sL) f(x)$ абсолютно сходится и дает функцию, принадлежащую к некоторому семейству F'. Если, далее для каждаго $R(s) > \sigma_0$ и каждой $f(x) \varepsilon F$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} L_n f(x) =$ $= -\zeta'(s, L)$ очевидно, сходящийся дает функцию от x, принадлежащую к семейству F'', а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} L_n f(x) = \zeta^{-1}(s, L) f(x)$, сходящий на том том же функциональном множестве F дает функцию, принадлежащую к F'' и почленное применение операторов к рассматриваемым рядам законно, то тогда справедливо следующее тождество

$$\zeta'(s, L) . \zeta(s, L)^{-1} f(x) = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} L_n f(x) \ldots\ldots (1)$$

для каждой $f(x) \varepsilon F$. Это тождество является обобщением тождества Эйлера для дзета-функции и доказывается совершенно аналогичным образом на основе M—свойства для L_n и тождества

$$\sum_{d/n} \log d \, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \Lambda(n).$$

Вывод формулы (1) опускаем в виду его полной очевидности. Также точно легко доказать тождество

$$\zeta^{-1}(s, L)\, \zeta(s, L) f(x) = f(x) \qquad (2)$$

оправдывающее обозначение $\zeta^{-1}(s, L)$.

Разумеется произведение $\zeta'(s, L)$ на $\zeta^{-1}(s, L)$ нужно понимать в смысле композиции операторов. Для случая:

$$L_n f(x) = e^{\log n . \, x \log x \frac{d}{dx}} f(x) = f(x^n) = n^{-\lambda} f(x) = n^{x \log x \frac{d}{dx}} f(x), \quad s = 0$$

получим:

$$\zeta(\lambda)\, \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x^n)$$

следовательно для

$$\varphi(x) = x \quad \zeta(\lambda)\,\varphi(x) = \frac{x}{1-x}$$

Следовательно

$$\zeta^{-1}(\lambda)\,\frac{x}{1-x} = \zeta^{-1}(\lambda)\zeta(\lambda)\,x = x.$$

Поэтому тождество (1) дает для

$$\zeta(s, L) = \zeta(\lambda),\; f(x) = \frac{x}{1-x}$$

в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\,\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \log m\, x^m \tag{3}$$

т. е. известное тождество для ряда Ламберта, которое т. о. получилось из обобщенного тождества Эйлера (1). Это рассуждение не только дает новый вывод тождества (3), не только связывает веожиданным образом давно известное тождество (3) с тождеством Эйлера, но и дает надежду изучить ряд Ламберта $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\,\frac{x^n}{1-x^n}$ методами теории дзета-функции, на основе равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\,\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{\zeta'}{\zeta}(\lambda)\,\frac{x}{1-x}\,.\;\left(\lambda = -\,x\log x\,\frac{d}{dx}\right),$$

так как (как увидим ниже) свойства функции ζ от „функционального" аргумента совпадает со многими свойствами обычной дзета-функци. Для функциональной дзета-функции для случая $L_n = n^{-\lambda} = e^{-\lambda \log n}$ (след. $\zeta(s, L) = \zeta(s+\lambda)$) возможно найти в некоторых случаях аналитическое продолжение $\zeta(s+\lambda)$ внутрь „критической полосы", аналогично тому, как это делается в теории обычной дзета-функции. Прежде всего, определяя L_n для любого $u > 0$ (не только целого) формулой:

$$L_u f(x) = u^{-\lambda} f(x) = e^{-\lambda \log u} f(x) = f(x) - \frac{\log u}{1!}\,\lambda f(x) + \ldots$$

имеем тождество, аналогичное известному тождеству из теории обычной дзета-функции:

$$\zeta(s+\lambda) f(x) = \zeta(s, L) f(x) =$$

$$= \frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) - (s+\lambda)\int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}}\, L_u f(x)\, du \tag{4}$$

(см. напр. Ингам „Распределение простых чисел") где

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x)$$

определено как

$$(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^s} L_u f(x)\, du = (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{du}{u^{s+\lambda}} f(x)\, du$$

и $[u]$ означает целую часть u.

При этом делаются следующие предложения $u^\lambda f(x) = 0(u^{\sigma+\varepsilon})$, для каждой $f(x) \varepsilon F$, операцию λ можно переносить через знак интегралов для случая $R(s) > \sigma_0 + 1$ (дающего абсолютную сходимость всех интегралов), $R(s) > \sigma_0 + 1$ причем, естественно, значения этих интегралов и подинтегральных выражений предполагаются принадлежащими области определения оператора λ (иначе говоря все выражения, входящие в формулу, предполагаются имеющими смысл).

Кроме того, равенство:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\log n)^k}{k!} \lambda^{k+1} f(x) = \lambda \sum_{k=1}^\infty \frac{(-\log n)^k}{k!} \lambda^k f(x) \qquad (u > 0\ f(x) \varepsilon F)$$

предполагается справедливым, т. е. предполагяется, что к равномерно сходящемуся ряду для $u^{-\lambda} f(x)$ можно почленно применить операцию λ. Последнее будет наверное выполнено, если операцию λ можво применять по членно к абсолютно сходящмся рядам или тогда, когда в результате ее применения получится абсолютно сходящийся ряд. Для доказательства формулы, отметим, что

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\right] = \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^s}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\log u)^k}{k!} \lambda^k f(x)\right] =$$

$$= -\frac{s}{u^{s+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\log u)^k}{k!} \lambda^k f(x) - \frac{1}{u^{s+1}} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-\log u)^{k-1}}{k!} k\lambda^k f(x) =$$

$$= -(s+\lambda)\frac{1}{u^{s+\lambda+1}} f(x).$$

Рассматривая следующий интеграл, получим формулу (4):

$$(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1+\lambda}} f(x)\, du = \int_1^\infty (s+\lambda)\frac{u-[u]}{u^{s+1+\lambda}} f(x)\, du =$$

$$= (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\, du - \int_1^\infty (s+\lambda)\frac{[u]}{u^{s+1+\lambda}} f(x)\, du =$$

$$=(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}}\, t(x)\, du - \int_1^\infty [u]\frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+1}} f(x)\right] du =$$

$$=(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\, du - \int_1 \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\right] du -$$

$$-2\int_2^3 \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\right] du - \ldots\ldots =$$

$$=(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\, du - \left[\left(\frac{1}{2^{s+\lambda}} - \frac{1}{1^{s+\lambda}}\right)+\right.$$

$$\left. +2\left(\frac{1}{3^{s+\lambda}} - \frac{1}{2^{s+\lambda}}\right) + \ldots\ldots\right] f(x) =$$

$$=(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{1}{u^{s+\lambda}} f(x)\, du - \zeta(s+\lambda) f(x) \text{ ч. т. д.}$$

Выражение

$$\varphi(x)\ \frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) = (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{du}{u^{s+\lambda}} f(x)\, du$$

входящее в формулу (4) является при $R(x) > \sigma_0 + 1$ частным решением функционального уравнения:

$$(s+\lambda-1)\varphi(x) = (s+\lambda) f(x) \tag{5}$$

в самом деле:

$$(s+\lambda-1)\varphi(x) = (s+\lambda)\int_1^\infty (s+\lambda-1)\frac{du}{u^{s+\lambda}} f(x) = -$$

$$= -(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u^{s+\lambda-1}}\right] f(x) = (s+\lambda) f(x).$$

Второй член правой части формулы (4) имеет смысл не при $R(s) > \sigma_0 + 1$, но и при $R(s) > \sigma_0$ если оператор λ приложим к интегралу $\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+\lambda+1}}\, du$, при этом получается аналитическая от s

функция, и если, при этом, первый член правой части этой формулы аналитически продолжаем внутрь полосы $\sigma_0 < R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$, то тогда формула (4) дает аналитическое продолжение функциональной дзета-функции $\zeta(x+\lambda)$ определенной первоначально в области $R(s) > \sigma_0 + 1$, внутрь этой полосы. Вопрос об аналитическом продолжении функциональной дзета-функции, таким образом, связан с аналитическим продолжением одного из решений функционального уравнения (5) по параметру s. Возьмем, в частности, случай когда F есть множество функций определенных и регулярных, т. е. неограниченно дифференцируемых и разлагающихся в ряд Тейлора, при чем положим $\lambda = -x \log \frac{d}{dx}$.

В этом случае для $u > 1$ и $u^{-\lambda}(x) = f(x^u)$ формула (1) приобретает вид:

$$\zeta(s+\lambda) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n^s} =$$

$$= \frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) - (s+\lambda) \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{n^{s+1}} f(x^u)\, du \tag{6}$$

где

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) = (s+\lambda) \int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} f(x^u)\, du$$

$$= \left(s - x \log x \frac{d}{dx}\right) \int_1^{\infty} \frac{du}{u^s} f(x^u) = -\left(s - x \log x \frac{d}{dx}\right) \int_0^{x} \frac{(\log x)^{s-1} f(z)}{z (\log z)^s} dz$$

является решением линейного дифференциального уравнения:

$$(s+\lambda-1)\, y = (s+\lambda) f(x) \qquad \left(\lambda = -\log x \frac{d}{dx}\right)$$

и может быть получено из общего интеграла. Здесь $R(s) > 1$. Помножая обе части формулы (6) на $\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\lambda)\frac{s+\lambda-1}{s+\lambda}$ и пользуясь коммутативностью всех имеющихся здесь операторов получим:

$$= \frac{s+\lambda-1}{s+\lambda} \zeta'(s+\lambda) f(x) = + \frac{s+\lambda-1}{s+\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n\, f(x^n)}{n^s} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) f(x^n)}{n^s} - (s+\lambda-1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}} \sum \frac{f(x^{nu}) \Lambda(n)}{n^s}.$$

Здесь $\frac{s+\lambda-1}{s+\lambda}=(s+\lambda-1)(s+\lambda)^{-1}$ при чем $(s+\lambda)^{-1}$ понимается, как оператор обратный к $s+\lambda$ слева, т. е. удовлетворяющий условию $(s+\lambda)^{-1}[(s+\lambda)y(x)]=y(x)$.

Таким оператором будет, в случае, если интегралы

$\int\limits_0^k(\log t)^{-s}\frac{y(t)}{t\log t}dt$ и $\int\limits_0^x(\log t)^{-s}y'(t)\,dt$ существуют и

$[\log x)^{-s}y(x)]_{x=0}\doteq 0$.

$$(s+\lambda)^{-1}y(x)=-(\log x)^s\int\limits_0^x(\log t)^{-s}\frac{y(t)}{t\log t}dt \tag{7}$$

В самом деле

$$(s+\lambda)^{-1}[(s+\lambda)y(x)]=-(\log x)^s\int\limits_0^{\tilde{x}}(\log t^{-s})\frac{s\,y(t)-\log t\,y'(t)}{t\log t}dt=$$

$$=+(\log x)^s\int\limits_0^x d\left((\log t)^{-s}y(t)\right)=y(x).$$

Легко также, путем простых выкладок, убедиться в том, что построенный здесь оператор $(s+\lambda)^{-1}$ является так же обратным правым к $(s+\lambda)$, т. е.

$$(s+\lambda)[(s+\lambda)^{-1}y(x)]=$$

$$=\left(s-x\log x\frac{d}{dx}\right)\left[-(\log x)^s\int\limits_0^x(\log t)^{-s}\frac{y(t)}{t\log t}dt\right]=y(x)$$

легко проверить коммутативность оператора $\frac{s+\lambda-1}{s+\lambda}\doteq$ $=(s+\lambda-1)(s+\lambda)^{-1}=1-(s+\lambda)^{-1}$ с оператором L_n $(L_n\,y(x)=$ $=n^{-\lambda}y(x)=y(x^n))$ при всяком n, откуда автоматически вытекает коммутативность оператора $\frac{s+\lambda-1}{s+\lambda}=(s+\lambda-1)(s+\lambda)^{-1}=$ $=1-(s+\lambda)^{-1}$ со всеми фигурирующими здесь „функционально-операторными" рядами Дирихле. Также легко доказывается, что операторы $(s+\lambda)$ и L_n коммутируют. Здесь предполагается, что условия существования интегралов:

$$\int\limits_0^x(\log t)^{-s}\frac{y(t)}{t\log t}dt\,;\quad \int\limits_0^x(\log t)^{-s}\frac{y'(t)}{t\log t}dt\,;\quad [(\log x)^{-s}y(x)]_{x=0}=0$$

выполнения для

$$v(x) = (s+\lambda-1)^{-1} f(x) = \int_1^\infty \frac{f(x^u)\,du}{u^s}$$

и для

$$v(x) = \int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(x^n)\,du.$$

В этом случае получим следующее тождество

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(x^n) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^s}\left[(\log x)^s \int_0^x \frac{f(t^u)}{t\log t}(\log t)^{-s}\,dt + f(x^n)\right] +$$

$$+\left[(s-1) - x\log\frac{d}{dx}\right]\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}}\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(x^{nu})\,du \tag{8}$$

Полагая здесь $s=0$, $f(x)=x$, что возможно, так как формула (8), доказанная нами для $R(s)>1$ справедлива, в силу принципа аналитического продолжения и в этом случае. Тогда, обозначая через $\Phi(x)$ сумму $\sum_{n=1}^\infty \Lambda(n)x^n$, получим:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^\infty \log n\left[x^n + \int_0^x t^{n-1}\frac{dt}{\log t}\right] -$$

$$-\left[1 + x\log x\frac{d}{dx}\right]\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u}\Phi(x^u)\,du \tag{9}$$

Вывод формулы (6) можно цровести почти дословно, опустив предположение о неограниченном диференцировании функции $f(x)$ и заменив его предположением о существовании только первой производной. Из формулы (4) получим также, при соответствующих ограничениях, полагая

$\lambda = x\dfrac{d}{dx}$, $n^\lambda f(x) = f(nx)$ следующую формулу:

$$\zeta(s+\lambda)f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f(nx)}{n^s} = \frac{s+\lambda}{s+\lambda-1}f(x) +$$

$$-(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(ux)\, du \qquad (10)$$

где

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) = (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{f(ux)}{u^s}\, du$$

справедливую так же, как легко видеть, в предположении существования только первой производной. Здесь предполагается: $f(ux)=0$ (u^{σ_0}) при $\geqslant 1$ и $R(s) > \sigma_0 + 1$. Формула (10) подобно предыдущей, может быть, в некоторых частных случаях использована для аналитического продолжения по s функции $\zeta(s+\lambda) f(x)$ внутрь полосы $\sigma_0 < R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$. Это будет наверное, если

$$\frac{s+\lambda}{s+\lambda-1} f(x) = (s+\lambda)\int_1^\infty \frac{f(ux)}{u^s}\, du$$

аналитически продолжаемо внутрь указанной полосы и, если также

$$(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(nx)\, du$$

аналитически продолжаемо внутрь этой полосы.

Последнее условие не является само собой разумеющимся:

хотя интнгрия $\displaystyle\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(ux)\, du$ сходится и в указанной полосе, $\displaystyle(s+\lambda)\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(ux)\, du$ может и не существовать в этой полосе, т. к. $\lambda = x\dfrac{d}{dx}$ а интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(ux)\, dx$ может не иметь производной по x при $\sigma_0 < R(s \leqslant \sigma_0 + 1$. Из существования и равномерной сходимости интеграла будет всегда следовать его дифференцируемость по x, если рассматриваемая область изменения есть плоскость комплексного переменного, а $f(x)$ есть регулярная аналитическая функпия комплексного переменного x. Если $\lambda' = B\lambda B^{-1}$ где B есть некоторый дистрибутивный оператор, то легко видеть, что

$$L'_n = u^{\lambda'} = B u^{\lambda} B^{-1} = BL_u B^{-1}, \text{ т. к. } \lambda'^k = B\lambda^k B^{-1} \text{ и } u^{\lambda'} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log u)^k}{k!} \lambda'^k = B \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log u)^k}{k!} \lambda^k \right) B^{-1}$$

Таким образом, от любой из рассмотренных формул можно перейти ко многим, преобразовывая λ и L_u входящие в эти формулы при помощи произвольного линейного оператора B. Например, если $B^{-1} f(x) = f(\varphi(x))$, где $\varphi\ (x)$ заданная функция, имеющая обратную в данной области, то $B f(x) = f(\Psi(x))$ где $\varphi(\Psi(x)) = x(\Psi(x))$ и тогда, если $\lambda = x \dfrac{d}{dx}$ $L_u f(x) = f(ux)$ имеем:

$$\lambda' = B\lambda B^{-1} = -\Psi(x)\, \varphi'(\Psi(x)) \frac{d}{dx} = -\frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx}$$

и

$$L'_u f(x) = BL_u B^{-1} f(x) = f(\varphi(u\Psi(x)))$$

Формула (4) в применении к случаю $\lambda = \lambda'$ и $L = L'_u$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\varphi(n\Psi(x)))}{n^s} = \left(s - \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} \frac{d}{dx} \right) \int_1^{\infty} \frac{1}{u^s} f(\varphi(u\Psi(x)))\, du -$$

$$- \left[s - \Psi(x)\varphi'(\Psi(x)) \frac{d}{dx} \right] \cdot \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}} f(\varphi(u\Psi(x))\, du$$

или

$$\zeta(s+\lambda') f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\varphi(n\Psi(x)))}{n^s} = \frac{s+\lambda'}{s+\lambda'-1} f(x) -$$

$$-(s+\lambda') \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u^{s+1}} L'_u f(x)\, du \qquad (11)$$

Умножая обе части последоего тождества (в смысле композиции преобразований) на $-\dfrac{s+\lambda'-1}{s+\lambda'} \dfrac{\zeta'(s+\lambda')}{\zeta(s+\lambda')}$ где $\dfrac{s+\lambda'-1}{s+\lambda'}$ есть оператор обратный к $\dfrac{s+\lambda'}{s+\lambda'-1}$ (Здесь $\dfrac{s+\lambda'-1}{s+\lambda'}$ понимается, как оператор $(s+\lambda'-1)(s+\lambda')^{-1}$ где $(s+\lambda')^{-1}$ означает оператор обратный слева к $s+\lambda'$, т. е, $(s+\lambda')^{-1}[(s+\lambda')\, y(x)] = y(x)$

Таким оператором будет для любого $y(x)$ для которого интегралы $\int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} (\Psi(t)^{-s-1}\Psi'(t)\, y(t)\, dt$ и $\int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} \Psi(t)^{-s} y'(t)\, dt$ будуть сходящимися и для которых $\Big[[\Psi(x)^{-s} y(x)\Big]_{x=\varphi(-\infty)} = 0$ следующий оператор:

$$(s+\lambda)^{-1} y(x) = -\Psi(x)^s \int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} \Psi(t)^{-s-1}\, \Psi'(t)\, y(t)\, dt$$

как в этом нетрудно убедиться, производя элементарные выкладки, аналогичные ранее проделанным. Также легко убедиться в коммутативности всех фигурирующих здесь операторов между собою), и пользуясь коммутативностью всех фигурирующих здесь операторов, получим:

$$\sum_{n-1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\varphi(n\,\Psi(x))) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} \Big[f(\varphi(n\,\Psi(x))) +$$

$$+ (\Psi(x))^s \int\limits_{\varphi(-\infty)}^{x} f(\varphi(n\,\Psi(x))\, \Psi(x)^{-s} \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} dx) \Big] +$$

$$+ \Big(s-1-\frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)}\frac{d}{dx}\Big) \int\limits_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(\varphi(nu\,\Psi(x))) \Big] du \quad (12)$$

В случае $\varphi = (x) = \Psi(x) = x$ получим, в частности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} \Big[f(nx) + x^s \int\limits_{\infty}^{x} f(nx)\, x^{-s-1} dx +$$

$$+ \Big(s-1-x\frac{d}{dx}\Big) \int\limits_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u} \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} f(nux)\, du \qquad (13)$$

где $f(x)$ любая функция, имеющая первую производную, $lim \Big[f(t)\, t^{-1}\Big]_{t\longrightarrow-\infty} = 0$ и такая, что все ряды и интегралы, входящие в формулу, сходятся абсолютно и равномерно в отношении в рассматриваемой области, в частности при $R(s) \geqslant 1+\varepsilon(\varepsilon>0)\, x<0$

Еще специальнее, в случае $f(x)=\sin xe^{\delta x} R(s)\geqslant 1+\varepsilon.\, x<0$, получаем, после небольших упрощений.

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\sin(nx)\,e^{nx\delta}=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^s}\Big[\sin nxe^{nx\delta}+$$

$$|x|^s\int_{-x}^{\infty}\sin nxe^{-nx\delta}x^{-s-1}dx\Big]+$$

$$+\left(s-1\,x-\frac{d}{dx}\right)\int_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{nxu\delta}\sin(nux)\Big]du \tag{14}$$

При $-1<R(s)<0$, — выражая x^{-s-1} в форме $\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{\infty}e^{-tx}t^s\,dt$

и производя перемену в порядке интегрирования:

$$|x|^s\int_1^{\infty}\sin nxe^{nx\delta}x^{-s-1}dx=$$

$$=\frac{|x|^s}{\Gamma(s+1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{xt+xn\delta}[n\cos nx-(t+n\delta)\sin(nx)]}{(t+n\delta)^2+n^2}t^s\,dt \tag{15}$$

Правая часть равенства (15) дает аналитическое продолжение по левой части в области $R(s)>-1$ Положим, для сокращения:

$$\Phi_n(x,x,\delta)=|x|^s\int_{-x}^{\infty}\sin nx\,x^{-s-1}e^{-nx\delta}dx=$$

$$=\frac{|x|^s}{\Gamma(s+1)}\int_0^{\infty}\frac{e^{x(t+n\delta)}(n\cos nx-(t+n\delta)\sin nx)}{(t+n\delta)^2+n^2}t^s dt \tag{16}$$

Очевидно, что обе части формулы (16) определяют $\Phi_n(x,s,\delta)$ при $x<0.\ \delta>0$, как целую функцию от s

Формула (16) теперь приобретает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}e^{nx\delta}\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\Big[\sin nxe^{nx\delta}+$$

$$+\Phi_n(x,s,\delta)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{u-[u]}{u}\Big[(s-1)e^{nux\delta}\sin(nux)-$$

$$-x\,nu\delta\sin(nux)\,e^{nux}-nux\cos(nux)\,e^{nux\delta}\Big]du \tag{17}$$

Помножая обе части последнего равенства на $\sin x$ и интегрируя в пределах от -2π до $-\pi$, получим, после элементарных упрощений:

$$\delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{s-1}} \frac{2\,n\,[(-1)^{n-1} e^{-n\pi\delta} - e^{-2n\pi\delta}]}{[(n-1)^2 + n^2\delta^2][(n+1)^3 n^2 \delta^2]} =$$

$$= \delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{s-1}} \frac{2\,n\,[(-1)^{n-1} e^{-n\pi\delta} - e^{-2\pi n\delta})}{[(n-1)^2 + n^2\delta][(n+1)^2 + n^2\delta]} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} \int_{-2\pi}^{-\pi} Ф_n(x,s,\delta) \sin x\, dx +$$

$$+ \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u} \left[\sum_{n=1}^{\infty} F_n(s,\delta,u) \frac{(u)}{u^s} \right] du \qquad (18)$$

Здесь $F_n(s,\delta,u)$ для сокращения, положено, вместо громоздкого, но элементарного выражения, возникающего в процесса интегрирования. Переходя в формуле (18) к пределу при $\to 0$ и замечая, что левая часть и первая сумма правой части равенства (18) стремятся при $\delta \to 0$ к нулю, получим:

$$\lim \int_1^{\infty} \frac{u-[u]}{u} \left| \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} F(s,\delta,u) \right| du =$$

$$= \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} \frac{1}{\Gamma(s+1)} \times$$

$$\times \int_{-2\pi}^{-\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{xt}(n \cos nx - t \sin nx)}{t^2+n^2} |x|^s \sin x\, t^s\, dx dt \quad (19)$$

Другие примеры последовательной функциональных операторов, обладающих M—свойством, получим, полагая:

$$L_n f(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^k}{k!} K^{(k)}(x,t) f(t)\, dt$$

где $K^{(k)}(x,y)$ означает последовательные итерации заданного ядра $K(x,y)$ Полагая

$$\sum_{m\sim 1}^{\infty} \frac{(-\log n)^m}{m!} K^{(m)}(x,y) = k_n(x,y)$$

получаем

$$L_n f(x) = f(x) + \int_a^b K_n(xt) f(t)\, dt$$

Пользуясь известным свойством итерированных ядер: $\int_a^b K^{(p)}(x,t)\, K^{(q)}(t,y)\, ds = K^{(p+q)}(x,y)$ легко доказать здесь наличие M — свойства.

Получая

$$(-\lambda) f(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt$$

имеем

$$(-\lambda)^m f(x) = \int_a^b K^{(m)}(x,t) f(t)\, dt$$

Легко видеть, что тогда

$$L_n f(x) = n^{-\lambda} f(x) = f(x) + \int_a^b K_n(x,t) f(t)\, dt$$

откуда M—свойство становится очевидным.

Здесь $\zeta(s+\lambda) f(x)$ равно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n f(x)}{n^s} = \zeta(s) f(x) + \int_a^b H(x,t,s) f(t)\, dt$$

и

$$\zeta'(s+\lambda) f(x) = \zeta'(s) f(x) + \int_a^b G(x,t,s) f(t)\, dt$$

где

$$H(x,y,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(x,y)}{n^s}$$

и

$$G(x,t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} K_n(x,y)$$

Тождество Эйлера для функциональной дзета—функции дает

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}\left[\varphi_s(x)+\int_a^b K_n(x,t)\ \varphi_s(t)\,dt\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\left[f(x)+\int_a^b K_n(x,t)\,f(t)\,dt\ \right]$$

где $f(x)$ некоторая данная функция, для которой рассматриваемые здесь ряды сходятся абсолютно п равномерно а $\varphi_s(x)$ есть решение интегрального уравнения

$$\varphi_s(x)+\int_a^b H(x,t,s)\ \varphi_s\ (t)\,dt=f(x)$$

при чем, очевидно, что

$$\varphi_s(x)=\frac{1}{\zeta(s)}\ f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\int_a^b K_n(x,t)\,f(t)\,dt$$

Еще один пример функциональной дзета-функции получим, полагая

$$L_u f(x)=\sum_{u=1}^{\infty}\frac{(\log n)^k}{k!}f(s+k\omega);\zeta(s+\lambda)\,f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n f(x)}{n^s}$$

где ω—заданное число.

Функциональное уравнение для функциональной дзета функции

Рассмотрим дистрибутивный функциональный оператор определенный на функциональном множестве F, отображающий множестве F, отображающий множество F в множество F. Положим, как и выше

$$L_u f(x)=u^{-\lambda}f(x)=\sum_{u=1}^{\infty}\frac{\lambda^k f(x)}{k!}\Big(-\log u\Big)^k$$

где $u>0\ f(x)\in F\ \lambda, f(x)\in F$ и предположим, что ряд записанный справа сходится абсолютно и почленное применение к нему операции $\lambda^m\ (m\geqslant 1)$ всегда законно. Кроме того, допустим, что для любой $f(x)\in F$

$$L_u f(x)=O(u^{\sigma_0})\ \text{ и }\ L_u f(x)\in F$$

Тогда ряд: $\zeta(s+\lambda) f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n f(x)}{n^s}$ будет сходящимся при $R(s)>\sigma_0+1$, $f(x)\in F$ и мы предположим здесь, как и всюду раньше, что к этому ряду можно почленно применять оператор λ^m, L_u и дальнейшие и что сумма этого ряда входит в F.

Предположим делее:

$$L_u f(x)=O(u^{-\sigma_1})$$

при $u\to 0$, где $\sigma_1>0$ и $f(x)\in F$ Введем линейный функциональный оператор $\Gamma(s+\lambda)$, определив его формулой:

$$\Gamma(s+\lambda)f(x)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{s+\lambda-1} f(x)\,dt=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, L_{\frac{1}{t}} f(x)\,dx$$

Очевидно, что $\Gamma(s+\lambda)$ всегда имеет смысл при $R(s)>\sigma_1$ Легко доказать формулу:

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\frac{L_n f(x)}{n^s}=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}\; t^{\frac{\lambda+s}{2}-1} f(x)\,dt \tag{20}$$

при $R(s)>\sigma_1$ предположив, что оператор $\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}=\pi^{\frac{s}{2}} L_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$ можно переносить через знаки последнего интеграла. В самом деле:

$$\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}\; t^{\frac{s}{2}-1}\; L_{t^{-\frac{1}{2}}} f(x)\,dt=\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}\,\pi^{\frac{s}{2}}\, t^{\frac{s}{2}-1}\, L_{(\pi t)^{-\frac{1}{2}}} f(x)\,dt$$

Подстановкой $\pi n^2 t=t'$ получим далее:

$$\pi^{\frac{s+\lambda}{1}}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}\; t^{\frac{s}{2}-1}\; L_{t^{-\frac{1}{2}}}\, f(x)\,dt=\frac{1}{n^s}\int_0^\infty e^{-t}\; t^{\frac{s}{2}-1}\, L_{t^{-\frac{1}{2}}n} f(x)\,dt=$$

$$=\frac{1}{n^s}\int_0^\infty e^{-t}\; t^{\frac{s}{2}-1}\; L_{t^{-\frac{1}{2}}}\, L_n f(x)\;dt=\frac{1}{n^s}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right) L_n f(x)\quad \text{и т. д.}$$

Здесь мы двукратно использовали M—свойство: $L_a L_b=L_{ab}$ Предполагая законность почленного применения операторов $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)$, $\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}$ рассматриваемым рядом, получим, путем суммирования обоих частей равенства (20) по n от единицы до бесконечности:

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\Theta(t)t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt \qquad (21)$$

где $\Theta(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}$ На основании известного функционального уравнения для тэта-функции имеем:

$$\Theta(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\Theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Отсюда получаем:

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_{0}^{1}\Theta(t)t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt+$$

$$+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\Theta(t)t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\left(-\frac{1}{s+\lambda}+\frac{1}{s-1+\lambda}\right)f(x)+$$

$$+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_{0}^{1}\Theta\left(\frac{1}{t}\right)t^{\frac{s-1+\lambda}{1}}f(x)\,dt+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_{1}^{\infty}\Theta(t)t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)\,dt$$

Здесь $\left(-\frac{1}{s+\lambda}+\frac{1}{s-1+\lambda}\right)f(x)=\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ означает интеграл $\int\limits_{0}^{1}\left[-\frac{1}{2}t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}+\frac{1}{2}t^{\frac{s-1+\lambda}{2}-1}\right]f(x)\,dt$ являющийся, как нетрудно видеть одним из решений функционального уравнения:

$$(s+\lambda(s+\lambda-1)\,y(x)=f(x) \qquad (22)$$

Производя замену переменной интегрировании: $t'=\frac{1}{t}$ получим:

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)=\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\frac{1}{(s+\lambda\,(s+\lambda-1)}f(x)+$$

$$+\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}\int\limits_{1}^{\infty}\Theta(t)\left(t^{\frac{1-s+\lambda}{2}-1}+t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}\right)f(x)\,dt \qquad (23)$$

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)\,f(x)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\,f(x)=$$

$$=\int\limits_1^\infty \Theta(t)\left[\,t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}+t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}\right]f(x)dt \tag{24}$$

Последний интеграл существует во всей плоскости комплексного переменного s, так как ($\Theta(t)$ убывает при $t\to 0$ показательному закону и представляет, поэтому аналитическое продолжение оператора $\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}$ на всю плоскость. Предполагая, что оператор $\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}=-$ $=-\frac{1}{(s+\lambda)(1-s-\lambda)}$ может быть аналитически продолжен на всю плоскость комплексного переменного (т. е, предполагая, что $\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=F(x,s)$ продолжаемо по s на всю плоскость s при любой $f(x)\varepsilon F$ получим аналитическое продолжение $\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)$ Если мы предложим, что не только произведение $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)$, но и отдельные сомножители $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)$ и $\zeta(s+\lambda)$, продолжаемы и что, кроме того, существует $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$, как регулярный[1]) оператор, приложимый к $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)$ и обратный $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)$, то помножая обе

---

[1]) Оператор A_s, определенный на F мы называем регулярным, если для любой $f(x)$ есть регулярная (голоморфная) ф-ия s.

части формулы (24) на $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}\pi^{\frac{s+\lambda}{2}}$, получим формулу, дающую аналитическое продолжение $\zeta(s+\lambda)$ во всю плоскость комплексного переменного s. Заменяя в предыдущих рассуждениях оператор λ на $-\lambda$ и комплексный параметр s на $1-s$ и предполагая при этом, что все предыдущие условия выполнены: $\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)$ аналитически продолжаем на всю плоскость s на соответствующем функциональном множестве и т д. получим:

$$\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda)f(x)-$$

$$-\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)=$$

$$=\int\limits_{1}^{\infty}\Theta(t)\left[t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}+t^{\frac{s+\lambda}{2}}\right]f(x)dt \tag{25}$$

где $\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f$ означает или значения суммы интегралов $=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{-s-\lambda}{2}-1}f(x)dt$ или, если по крайней мере один из интегралов перестает сходится, сумму аналитических придолжений слагаемых этой суммы, подобно тому, как через $\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ была обозначена сумма двух интегралов и аналитическое продолжение этой суммы

$$\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{s+\lambda-1}{2}}f(x)dt$$

Заметим, что в общем случае, $\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ и $\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)$ не равны тождественно, как это будет, если λ—число.

Сопоставляя формулы (24) и (25), получим функциональное уравнение для фукциональной дзета функции, аналогичное функциональному уравнению Римана для обычной дзета функции Римана:

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)-\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}=$$

$$=\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda)-\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*} \qquad (26)$$

Это уравнение приобретает простой вид, полностью аналогичный виду функционального уравнения для обычной дзета функции:

$$\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)=\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda) \qquad (27)$$

в случае, если тождественно $\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)=$

$=\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)$, т. е. если тождественно

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s+\lambda-1}{2}-1}f(x)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1-s-\lambda}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt \qquad (28)$$

где значения интегралов понимаются обычно, если интегралы сходятся и как аналитические продолжения интегралов в случае их расходимости.

Подставляя $t=\frac{1}{t'}$ в интегралы правой части равенства (28) убеждается что оно принимает вид:

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt-\frac{1}{2}\int_1^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1}f(x)dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_2^1 t^{\frac{s+\lambda-1}{2}-1}f(x)dt+\frac{1}{2}\int_1^\infty t^{\frac{s+\lambda-1}{2}-1}f(x)dt=0.$$

Заметим, что сумму интегралов $\int\limits_0 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt +$ $+\int\limits_1^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt$ нельзя, вообще говоря, обозначить, как интеграл $\int\limits_0^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt$ Это можно сделать, если у областей первоначального определения интегралов $\int\limits_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt$ и $\int\limits_1^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt$ (до аналитического продолжения) есть общая часть, т. е. если существует область значений в который интеграл $\int\limits_0^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt$ будет сходится. Это последнее обстоятельство не всегда имеет место: $\int\limits_0^\infty t^s dt$ расходится при любом s, в то время ка интегралы $\int\limits_0^1 t^s dt$ и $\int\limits_1^\infty t^s dt$ сходятся в соответствующих областях и продолжаемы на всю плоскость. Предполагая существование области сходимости у интеграла $\int\limits_0^\infty t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt$ и определяя $\Phi(f(x), s)$, как значение этого интеграла или его аналитического продолжения, мы можем условие, при котором уравнение (26) принимает формулу (27), записать в виде условия

$$\Phi(f(x), s) - \Phi(f(x), s-1) = 0 \quad (f(x) \in F) \tag{28}$$

Нетрудно убедиться иутем элементарных выкладок. что все операторы, входящие в формулы (26) и 27) между себой коммутируют. Для любого регулярного в данной часту плоскости комплексного переменного. линейного оператора A_s (т. е. для любого линейного оператора, для которого $A_s f(x)$ при $(f(x) \in F$ будет регулярной функцией комплексного параметра s) можно определить также регулярный и линейный в той же части плоскости s оператор A'_s по формуле

$$A'_s f(x) = \frac{d}{ds} A_s f(x)$$

При этом при ограничениях весьма общего характера легко вывести правило дифференцирования:

$$(A_s B_s)' = A'_s B_s + A_s B'_s$$

В самом деле:

$$A_{s+\Delta s} B_{s+\Delta s} f(x) - A_s B_s f(x) = A_{s+\Delta s}[B_s f(x) + \Delta B_s f(x)] - A_s B_s f(x)] =$$
$$= A_{+s\Delta s} B_s f(x) + A_{s+\Delta s}[\Delta B_s f(x)] - A_s B_s f(x) = \Delta A_s [B_s f(x)] +$$
$$+ A_{s+\Delta s}[\Delta B_s f(x)]$$

Отсюда:

$$\frac{(A_{s+\Delta s} B_{s+\Delta s} - A_s B_s) f(x)}{\Delta s} = \frac{\Delta A_s [B_s f(x)]}{\Delta s} + A_{s+\Delta s}\left[\frac{\Delta B_s f(x)}{\Delta s}\right]$$

Устремляя здесь Δs к нулю, получаем требуемый результат [1]). Предполагая условие (28) выполненным и допуская, что регулярные и коммутирующие со всеми здесь рассматриваемыми операторами, операторы $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$ и $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}$ обратные к $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)$ существуют, мы убеждаемся из формулы (27), что если для $\zeta(s+\lambda)$ в некоторой области существует обратный оператор, то в той же области существует и регулярный оператор обратный к $\zeta(1-s-\lambda)$ в той же области. В частности для $\zeta(s+\lambda)$ существует обратный оператор в области. $R(s) < -\sigma$, а для $(\zeta(s-\lambda)$ в области $R(s) > \sigma_1 + 1$ и $R(s) < -\sigma_0$ Вопрос о существовании обратного к $\zeta(s+\lambda)$ регулярного оператора в „критической полосе"$-\sigma_1 \leqslant R(s) \leqslant \sigma_0 + 1$ не менее труден, в общем случае чем вопрос о нулях дзета-функции Римана. Дифференцируя обе части формулы (27) по s, пользуясь при этом выведенным выше правилом дифференцирования произведения и помножая результат дифференцирования на оператор обратный к обоим частям равенства (27) получим функциональ-

---

[1]) Здесь предполагается что предельный переход: $\lim A_{s+\Delta s}\left[\frac{\Delta B_s f(x)}{\Delta s}\right] = A_s [B'_s f(x)]$ законен, что является дополнительным допущением.

ное уравнение для логарифмической производной функциональной дзета-функции:

$$\frac{\zeta'(s+\lambda)}{\zeta(s+\lambda)}+\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}=\log\pi-\frac{\zeta'(1-s-\lambda)}{\zeta(1-s-\lambda)}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)} \tag{29}$$

Заметим, что здесь $\frac{1}{\zeta(s+\lambda)}$ и $\frac{1}{\zeta(s-\lambda)}$ в областях $R(s)<-\sigma$: и $R(s)<-\sigma_0$ не могут быть рассматриваемы, вообще говоря, как аналитические продолжения этих функций из области их первоначального определения, как это имеет место для прямых дзета-функций. Это будет верно, если критические полосы, через которые прямые дзета функции могут быть, при всех сделанных выше предположениях, продолжены аналитические не содержит купюр для обратных дзета функций, т. е. если существует для каждой $f(x)\varepsilon F$ по крайней мере одна линия, пересекающая критическую полосу, по которой можно продолжить $\frac{1}{\zeta(s+\lambda)}f(x)$, $\frac{1}{\zeta(1-s-\lambda)}f(x)$ по s.

Предложение о возможности аналитического продолжения $\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)$ на всю плоскость комплексного переменного фактически во многих конкретных случаях выполняется, при чем большую роль играет здесь функциональное уравнение для „функциональной“ гамма функции $\Gamma(s+\lambda+1)=(s+\lambda)\Gamma(s+\lambda)$ которое нетрудно доказать. Предположение о существовании $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$ и $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}$ также часто фактически выполняется, так что перечисленные выше ограничения гораздо менее узки, чем это может показаться. Соотношение (29) в случае, если и $\frac{\zeta'(s+\lambda)}{\zeta(s+\lambda)}f(x)$ и $\frac{\zeta'(1-s-\lambda)}{\zeta(1-s-\lambda)}f(x)$ могут быть разложены в сходящийся ряд, дают тождество, связывающее два ряда распространенного на простые числа и является неистощимым источником для получения таких тождеств. Дли логарифмической производной функциональной дзета-функции справедлива для многих выборов λ формула Дирихле:

$$\frac{\Gamma'(s+\lambda)}{\Gamma(s+\lambda)} f(x) = \int_0^\infty \left\{ e^{-t} f(x) - \frac{1}{(1+t)^{s+\lambda}} f(x) \right\} \frac{dt}{t} \tag{30}$$

где, как и всюду $\frac{\Gamma'(s+\lambda)}{\Gamma(s+\lambda)} = \Gamma'(s+\lambda)\Gamma(s+\lambda)^{-1}$ есть результат композиции оператора $\Gamma'(s+\lambda)$ с оператором обратным к $\Gamma(s+\lambda)$. В частности формула справедлива в денной области значений s, если интеграл правой части формулы сходится абсолютно в указанной части плоскости и $\Gamma(s+\lambda) \int^\infty \left[e^{-t} f(x) - \frac{1}{(1+t)^{s+\lambda}} f(x) \right] \frac{dt}{t}$ всегда принадлежит области определения оператора $\frac{1}{\Gamma(s+\lambda)}$

Тогда формула (30) Дирихле выводится путем совершенно аналогичным выводу обычной формылы Дирихле. Применим теперь все предылущие рассуждения к случаю

$$\lambda = -x\frac{d}{dx}, \ L_u f(x) = f(ux)$$

В этом случае:

$$\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right) f(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}} f\left(x\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt \tag{31}$$

$$\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right) f(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} f(x\sqrt{t})\, dt \tag{32}$$

Операторы $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)}$ и $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)}$ означают соответственно решение уравнение:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} y\left(x\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = f(x) \tag{33}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1-s}{2}-1} \, y(x\sqrt{t})dt = f(x) \tag{34}$$

и их аналитическое продолжение.

Оба уравнения легко сводятся к уравнению Лапласа:

$$\int_0^\infty e^{-tu} y(t)dt = f(u)$$

(См. Widder „The inversion of the Laplace integral and the related moment problem" Trans, of the Am. Math. Society № 35 p.p. 107—201).

Можно показать, что в указанном случае $\lambda = -x \dfrac{d}{dx}$ условия приложимости формулы (27), как привило выполняются, кроме условия (28), которое представляет собой специальное ограничение накладываемое на функцию $f(x)$ Здесь оно имеет вид:

$\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} f\left(x \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ (где $\int_0^\infty$ понимается, как сумма

$\int_0^1 + \int_1^\infty$, а каждый из последних интегралов понимается или

обычно в случае сходимости или как аналитическое продолжение) есть всегда переодическая, с периодом 1 функция от s. Особо интересен при этом случай когда существует область совместной сходимости рядов: $\sum_{n=1}^\infty \frac{f(nx)}{n^s} \Lambda(n)$ и $\sum_{n=1}^\infty \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{n^s} \Lambda(n)$. Тогда, при наличии всех выше перечисленных условий получается простое соотношение между этими рядами и интегралами

$$\int_0^\infty \left[e^{-t} f(x) - \frac{1}{(1+t)^{\frac{s}{2}}} f(x\sqrt{1+t}) \right] \frac{dt}{t},$$

$$\int_0^\infty \left[e^{-t} f(x) - \frac{1}{(1+t)^{\frac{1-s}{2}}} f\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}\right) \right] \frac{dt}{t}$$

На детальном рассмотрении подобных тождеств я думаю остановиться в следующей работе. Замечу только, что условие дифференцируемости не существенно, так как фактически приходиться рассматривать не

$$\lambda = -x\frac{d}{dx} \quad \text{а} \quad L_u f(x) = f(xu).$$

Если мы помножим обе части равенства (26) на $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$ и допустим при этом, что операторы $(s+\lambda)$ и $(s+\lambda-1)$ можно переносить через знак $\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x)$ и $\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^* f(x)$ то получим:

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}f(x) =$$

$$= (s+\lambda)(s+\lambda-1)\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s+\lambda}{2}-1} f(x)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s-1+\lambda}{2}-1} f(x)dt\right] =$$

$$= (s+\lambda)(s+\lambda-1)\left[-\int_0^1 t^{s+\lambda-1} f(x)dt + \int_0^1 t^{s+\lambda-2} f(x)dt\right] =$$

$$= -(s+\lambda-1)\int_0^1 (s+\lambda)\, t^{s+\lambda-1} f(x)dt +$$

$$+ (s+\lambda)\int_0^1 (s+\lambda-1)\, t^{s+\lambda-2} f(x)dt = -$$

$$= -(s+\lambda-1)\int_0^1 d\left[t^{s+\lambda} f(x)\right] + (s+\lambda)\int_0^1 d\left[t^{s+\lambda-1} f(x)\right] = f(x)$$

Аналогичным образом получим:

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^* f(x) = f(x)$$

Следовательно, помножая (26) на $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$ получим

$$(s+\lambda)(s+\lambda-1)\,\zeta(s+\lambda)\,\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\pi^{-\frac{s+\lambda}{2}} =$$

$$= (s+\lambda)(s+\lambda-1)\,\zeta(1-s-\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\pi^{\frac{1-s-\lambda}{2}} \qquad (35)$$

Взяв логарифмическую производную от обоих частей этого равенства получим (29). Неудобство последнего рассуждения связано с необходимостью предполагать, что все слагаемые обоих частей равенства:

$$\pi^{-\frac{1-\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{2}\right)\zeta(s+\lambda)f(x)-\frac{1}{(s+\lambda(s+\lambda-1)}f(x)=$$

$$=\pi^{-\frac{1-s-\lambda}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s-\lambda}{2}\right)\zeta(1-s-\lambda)f(x)-\left[\frac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}\right]^{*}f(x)$$

входят в область определения оператора $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$ и при этом оператор $\dfrac{1}{(s+\lambda)(s+\lambda-1)}$ приложим ко всем рассматриваемым здесь функциям и коммутирует со всеми здесь фигурирующими операторами.

В случае $\lambda=-x\dfrac{d}{dx}$ это рассуждение позволит нам в известных случаях доказать (35) и след. (29) пользуясь (26) без дополнительного ограничения накладываемого равенством (28), но зато при этом придется вводить дополнительные ограничения другого порядка, в частности рассмотрение $(s+\lambda)(s+\lambda-1)$ требует двукратной дифференцируемости $f(x)$ то время как формула (29) может быть доказана в некоторых случаях без предположений о дифференцируемости, если (28) имеет место.

Особенно интересно было бы доказать законность формулы (29) для случая, когда $f(x)$ обращается в нуль при достаточно больших и достаточно малых значениях x. Тогда $(L_n f(x)=f(nx))$ формула (29) дала бы соотношение между конечными суммами, распространенными на простые числа и интегралами, не связанными с простыми числами. Можно во всех рассматриваемых случаях взять вместо $\zeta(s+\lambda)$ функцию $L(s+\lambda,\chi)=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\chi(n)}{n^{s+\lambda}}$ где χ—характер Дирихле по модулю K и доказать функциональное уравнение, выражающее $L(s+\lambda,\chi)$ через $L(1-s-\lambda,\bar{\chi})$ и „функциональную" гамма-функцию. Ср. Ландау „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I Bd. стр. 486). Отмечу, что в этой работе основная мысль: рассмотреть тождество Эйлера для функциальных операторов—принадлежит проф. Шнирельману, все конкретные формулы и все дальнейшие соображения здесь рассмотренные даны автором настоящей работы.

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С. Н. Бернштейн (Ленинград)

1. Одной из самых фундаментальных теорем теории вероятностей является следующая теорема, доказанная А. М. Ляпуновым в 1901-м году:

ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА.

Пусть $$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

будет суммой независимых случайных величин x_i, *причем*

$$M.o.x_i = a_i,\ M.o.(x_i - a_i)^2 = b_i,\ A_n = \sum_1^n a_i,\quad B_n = \sum_1^n b_i.$$

Если для некоторого $\delta > 0$, $M.O.(x_i - a_i)^{2(1+\delta)} = C_{i,\delta}$ и

$$M_{n\delta} = \frac{\sum\limits_1^n c_{i\delta}}{B_n^{1+\delta}} \to 0 \qquad (I)$$

стремится к нулю с возрастанием n, *то вероятность* $F_n(t)$ *неравенства*

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} < t \quad (-\infty < t < \infty)$$

равномерно стремится к пределу

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \qquad (1)$$

Как замечает Ляпунов, если $M_{n,\delta} \to 0$ для некоторого данного δ, то тем более $M_{n,h} \to 0$ при любом положительном $h < \delta$. В настоящее время известны более общие формулировки этой предельной теоремы.

Наиболее общая формулировка [1]) предельной теоремы дана в моей статье „Sur l'extension du thèoréme limite du calcul des probabilités aux sommes de quantitès dèpendantes“ (Math. Ann., 1926.

---

[1]) Впоследствии равнозначная формулировка была дана Feller'ом в 1935 г. (Math. Zeitschrift, B. 40).

В. 97), где намечено весьма простое рассуждение, показывающее, что это обобщение является почти очевидным следствием из теоремы Ляпунова.

2. Я воспроизведу здесь в несколько более развернутом виде данное в упомянутой статье (стр. 12) доказательство, которое затем было распространено мной на случай почти независимых величин (стр. 23—24).

Из теоремы Ляпунова, как легко видеть, и как было замечено самим Ляпуновым, вытекает

Следствие I. Если все $|x_i| \leqslant L$, то

$$|F_n(t) - G(t)| < \varphi\left(\frac{L}{\sqrt{B_n}}\right)$$

где $\varphi(\delta)$ функция стремящаяся к нулю вместе с δ. Это вытекает из того, что $C_{i,\delta} \leqslant b_i\,(2L)^{2\delta}$.

Следствие II. Пусть

$$S_n = \sum_1^n x_i\,,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любая последовательность независимых случайных величин; пусть L_n будет какая нибудь последовательность чисел, возрастающих вместе с n; пусть $\chi_{i,Ln} = x_i$, когда $|x_i| \leqslant L_n$ и $\chi_{i,Ln} = 0$, когда $|x_i| > L_n$; пусть $E_{i,Ln}$ есть вероятность неравенства $|x_i| > L_n$, $\varepsilon(L_n) = \sum\limits_1^n E_{i,Ln}$, $a_{i,Ln} = M.o.\chi_{i,Ln}$, $b_{i,Ln} =$

$$= M.o.(\chi_{i,Ln} - a_{i,n})^2{}_L, A_{n,Ln} = \sum_1^n a_{i,Ln}, B_{n,Ln} = \sum_1^n b_{i,Ln}$$

В таком случае, вероятность $F_n(t)$, что

$$\frac{S_n - A_{n,Ln}}{\sqrt{B_{n,Ln}}} < t \tag{2}$$

удовлетворяет неравенству

$$|F_n(t) - G(t)| < \varphi\left(\frac{L_n}{\sqrt{B_{n,Ln}}}\right) + \varepsilon(L_n). \tag{3}$$

Действительно, благодаря следствию I, вероятность

$$F_n(t, L_n), \quad \text{что}$$

$$\frac{\sum\limits_1^n x_i h_n - A_{n,Ln}}{\sqrt{B_{n,Ln}}} < t \tag{4}$$

удовлетворяет неравенству

$$|F_n(t, L_n) - G(t)| < \varphi\left(\frac{L_n}{\sqrt{B_{n,Ln}}}\right) \tag{5}$$

Но, с другой стороны, вероятность, что $S_n \lessgtr \sum_1^n \chi_{i,Ln}$ меньше, чем $\varepsilon(L_n) = \sum_1^n \vartheta_{i,Ln}$ поэтому, замечая, что неравенства (2) и (4) тождественны, когда $S_n = \sum_1^n \chi_{i,Ln}$ заключаем, что $|F_n(t) - F_n(t, L_n)| < \varepsilon(L_n)$; откуда, вследствие (5), получаем (3).

Из следствия II непосредственно вытекает

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА (Ляпунова). *Если сумма $S_n = \sum_1^n x_i$ независимых величин x_i такова, что при $n \to \infty$ существуют такие L_n, что $\tau_n = \frac{L_n}{\sqrt{B_{n,Ln}}}$ и $\varepsilon(L_n)$ одновременно стремятся к нулю, то вероятность $F_n(t)$, что*

$$\frac{S_n - A_{n,Ln}}{\sqrt{B_{n,Ln}}} < t \tag{2}$$

равномерно стремится к $G(t)$ (нормированному закону Гаусса).

Действительно, если соблюдены условия теоремы, то вторая часть неравенства (3) $\varphi(\tau_n) + \varepsilon(L_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$

Введя интегральные функции распределения вероятностей $\psi_k(x)$ величин x_k, можно условие нашей теоремы представить в следующем виде. Для применимости предельной теоремы достаточно, чтобы при соответствующем выборе L_n величины

$$\varepsilon(L_n) = \sum_1^n \int_{|x|<Ln} dx_k(x) \quad \text{и} \quad \tau_n = \frac{L_n}{\sqrt{B_{n,Ln}}} \tag{6}$$

одновременно стремились [1]) к 0 при $n \to \infty$, где

---

[1]) Покажем, что наша теорема включает, как частный случай, теорему Ляпунова, формулированную вначале.

Не нарушая общности, положим $a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\psi_k(x) = 0$, тогда

$$b_k - b_{k,Ln} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\psi_k(x) - \int_{|x|\leqslant L_n} (x) - a_{k,Ln})^2 d\psi_k(x) =$$

$$= \int_{|x|> L_n} x^2 d\psi_k(x) + \left[\int_{|x|> L_n} x d\psi_k(x)\right]^2.$$

Поэтому

$$0 \leqslant b_k - b_{k,Ln} \leqslant 2 \int_{|x|>L_n}^{\infty} x^2 d\psi_k(x) \leqslant \frac{2C_{k,\delta}}{L_n^{2\delta}};$$

$$B_{n,Ln} = \sum_1^n \int\limits_{|x| \leqslant L_n} (x - a_{k,Ln})^2 d\psi_k(x),\ a_{k,Ln} = \int\limits_{|x| \leqslant L_n} x d\,\psi_k(x),\ A_{n,Ln} = \sum_1^n a_{k,Ln}$$

В качестве иллюстрации разберем пример, указанный мною в цитированном месте.

Пусть $S_n = \sum_1^n x_k$, где все величины x_k подчиняются одному и тому же закону вероятностей, а именно, $\chi_k = \pm \sqrt{m}$, где m любое целое число, с соответственными вероятностями $\frac{3}{\pi m^2}$ (как известно, $\frac{6}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{m^2} = 1$). Тогда $M.O.x_k = 0$, но $M.O.x_k^2$ не существует, т. к. ряд $\frac{6}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{m}$ расходится. Однако, если положим $L^2{}_n = A\,n \sqrt{\log n}$, где $A > 0$ некоторое определенное число, то

$$\varepsilon(L_n) = \frac{6n}{\pi^2} \sum_{m > L_n^2} \frac{1}{m^2} < \frac{6n}{\pi^2} \int\limits_{[L_n]}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{6n}{\pi^2 [L_n^2]} < \frac{1}{2A_1 \sqrt{\log n}}$$

следовательно

$$0 \leqslant 1 - \frac{B_{nLn}}{B_n} < \frac{2 \sum_1^n C_{-k,\delta}}{B_n L_n^{2\delta}} = M_{,n^\delta} \left(\frac{B_n}{L_n^2} \right)^\delta$$

С другой стороны

$$\varepsilon(L_n) = \sum_1^n \int\limits_{|x| > L_n} d\psi_k(x) \leqslant \frac{1}{L_n^{2+2\delta}} \sum_1^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2+2\delta} d\psi_k(x) =$$

$$= \frac{\sum_1^n C_{k,\delta}}{L_n^{2+2\delta}} = M_{n,\delta} \left(\frac{B_n}{L_n^2} \right)^{1+\delta}.$$

Таким образом, если условие I Ляпунова соблюдено при некотором $\delta > 0$, то, полагая $L_n^2 = B_n M_n^{\frac{\theta}{1+\delta}}$, где $0 < \theta < 1$, мы удовлетворим обоим требованиям $\varepsilon(L_n) \longrightarrow 0$ и $\tau_n \longrightarrow 0$, причем $\frac{B_{n,Ln}}{B_n} \longrightarrow 1$.

Подобно тому, как при применении теоремы Ляпунова, можно сдвигать величины x_k произвольным образом, Феллер в упомянутой работе предполагает их сдвинутыми так, что 0 является медианой для каждого x_k, т. е. $\psi_k(a) \leqq \frac{1}{2} \leqslant \psi_k(\varepsilon)$

стремится к нулю с возрастанием n, и в то же время

$$B_{n,Ln} = \frac{6n}{\pi^2} \sum_{1}^{[Ln]} \frac{1}{m} \sim \frac{6n}{\pi^2} \log L^2{}_n \sim \frac{6n \log n}{\pi},$$

поэтому

$$\tau_n = \frac{L_n}{\sqrt{B_{n,Ln}}} \sim \sqrt{\frac{\pi^2 An\sqrt{\log n}}{6n \log n}} = \sqrt{\frac{\pi^2 A}{6\sqrt{\log n}}}$$

также стремится к нулю. Следовательно, вероятность, что

$$S_n < t\sqrt{\frac{6n \log n}{\pi^2}},$$

равномерно стремится к $G(t)$.

Ввиду того, что предельная вероятность неравенства (2) не может зависеть от выбора L_n, при котором $\varepsilon(L_n)$ и τ_n стремятся к нулю, мы видим, что каковы бы ни были числа L_n, удовлетворяющие требуемому условию,

$$B_{n,Ln} \sim B_n^*, \ \frac{A_{n,Ln}}{\sqrt{B_{n,Ln}}} \sim C_n^* \tag{8}$$

где B_n^* и C_n^* не зависят от L_n. При этом, если $\lim C_n^* > 0$, то и $A_{n,Ln} \sim C_n^* \sqrt{B_n^*} = A_n^*$ независимо от L_n.

при всяком $\varepsilon > 0$; такие распределения вероятностей он называет „центрированными" (я предпочитаю, во избежание недоразумений, применять термин „медианизированный").

Тогда $\tau_n = \dfrac{L_n}{\sqrt{B_{n,Ln}}}$ и $z_n = \dfrac{L_n}{\sqrt{B_n(L_n)}}$, где $B_n(L_n) = \sum\limits_{1}^{n} \int\limits_{|x|>L_n} x^2 d\psi_k(x)$ стремятся к нулю одновременно.

В самом деле,

$$\int_{-L_n}^{0} x^2 d\psi_k(x) \geqslant \left[\int_{-L_n}^{0} x d\psi_k(x)\right]^2 \geqslant \left[\int_{-L_n}^{L_n} x d\psi_k(x)\right]^2 = a^2{}_{k,Ln}; \quad \int_{0}^{L_n} x^2 d\psi_k(x) \geqslant a^2{}_{k,Ln}$$

поэтому

$$\int_{-L_n}^{L_n} x^2 d\psi_k(x) \geqslant 2a^2{}_{k,Ln} = 2\int_{-L_n}^{L_n} x^2 d\psi_k(x) - 2b_{k,Ln}$$

откуда

$$\int_{-L_n}^{+L_n} x^2 d\psi_k(x) < 2b_{k,Ln}.$$

Следовательно

$$B_{n,Ln} < B_n(L_n) < 2B_{n,Ln}.$$

3. Условие (I) теоремы Ляпунова, как и указанное нами обобщение, влечет за собой (после соответствующего сдвига) пре-

небрегаемость каждого из слагаемых x_k по сравнению со всей суммой, заключающуюся в требовании, что если $G(t)$ есть предельная интегральная функция вероятностей для

$$\frac{S_n}{\sqrt{B_n^*}} - C_n^*,$$

то вероятность для каждого x_k $(k \leqslant n)$ превысить по абсолютному значению $\tau \sqrt{B_n^*}$ при любом произвольно малом τ равномерно стремится к нулю при возрастании n. Сохраняя это требование пренебрегаемости и предполагая все слагаемые медианизированными *, Феллер доказал в упомянутой работе, что условие нашей обобщенной предельной теоремы является также и необходимым.

ТЕОРЕМА ФЕЛЛЕРА Если при бесконечном возрастании n вероятность неравенства

$$\frac{S_n}{\sqrt{B_n^*}} - C_n^* < t$$

равномерно стремится к $G(t)$ и каждое из независимых слагаемых x_i пренебрегаемо, то при произвольно малом $\tau > 0$ существуют значения

$$L_n = \tau \sqrt{B_{n,L_n}}$$

для которых $\varepsilon(L_n) = \sum\limits_1^n \varepsilon_{i,L_n}$ *стремится к нулю при возрастании n.*

Доказательство Феллера может быть несколько упрощено. Прежде всего, полагая $z_k = x_k + y_k$, где x_k и y_k независимы, и закон вероятностей для y_k тот же, что для $-x_k$, можно, следуя Феллеру, ограничиться случаем, когда закон вероятностей для каждого слагаемого симметричен. После этого, предполагая уже симметричность, из которой следует, что $C_n^* = 0$, доказывается невозможность существования такого $\rho > 0$, чтобы сумма $\sum\limits_1^n \alpha_i$ вероятностей α_i неравенств $|x_i| > \tau_0 \sqrt{B_n^*}$, где $\tau_0 > 0$ данное произвольно малое число, оставалось больше ρ при сколь угодно большом n.

Для этого нужно лишь убедиться, что, если бы

$\rho'_n = \sum\limits_1^n \alpha_i > \rho$, то вероятность H_n неравенства

$$S_n > N\tau_0 \sqrt{B_n^*}$$

* См. выноску на стр. 176

была бы недопустимо велика при достаточно больших целых значениях N. Действительно, для его осуществления достаточно было бы, чтобы N из величин x_k были больше $\tau\sqrt{B_n^*}$ в то время, как сумма остальных слагаемых не отрицательна. Но в силу симметрии и независимости этих величин такое совпадение имеет вероятность, равную

$$\frac{1}{2^{N+1}}\frac{P_N}{N!}$$

где

$$P_N=\sum \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_N}\left(1-\alpha_{i_{N+1}}\right)\ldots\left(1-\alpha_{i_n}\right)$$

представляет сумму всевозможных произведений указанного вида, в которых $i_1,\ldots,i_N$ любые N из всех n индексов.

Принимая во внимание, что увеличение $\rho'_n=\sum_1^n \alpha_i$ может только увеличить H_n, достаточно предположить, что $\rho_n'<\frac{1}{2}$; в таком случае

$$\left(1-\alpha_{i_{N+1}}\right)\ldots\left(1-\alpha_{i_n}\right)>1-\rho'_n>\frac{1}{2},$$

поэтому

$$P_N>\frac{1}{2}\sum \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_N} \tag{9}$$

Но, если n настолько велико, что вследствие условия пренебрегаемости, все $\alpha_i\leqslant\frac{\rho}{N}$, то, принимая во внимание, что при заданном значении суммы $\sum_1^n\alpha_i$, правая часть неравенства (9) будет наименьшей, когда наибольшее число из величин α_i равны нулю, [1]) заключаем, что

$$P_N>\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{N}\right)^N$$

а потому, мы имели бы при всяком даном произвольно большом N

$$H_n>\frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\rho}{2N}\right)^N}{N!}>\frac{1}{4}\frac{\rho^N}{N^{2N}}$$

[1]) Это вытекает из того что сумма, стоящая в правой части. (9), относительно любых величин α_i, α_k может быть записана в виде $A+B(\alpha_i+\alpha_k)+C\alpha_i\alpha_k$, где $A,B,C\geqslant 0$ не зависят от α_i и α_k; поэтому при данном $(\alpha_i+\alpha_k)$ она будет минимальна, когда $\alpha_i\alpha_k=0$.

когда $n \to \infty$; но это несовместимо с требованием, что

$$\lim_{n\to\infty} H_n = 1 - G(N\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{N\tau_0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt < e^{-\frac{(N\tau_0)^2}{2}}$$

т. к. при N достаточно большом

$$\frac{N^2\tau_0^2}{2} > \log 4 + 2N\log N - N\log \rho.$$

Положим теперь, при τ_0 произвольно малом, $z_k = x_k$, когда $|x| \leqslant \tau_0 \sqrt{B_n^*} = L_n$, и $z_k = 0$, когда $|x| > \tau_0 \sqrt{B_n^*}$; в таком случае, по доказанному, интегральная функция вероятностей для

$\dfrac{\sum\limits_1^n z_k}{\sqrt{B_n^*}}$ равна $G(t) + \rho'_n \theta_n(t)$, где $|\theta_n| < 1$ и $\rho'_n \to 0$ при $n \to \infty$ Поэтому при любом $M > 0$

$$\frac{1}{B_n^*} M.O. \left(\sum_1^n z_k\right)^2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \rho'_n \int_{-M}^{M} t^2 d\theta_n(t).$$

Но

$$\int_{-M}^{M} t^2 d\theta_n(t) = M^2(\theta_n(M) - \theta_n(-M)) - 2\int_{-M}^{M} t\theta_n(t)dt < 2M^2 + 2\int_{-M}^{M} |t|\, dt = 4M^2$$

Следовательно, как бы велико ни было M, полагая n достаточно большим, можем сделать $M^2\rho'_n$ сколь угодно малым, а потому

$$\frac{B_{n,Ln}}{B_n^*} = \frac{1}{B_n^*} M.O.\left(\sum_1^n z_k\right)^2 > 1 - \delta_n$$

где $\delta_n \to 0$ при возрастании n, и из равенства $\tau_0 \sqrt{B_n^*} = \tau\sqrt{B_{n,Ln}}$ следует, что $\tau < \dfrac{\tau_0}{(1-\delta_n)^2} < 2\tau_0$ при n достаточно большом.

4. Замечу, что данная вначале классическая формулировка теоремы А. М. Ляпунова также допускает дополнение, аналогичное тому, каким является теорема Феллера по отношению к моей формулировке, так что условия I Ляпунова также являются в некотором смысле необходимыми и достаточными. Для простоты, я остановлюсь на наиболее интересном для практики случае, когда в условии (I) Ляпунова $\delta = 1$, сохраняя обозначения, принятые в начале.

Для δ целого > 1 рассуждение то же, но нужно воспользоваться вычислениями математических ожиданий высших степеней, которое произведено А. А. Марковым[1]).

[1]) А. А. Марков. Исчисление вероятностей (стр. 147—152).

ТЕОРЕМА. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вероятность $F_n(t)$, что

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} < t,$$

стремилась равномерно к $G(t)$ и в то же время, чтобы

$$\frac{M.O.[S_n - A_n]^4}{B_n^2} \to 3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{10}$$

заключается в соблюдении условия (I) А. М. Ляпунова при $\delta = 1$.

(Здесь, как и в теореме Феллера, величины x_k предполагаются пренебрегаемыми по отношению к их сумме S_n).

Действительно, не нарушая общности, можем положить $M.O.x_k = 0$.

Тогда

$$M.O.S_n^4 = \sum_1^n C_{k,1} + 6 \sum_{i \gtrless k}^n M.O.x_i^2 x_k^2 = 3 B_n^2 +$$

$$+ \sum_1^n C_{k,1} - 3 \sum_1^n b_k^2$$

откуда

$$\frac{M.O.S_n^4}{B_n^2} = 3 + \frac{\sum_1^n C_{k,1}}{B_n^2} - 3 \frac{\sum_1^n b_n^2}{B_n^2} \tag{11}$$

Таким образом, если условие (I) соблюдено, то не только верна предельная теорема, но и

$$\frac{M.O.S_n^4}{B_n} \to 3 \tag{10bis}$$

т. к. $b_k^2 \leqslant C_{k,1}$

Наоборот, вследствие пренебрегаемости x_k, вероятность неравенства

$$\frac{S_n - x_k}{\sqrt{B_n}} < t$$

также равномерно стремится к пределу $G(t)$, т. е. равна $G(t) + \varepsilon_n(t)$ где $\varepsilon_n(t) < \varepsilon$ равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$ Поэтому

$$\frac{M.O.[S_n - x_k]^2}{B_n} = \frac{B_n - b_k}{B_n} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-M}^{M} t^2 d\varepsilon_n(t)$$

$$> 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|t| > M} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt - 4M^2 \varepsilon_n.$$

Следовательно, при произвольно малом δ можем выбрать M настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|t|\geqslant M} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt < \frac{\delta}{2}$$

и затем увеличить n так, что $4M^2\varepsilon_n < \frac{\delta}{2}$, а поэтому

$$\frac{B_n - b_k}{B_n} > 1-\delta,$$

т. е. $\frac{b_k}{B_n} < \delta$ стремится к нулю при возрастании n равномерно для всех $k \leqslant n$. Отсюда следует, что

$$\frac{\sum\limits_1^n b_k}{B_n^2} < \frac{\delta B_n \sum\limits_1^n b_k}{B_n^2} = \delta \to 0.$$

Поэтому, если имеет место (10), то, вследствие (11),

$$\frac{\sum\limits_1^n C_{k,l}}{B_n^2} \to 0 \tag{I}$$

Примечание. Следует заметить, что, если функция распределения вероятностей $F_n(t)$ величины $\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}$ равномерно стремится к пределу $F(t)$ (в данном случае $F(t) = G(t)$) причем $M.O. \left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p$ ограничено, то

$$\lim_{n=\infty} M.O. \left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^q dF(t),$$

при $0 < q < p$, предполагая, что последний интеграл имеет смысл*. Действительно, из условия

$$M.O. \left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF_n(x) < C$$

следует, что при любом $L > 0$

$$\int\limits_{|x|>L} |x|^q dF_n(x) < \frac{1}{L^{p-q}} \int\limits_{|x|>L} |x|^p dF_n(x) < \frac{C}{L^{p-q}}$$

*) Нетрудно видеть, что то же утверждение будет верно и для $q=p$, если только $M.O. \left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^p$ стремится *равномерно* к определенному пределу.

С другой стороны,

$$\left|\int_{-L}^{L}|x|^q dF(x)-\int_{-L}^{L}|x|^q dF_n(x)\right|=L^q\Big|F(L)-F_n(L)+F_n(-L)-F(-L)+$$

$$+q\int_{-L}^{L}|x|^{q-1}(F_n(x)-F(x))dx\Big|<(2+2^q)L^q\varepsilon_n$$

полагая, что $|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon_n$ при любом x.
Поэтому

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}|x|^q dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}|x|^q dF_n(x)\right|<\int_{|x|>L}x^q dF(x)+\frac{C}{L^{p-q}}+(2+2^q)L^q\varepsilon_n$$

$$<\alpha_L+(2+2^q)L^q\varepsilon_n$$

где, выбирая L достаточно большим, чтобы сделать

$$\alpha_L<\frac{\alpha}{2},$$

можем после этого, увеличивая n, сделать также и $(2+2^q)L^q\varepsilon_n<\frac{\alpha}{2}$. Отсюда при любом $\alpha>0$

$$\left|M.O.\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^q-\int_{-\infty}^{\infty}|x|^q dF(x)\right|<\alpha.$$

Поэтому, в частности, если

$$\lim M.O.\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^{2+2\delta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{(1+\delta)}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=C_{2\delta}$$

для некоторого $\delta=\delta_0$, то это равенство справедливо и для всех $\delta<\delta_0$.

Вообще, говоря о применимости предельной теоремы к некоторой сумме S_n, нужно различать случаи, когда $\frac{M.O.|S_n|^{2+2\delta}}{B_n^{1+\delta}}$ стремится также к пределу $C_{2\delta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{2+2\delta}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ для всех значений $2\delta \leqslant 2\delta_0$. Мы будем говорить тогда, что к сумме S_n применима предельная теорема порядка $2\delta_0$. Таким образом, на основании только что сделанного рассуждения, находим что *условие необходимое и достаточное для применимости предельной теоремы порядка $2\delta_0$, где δ_0 целое число, заключается в соответствующем условии* (I) *Ляпунова.*

Условие Ляпунова является удобным практическим приемом для выяснения применимости предельной теоремы порядка $2\delta_0$; но интересным фактом является и то, что для применимости предельной теоремы порядка $2\delta_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{M.O.|S_n|^{2+2\delta_0}}{B_n^{1+\delta_0}} \to C_{2\delta_0}$. В случае $\delta_0 > 0$ не целого, доказательство технически усложняется, для его проведения нужно было бы установить, что при любом $\delta_0 > 0$ (не только целом условия

$$\frac{M.O.|S_n|^{2+2\delta_0}}{B_n^{1+\delta_0}} \to C_{2\delta_0} \quad \text{и} \quad \frac{\sum_1^n C_{k,\delta_0}}{B_n^{1+\delta_0}} \to 0 \text{ эквивалентны.}$$

Пока это не установлено, мы должны ограничиться несколько менее законченным утверждением для δ_0 не целого:

ТЕОРЕМА. Условие Ляпунова при любом $\delta < \delta_0$ ($\delta_0 > 1$)

$$M_{n,\delta} = \sum_1^n \frac{C_{k,\delta}}{B_n^{1+\delta}} \to 0 \tag{1}$$

необходимо и достаточно[1]) *для применимости предельной теоремы порядка 2δ*, при всяком $\delta > \delta_0$

Для этого замечаем, что

$$M.O.|S_n|^{2+2\delta} = M.O.\sum_1^n x_i^2 |S_n|^{2\delta} + M.O.\sum_1^n x_i S^{(i)} \left[|S_n|^{2\delta} - |S_n^{(i)}|^{2\delta} \right];$$

где $S_n^{(i)} = S_n - x_i$ не зависит от x_i, а потому $M.O.\ x_i S_n^{(i)} |S_n^{(i)}|^{2\delta} = 0$. Но

$$T_i = x_i^2 |S_n|^{2\delta} + x_i S_n^{(i)} [|S_n|^{2\delta} - |S_n^{(i)}|^{2\delta}] \geqslant x^{i2} |S_n|^{2\delta},$$

когда $x_i S_n^{(i)} \geqslant 0$; в случае $x_i S_n^{(i)} < 0$;

$$T_i = x_i^2 |S_n|^{2\delta} - |x_i S_n^{(i)}| [|S_n|^{2\delta} - |S_n^{(i)}|^{2\delta}],$$

поэтому, при $|x_i| < 2|S_n^{(i)}|$, имеем $|S_n| = ||S_n^{(i)}| - |x_i|| \leqslant |S_n^{(i)}|$, и неравенство $T_i \geqslant x_i^2 |S_n|^{2\delta}$ сохраняется; если же $|x_i| > 2|S_n^{(i)}|$, то $|S_n| > |S_n^{(i)}|$, и мы получаем $T_i > x_i^2 |S_n|^{2\delta} - |x_i S_n^{(i)}| |S_n|^{2\delta} > |S^n|^{2\delta} -$
$- \frac{1}{2} x_i^2 |S_n|^{2\delta} = \frac{1}{2} x_i^2 |S|^{2\delta}$

[1]) Ограничение $\delta_0 > 1$ используется лишь при доказательстве необходимости.

Следовательно,

$$M.O.|S_n|^{2+2\delta} = M.O. \sum_1^n T_i > \frac{1}{2} M.O. \sum_1^n x_i^2 |S_n|^{2\delta}$$

Но, принимая во внимание пренебрегаемость величин x_i, вследствие которой $\frac{S_n^i}{\sqrt{B_n}}$ подчиняется закону вероятностей, имеющему пределом $G(t)$, замечаем, благодаря симметричности $G(t)$, что вероятность для $S_n^{(i)}$ иметь определений знак, а именно знак x_i, стремится к $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$M.O.\ x_i^2 \,|\, S_n|^{2\delta} = M.O. \,|\, x_i^2 x_i + S_n^{(i)}|^{2\delta} > \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_n\right) M.O. \,|x_i|^{2+2\delta},$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при возрастании n. Следовательно,

$$\frac{M.O.|S_n|^{2+2\delta}}{B^{1+\delta}} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_n\right) M_{n,\delta}$$

и из ограниченности $M.O.\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^{2+2\delta}$ вытекает ограниченность $M_{n,\delta}$

Для доказательства достаточности, покажем, наоборот, что из ограниченности $M_{n,\delta}$ (а тем более из $M_{n,\delta} \to 0$) следует ограниченность $M.O.\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^{2+2\delta}$. Для этого воспользуемся неравенством

$$|b| \,\big|\, |a|^{2\delta} - |b|^{2\delta}\big| \leqslant (2\delta + 1)\,|a - b|\,[\,|a|^{2\delta} + |b|^{2\delta}]$$

которое справедливо при любых a, b и $\delta > 0$. Поэтому

$$T_i \leqslant x_i^2\,|S_n|^{2\delta} + (2\delta + 1)\, x_i^2\,[|S_n|^{2\delta} + |\,S_n^{(i)}]^{2\delta} = (2\delta + 2)\,[x_i^2(|S_n|^{2\delta} - $$
$$- |2x_i|^{2\delta}) + 2^{2\delta}|x_i|^{2+2\delta}] + (2\delta + 1) x_i^2 |S_n^{(i)}|^{2\delta}$$

и вследствие неравенства $|a + b|^{2\delta} \leqslant |\,2a\,|^{2\delta} + |\,2b\,|^{2\delta}$, верного для любых a, b, $\delta > 0$;

$$T_i \leqslant (2\delta + 2)[x_i^2 |2S_n^{(i)}|^{2\delta} + 2^{2\delta}|x_i|^{2+2\delta}] + (2\delta + 1) x_i^2 |S_n^{(i)}|^{2\delta}$$

откуда

$$M.O.\left|\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}\right|^{2+2\delta} < 2^{2\delta+1}(\delta + 1)\, M_{n,\delta} + \frac{2^{2\delta+2}(\delta+1)}{B_n^{1+\delta}} \sum_1^n b_i, M.O.|S_n^{(i)}|^{2\delta}$$

Следовательно, если $\delta < 1$ или уже установлена ограниченность $\frac{M.O.|S_n|^{2\delta}}{B_n^{\delta}}$, то, вследствие $|S_n^{(i)}|^{2\delta} < |2S_n|^{2\delta} + |2x_i|^{2\delta}$ из ограниченности $M_{n,\delta}$ получается ограниченность $\dfrac{M.O.|S_n|^{2+2\delta}}{B_n^{1+\delta}}$, которая, таким образом, доказана для всех $\delta < \delta_0$. Благодаря сделанному выше примечанию, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M.O.|S_n|^{2+2\delta}}{B^{1+\delta}} = C_{2\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{2+2\delta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

5. Как известно, условие Линдберга, заключающееся в том, что, как бы мало ни было $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{1}^{n} \int_{-\alpha\sqrt{B_n}}^{+\alpha\sqrt{B_n}} x^2 d\psi_k(x) = 1 \tag{12}$$

является необходимым и достаточным для применимости предельной теоремы нулевого порядка ($\delta_0 = 0$)

При невыполнении этого условия наша обобщенная теорема (Ляпунова) приводит к случаям, когда применима предельная теорема лишь отрицательного порядка $2\delta_0 < 0$

Во всяком случае, если закон $\psi_k = \psi(x)$ всех слагаемых x_k одинаков, то при существовании $b = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} d\psi(x)$ применима предельная теорема порядка $2p-2$ каково бы ни было $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Это вытекает из выше сделанного примечания (и выноски). Таким образом, в нашем примере, предельная теорема применима с отрицательным порядком сколь угодно близким к нулю. В частности, полагая $p = \frac{1}{2}$ находим, что в условиях этого примера.

$$M.O.|x_1 + \ldots + x_n| \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{3n \log n} \int_0^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\pi} \sqrt{3\,n\log n}.$$

Заметим, что, если закон вероятностей суммы независимых (медианизированных) величин $\sum_{1}^{n} x_i$ стремится к закону Гаусса, то этим же свойством обладает $\sum_1^n \frac{|x_i|^{t+1}}{x_i}$ при всех положительных $t < 1$. Действительно, согласно теореме Феллера, существуют такие L_n что одновременно

$$\sum_1^n \int\limits_{|x|>L_n} d\psi_k(x) \to 0, \quad \frac{L^2_n}{\sum_1^n \int\limits_{|x|<L_n} x^2 d\psi_k(x)} \to 0;$$

но

$$L_n^2 \int\limits_{|x|<L_n} |x|^{2t} d\psi_k(x) \geqslant L_n^{2t} \int\limits_{|x|<L_n} x^2 d\psi_k(x);$$

поэтому при том же L_n имеем также

$$\frac{L^{2t}_n}{\sum_1^n \int\limits_{|x|\geqslant L_n} |x|^{2t} d\psi_i(x)} \to 0$$

и следовательно, применима наша обобщенная предельная теорема (Ляпунова).

В заключение докажем еще следующую теорему: Если законы величин x_i симметричны и к сумме $S_n = x_1 + \ldots + x_n$ применима предельная теорема нулевого порядка или отрицательного порядка при $\frac{B^*_n}{B}$ ограниченном, то к сумме

$$S_n^{(t)} = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

где $y_i = \frac{|x_i|^{t+1}}{x_i}$, при всяком положительном $t < 1$ применима предельная теорема любого порядка ниже $\frac{1}{t} - 1$.

Рассмотрим сначала первый случай, при котором соблюдается условие Линдберга (12). Тогда

$$B_n(t) = M.O.(S_n^{(t)})^2 = \sum_1^n M.O.|x_i|^{2t} \geqslant \sum_1^n \int\limits_{-\alpha\sqrt{B_n}}^{\alpha\sqrt{B_n}} |x|^{2t} d\psi_i(x) >$$

$$> \sum_1^n \int\limits_{-\alpha\sqrt{B_n}}^{\alpha\sqrt{B_n}} x^2 (\alpha\sqrt{B_n})^{2t-2} d\psi_i(t) > B_n^t \alpha^{2t-2}(1-\varepsilon_n) \qquad (13)$$

где ε_n вследствие (12), стремится к нулю $n \to \infty$. Поэтому

$$\frac{\sum_1^n M.O. |y_i|^{\frac{2}{t}}}{[B_n(t)]^{\frac{1}{t}}} = \frac{B_n}{[B_n(t)]^{\frac{1}{t}}} < \frac{\alpha^{\frac{2}{t}} - 2}{(1-\varepsilon_n)^{\frac{1}{t}}} \to 0$$

т. е. условие Ляпунова порядка $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ соблюдено.

Во втором случае рассуждение то же, только на основании обобщенной теоремы Ляпунова в (13) нужно заменить B_n через B_n^* и принять во внимание, что

$$\frac{\sum M.O. |y|^t}{B_n} = \frac{B_n}{B_n^*} \text{ ограничена.}$$

Пусть например, $x_i = \pm 1$ с вероятностями $\frac{1}{2} - \frac{1}{t_i^2}$ и $x_i = \pm |i^t$ с вероятностями $\frac{1}{t^2}$. При $t = 1$, $B_n \sim 2n$; применяя обобщенную теорему Ляпунова, имеем

$$\sum_{i>L} \frac{2}{i^2} \sim \frac{2}{L}, \quad \sum_1^n \int\limits_{|x|<L} x^2 d\psi_i(x) = n - 2\sum_1^n \frac{1}{i^2} + 2\left[L\right],$$

поэтому

$$\frac{L^2}{n - 2\sum\limits_1^n \frac{1}{i^2} + 2[L]} \to 0$$

вместе с $\frac{1}{L}$, если $L = n^\alpha \left(\alpha < \frac{1}{2}\right)$; следовательно, предельная теорема применима при $B_n^* = n$ (условие Линдберга нарушено). При $t < 1$, согласно доказанному, соблюдается условие Ляпунова ($B_n(t) \sim n$). Напротив, при $t > 1$ условие обобщенной предельной теоремы нарушено, и закон вероятностей суммы $S_n^{(t)}$ к закону Гаусса не стремится.

Sur le théorème limite de la thèorie des probabilités

S. Bernstein (*Leningrad*)

L'auteur rappelle une généralisation (concernant les grandeurs indèpendantes) du théorème limite établie dans son mémoire „Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes" (Math. Ann. 1926, t. 97 p. 12 et 23) qui a été retrouveé plus tard en 1935 (Math. Zeitschrift, t. 40, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung) par M. Feller. Ce dernier a eu le mérite de démontrer, de plus, que la condition suffisante de ce théorème est nécessaire en un certain sens. L'auteur démontre, que les conditions de Liapounoff sont également necessaires á un certain sens; ainsi, la condition (I) $M_{n,\delta_0} \rightarrow O$, où $\delta_0 > O$ est un nombre entier, est nècessaire et suffisant pour que la loi de S_n tend vers la loi du Gauss et que tous les moments d'ordre non supérieur â $2 + \delta_0$ tendent vers ceux de la loi de Gauss. Une proposition analogue est établie pour le cas, où $M_{n,\delta} \rightarrow O$ lorsque $\delta < \delta_0$, $\delta_0 > O$ étant quelconque.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ МАТЬЕ

Г. А. Бюлер (Томск)

§ 1. УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ И ЕГО ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ.

Функции Матье получаются, при решении уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mu^2 u, \tag{1.1}$$

если граничные условия отнесены к эллиптическому цилиндру, если же их отнести к круговому, цилиндру, то решениями служат функции Ханкеля, Бесселя и Неймана, таким образом, функции Матье можно считать обобщением функций Ханкеля.

Введя эллиптические координаты

$$x=c\,ch\,\xi\cos\eta;\quad y=c\,sh\,\xi\sin\eta\;^{*)} \tag{1.2}$$

и полагая затем

$$u(\xi,\eta)=M(\eta).N(\xi)$$

получаем два линейных уравнения

$$\frac{d^2 M(\eta)}{d\eta^2}+(\lambda^2+\mu^2 c^2\cos^2\eta)\,M(\eta)=0 \tag{1.3а}$$

$$\frac{d^2 N(\xi)}{d\xi^2}-(\lambda^2+\mu^2 c^2 ch^2\xi)\,N(\xi)=0, \tag{1.3в}$$

где λ^2 — неопределенная постоянная.

Уравнение (1.3в) получается из (1.3а) при чисто мнимом $\eta=i\xi$, т. о. при исследовании можно ограничиться рассмотрением только уравнения (1.3а).

Если $c\to 0$, то уравнение (1.3а) переходит в уравнение

$$\frac{d^2 M(\eta)}{d\eta^2}+\lambda^2 M(\eta)=0 \tag{1.4}$$

и решение его имеет вид

$$e^{\pm i\lambda\eta},\ (\eta=\eta_1+i\eta_2), \tag{1.5}$$

но если одновременно $c\to 0$ и η_2 очень велико, так что величина

$$\pm Z=\mu c\sin\eta\cong\frac{\mu c}{2i}e^{\pm i\eta}\;^{**)} \tag{1.6}$$

---

*) При замене (1.2) кривым $\xi=\text{const}$ соответствуют софокусные эллипсы, кривым $\eta=\text{const}$ софокусные гиперболы с фокусами в точках $(c;0)$ и $(-c;0)$.

**) Знак $+$, если $\sin\eta\angle 0$ и знак $-$, если $\sin\eta>0$.

остается конечной, то уравнение (1.3а) переходит в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} + \frac{1}{Z}\frac{dM(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{Z^2}\right) M(z) = 0, \tag{1.7}$$

решением которого являются функции Ханкеля, Бесселя и Неймана.

Таким образом, собственные числа $\lambda(c)$ определяют характер решений: при $c \to 0$ и $\lambda^2 = n^2$ (n—целое) получается два периодических решения $\cos n\eta$ и $\sin n\eta$, в случае больших η_2 только одно периодическое решение $J_n(Z)$, и в общем случае могут быть оба фундаментальных решения не периодическими.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ МАТЬЕ

Обозначим через

$$L_\eta[M(\eta)] \equiv \frac{d^2 M(\eta)}{d\eta^2} + (\lambda^2 + \mu^2 c^2 \cos^2\eta) M(\eta) = 0 \tag{2.1}$$

и будем искать решение уравнения $L_\eta[M(\eta)] = 0$ в виде

$$M(\eta) = \int_a^b k(\eta, w)\,\mu(w)\,dw \tag{2.2}$$

тогда если подобрать ядро $k(\eta, w)$ так чтобы функция $k(\eta, w)$ удовлетворяла уравнению в частных производных

$$L_\eta[k(\eta, w)] = M_w[k(\eta, w)];$$

то получим из (1.2) выражение

$$L_\eta[M(\eta)] = \int_a^b k(\eta, w)\,\overline{M}_w[\varphi(w)]\,dw + N[k, \varphi]_a^b, \tag{2.3}$$

где $\overline{M}[\varphi(w)]$ — оператор сопряженный с M_w, и если теперь подобрать так пределы интегрирования, чтобы $N[k, \varphi]_a^b = 0$, тогда мы получим выражение функций Матье в виде (2.2).

Известно, что в интегральном представлении функций Ханкеля ядро имеет вид

$$k(z, \tau) = e^{-iz\sin\tau}$$

и поэтому естественно, принимая во внимание выражение (1.6), выбрать ядро $k(\eta, w)$ в виде

$$k(\eta, w) = e^{-i\mu c \sin\eta \sin w} \tag{2.4}$$

Исходя из этого ядра легко показать, что оператор L_η совпадает с оператором M_w, т. е.

$$M_w[k(\eta, w)] = \frac{d^2k}{dw^2} + (\lambda^2 + \mu^2 c^2 \cos^2 w) k = 0 \qquad (2.5)$$

и так как это уравнение самосопряженное, то будем иметь, что

$$L_w[M(\eta)] = \int_a^b k(\eta, w) L_w[\varphi(w)]\, dw + N[k, \varphi]_a^b = 0. \qquad (2.6)$$

Следовательно, если $N[k, \varphi]_a^b = 0$, то функция $\varphi(w)$ должна удовлетворять уравнению Матье.

Элементарные вычислений показывают, что

$$N[k, \varphi] = -e^{-i\mu c \sin\eta \sin w}[i\mu c \sin\eta \cos w\, \varphi(w) + \varphi'(w)]$$

и следовательно при выполнении условия

$$N[k, \varphi]_a^b = \left\{ e^{-i\mu c \sin\eta \sin w}[i\mu c \sin\eta \cos w\, \varphi(w) + \varphi'(w)] \right\}\Big|_a^b = 0 \qquad (2.8)$$

функция Матье может быть представлена в следующем виде,

$$M(\eta) = \int_a^b e^{-i\mu c \sin\eta \sin w} \varphi(w)\, dw, \qquad (2.9)$$

где функция $\varphi(w)$ удовлетворяет уравнению Матье $L_w\ [\varphi(w)] = 0$.

Для того, чтобы подобрать пределы интегрирования a и b так, чтобы удовлетворялось условие (2.8) рассмотрим показательный множитель

$$P = e^{-i\mu c \sin\eta \sin w - i\mu c \sin w} \qquad (2.10)$$

который характеризует поведение оператора $N[k, \varphi]$ при больших значениях мнимой части w, так как оставшийся множитель не окажет влияния на порядок стремления к нулю выражения $N[k, \varphi]$, а асимптотическая форма функций Бесселя, в которую переходит функция Матье при $v \to \infty$ ($w = u + iv$) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} e^{-i\zeta} = \frac{1}{\sqrt{\mu c \sin\eta}} e^{-i\mu c \sin w}.$$

Введем обозначение

$$Z = \mu c \sin w = x + iy = \rho e^{i\theta} \qquad (2.11)$$

и рассмотрим показатель в (2.10)

$$\sin w = \sin(u + iv) = \sin u\, chv + i \cos u\, shv =$$

$$= \frac{1}{2} e^v (\sin u + i \cos u)$$

при $v \to \infty$

и

$$\sin w = \frac{1}{2} e^{-v} (\sin v - i \cos u)$$

при $v \to -\infty$,

а весь показатель будет равен

$$\{[\rho \cos (u - \theta) + \mu c |\cos u|] + i[\rho \sin (u - \theta) + \mu c |\sin u|]\} \frac{\mu c}{2} e^{v}.$$

Таким образом

$$Re\,\mathrm{P} = e^{\frac{\mu c}{2} e^{v} [\rho \cos (u - \theta) + \mu c |\cos u|]} \quad \text{для } v \to +\infty. \tag{2.12а}$$

и

$$Re\,\mathrm{P} = e^{-\frac{\mu c}{2} e^{-v} [\rho \cos (u + \theta) + \mu c |\cos u|]} \quad \text{для } v \to -\infty \tag{2.12в}$$

Т. о. выражение (2.8) будет стремится к нулю, если

$$\rho \cos (u - \theta) + \mu c |\cos u| < 0 \text{ для } v \to +\infty \tag{2.13а}$$

$$\rho \cos (u + \theta) + \mu c |\cos u| > 0 \text{ для } v \to -\infty \tag{2.13в}$$

но, согласно (2.11)

$$x = \rho \cos \theta, \ y = \rho \sin \theta$$

и условия (2.13а) и (2.13в) запишутся в виде:

$$x \cos u + y \sin u + \mu c |\cos u| < 0 \text{ для } v \to +\infty, \tag{2.14а}$$

$$x \cos u - y \sin u + \mu c |\cos u| > 0 \text{ для } v \to -\infty. \tag{2.14в}$$

Рассмотрим в области $z = x + iy$ прямые:

$$x \cos u_1 + y \sin u_1 + \mu c |\cos u_1| = 0 \tag{2.15}$$

$$x \cos u_2 - y \sin u_2 + \mu c |\cos u_2| = 0.$$

Нетрудно заметить, принимая u за угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую и осью x, что прямые (2, 15),

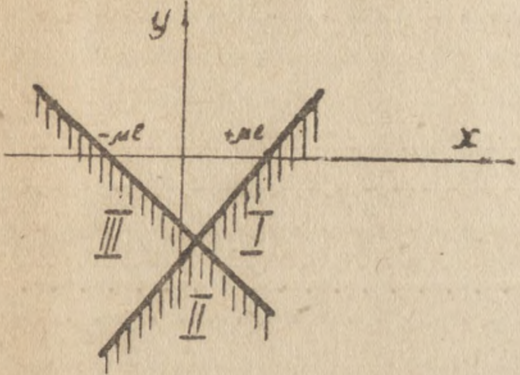
$$-x \cos u_1 - y \sin u_1 = \mu c |\cos u_1|$$

$$x \cos u_2 - y \sin u_2 = \mu c |\cos u_2|$$

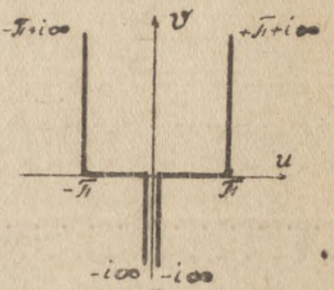
разбивают плоскость (x, y) на четыре части. Приэтом интегральное представление (2, 9) имеет место только в области угла II, когда концы пути интегрирования a и b удаляются в бесконечность по разные стороны действительной оси, плоскости $w = u + iv$, в области углов II и III, когда a и b в верхней полуплоскости плоскости w и в области I—II, когда a и b в нижней полуплоскости.

В частности, если взять $a = -i\infty$ и $b = \pm\pi + i\infty$ т. е. выбрать путь L_1 или L_2 (черт. 2), то (2, 9) справедливо в полуплоскости

$$x - \mu c > 0, \qquad (2, 17)$$



Черт. 1



Черт. 2

а именно имеем интегральное представление

$$M^{(1)}(\eta) = \int\limits_{L_1} e^{-i\mu c \sin\eta \sin w} \varphi(w)\, dw \qquad (2.18а)$$

$$M^{(2)}(\eta) = \int\limits_{L_2} e^{-i\mu c \sin\eta \sin w} \varphi(w)\, dw. \qquad (2.18в)$$

Следствие 1.

Легко видеть, что если $c \to 0$ и одновременно мнимая часть η очень велика, то уравнение

$$\frac{d^2 M(\eta)}{d\eta^2} + (\lambda^2 + \mu^2 c^2 \cos^2 \eta)\, M(\eta) = 0$$

переходит в уравнение

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dM}{dz} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) M = 0$$

решениями которого служат функции Ханкеля $H^1(z)$ и $H^2(z)$, а уравнение

$$\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} + (\lambda^2 + \mu^2 c^2 \cos^2 w)\, \varphi(w) = 0$$

переходит в уравнение

$$\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} + \lambda^2 \varphi(w) = 0$$

с решениями $e^{\pm \lambda i w}$ и, следовательно, при этом интегральные представления (2.18а) и (2.18в) переходят в интегральные представления функций Ханкеля $H^{(1)}(\mu c \sin \eta)$ и $H^{(2)}(\mu c \sin \eta)$, а условие (2.17) переходит при этом в условие

$$x = \rho \cos \theta > 0$$

Таким образом функции $M^{(1)}$ и $M^{(2)}(\eta)$ естественно назвать функциями Матье—Ханкеля и обозначить через

$$M_H^{(1)} \text{ и } M_H^{(2)}.$$

2. Если положить $u_1 = -u_2$, вчастности взять $u_1 = \pi$, $u_2 = -\pi$ и концы пути интегрирования a и b направить так, как это указано на черт. 3. то будет иметь место интегральное представление

Черт. 3

$$M_I(\eta) = \int e^{-i\mu c \sin \eta \sin w} \varphi(w)\, dw$$

справедливое в полуплоскости $x - \mu c > 0$, но, очевидно, (2.19) можно написать в виде

$$M_I(\eta) = \int\limits_{L_1} e^{-i\mu c \sin \eta \sin w} \varphi(w)\, dw + $$

$$+ \int\limits_{L_2} e^{-i\mu c \sin \eta \sin w} \varphi(w)\, dw =$$

$$= M_H^{(1)}(\eta) + M_H^{(2)}$$

и так как функция $\overline{M_H^{(1)}}(\eta)$, сопряженная функции $M_H^{(1)}(\eta)$, запишется в виде *)

$$M_H^{(1)}(\eta) = \int\limits_{\overline{L_1}} e^{+i\mu c \sin \eta \sin w} \varphi(w)\, dw,$$

где $\overline{L}_1$ есть зеркальное отражение пути L_1 в действительной оси, то полагая под знаком интеграла $w = -w$, получим для четных решений уравнения Матье, что

$$\overline{M_H^{(1)}}(\eta) = -\int\limits_{-\overline{L}_1} e^{-\mu c \sin \eta \sin w} \varphi(w)\, dw = M_H^{(2)}(\eta) \qquad (2.21)$$

и, следовательно, функция Матье-Бесселя есть действительная часть функции Матье Ханкеля.

*) При действительном значении η

3. Если положить $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$, то получим из (2.18а).

$$M_H^{(1)}(\eta) = \int\limits_{\frac{\pi}{2} - i\infty}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} e^{-i\mu c \sin\eta \sin w} \varphi(w)\, dw$$

или, полагая $w = \frac{\pi}{2} + iv$

$$M_H^{(1)}(\eta) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu c \sin\eta\, ch\, v} \varphi_1(v)\, dv$$

и при $\eta = i\eta_2$ будем иметь:

$$M_H^{(1)}(i\eta_2) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu c\, sh\, \eta_2\, ch\, v} \varphi_1(v) dv,$$

где функции $M_H^{(1)}(i\eta_2) = N_H^{(1)}(\eta_2)$ и $\varphi_1(v)$ должна удовлетворять уравнению (1.2в); это интегральное представление справедливо в полуплоскости $y < 0$.

Точно также, если положить в (2.18в) $u_1 = u_2 = -\frac{\pi}{2}$, то получим аналогично

$$M_H^{(1)}(i\eta_2) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu c\, sh\, \eta_2\, ch\, v} \varphi_1(v) dv,$$

которое справедливо в верхней полуплоскости плоскости z т. е. полуплоскости $y > 0$.

4. В случае, если $\varphi(w)$ периодическое решение уравнений Матье, то интегральное представление (2.19) переходит в обычное интегральное представление для периодических функций Матье, так как отрезки пути L (черт. 3), параллельные мнимой оси v, взаимно уничтожаются, в силу периодичности, т. е. мы получим

$$M(\eta) = \int\limits_{-z}^{+\pi} e^{-i\mu e \sin\eta \sin w} \varphi(w)\, dw.$$

Цена 15 руб.