Секция 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.1 DOI 10.17223/2226308X/10/1

ОБОБЩЁННЫЕ 312-ИЗБЕГАЮЩИЕ ПЕРЕСТАНОВКИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕМЕРА

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова

Рассматривается преобразование Лемера введённых И. Гесселем и Р. Стенли перестановок (ГС-перестановок). Доказано, что итерация преобразования Лемера множества всех ГС-перестановок порядка $r \geqslant 1$ приводит к множеству всех 312-избегающих ГС-перестановок порядка r, что даёт новую характеризацию этих перестановок. Показано, что статистики rise и imal на множестве 312-избегающих ГС-перестановок порядка r имеют одинаковые распределения. Найдено простое соотношение, связывающее обращение производящей функции многочленов Нараяны порядка r с обращением экспоненциальной производящей функции многочленов Эйлера порядка r.

Ключевые слова: *ГС-перестановки, преобразование Лемера, 312-избегающие ГС-перестановки, статистики* rise *и* imal*, многочлены Эйлера, многочлены Нараяны, производящая функция, обратная функция.*

В [1] для изучения некоторых статистик на группе перестановок $\mathfrak{S}_n$ множества $[n] = \{1, \ldots, n\}$ использовано преобразование Лемера. В [2] это преобразование применяется к ГС-перестановкам порядка r мультимножества $\{1^r, \ldots, n^r\}$, $r \geqslant 1$, введённым И. Гесселем и Р. Стенли в [3].

ГС-перестановкой порядка r называется слово $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_{rn}$ над алфавитом $[n]$, все буквы которого, стоящие между любыми двумя вхождениями символа $s \in [n]$, не меньше этого s. Мощность множества $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ всех таких перестановок задаётся соотношением $|\mathfrak{S}_n^{(r)}| = 1 \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (r(n-1)+1)$.

Определение 1. Пусть все символы слова $\omega = \omega_1 \ldots \omega_m$ — целые положительные числа. Тогда его преобразованием Лемера $\mathbf{l}$ назовём слово $\mathbf{l}\omega = \mathbf{l}\omega_1 \ldots \mathbf{l}\omega_m$, в котором $\mathbf{l}\omega_i = \#\{j : \omega_j < \omega_i,\ 0 \leqslant j \leqslant i-1,\ \omega_0 = 0\}, i \in [m]$.

Определение 1 шире использованных в [1, 2] и позволяет рассматривать для слова ω итерацию преобразования Лемера, т. е. степени $\mathbf{l}^k\omega$, $k \geqslant 1$. Определяя также число подъёмов $\mathrm{rise}(\omega) = \#\{i \in [m] : \omega_{i-1} < \omega_i,\ \omega_0 = 0\}$, для ГС-перестановок порядка r нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. $\mathrm{rise}(\sigma) = \mathrm{rise}(\mathbf{l}^k\sigma)$, $k \geqslant 1$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$, т. е. число подъёмов в ГС-перестановке порядка r не изменяется при применении к ней k раз преобразования Лемера.

Пример 1. Степени $\mathbf{l}^k\sigma$, $k = 1, 2, 3, 4$, $\sigma = 3344551122 \in \mathfrak{S}_5^{(2)}$, имеют вид

$$3344551122 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551133 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551155 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551177 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551199,$$

а число подъёмов во всех словах равно четырём.

Следует также отметить, что преобразование Лемера $\mathbf{l}$ задает биекцию $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ на множество, не совпадающее с $\mathfrak{S}_n^{(r)}$.

Как и в [4], $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$ назовём 312-избегающей ГС-перестановкой порядка r, если не существует тройки индексов $i, j, k,\ i < j < k$, для которых верно неравенство $\sigma_j < \sigma_k < \sigma_i$, а множество всех таких перестановок обозначим $\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$.

Теорема 1. ГС-перестановка $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{l}\sigma = \mathbf{l}^2\sigma$.

Доказательство. Достаточность: если ГС-перестановка $\sigma \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, то из определения 1 следует, что $\mathbf{l}\sigma \neq \mathbf{l}^2\sigma$. Аналогично, необходимость: если $\mathbf{l}\sigma \neq \mathbf{l}^2\sigma$, то ГС-перестановка $\sigma \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$. ■

Следствие 1. $\mathbf{l}\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} = \mathbf{l}^{n-1}\mathfrak{S}_n^{(r)},\ n \geqslant 3$.

Доказательство. Отметим, что при $n = 1, 2$ имеем $\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} = \mathfrak{S}_n^{(r)}$. Если ГС-перестановка $\sigma \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, то все ГС-перестановки из $\mathfrak{S}_{n+1}^{(r)}$, полученные из нее с помощью алгоритма генерации ГС-перестановок порядка r ([2, 3]), также не входят в $\widetilde{\mathfrak{S}}_{n+1}^{(r)}$. Поэтому по индукции при $n \geqslant 3$ для $\sigma = 3^r4^r \ldots n^r1^r2^r \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ получаем $\mathbf{l}^{n-1}\sigma \in \mathbf{l}\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, но $\mathbf{l}^{n-2}\sigma \notin \mathbf{l}\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, а применение теоремы 1 даёт $\mathbf{l}\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} = \mathbf{l}^{n-1}\mathfrak{S}_n^{(r)}$, $n \geqslant 3$, так как $\mathbf{l}^{n-1}\mathfrak{S}_n^{(r)} = \mathbf{l}^k\mathfrak{S}_n^{(r)}$, $k \geqslant n-1$. ■

Пример 2. Для пояснения следствия 1 дополнительно к примеру 1, в котором $\sigma = 3344551122 \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_5^{(2)}$, покажем действие преобразования Лемера на ГС-перестановки $2233441155 \in \widetilde{\mathfrak{S}}_5^{(2)}$ и $2233551144 \notin \widetilde{\mathfrak{S}}_5^{(2)}$:

$$2233441155 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551199 \ \text{ и } \ 2233551144 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551177 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551199.$$

Таким образом, теорема 1 и следствие 1 дают новые характеризации множества $\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ всех 312-избегающих ГС-перестановок порядка r с помощью преобразования Лемера.

Число подъёмов $\operatorname{rise}(\sigma) = \#\{i \in [rn] : \sigma_{i-1} < \sigma_i,\ \sigma_0 = 0\}$ в слове $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$ позволяет определить числа Эйлера $A_{n,k}^{(r)} = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)} : \operatorname{rise}(\sigma) = k\}$ порядка r, для которых справедливо следующее рекуррентное соотношение [2]:

$$A_{0,k}^{(r)} = \delta_{0k},\ A_{n+1,k}^{(r)} = kA_{n,k}^{(r)} + (rn - k + 2)A_{n,k-1}^{(r)},\ k \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0, \tag{1}$$

где символ Кронекера δ_{ij} равен 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Применение (1) для многочленов Эйлера $A_n^{(r)}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{n,k}^{(r)} t^k$ порядка r приводит к формуле

$$A_0^{(r)}(t) = 1,\ A_{n+1}^{(r)}(t) = (rn+1)tA_n^{(r)}(t) + t(1-t)D_tA_n^{(r)}(t),\ n \geqslant 0,$$

где $D_t = d/dt$ — оператор дифференцирования, причём $A_n^{(r)}(1) = |\mathfrak{S}_n^{(r)}|$.

В [2] с помощью (1) показано, что $A_{n,k}^{(r)} = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)} : \operatorname{imal}(\sigma) = k\}$, где статистика $\operatorname{imal}(\sigma) = |\{\mathbf{l}\sigma_1, \ldots, \mathbf{l}\sigma_{rn}\}|$ — число различных символов в слове $\mathbf{l}\sigma$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$, использована при $r = 1$ в [1] и была введена Д. Дюмоном.

Следует отметить, что распределения статистик rise и imal на множестве $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ при $n > 3$ не совпадают. В силу же результатов леммы 1 и теоремы 1 статистики rise и imal на множестве $\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ имеют одинаковые распределения, т. е. $\operatorname{rise}(\sigma) = \operatorname{imal}(\sigma)$, $\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$.

В [4] рассматриваются многочлены Нараяны $\widetilde{A}_n^{(r)}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{A}_{n,k}^{(r)} t^k$ порядка r, где $\widetilde{A}_{n,k}^{(r)} = \#\{\sigma \in \widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} : \mathrm{rise}(\sigma) = k\}$, которые описываются следующим соотношением:

$$\widetilde{A}_n^{(r)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{rn}{k-1}t^k, \quad \widetilde{A}_n^{(r)}(1) = \frac{1}{rn+1}\binom{(r+1)n}{n},$$

причём для производящей функции этих многочленов

$$v = \widetilde{A}^{(r)}(t,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n^{(r)}(t)\, u^n$$

получена обратная ей функция

$$u = \widetilde{A}^{(r)}(t,v)^{-1} = \frac{v}{(v+t)(v+1)^r}. \tag{2}$$

Для экспоненциальной производящей функции многочленов Эйлера порядка r

$$v = A^{(r)}(t,u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(r)}(t)\tfrac{u^n}{n!}$$

авторами доказана формула, задающая обратную ей функцию

$$u = A^{(r)}(t,v)^{-1} = \int_0^v \frac{dz}{(z+t)(z+1)^r}. \tag{3}$$

Сравнение выражений (2) и (3) приводит к следующему неожиданному результату.

Теорема 2. Имеет место равенство $\widetilde{A}^{(r)}(t,v)^{-1} = vD_vA^{(r)}(t,v)^{-1}$, где $D_v = d/dv$.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 и следствие 1 показывают важность выделения в $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ подмножества $\widetilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ 312-избегающих ГС-перестановок порядка r.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоата Д.* Распределения типа Эйлера и Макмагона на группе перестановок // Проблемы комбинаторного анализа: сб. статей. М.: Мир, 1980. С. 120–141.
2. *Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л.* Параметрические комбинаторные задачи и методы их исследования // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2010. № 4 (16). С. 50–63.
3. *Gessel I. and Stanley R. P.* Stirling polynomials // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1978. V. 24. P. 24–33.
4. *Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л.* Обобщённые многочлены Нараяны и их q-аналоги // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 6–8.