

## МЕХАНИКА

УДК 532.542

DOI 10.17223/19988621/48/4

**Е.И. Борзенко, К.Е. Рыльцева, О.Ю. Фролов, Г.Р. Шрагер**

### РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА МЕСТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С ВНЕЗАПНЫМ СУЖЕНИЕМ<sup>1</sup>

Построена математическая модель течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе с внезапным сужением. Выполнено численное решение задачи с помощью конечно-разностного метода на основе схемы продольно-поперечной прогонки. Восстановлена картина течения в виде распределения линий тока вдоль трубы, определены кинематические характеристики потока и их зависимости от основных параметров задачи. Проведены параметрические исследования, которые позволили получить зависимости значений коэффициента местного сопротивления при изменении числа Рейнольдса и степени сужения поперечного сечения трубы.

**Ключевые слова:** вязкая несжимаемая жидкость, внезапное сужение, стационарное течение, метод установления, коэффициент местного сопротивления, число Рейнольдса, метод прогонки.

Оборудование для транспортировки жидких сред, например трубопроводы, реакторы, биомедицинские установки, экструдеры, как правило, включает в себя различные конструктивные элементы, в том числе скачок сечения в виде резкого уменьшения диаметра трубы (сужение), в которой реализуется течение. При конструировании перечисленных технических устройств с элементами резкого сужения требуются результаты экспериментальных и численных исследований течения в трубе с внезапным сужением. Это связано с тем, что изменения геометрии трубы оказывают непосредственное влияние на характер потока и его кинематические и динамические свойства, которые необходимо учитывать с целью обеспечения требуемого режима и условий течения.

Экспериментальные данные о течении вязкой несжимаемой жидкости в трубе с внезапным сужением, опубликованные в ранних работах, были получены на основе визуализации процесса и демонстрировали лишь качественные характеристики потока. В обзорных работах [1, 2] отмечается разобщенность этих результатов и возникающие затруднения в выборе достоверных данных. С развитием технологий и усовершенствованием измерительной техники появилась возможность детально описать картину течения в трубе с сужением. В [3] содержатся результаты, полученные при использовании лазерного доплеровского анемометра в качестве измерительного прибора скорости течения. Найденное распределение скоро-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта Президента МК-710.2017.1 и гранта РФФИ №15-08-03935.

стей позволило изобразить картину ламинарного течения в трубе с сужением. На основании проведенных исследований было выявлено, что при относительно небольших значениях числа Рейнольдса течение является устойчивым и симметричным относительно оси симметрии. Циркуляционные зоны, образующиеся за скачком сечения сверху и снизу относительно оси трубы, имеют одинаковый размер, который увеличивается с ростом значения параметра Рейнольдса. Однако при больших числах Рейнольдса размеры циркуляционных зон уже не будут совпадать. Дальнейшее увеличение параметра приводит к появлению дополнительных циркуляционных зон.

Характерные особенности двумерного течения в трубе с внезапным сужением были определены экспериментально и описаны в [4–6].

Для численного решения задач о течении жидкости в трубах с различными степенями сужения в широком диапазоне чисел Рейнольдса используются методы конечных разностей и конечных объемов [7, 8]. Статья [9] содержит краткое описание новых подходов для согласования экспериментальных и численных результатов для течения вязкой жидкости через сужение трубы.

Результаты исследования местных потерь давления в трубе с сужением в зависимости от числа Рейнольдса опубликованы в [10, 11]. Рассматривались ламинарные течения как ньютоновской, так и неньютоновской жидкостей для чисел Рейнольдса от 20 до 2000. В [12] автор констатирует, что ламинарное течение ньютоновской жидкости в трубе с сужением является «решенной задачей». Однако это утверждение опровергается в [13] со ссылкой на противоречивость имеющихся на тот момент результатов расчетов местных потерь давления. Обобщенные данные, представленные в обзорной статье [14], подтверждают тот факт, что эта проблема нуждается в дополнительных исследованиях.

Расхождения в значениях полученных коэффициентов сопротивления в представленных работах могут объясняться различными методами их определения, а также выбором сечений вверх и вниз по потоку от сужения, начиная с которых течение считается установившимся. Например, в [14] расположение датчиков давления оставалось постоянным для экспериментов с различными жидкостями, несмотря на то, что характер течения и длины зон двумерного течения в каждом рассматриваемом случае различны. В ходе эксперимента не всегда удается точно выполнить степень сужения, поэтому заявленное авторами значение может содержать значительную ошибку. Погрешности вносят также шероховатости внутренних стенок, нарушение соосности труб разного диаметра.

В [14] представлены результаты экспериментальных и численных исследований течений в трубах с различными степенями сужения: 0.22, 0.5, 0.85. В качестве ньютоновской жидкости в эксперименте использовался водный раствор глицерина различной концентрации. Были получены графические зависимости коэффициента местного сопротивления от параметра Рейнольдса для ламинарного и турбулентного режимов течения. В работе приведен обширный литературный обзор по рассматриваемой проблеме и представлен сравнительный анализ результатов разных исследователей. Несмотря на частичное совпадение полученных данных с данными других авторов численных и экспериментальных работ в некоторых диапазонах чисел Рейнольдса, были выявлены существенные расхождения значений местного гидравлического сопротивления. В частности, результаты численных расчетов автора и значения коэффициента, полученные в ходе эксперимента, между собой не совпадают. Были предприняты попытки объяснить подобные расхождения, но без достаточного обоснования.

Целью данной работы является исследование кинематических характеристик и потерь давления для течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с внезапным сужением в зависимости от параметра Рейнольдса и степени сужения трубы.

### Постановка задачи

В работе исследуется ламинарное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе с внезапным сужением. Задача формулируется в осесимметричной постановке. Область решения схематично изображена на рис. 1.

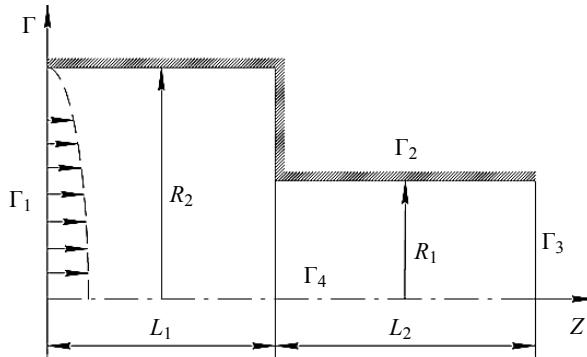


Рис. 1. Область течения

Fig. 1. Flow region

Математическая модель рассматриваемого течения включает в себя следующие безразмерные уравнения, записанные в цилиндрической системе координат в переменных функция тока – вихрь

$$\frac{\partial(v\omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} = \frac{2}{\text{Re}} \left( \nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right), \quad \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} = \frac{2}{\text{Re}} \left( \nabla^2 \omega - \frac{\omega}{r^2} \right),$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega,$$

где функция тока и вихрь определяются из уравнений [15]

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Здесь  $v, u$  – радиальная и аксиальная компоненты скорости соответственно,  $\text{Re} = \rho UD / \mu$  – число Рейнольдса,  $\rho$  – плотность,  $D = 2R_1$  – диаметр узкой части трубы,  $U$  – среднерасходная скорость в узкой части трубы,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости. В качестве масштабов обезразмеривания были приняты следующие величины: длины – радиус узкой части трубы  $R_1$ ; скорости – среднерасходная скорость в узкой части трубы  $U$ ; давления – величина  $\rho U^2 / 2$ .

В рассматриваемой задаче вязкая несжимаемая жидкость подается в трубу через входное сечение  $\Gamma_1$  с постоянным расходом, профиль скорости при этом соответствует течению Пуазейля. На твердой неподвижной стенке  $\Gamma_2$  реализуются ус-

ловия прилипания, на оси симметрии трубы  $\Gamma_4$  выполняются условия симметрии. На выходе  $\Gamma_3$  используются мягкие граничные условия. Входная и выходная границы расположены на достаточном удалении от скачка сечения ( $L_1/R_1 = 12$ ,  $L_2/R_1 = 12$ ), чтобы исключить влияние последнего на характер течения в окрестности сечений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ . Степень сужения трубы обозначается  $\beta = R_2/R_1$  (рис. 1). Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \psi &= r^2 - \frac{r^4}{2}, \quad \omega = 4r, \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq \beta; \\ \Gamma_2 : \psi &= \frac{1}{2}, \quad \omega = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = \beta, \quad 0 \leq z \leq L_1, \\ \psi &= \frac{1}{2}, \quad \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad 1 \leq r \leq \beta, \quad z = L_1, \\ \psi &= \frac{1}{2}, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad r = 1, \quad L_1 \leq z \leq L_1 + L_2; \\ \Gamma_3 : \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad z = L_1 + L_2; \\ \Gamma_4 : \psi &= 0, \quad \omega = 0, \quad r = 0. \end{aligned}$$

### Метод решения

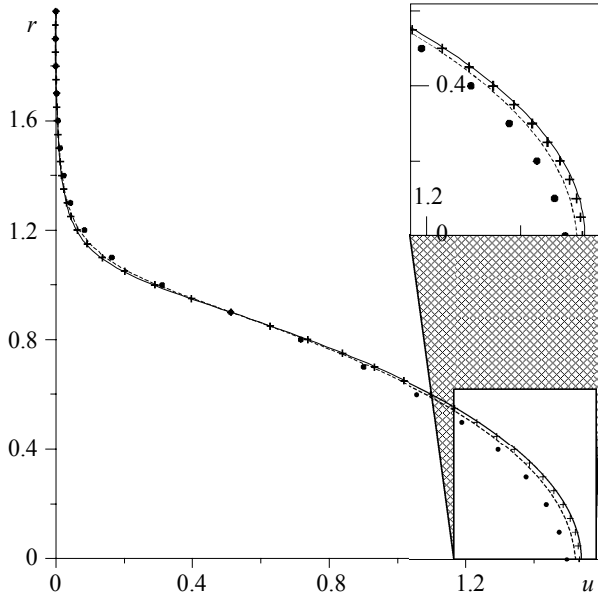
В ходе решения сформулированной задачи используется метод установления, в результате применения которого стационарная задача преобразуется в нестационарную и процесс сводится к пошаговому приближению решения нестационарной задачи к решению исходной стационарной задачи [16]. Численное решение основных уравнений осуществляется конечно-разностным методом на основе схемы продольно-поперечной прогонки [17]. В соответствии с алгоритмом его реализации на область решения наносится равномерная расчетная сетка, исходные дифференциальные уравнения записываются в виде разностных аналогов на промежуточном и целом шагах по времени. Система полученных алгебраических уравнений решается методом прогонки.

С целью верификации численного алгоритма выполнена серия тестовых расчетов для проверки аппроксимационной сходимости. На рис. 2 изображены профили аксиальной скорости в сечении, проходящем в окрестности скачка при различных значениях шага сетки ( $h$ ).

В табл. 1 представлены значения аксиальной скорости на оси симметрии в выходном сечении трубы в зависимости от шага сетки и величина ошибки относительно значений скорости профиля Пуазейля. Результаты на рис. 2 и в табл. 1 демонстрируют аппроксимационную сходимость алгоритма.

Таблица 1

$h$	$u_{\text{вых}}$	$\delta, \%$
0.1	1.9926	0.37
0.05	1.9988	0.06
0.025	2.0004	0.02
0.0125	2.0002	0.01



**Рис. 2.** Распределение аксиальной скорости в сечении  $z = 11.8$  ( $Re = 1$ ,  $\beta = 2$ ).  
Обозначения:  $\bullet\bullet\bullet$  –  $h = 0.1$ ,  $---$  –  $h = 0.05$ ,  $+++$  –  $h = 0.025$ ,  $---$  –  $h = 0.0125$

**Fig. 2.** Distribution of an axial velocity in cross section  $z = 11.8$  ( $Re = 1$ ,  $\beta = 2$ ).  
Notations:  $\bullet\bullet\bullet$  –  $h = 0.1$ ,  $---$  –  $h = 0.05$ ,  $+++$  –  $h = 0.025$ ,  $---$  –  $h = 0.0125$

### Местное гидравлическое сопротивление

Течение вязкой жидкости в трубе с внезапным сужением характеризуется двумя видами потерь полного давления: потерей на трение  $\Delta P_{\text{тр}}$ ; местными потерями  $\Delta P_{\text{м}}$ , которые возникают в окрестности скачка сечения. Оба вида потерь учитываются при расчете перепада полного давления между входным и выходным сечениями трубы согласно следующему выражению:

$$P_1 - P_2 = \Delta P = \Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}.$$

Потерянное на участке полное давление, отнесенное к динамическому напору, дает так называемый коэффициент гидравлического сопротивления [18]

$$C = \frac{\Delta P}{0.5\rho U^2} = \frac{\Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}}{0.5\rho U^2} = C_{\text{тр}} + C_{\text{м}}.$$

Здесь  $C_{\text{тр}}$  – коэффициент сопротивления,  $C_{\text{м}}$  – коэффициент местного сопротивления.

Местные потери гидродинамического давления  $\Delta P_{\text{м}}$  определяются как изменение давления в переходной области в предположении постоянства падения давления на трение установившегося одномерного течения во входной и выходной частях трубы. Применяя уравнение Бернулли к сечениям, расположенным вверх и вниз по течению от сужения, получаем выражение для коэффициента местного гидродинамического сопротивления

$$C_{\text{м}} = \frac{\Delta P_{\text{м}}}{0.5\rho U^2} + \alpha(1 - \beta^4), \quad (1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент коррекции кинетической энергии, вводимый для учета неод-

нородности профиля скорости. Для профиля Пуазейля  $\alpha = 2$ . Коэффициент местного сопротивления определяется потерями энергии, связанными с перестройкой потока в окрестности скачка сечения.

Записанная формула для расчета коэффициента местного сопротивления – не единственный способ получения его значения. Если представить гидравлическое сопротивление в виде отношения потерянной на участке между входом и выходом энергии (мощности) к кинетической энергии (мощности) во входном сечении, то формула для определения местного сопротивления примет вид [18]

$$C_m = \frac{\Delta N}{(1/2)\rho F U^3}, \quad (2)$$

где  $F$  – площадь входного сечения трубы,  $\Delta N$  – мощность, теряемая на данном участке и характеризующая величину механической энергии, превращаемой в теплоту за единицу времени [19].

### Результаты

На основе данных, полученных в ходе численного решения задачи, восстановлена картина течения в виде распределения линий тока вдоль трубы (рис. 3). Структура потока включает зоны одномерного течения в узкой и широкой частях трубы на достаточном удалении от сужения. В окрестности скачка формируется зона двумерного течения, включающая в себя циркуляционную зону в области внутреннего угла.

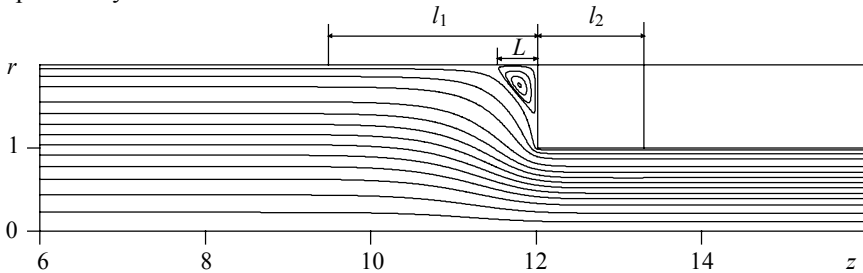


Рис. 3. Картина течения ( $Re = 1, \beta = 2$ )  
 Fig. 3. Flow pattern ( $Re = 1, \beta = 2$ )

На основании картины течения для количественного анализа вводятся следующие безразмерные геометрические характеристики составляющих структуры потока: длина циркуляционной зоны  $L$ , длины участков двумерного течения до и после скачка сечения –  $l_1$  и  $l_2$  соответственно (рис. 3). Значения  $l_1$  и  $l_2$  определяются как расстояния от уступа до поперечных сечений, в которых абсолютное отклонение максимальной радиальной скорости от нуля меньше, чем  $10^{-3}$  вниз и вверх по потоку соответственно.

На рис. 4 приведены результаты расчетов в виде зависимостей введенных характеристик от числа Рейнольдса и коэффициента сужения трубы (рис. 4). Наблюдаются следующие тенденции:

- с увеличением  $Re$   $L$  и  $l_1$  уменьшаются, а  $l_2$  увеличивается;
- с ростом  $\beta$  происходит увеличение  $L$  и  $l_1$ , при этом изменение  $l_2$  незначительно, поскольку при различных степенях сужения трубы характер течения в узкой части меняется слабо.

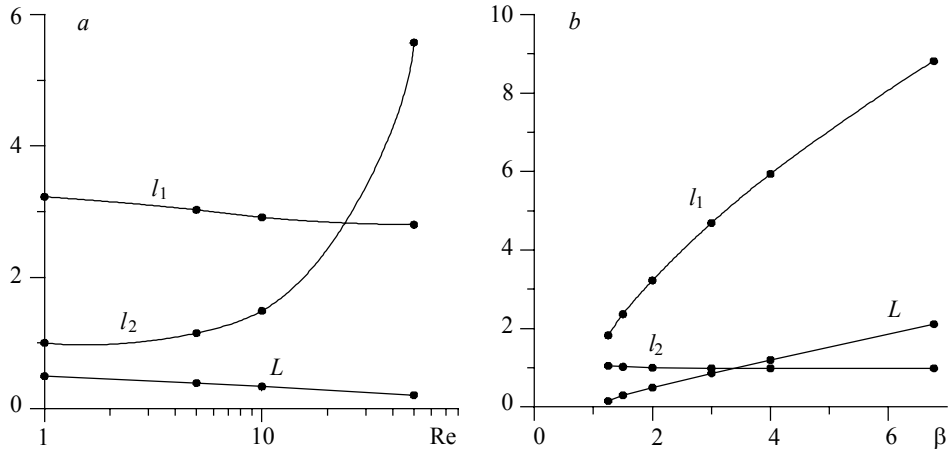


Рис. 4. Зависимости геометрических характеристик структуры потока от определяющих параметров: (а)  $\beta = 2$ ; (б)  $Re = 1$

Fig. 4. Dependency diagram of the flow geometrical characteristics upon the main parameters: (а)  $\beta = 2$  and (б)  $Re = 1$

Значения длины циркуляционной зоны, полученные в ходе экспериментальных и численных исследований течения в трубе с сужением, приведены в [20–22]. Данные в [20, 21] получены экспериментально с  $\beta = 2.26$  и  $\beta = 4$  соответственно, численные результаты представлены [22]. На рис. 5 демонстрируется качественное совпадение результатов расчетов в зависимости от числа Рейнольдса с экспериментальными и численными данными [20–22].

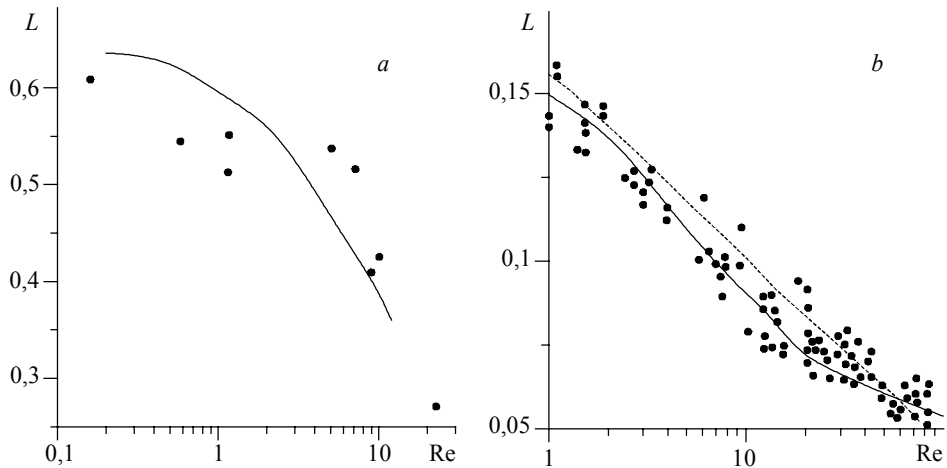
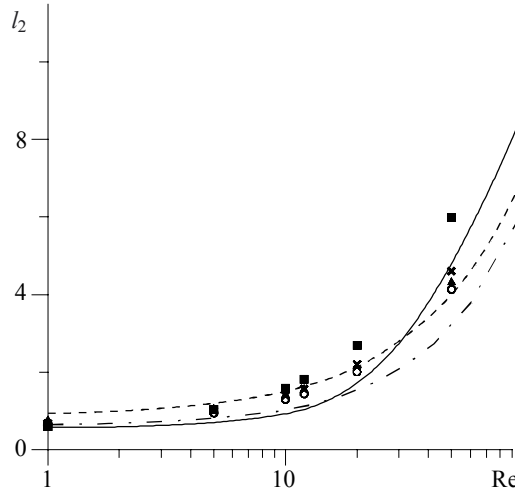


Рис. 5. Сравнение зависимостей длины циркуляционной зоны от числа Рейнольдса: (а)  $\beta = 2.26$ : ●● – данные из [20], — – расчеты данной работы; (б)  $\beta = 4$ : ●● – данные из [21], --- – расчеты из [22], — – расчеты данной работы

Fig. 5. Comparison of dependency diagrams of the circulation zone length upon Reynolds number: (а)  $\beta = 2.26$ : ●● – data from [20], — – calculations in the current work; (б)  $\beta = 4$ : ●● – data from [21], --- – calculations from [22], — – calculations in the current work

Многие авторы экспериментальных и теоретических работ по изучению течения жидкости в трубе со скачком сечения приводят аппроксимационные зависимости длины зоны двумерного течения за скачком сечения ( $l_2$ ) от числа Рейнольдса [2, 23–27]. В этих статьях в качестве длины зоны двумерного течения за скачком принимается расстояние от места сужения до сечения, в котором скорость на оси симметрии достигает 98–99 % от значения скорости установившегося течения. Сравнение результатов расчетов, полученных при использовании указанного критерия, и данных из перечисленных источников приведено на рис. 6. Наблюдается удовлетворительное согласование результатов.



**Рис. 6.** Сравнение зависимостей  $l_2(\text{Re})$  при  $\beta = 4$ . Обозначения:  $\circ\circ\circ$  – данные из [2],  $-\cdot-\cdot-$  – данные из [23],  $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$  – данные из [24],  $\times \times \times$  – данные из [25],  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$  – данные из [26],  $-\cdot-\cdot-$  – данные из [27],  $—$  – расчеты данной работы

**Fig. 6.** Comparison of dependency diagrams  $l_2(\text{Re})$  at  $\beta = 4$ . Notations:  $\circ\circ\circ$  – data from [2],  $-\cdot-\cdot-$  – data from [23],  $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$  – data from [24],  $\times \times \times$  – data from [25],  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$  – data from [26],  $-\cdot-\cdot-$  – data from [27],  $—$  – calculations in the current work

Результаты расчетов значений коэффициента местного сопротивления по двум изложенным формулам (1), (2) представлены в табл. 2. Максимальное расхождение в значениях не превышает 5%.

Таблица 2

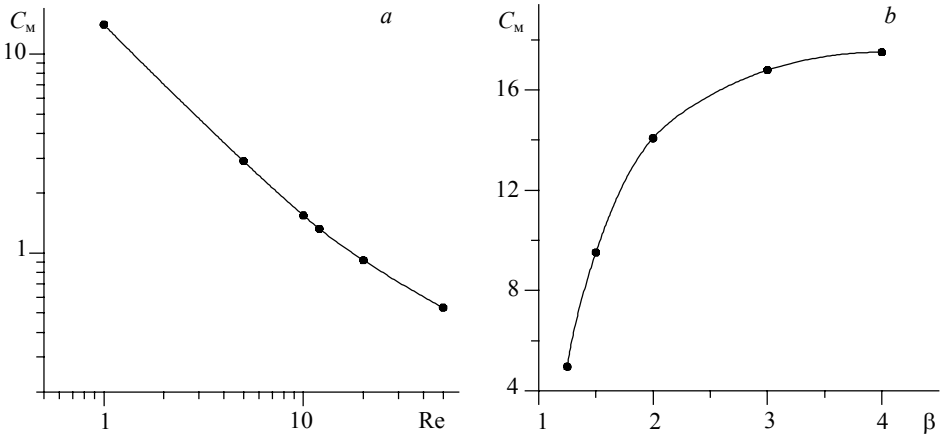
Re	1	5	10	20	50	99
$C_M(1)$	17.505	3.609	1.929	1.127	0.665	0.489
$C_M(2)$	17.847	3.671	1.953	1.126	0.641	0.466

В формуле (2) для расчета мощности используются процедуры численного дифференцирования и интегрирования, которые приводят к дополнительным погрешностям, поэтому все дальнейшие расчеты выполнялись по формуле (1).

На рис. 7 представлены зависимости местного коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и степени сужения трубы. С ростом Re значения  $C_M$  уменьшаются, что объясняется сокращением длины зоны двумерного течения перед



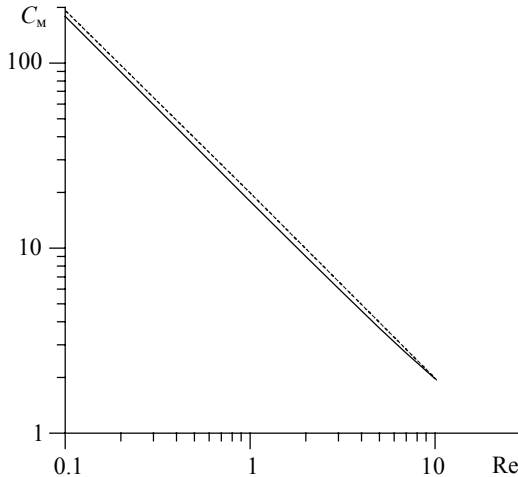
скачком сечения. Увеличение коэффициента  $C_M$  при увеличении  $\beta$  связано с ростом размеров циркуляционной зоны. При этом, по-видимому, можно ожидать установления коэффициента местного сопротивления при достаточно больших степенях сужения трубы.



**Рис. 7.** Зависимости коэффициента местного сопротивления от определяющих параметров: (а)  $\beta = 2$ ; (б)  $Re = 1$

**Fig. 7.** Dependency diagrams of the local resistance coefficient upon the main parameters: (а)  $\beta = 2$  and (б)  $Re = 1$

Для сравнения полученных результатов была выбрана работа [14], в которой автор представил данные численных расчетов коэффициента местного сопротивления (рис. 8).



**Рис. 8.** Сравнение зависимостей коэффициента местного сопротивления от числа Рейнольдса при  $\beta = 4.558$ : - - - - расчеты из [14], — — расчеты данной работы

**Fig. 8.** Comparison of dependency diagrams of the local resistance coefficient upon Reynolds number at  $\beta = 4.558$ : - - - - calculations from [14], — — calculations in the current work

Из рисунка видно, что результаты численных расчетов коэффициента местного сопротивления практически совпадают.

### Заключение

В результате проделанной работы выполнено математическое моделирование течения ньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением. Реализовано численное решение сформулированной задачи. Проведены параметрические исследования кинематических характеристик потока в зависимости от числа Рейнольдса в диапазоне изменения от 1 до 99 и степени сужения трубы: от 1.25 до 4. Рассчитаны значения коэффициента местного сопротивления и выявлены тенденции их изменения при варьировании основных параметров задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Fan C.T., Hwang C.L.* Bibliography of hydrodynamic entrance region flow // Kansas State University Bulletin. 1966. V. 50(3).
2. *Boger D.V.* Circular entry flows of inelastic and viscoelastic fluids // Advances in Transport Processes. 1982. V. 2. P. 43–104.
3. *Durst F., Loy T.* Investigations of laminar flow in a pipe with sudden contraction of cross sectional area // Computers & Fluids. 1985. V. 13(1). P. 15–36.
4. *White S.A., Baird D.G.* The importance of extensional flow properties on planar entry flow patterns of polymer melts // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1986. V. 20. P. 93–101.
5. *Evans R.E., Walters K.* Further remarks on the lip-vortex mechanism of vortex enhancement in planar-contraction flows // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1989. V. 32. P. 95–105.
6. *Rothstein J.P., McKinley G.H.* The axisymmetric contraction-expansion: the role of extensional rheology on vortex growth dynamics and the enhanced pressure drop // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2001. V. 98. P. 33–63.
7. *White S.A., Baird D.G.* Numerical simulation studies of the planar entry flow of polymer melts // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1988. V. 30. P. 47–71.
8. *Mompean G., Deville M.* Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1997. V. 72. P. 253–279.
9. *Walters K., Webster M.F.* The distinctive CDF challenges of computational rheology // Int. J. Numerical Methods in Fluids. 2003. V. 43. P. 577–596.
10. *Astarita G., Greco G.* Excess pressure drop in laminar flow through sudden contraction // Ind. Eng. Chem. Fundamentals. 1968. V. 7(1). P. 27–31.
11. *Sylvester N.D., Rosen S.L.* Laminar flow in the entrance region of a cylindrical tube // AIChE Journal. 1970. V. 16(6). P. 964–966.
12. *Boger D.V.* Viscoelastic flows through contractions // Annual Reviews. Fluid Mechanics. 1987. V. 19. P. 157–182.
13. *Sisavath S., Jing X., Pain C.C., Zimmerman R.W.* Creeping flow through axisymmetric sudden contraction or expansion // J. Fluids Eng. (Trans. ASME). 2002. V. 124(1). P. 273–278.
14. *Pienaar V.G.* Viscous flow through sudden contractions / Dis. Cape Peninsula University of Technology, 2004. 198 p.
15. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика / пер. с англ.: В.А. Гущина, В.Я. Митниченко; под ред. П.И. Чушкина. М.: Мир, 1980. 616 с.
16. *Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
17. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
18. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М.О. Штейнберга. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.

19. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, изд. 4-е. М.: Физматлит, 1963. 728 с.
20. Monnet P., Menard C., Sigli D. Some new aspects of the slow flow of a viscous fluid through an axisymmetric duct expansion or contraction. II – Experimental part // Appl. Sci. Res. 1982. V. 39. P. 233–248.
21. Boger D., Hur D., Binnington R. Further observations of elastic effects in tubular entry flows // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1986. V. 20. P. 31–49.
22. Kim-E M.E., Brown R.A., Armstrong R.C. The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1983. V. 13. P. 341–363.
23. Ajayi K.T., Papadopoulos G., Durst F. Influence of upstream development on the losses incurred by flow past an axisymmetric sudden contraction // American Institute of Aeronautics and Astronautics AIAA-98-0794. 1998.
24. Christiansen E.B., Kelsey S.J., Carter T.R. Laminar tube flow through an abrupt contraction // AIChE Journal. 1972. V. 18(2). P. 372–380.
25. Perry R.H., Green D.W., Maloney J.O. Perry's chemical engineers' handbook. 7th ed.: McGraw-Hill, 1997.
26. Vrentas, J.S., Duda, J.L. Flow of a Newtonian fluid through a sudden contraction // Appl. Sci. Res. 1973. V. 28. P. 241–260.
27. Binding D.M. An approximate analysis for contraction and converging flows // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1988. V. 27(2). P. 173–189.

Статья поступила 10.07.2017 г.

Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Frolov O.Yu., Shragger G.R. (2017) CALCULATION OF THE LOCAL RESISTANCE COEFFICIENT OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN A PIPE WITH SUDDEN CONTRACTION. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 36–48

DOI 10.17223/19988621/48/4

Most technical applications for fluid transportation include such a structural particularity as sudden contraction. This geometrical feature has an effect on the flow characteristics that should be taken into account in order to provide the appropriate mode and conditions of the flow.

This work was intended to investigate the kinematic characteristics and pressure losses of Newtonian fluid flow through an axisymmetric sudden contraction. The mathematical statement of the problem of laminar flow was formulated using stream function and vorticity variables. The stationary solution was obtained using the relaxation method with the following realization of numerical algorithm based on the finite difference alternative directions scheme. The obtained flow pattern showed that the flow structure apart from the one-dimensional zones included two-dimensional regions in the vicinity of contracted part ( $l_1$  and  $l_2$  are the lengths of two-dimensional regions upstream and downstream of the sudden contraction, respectively;  $L$  is the length of recirculation zone in the inner corner). The effect of the main parameters on these characteristics was studied and represented as dependency diagrams.

For the calculations of local resistance coefficient ( $C_M$ ), two different formulas were used. Implemented parametrical investigations allowed plotting the local resistance coefficient as a function of the Reynolds number and pipe contraction ratio:  $C_M$  decreased with an increase in the Reynolds number; an increase in contraction ratio caused an increase in  $C_M$ . The obtained results were verified and compared with available data.

Keywords: viscous incompressible fluid, sudden contraction, stationary flow, relaxation method, local resistance coefficient, Reynolds number, sweep method.

*BORZENKO Evgeniy Ivanovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

RYLTSEVA Kira Evgen'evna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: kiraworkst@gmail.com

FROLOV Oleg Yur'evich (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: frolov@ftf.tsu.ru

SHRAGER Gemady Rafailovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)  
E-mail: shg@ftf.tsu.ru

#### REFERENCES

1. Fan C.T., Hwang C.L. (1966) Bibliography of hydrodynamic entrance region flow. *Kansas State University Bulletin*. 50(3).
2. Boger D.V. (1982) Circular entry flows of inelastic and viscoelastic fluids. *Advances in Transport Processes*. 2. pp. 43–104.
3. Durst F., Loy T. (1985) Investigations of laminar flow in a pipe with sudden contraction of cross sectional area. *Computers & Fluids*. 13(1). pp. 15–36. DOI: 10.1016/0045-7930(85)90030-1.
4. White S.A., Baird D.G. (1986) The importance of extensional flow properties on planar entry flow patterns of polymer melts. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 20. pp. 93–101. DOI: 10.1016/0377-0257(86)80016-7.
5. Evans R.E., Walters K. (1989) Further remarks on the lip-vortex mechanism of vortex enhancement in planar-contraction flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 32. pp. 95–105. DOI: 10.1016/0377-0257(89)85043-8.
6. Rothstein J.P., McKinley G.H. (2001) The axisymmetric contraction-expansion: the role of extensional rheology on vortex growth dynamics and the enhanced pressure drop. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 98. pp. 33–63. DOI: 10.1016/S0377-0257(01)00094-5.
7. White S.A., Baird D.G. (1988) Numerical simulation studies of the planar entry flow of polymer melts. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 30. pp. 47–71. DOI: 10.1016/0377-0257(88)80017-X.
8. Mompean G., Deville M. (1997) Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 72. pp. 253–279. DOI: 10.1016/S0377-0257(97)00033-5.
9. Walters K., Webster M.F. (2003) The distinctive CDF challenges of computational rheology. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 43. pp. 577–596. DOI: 10.1002/flid.522.
10. Astarita G., Greco G. (1968) Excess pressure drop in laminar flow through sudden contraction. *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*. 7(1). pp. 27–31. DOI: 10.1021/i160025a005.
11. Sylvester N.D., Rosen S.L. (1970) Laminar flow in the entrance region of a cylindrical tube. *AIChE Journal*. 16(6). pp. 964–966. DOI: 10.1002/aic.690160617.
12. Boger D.V. (1987) Viscoelastic flows through contractions. *Annual Reviews. Fluid Mechanics*. 19. pp. 157–182. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.001105.
13. Sisavath S., Jing X., Pain C.C., Zimmerman R.W. (2002) Creeping flow through axisymmetric sudden contraction or expansion. *J. Fluids Eng. (Trans. ASME)*. 124(1). pp. 273–278. DOI:10.1115/1.1430669.
14. Pienaar V.G. (2004) Viscous flow through sudden contractions. Dissertation. *Cape Peninsula University of Technology*.
15. Roache P.J. (1982) Computational Fluid Dynamics. *Hermosa: Albuquerque*. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90297-9.
16. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. (1987) *Difference Schemes*. North-Holland: Elsevier Science Ltd.
17. Yanenko N.N. (1971) *The Method of Fractional Steps: The Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables*. Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-65108-3.

18. Idel'chik I.E. (1966) *Handbook of Hydraulic Resistance*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.
19. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. (1964) *Theoretical Hydromechanics*. English translation of 5th Russian ed. New York: Wiley.
20. Monnet P., Menard C., Sigli D. (1982) Some new aspects of the slow flow of a viscous fluid through an axisymmetric duct expansion or contraction. II – Experimental part. *Appl. Sci. Res.* 39. pp. 233–248. DOI: 10.1007/BF00388666.
21. Boger D., Hur D., Binnington R. (1986) Further observations of elastic effects in tubular entry flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 20. pp. 31–49. DOI: 10.1016/0377-0257(86)80014-3.
22. Kim-E M.E., Brown R.A., Armstrong R.C. (1983) The roles of inertia and shear-thinning in flow of an inelastic liquid through an axisymmetric sudden contraction. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 13. pp. 341–363. DOI: 10.1016/0377-0257(83)80028-7.
23. Ajayi K.T., Papadopoulos G., Durst F. (1998) Influence of upstream development on the losses incurred by flow past an axisymmetric sudden contraction. *American Institute of Aeronautics and Astronautics AIAA-98-0794*.
24. Christiansen E.B., Kelsey S.J., Carter T.R. (1972) Laminar tube flow through an abrupt contraction. *AIChE Journal*. 18(2). pp. 372–380. DOI: 10.1002/aic.690180220.
25. Perry R.H., Green D.W., Maloney J.O. (1997) *Perry's chemical engineers' handbook*. 7th ed.: McGraw-Hill.
26. Vrentas J.S., Duda J.L. (1973) Flow of a Newtonian fluid through a sudden contraction. *Appl. Sci. Res.* 28. pp. 241–260. DOI: 10.1007/BF00413071.
27. Binding D.M. (1988) An approximate analysis for contraction and converging flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 27(2). pp. 173–189. DOI: 10.1016/0377-0257(88)85012-2.