УДК 514.8, 621.8
DOI 10.17223/19988621/48/3

Н.Р. Щербаков, А.А. Щёголева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗУБЬЕВ КОНТАКТИРУЮЩИХ ДЕТАЛЕЙ ГИПОИДНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Гипоидные передачи предназначены для передачи вращения между скрещивающимися валами и характеризуются повышенной нагрузочной способностью, плавностью хода и бесшумностью работы. Базовыми поверхностями такой передачи являются однополостные гиперболоиды вращения. В работе получены точные аналитические уравнения поверхности зуба входной детали S, а поверхность зуба выходной детали найдена как огибающая семейства поверхностей S.

Ключевые слова: *гипоидная передача*, *огибающая семейства поверхностей.*

Гипоидные передачи занимают важное место в большом многообразии зубчатых передаточных механизмов. Главная особенность гипоидной передачи – скрещивающиеся оси вращения базовых поверхностей – однополостных гиперболоидов вращения (*аксоидов*). Такое расположение осей позволяет обеспечить плавность хода, бесшумность работы и повышенную нагрузочную способность механизма (рис. 1).

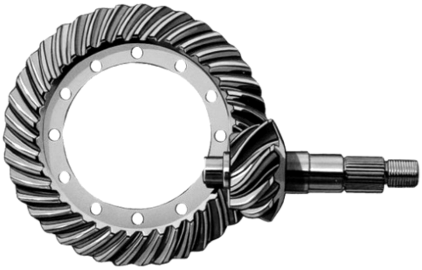

Рис. 1. Расположение шестерни (справа) и колеса (слева) гипоидной передачи
Fig. 1. Position of the gear (right) and wheel (left) of the hypoid gear

Авторами [1] для случая, когда вектора осей аксоидов перпендикулярны, получены условия касания таких гиперболоидов по прямолинейной образующей; доказано, что при заданных величинах смещения осей гиперболоидов и передаточного отношения параметры базовых поверхностей определяются однозначно. В данной статье приведены уравнения поверхностей зубьев входной и выходной деталей (*шестерни* и *колеса* соответственно) гипоидной передачи с перпендикулярными осями вращения этих деталей, причем поверхность зуба колеса получена как огибающая семейства поверхностей, образующегося при движении поверхности зуба шестерни во время работы механизма. Теория огибающих используется в теории механизмов и машин в основном при проектировании режущей части инструмента для обработки зубьев деталей [2]. Авторами [3] были получены уравнения поверхности зуба колеса как огибающей для гипоидной передачи с коническими аксоидами.

Уравнения поверхности зуба шестерни

Пусть ось колеса направлена по оси OZ, а ось шестерни параллельна оси OX и смещена в направлении оси OY на величину Sm. Тогда уравнение аксоида шестерни можно записать в виде

$$\frac{(y+Sm)^2+z^2}{a^2}-\frac{x^2}{c^2}=1,$$

где a – радиус горловой линии этого гиперболоида. Как доказано в [1], если аксоиды касаются по прямолинейной образующей, то a и c выражаются через Sm и передаточное отношение i:

$$a=\frac{i^2 Sm}{i^2+1},\ c=\frac{i\,Sm}{i^2+1}.$$

Для построения поверхности зуба шестерни запишем уравнение ее базового гиперболоида без смещения по оси OY:

$$\frac{y^2+z^2}{a^2}-\frac{x^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

и рассмотрим сечение этого гиперболоида сферой некоторого радиуса R с центром в начале координат. Это сечение есть окружность, радиус которой ε, как показано в [1], равен

$$\varepsilon=a\sqrt{\frac{R^2+c^2}{a^2+c^2}}.$$

В [1] этот радиус обозначался r_1, а через r_2 был обозначен радиус окружности пересечения гиперболоида колеса со сферой. Отношение радиусов этих окружностей равно передаточному отношению

$$i=\frac{\varepsilon}{r_2}.$$

Поверхность зуба шестерни будем строить как семейство окружностей уменьшающихся радиусов следующим образом.

1. Наибольшая окружность сечения зуба имеет радиус ρ и лежит на сфере радиуса R, а центр этой окружности проектируется из центра сферы в точку окружности радиуса ε. Параметрические уравнения этой наибольшей окружности $\boldsymbol{okr}(\alpha)$ можно поручить поворотом вокруг оси OY на угол $\arcsin(\varepsilon/R)$ окружности радиуса ρ с центром на оси OX:

$$\boldsymbol{okr}(\alpha)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}{R} & 0 & \frac{\varepsilon}{R}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\varepsilon}{R} & 0 & \frac{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}{R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{R^2-\rho^2}\\ \rho\cos\alpha\\ \rho\sin\alpha\end{pmatrix}$$

(здесь и далее параметрические уравнения кривых и поверхностей будем писать в виде вектор-функций одного или двух аргументов соответственно).

2. Поверхность зуба шестерни будем получать винтовым движением окружности $\boldsymbol{okr}(\alpha)$ вокруг оси OX с одновременным уменьшением радиуса этой окружности, при этом центры окружностей семейства должны лежать на гиперболоиде (1),

т.е. образовывать винтовую линию на этом гиперболоиде. Запишем параметрические уравнения гиперболоида (1):

$$\boldsymbol{Hb}(u,\upsilon)=\begin{pmatrix} c\,\mathrm{sh}\,u \\ a\,\mathrm{ch}\,u\cos\upsilon \\ a\,\mathrm{ch}\,u\sin\upsilon \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть размер шестерни по оси OX равен lr. Тогда, обозначая

$$f(\upsilon)=\mathrm{Ar\,sh}\left(\frac{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}{c}\right)+\frac{z}{2\pi}\upsilon\left[\mathrm{Ar\,sh}\left(\frac{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}-lr}{c}\right)-\mathrm{Ar\,sh}\left(\frac{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}{c}\right)\right],$$

где $\upsilon=0,..2\pi/z$ (z – число зубьев шестерни), lr – длина зуба шестерни (по оси OX), отрезок винтовой линии на поверхности (2) с длиной lr по оси OX можно записать в виде

$$\boldsymbol{Wint}(\upsilon)=\begin{pmatrix} c\,\mathrm{sh}(f(\upsilon)) \\ a\,\mathrm{ch}(f(\upsilon))\cos\upsilon \\ a\,\mathrm{ch}(f(\upsilon))\sin\upsilon \end{pmatrix}. \tag{3}$$

3. Из (3) видно, что при изменении параметра $\upsilon=0,...,2\pi/z$ точки винтовой линии будут лежать на окружностях уменьшающихся радиусов:

$$\varepsilon\upsilon(\upsilon)=a\,\mathrm{ch}(f(\upsilon)), \tag{4}$$

а эти окружности – на концентрических сферах, радиусы $R\upsilon(\upsilon)$ которых должны удовлетворять соотношению

$$c\,\mathrm{sh}(f(\upsilon))=\sqrt{R\upsilon(\upsilon)^2-\varepsilon\upsilon(\upsilon)^2},$$

из которого с учетом (4) получаем зависимость уменьшения радиуса сферы от изменения параметра υ:

$$R\upsilon(\upsilon)=\sqrt{c^2\mathrm{sh}^2(f(\upsilon))+a^2\mathrm{ch}^2(f(\upsilon))}. \tag{5}$$

Наконец, уменьшение окружности сечения зуба шестерни при изменении параметра υ запишем в виде

$$\rho\upsilon(\upsilon)=\frac{\rho}{\varepsilon}\varepsilon\upsilon(\upsilon). \tag{6}$$

Теперь можно записать уравнения поверхности зуба шестерни:

$$\boldsymbol{Sub}(\upsilon,\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\upsilon & -\sin\upsilon \\ 0 & \sin\upsilon & \cos\upsilon \end{pmatrix}\times$$

$$\times\left[\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{R\upsilon(\upsilon)^2-\varepsilon\upsilon(\upsilon)^2}}{R\upsilon(\upsilon)} & 0 & \frac{\varepsilon\upsilon(\upsilon)}{R\upsilon(\upsilon)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\varepsilon\upsilon(\upsilon)}{R\upsilon(\upsilon)} & 0 & \frac{\sqrt{R\upsilon(\upsilon)^2-\varepsilon\upsilon(\upsilon)^2}}{R\upsilon(\upsilon)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{R\upsilon(\upsilon)^2-\rho\upsilon(\upsilon)^2} \\ \rho\upsilon(\upsilon)\cos\alpha \\ \rho\upsilon(\upsilon)\sin\alpha \end{pmatrix}\right)\right]. \tag{7}$$

Уравнения поверхности зуба колеса

Поверхность зуба колеса будем искать как огибающую семейства поверхностей (7). Это семейство образовано вращением поверхности (7) вокруг оси OX с одновременным поворотом вокруг оси OZ (после сдвига вдоль оси OY на величину Sm). Причем, если первый поворот происходит на угол τ, то второй – на угол $-\tau/i$, где i – передаточное отношение. Параметрические уравнения описанного семейства поверхностей запишем в виде

$$\boldsymbol{Sem}(\tau,\upsilon,\alpha)=\begin{pmatrix}\cos(\tau/i) & -\sin(\tau/i) & 0\\ \sin(\tau/i) & \cos(\tau/i) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\tau & \sin\tau\\ 0 & -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\boldsymbol{Sub}(\upsilon,\alpha)-\begin{pmatrix}0\\ Sm\\ 0\end{pmatrix}\right]. \quad (8)$$

Согласно теории огибающих, требование наличия огибающей у семейства поверхностей приводит к условию понижения ранга матрицы якобиана функции, определяющей это семейство [4]. Для функции (8) это условие можно записать в виде обращения в нуль смешанного произведения частных производных векторфункции (8) по всем трем параметрам:

$$(\boldsymbol{Sem}'_\tau,\boldsymbol{Sem}'_\upsilon,\boldsymbol{Sem}'_\alpha)=0. \quad (9)$$

Обозначим через $\boldsymbol{Ws}$ двойное векторное произведение

$$\boldsymbol{Ws}=[[\boldsymbol{Sub}'_\alpha\times\boldsymbol{Sub}'_\upsilon]\times\boldsymbol{Sub}]$$

а через $\boldsymbol{Ns}$ – вектор нормали к поверхности зуба шестерни:

$$\boldsymbol{Ns}=\boldsymbol{Sub}'_\upsilon\times\boldsymbol{Sub}'_\alpha.$$

Тогда уравнение (9) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{Ws}_2\cos\tau-\boldsymbol{Ws}_1\sin\tau-(i\,\boldsymbol{Ws}_0+Sm\,\boldsymbol{Ns}_0)=0, \quad (10)$$

где нижний индекс у вектор-функций означает соответствующую координату этой вектор-функции, т.е. коэффициенты этого уравнения являются скалярными функциями от параметров υ и α. Уравнение (10) является стандартным тригонометрическим уравнением, которое при условии

$$\left|\frac{i\,\boldsymbol{Ws}_0+Sm\,\boldsymbol{Ns}_0}{\sqrt{\boldsymbol{Ws}_1^{\,2}+\boldsymbol{Ws}_2^{\,2}}}\right|\le 1$$

имеет решение относительно τ, т.е. при этом условии из уравнения (10) можно выразить параметр τ через υ и α:

$$\tau=f(\upsilon,\alpha)$$

(явный вид $f(\upsilon,\alpha)$ получается обычным образом с помощью введения вспомогательного угла $\varphi=\mathrm{arctg}(-\boldsymbol{Ws}_1/\boldsymbol{Ws}_2)$). Подставляя $f(\upsilon,\alpha)$ в (8) вместо τ, получаем уравнение огибающей, т.е. уравнение поверхности зуба колеса. Уравнение характеристики [4], т.е. линии, по которой огибающая касается некоторой поверхности семейства $\boldsymbol{Sem}(C,\upsilon,\alpha)$, получится, если в уравнение огибающей подставить выражение υ через α из условия

$$f(\upsilon,\alpha)=C.$$

Эта задача решена численно для $C = 0$, в результате получена линия, по которой касаются поверхности зубьев деталей, изображенная на рис. 2.

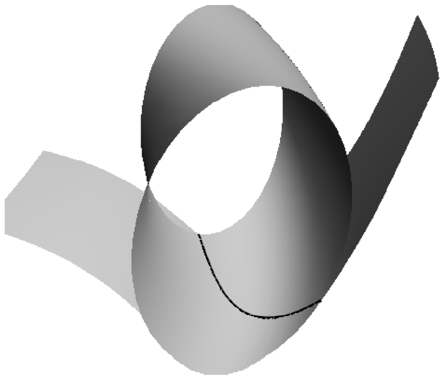

Рис. 2. Поверхности зубьев шестерни и колеса (огибающая) гипоидной передачи в контакте. Показана линия контакта (характеристика)
Fig. 2. Surfaces of gear and wheel teeth (envelope) of the hypoid gear in the contact. The curve is the line of contact (characteristic)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков Н.Р.*, *Щеголева А.А.* Касание однополостных гиперболоидов вращения как аксоидов гипоидной передачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 37–42.
2. *Люкшин В.С.* Теория огибающей семейства поверхностей (применительно к проектированию режущих инструментов). М., 1963. 267 с.
3. *Щербаков Н.Р.*, *Захаркин Н.В.* Геометрическое моделирование поверхности детали передаточного механизма как огибающей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4(20). С. 50–55
4. *Залгаллер В.А.* Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104 с.

Статья поступила 24.02.2017 г.

Shcherbakov N.R., Shchegoleva A.A. (2017) MODELING OF TEETH SURFACES OF CONTACTING DETAILS OF A HYPOID GEAR. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 48. pp. 30–35

DOI 10.17223/19988621/48/3

Hypoid gears are intended for transmitting the rotation between skew shafts and are characterized by higher loading capacity, ease of movement, and operation quietness. Base surfaces (axoids) of such a gear are hyperboloids of revolution of one sheet. The surface of the tooth of the input component S is obtained by helical motion of a circumference around the detail axis of rotation with a simultaneous decrease in the radius of this circumference; at the same time, centers of circumferences of the family must lie on the axoid of the input component, i.e., form a helical line on this hyperboloid. In this work, exact analytical equations of the surface S are obtained and the input component tooth surface is found as an envelope of the family of surfaces S. This family is formed by rotations of the surface S around the axis of rotation of the input detail with a simultaneous rotation around the axis of the output detail (after a shift to the distance between the axes). The first and second rotations are performed at angles τ and $-\tau/i$, respectively, where i is the gearing ratio. Parametric equations of the tooth contact line as a regular curve along which the envelope is tangential to the surface of the family (the characteristic) are obtained.

Keywords: *hypoid gear*, *envelope of a family of surfaces.*

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Doctor of Physics and Mathematics,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: nrs@math.tsu.ru

SHCHEGOLEVA Anastasija Andreevna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: nschegoleva@sibmail.com

REFERENCES

1. Shcherbakov N.R., Shchegoleva A.A. (2017) Kasanie odnopolostnych giperboloidov vrachenija kak acsoidov gipoidnoj peredachi [Tangency of one-sheeted hyperboloids as axsoids of the hypoid gearing]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mechanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 37–42.
2. Ljukchin W.S.(1963) *Teorija ogibajushej semejistwa poverchnosteji*. Moscow.
3. Shcherbakov N.R., Zakharkin N.V. (2012) Geometricheskoe modelirovanie detail peredatochnogo mechanism kak ogibajusheji [Geometrical simulation oft the surface of the detail oft he driving gear as envelope]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mechanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(20). pp. 50–55.
4. Zalgaller W.A. (1975) *Teorija ogibajushich* [Envelope theory]. Moscow: Nauka.