ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики

Задачи олимпиады 2017 года

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятина

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией механико-математического факультета
Протокол № 4 от 27 апреля 2017 г.
Председатель методической комиссии О.П. Федорова.

В данной работе представлены задачи с решениями олимпиад по математике, которые прошли в Томском государственном университете в 2017 г. Большинство задач являются авторскими. Некоторые задачи взяты из сборника избранных задач из журнала «American mathematical monthly» под редакцией В.М. Алексеева, а также из сборника «Избранные олимпиадные задачи» Н.Б. Васильева, А.П. Савина и А.А. Егорова.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по математике студентов дневной формы обучения ММФ, ФПМК, РФФ, ФТФ, ФФ, ФИТ, ФИнф, МФУ, ХФ, ГГФ, БИ, ИЭМ.

АВТОРЫ:
доцент Н.Ю. Галанова, доцент Л.В. Гензе,
доцент Я.С. Гриншпон, доцент Е.Г. Лазарева,
доцент Е.А. Тимошенко.

Олимпиада 2017
(физические факультеты, первый курс)

Задача 1. Существует ли такое вещественное α, что число $\sin^2\alpha$ иррационально, а числа $\sin^2 2\alpha$, $\sin^2 3\alpha$ и $\sin^2 4\alpha$ рациональны?

Задача 2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{\left(x^x\right)}}{x}$.

Задача 3. Докажите, что множество матриц A размера 2×2 с вещественными элементами таких, что $A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, но $A^2\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, бесконечно.

Задача 4. При каких натуральных значениях n интеграл $\int x^{\frac{1}{2017n}}\left(1+x^{\frac{1}{2016+n}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$ выражается через элементарные функции? Сведите данный интеграл к интегралу от рациональной функции при всех найденных значениях n.

Задача 5. Докажите, что функцию $y=x^2$ нельзя представить в виде суммы конечного числа периодических непрерывных функций.

Задача 6. Для произвольного множества $A\subset\mathbb{R}$ обозначим через $S(A)$ множество, состоящее из всех возможных конечных сумм различных элементов множества A (учитываются также суммы, состоящие из одного слагаемого). Например, если $A=\{1;2\}$, то $S(A)=\{1;2;3\}$. Найдите наименьшее возможное и наибольшее возможное количество элементов в множестве $S(A)$, если множество A содержит четыре элемента.

Олимпиада 2017
(физические факультеты, старшие курсы)

Задача 1. Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, имеет объем, равный 2017. Найдите значение определителя Δ, составленного из скалярных произведений:

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\sqrt{2}}{x^3+x+3\sqrt{2}}\,dx$.

Задача 3. Фигура на плоскости называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком лежит внутри фигуры. Докажите, что при $a \in [1;2)$ фигура, ограниченная заданной в полярных координатах кривой $r(\varphi) = a - \cos\varphi$, не является выпуклой.

Задача 4. Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$. Вычислите $\lim\limits_{\varphi\to\infty} \frac{\sin^8(i\varphi) - \cos^8(i\varphi)}{\operatorname{ch} 2\varphi \operatorname{ch} 4\varphi}$.

Задача 5. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) dx$.

Задача 6. Найдите все дифференцируемые функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

1) график функции $f(x)$ расположен в первой четверти;

2) $f(1) = 1$;

3) для любой точки M, принадлежащей графику функции $y = f(x)$, площадь выпуклого четырехугольника с вершинами в точках M, N, O, K равна 1, где N – проекция точки M на ось абсцисс, O – начало координат, K – точка пересечения оси ординат с касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке M.

Олимпиада 2017
(естественнонаучные факультеты)

Задача 1. Приведите пример такого α, что число $\sin^2\alpha$ является иррациональным, а число $\sin^2 2\alpha$ является рациональным.

Задача 2. При каждом положительном значении параметра a вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x-x^a-a^x}{x}$.

Задача 3. Докажите, что множество матриц A размера 2×2 таких, что $A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, но $A^2\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, бесконечно.

Задача 4. Имеется 2017 кусков сыра разной массы. Можно ли разрезать один из этих кусков на две части и разложить весь сыр на две кучки так, чтобы массы кучек были одинаковы и в каждой кучке было одинаковое число кусков?

Задача 5. Преподаватель дает студенту листок с тремя различными числами и просит студента записать на чистой доске сначала три данных числа, затем все их возможные суммы по два различных слагаемых, а в конце – сумму всех трех слагаемых. Если при этом какое-то число оказалось записанным на доске несколько раз, то одно из этих одинаковых чисел оставляют на доске, а остальные стирают. Какое наименьшее и наибольшее количество чисел могут быть записаны на доске в результате этих действий?

Задача 6. Конец A отрезка AB длины a скользит по положительной полуоси Oy, а конец B – по положительной полуоси Ox из вертикального положения отрезка до горизонтального. Точка C находится на отрезке AB на расстоянии h от верхнего конца A и движется вместе с отрезком. Найдите уравнение кривой, описываемой точкой C, и определите тип этой кривой.

Решения.
Физические факультеты. Первый курс.

Задача 1. Существует ли такое вещественное α, что число $\sin^2\alpha$ иррационально, а числа $\sin^2 2\alpha$, $\sin^2 3\alpha$ и $\sin^2 4\alpha$ рациональны?

Решение. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Тогда $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Число $\sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ иррационально, в то время как

числа $\sin^2 2\alpha = \sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\sin^2 3\alpha = \sin^2\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ и

$\sin^2 4\alpha = \sin^2\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ рациональны.

Замечание. Можно было также воспользоваться формулой понижения степени $\sin^2 k\alpha = \frac{1-\cos 2k\alpha}{2}$, из которой следует, что рациональность $\sin^2 k\alpha$ равносильна рациональности $\cos 2k\alpha$, и заметить, что $\cos\frac{\pi}{6}$ – иррациональное число, а числа $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{2\pi}{3}$ рациональны.

Задача 2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^{\left(x^x\right)}}{x}$.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to+0} x\ln^2 x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{1/x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+0}\frac{2(1/x)\ln x}{-(1/x^2)} = \lim_{x\to0}(-2x\ln x) = 0\,.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{\left(x^x\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to+0} x^{\left(x^x-1\right)} = \lim\limits_{x\to+0} e^{\ln x^{\left(x^x-1\right)}} = \lim\limits_{x\to+0} e^{\left(x^x-1\right)\ln x} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+0}\left(x^x-1\right)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{x\ln x}-1\right)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln^2 x} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 3. Докажите, что множество матриц A размера 2×2 с вещественными элементами таких, что $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, но $A^2 \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, бесконечно.

Решение. Для доказательства достаточно найти бесконечное множество матриц, удовлетворяющих условию $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Этим свойством обладают, например, матрицы вида $A = \begin{pmatrix} a & 1+a^2 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$, где a — произвольное вещественное число.

Задача 4. При каких натуральных значениях n интеграл $\int x^{\frac{1}{2017n}}\left(1+x^{\frac{1}{2016+n}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$ выражается через элементарные функции? Сведите данный интеграл к интегралу от рациональной функции при всех найденных значениях n.

Решение. Проверим условия теоремы Чебышева (о дифференциальном биноме): $\dfrac{\frac{1}{2017n}+1}{\frac{1}{2016+n}}=\dfrac{2016+n}{2017n}+2016+n\in\mathbb{Z}$. Заметим, что $n = 1$ удовлетворяет этому условию, а при $n > 1$ выполняется неравенство $2016 + n < 2017n$, противоречащее данному условию.

Условие $\dfrac{\frac{1}{2017n}+1}{\frac{1}{2016+n}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2016+n}{2017n}+2016+n+\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Z}$ противоречит неравенству $\dfrac{2016+n}{2017n}<\dfrac{1}{2}$, верному при всех натуральных $n\geq 3$. Подстановкой убеждаемся, что $n=1$ и $n=2$ также не удовлетворяют данному условию.

Таким образом, интеграл $\int x^{\frac{1}{2017n}}\left(1+x^{\frac{1}{2016+n}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$ выражается через элементарные функции только при $n = 1$. В этом случае имеем интеграл $\int x^{\frac{1}{2017}}\left(1+x^{\frac{1}{2017}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$, который сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены $t=\left(1+x^{\frac{1}{2017}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Получаем $x=\left(t^2-1\right)^{2017}$, $dx=4034t\left(t^2-1\right)^{2016}dt$ и $\int x^{\frac{1}{2017}}\left(1+x^{\frac{1}{2017}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=4034\int t^2\left(t^2-1\right)^{2017}dt$.

Ответ: $n = 1$, интеграл сводится к $4034\int t^2\left(t^2-1\right)^{2017}dt$.

Задача 5. Докажите, что функцию $y=x^2$ нельзя представить в виде суммы конечного числа периодических непрерывных функций.

Решение. Рассмотрим периодическую непрерывную функцию $f(x)$ с периодом T. По теореме Вейерштрасса $f(x)$ ограничена на отрезке $[0; T]$, а в силу периодичности $f(x)$ ограничена на всей числовой прямой. Следовательно, конечная сумма периодических непрерывных функций также ограничена на всей прямой, а значит, она не может совпадать с неограниченной функцией $y=x^2$.

Задача 6. Для произвольного множества $A\subset\mathbb{R}$ обозначим через $S(A)$ множество, состоящее из всех возможных конечных сумм различных элементов множества A (учитываются также суммы, состоящие из одного слагаемого). Например, если $A=\{1;2\}$, то $S(A)=\{1;2;3\}$. Найдите наименьшее возможное и наибольшее возможное количество элементов в множестве $S(A)$, если множество A содержит четыре элемента.

Решение. Так как $A\subset S(A)$, то в множестве $S(A)$ содержится по крайней мере четыре элемента. Предположим, что $S(A)$ состоит ровно из четырех элементов. Тогда $A=S(A)=\{a;b;c;d\}$, а значит, сумма всех элементов равна какому-то элементу множества A. Не теряя общности, можно считать, что $a+b+c+d=d$, т.е. $a+b+c=0\in S(A)=A$. Пусть $d=0$. Тогда $a+c=-b\in S(A)=A$, причем так как $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то $-b\neq b$, $-b\neq c=-a-b$ и $-b\neq d=0$. Значит, $-b=a$ и $c=-a-b=0$ – противоречие. Пусть теперь один из элементов a, b или c является нулевым, например, $c=0$. Тогда $a+b=0$ и $a+d\in S(A)=A$, причем так как $a\neq 0$, $d\neq 0$ и $d\neq b=-a$, то $a+d\neq a$, $a+d\neq d$ и $a+d\neq c=0$. Значит,

$a+d=b=-a$ и $d=-2a$. Аналогично $b+d=a=-b$ и $d=-2b=2a$. Таким образом, $d=-2a=2a$ и $a=0$ – противоречие.

Множество $A=\{-1;0;1;2\}$, для которого $S(A)=\{-1;0;1;2;3\}$, показывает, что наименьшее количество элементов в $S(A)$ равно пяти.

Если $A=\{a;b;c;d\}$, то множество $S(A)$ состоит из элементов вида a; b; c; d; $a+b$; $a+c$; $a+d$; $b+c$; $b+d$; $c+d$; $a+b+c$; $a+b+d$; $a+c+d$; $b+c+d$; $a+b+c+d$, т.е. содержит не более 15 элементов. Для множества $A=\{1;2;4;8\}$ выполняется $S(A)=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$, а значит, наибольшее количество элементов в $S(A)$ равно пятнадцати.

***Комментарий* 1.** Тот факт, что $S(A)\neq A$, можно было доказать так: во множестве A содержится по крайней мере три ненулевых элемента, а значит, хотя бы два элемента одного знака. Тогда сумма двух наибольших по модулю элементов одного знака принадлежит $S(A)$, но не принадлежит A.

***Комментарий* 2.** Оценку для наибольшего количества элементов в $S(A)$ можно было получить комбинаторно, так как известно, что количество непустых подмножеств n-элементного множества равно 2^n-1.

Решения.
Физические факультеты. Старшие курсы.

Задача 1. Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$, имеет объем, равный 2017. Найдите значение определителя Δ, составленного из скалярных произведений:

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$. Тогда матрица скалярных произведений $\begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{pmatrix}$ представляет собой произведение матриц $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ и

$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Поэтому по свойствам определителя

$\Delta = \det\left(A\cdot A^T\right) = \det A\cdot\det A^T = \left(\det A\right)^2$. С другой стороны, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения: $2017 = \left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right| = \left|\det A\right|$. Получаем, что $\Delta = \left(\det A\right)^2 = 2017^2 = 4068289$.

Ответ: 2017^2.

Задача 2. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\sqrt{2}}{x^3+x+3\sqrt{2}}\,dx$.

Решение. Преобразуем знаменатель:

$$x^3+x+3\sqrt{2}=\left(x^3+2\sqrt{2}\right)+\left(x+\sqrt{2}\right)=\left(x^3+\sqrt{2}^3\right)+\left(x+\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+2\right)+\left(x+\sqrt{2}\right)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+3\right).$$

Следовательно, $x=-\sqrt{2}$ является точкой устранимого разрыва для подынтегральной функции и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+\sqrt{2}}{x^3+x+3\sqrt{2}}dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+3}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}$.

По определению несобственного интеграла первого рода:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c}\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b}\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\sqrt{\frac{2}{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\Bigg|_a^c+\lim_{b\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\Bigg|_c^b=\frac{\pi\sqrt{10}}{5}.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+3}$ можно было вычислить с помощью вычетов. Функция комплексного переменного $f(z)=\frac{1}{z^2-z\sqrt{2}+3}$ имеет две особые точки $z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{10}}{2}$, являющиеся простыми полюсами, причем только одна из этих точек лежит в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geq 0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 3} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{10}}{2}} \frac{1}{\left(z - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{10}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{10}}{2}\right)} =$$

$$2\pi i \cdot \lim_{z\to\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{10}}{2}} \frac{1}{z - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{10}}{2}} = \frac{\pi\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{10}}{5}$.

Задача 3. Фигура на плоскости называется *выпуклой*, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком лежит внутри фигуры. Докажите, что при $a \in [1;\, 2)$ фигура, ограниченная заданной в полярных координатах кривой $r(\varphi) = a - \cos\varphi$, не является выпуклой.

Решение. Так как $r(0) = a - 1$ и $r(\pi) = a + 1$, то фигура, ограниченная кривой, пересекается с осью Ox по отрезку AB, соединяющему точку A с координатами $(-a - 1, 0)$ и точку B с координатами $(a - 1, 0)$. Заметим, что абсцисса точки, лежащей на кривой, задается функцией $x(\varphi) = (a - \cos\varphi)\cos\varphi$. Исследуя функцию $f(t) = (a - t)t$ на экстремум, можно показать, что $x(\varphi)$ достигает максимума, равного $\frac{a^2}{4}$, при $t = \frac{a}{2}$, т. е. при $\varphi = \pm\alpha$, где $\alpha = \arccos\frac{a}{2}$. Подставляя в уравнение кривой значения $\varphi = \pm\alpha$, получаем, что точки C и D с координатами $\left(\frac{a^2}{4}, r(\alpha)\sin\alpha\right)$ и $\left(\frac{a^2}{4}, -r(\alpha)\sin\alpha\right)$ лежат на этой кривой и, следовательно, принадлежат рассматриваемой фигуре. Однако середина отрезка CD имеет координаты $\left(\frac{a^2}{4},0\right)$ и не принадлежит фигуре, так как $\frac{a^2}{4}-(a-1)=\frac{(a-2)^2}{4}>0$. Тем самым мы доказали, что рассматриваемая фигура не является выпуклой.

Задача 4. Пусть $\varphi\in\mathbb{R}$. Вычислите $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\frac{\sin^8(i\varphi)-\cos^8(i\varphi)}{\operatorname{ch}2\varphi\operatorname{ch}4\varphi}$.

Решение. Так как $\sin(i\varphi)=i\operatorname{sh}\varphi$, $\cos(i\varphi)=\operatorname{ch}\varphi$,
$\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi=1$ и $\operatorname{ch}^2\varphi+\operatorname{sh}^2\varphi=\operatorname{ch}2\varphi$, то $\sin^8(i\varphi)-\cos^8(i\varphi)=$
$=\operatorname{sh}^8\varphi-\operatorname{ch}^8\varphi=\left(\operatorname{sh}^2\varphi-\operatorname{ch}^2\varphi\right)\left(\operatorname{sh}^2\varphi+\operatorname{ch}^2\varphi\right)\left(\operatorname{sh}^4\varphi+\operatorname{ch}^4\varphi\right)=$
$=-\operatorname{ch}2\varphi\left(\operatorname{sh}^4\varphi+\operatorname{ch}^4\varphi\right)$. Значит, $\frac{\sin^8(i\varphi)-\cos^8(i\varphi)}{\operatorname{ch}2\varphi\operatorname{ch}4\varphi}=-\frac{\operatorname{sh}^4\varphi+\operatorname{ch}^4\varphi}{\operatorname{ch}4\varphi}$.
Преобразуем числитель и знаменатель: $\operatorname{sh}^4\varphi+\operatorname{ch}^4\varphi=$
$=\left(\operatorname{sh}^2\varphi-\operatorname{ch}^2\varphi\right)^2+2\operatorname{sh}^2\varphi\operatorname{ch}^2\varphi=1+0{,}5\operatorname{sh}^2 2\varphi$ и $\operatorname{ch}4\varphi=1+2\operatorname{sh}^2 2\varphi$
(применили формулы $\operatorname{sh}2\varphi=2\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi$ и $\operatorname{ch}2\varphi=1+2\operatorname{sh}^2\varphi$). Так как $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\operatorname{sh}\varphi=\infty$ для действительных φ, то $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\frac{\sin^8(i\varphi)-\cos^8(i\varphi)}{\operatorname{ch}2\varphi\operatorname{ch}4\varphi}=$
$=-\lim\limits_{\varphi\to\infty}\frac{1+0{,}5\operatorname{sh}^2\varphi}{1+2\operatorname{sh}^2\varphi}=-0{,}25.$

Комментарий. Можно было преобразовывать искомое выражение и непосредственно с помощью определений тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного. Тогда $\sin^8(i\varphi)-\cos^8(i\varphi)=\left(\frac{e^{-\varphi}-e^{\varphi}}{2i}\right)^8-\left(\frac{e^{-\varphi}+e^{\varphi}}{2}\right)^8=$

$-\dfrac{e^{-6\varphi}+7e^{-2\varphi}+7e^{2\varphi}+e^{6\varphi}}{16}$ и $\operatorname{ch}2\varphi\operatorname{ch}4\varphi=\dfrac{e^{2\varphi}+e^{-2\varphi}}{2}\cdot\dfrac{e^{4\varphi}+e^{-4\varphi}}{2}=$
$=\dfrac{e^{6\varphi}+e^{2\varphi}+e^{-2\varphi}+e^{-6\varphi}}{4}$.

Ответ: –0,25.

Задача 5. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\right)dx$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ сходится при $x>0$, так как является геометрической прогрессией со знаменателем $q=e^{-x}$ и $q\in(0;1)$ при $x>0$. Сумма ряда равна $S(x)=\dfrac{q}{1-q}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Значит, нужно исследовать несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}S(x)\,dx$, имеющий особенности при $x\to+0$ и при $x\to+\infty$. По определению имеем $\int\limits_0^{+\infty}S(x)\,dx=\lim\limits_{a\to+0}\int\limits_a^1 S(x)\,dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b S(x)\,dx$. Найдем первообразную для функции $S(x)$ при $x>0$: $\int\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\left|\begin{matrix}t=1-e^{-x}\\ dt=e^{-x}dx\end{matrix}\right|=\int\dfrac{dt}{t}=$
$=\ln\left|1-e^{-x}\right|+C=\ln\left(1-e^{-x}\right)+C$.

Следовательно, имеем $\lim\limits_{a\to+0}\int\limits_a^1 S(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+0}\ln\left(1-e^{-x}\right)\Big|_a^1 =$

$= \ln\left(1-e^{-1}\right) - \lim\limits_{t\to0}\ln t = +\infty$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b S(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln(1-e^{-x})\Big|_1^b =$

$= -\ln(1-e^{-1})$. Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} S(x)\,dx$ расходится.

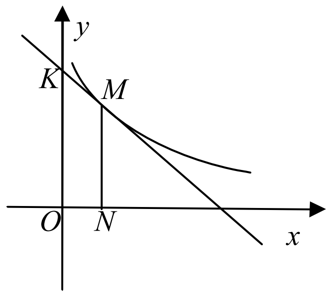
Ответ: расходится.

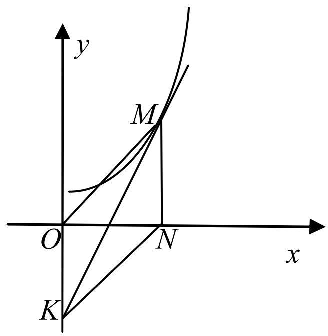
Задача 6. Найдите все дифференцируемые функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

1) график функции $f(x)$ расположен в первой четверти;

2) $f(1) = 1$;

3) для любой точки M, принадлежащей графику функции $y = f(x)$, площадь выпуклого четырехугольника с вершинами в точках M, N, O, K равна 1, где N – проекция точки M на ось абсцисс, O – начало координат, K – точка пересечения оси ординат с касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке M.





Решение. Пусть точка M имеет координаты $\left(x_0, y_0\right)$. Тогда точка N имеет координаты $\left(x_0, 0\right)$, а уравнение касательной MK имеет вид $y = y_0'(x - x_0) + y_0$, $K\left(0, y_0 - y_0'x_0\right)$. По условию точка K отлична от точки O, т.е. $y_0 - y_0'x_0 \neq 0$. Так как прямые MN и KO параллельны, то искомый четырехугольник $MNOK$ или

$MNKO$ будет являться трапецией (в частном случае он может быть параллелограммом) и его площадь можно вычислить по формуле $S = \frac{MN + KO}{2} \cdot NO$. Имеем $MN = y_0$, $NO = x_0$, $KO = \left| y_0 - y_0' x_0 \right|$, $S = \frac{y_0 + \left| y_0 - y_0' x_0 \right|}{2} \cdot x_0$. В силу произвольности выбора точки M можем записать дифференциальное уравнение $x\left(y + \left| y - y'x \right| \right) = 2$.

Пусть $y - y'x > 0$. Тогда получаем линейное уравнение $2xy - y'x^2 = 2$. Находим решение методом вариации постоянной: $2xy - y'x^2 = 0$, $\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$, $y = c(x)x^2$, $y' = 2xc(x) + x^2 c'(x)$, $c'(x) = -\frac{2}{x^4}$, $c(x) = \frac{2}{3x^3} + c$, $y = cx^2 + \frac{2}{3x}$. С учетом условия $y(1) = 1$ получаем частное решение $y = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x}$. Проверим выполнение неравенства $y - y'x > 0$. Имеем $\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x} - \left(\frac{2x}{3} - \frac{2}{3x^2} \right) x > 0$, что эквивалентно $\frac{4}{3x} - \frac{x^2}{3} > 0$ и, далее, $4 - x^3 > 0$, т.е. $x < \sqrt[3]{4}$. Так как график должен располагаться в первой четверти, то должны также выполняться неравенства $x > 0$ и $y = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x} > 0$. Итак, окончательно $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3x}$ при $0 < x < \sqrt[3]{4}$.

Пусть $y - y'x < 0$. Тогда $y'x^2 = 2$, $y' = \frac{2}{x^2}$, $y = -\frac{2}{x} + c$, отсюда $y = 3 - \frac{2}{x}$. Неравенство $y - y'x < 0$ приобретает вид

$3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}\cdot x<0$, $3<\dfrac{4}{x}$, $x<\dfrac{4}{3}$. А из неравенств $x>0$ и $y=3-\dfrac{2}{x}>0$ вытекает, что $f(x)=3-\dfrac{2}{x}$ при $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $f_1(x)=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2}{3x}$ при $0<x<\sqrt[3]{4}$; $f_2(x)=3-\dfrac{2}{x}$ при $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{4}{3}$.

Решения.
Естественнонаучные факультеты.

Задача 1. Приведите пример такого α, что число $\sin^2\alpha$ является иррациональным, а число $\sin^2 2\alpha$ является рациональным.

Решение. Пусть $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$. Тогда $\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Следовательно, число $\sin^2\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ иррационально, в то время как число $\sin^2 2\alpha=\sin^2\dfrac{\pi}{6}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ рационально.

Задача 2. При каждом положительном значении параметра a вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x-x^a-a^x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x-x^a-a^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-a^x}{x}-1-x^{a-1}\right)=$

$$=-\ln a-1-\lim_{x\to 0}x^{a-1}=\begin{cases}-2, & a=1\\ -\ln a-1, & a>1\\ \infty, & a<1\end{cases}.$$

Комментарий. Можно использовать правило Лопиталя :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-x^a-a^x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-1-ax^{a-1}-a^x\ln a}{1}=\begin{cases}-2, & a=1\\ -\ln a-1, & a>1\\ \infty, & a<1\end{cases}.$$

Задача 3. Докажите, что множество матриц A размера 2×2 таких, что $A^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, но $A^2\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, бесконечно.

Решение. Для доказательства достаточно найти бесконечное множество матриц, удовлетворяющих условию $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Этим свойством обладают, например, матрицы вида $A=\begin{pmatrix}a & 1+a^2\\ -1 & -a\end{pmatrix}$, где a — произвольное вещественное число.

Задача 4. Имеется 2017 кусков сыра разной массы. Докажите, что один из этих кусков можно разрезать на две части и разложить весь сыр на две кучки так, чтобы массы кучек были одинаковы и в каждой кучке было одинаковое число кусков.

Решение. Пусть $a_1<a_2<\dots<a_{2017}$ – массы кусков сыра. Обозначим $\alpha=a_1+a_3+\dots+a_{2015}$, $\beta=a_2+a_4+\dots+a_{2016}$. Тогда, складывая все части неравенств $a_1<a_2<a_3$, $a_3<a_4<a_5$, …, $a_{2015}<a_{2016}<a_{2017}$, получим неравенство $\alpha<\beta<\alpha+a_{2017}-a_1$. Попытаемся разрезать кусок с массой a_{2017} на две части с массами x и y так, чтобы $\alpha+x=\beta+y$. Имеем систему линейных уравнений $\begin{cases}x-y=\beta-\alpha;\\ x+y=a_{2017}.\end{cases}$ Решение этой системы имеет вид $x=\dfrac{\beta-\alpha+a_{2017}}{2}$,

$y = \dfrac{a_{2017} + \alpha - \beta}{2}$. Ясно, что $x > 0$ и $y > 0$. Осталось сложить в одну кучу куски сыра с массами x, a_1, a_3, … , a_{2015}, а в другую – с массами y, a_2, a_4, … , a_{2016}.

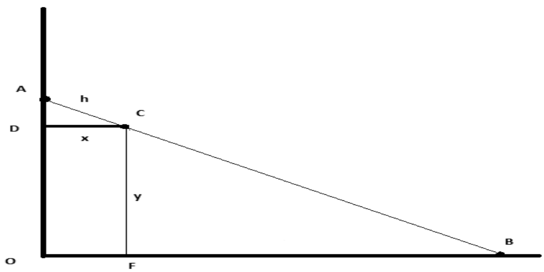
Задача 5. Преподаватель дает студенту листок с тремя различными числами и просит студента записать на чистой доске сначала три данных числа, затем все их возможные суммы по два различных слагаемых, а в конце – сумму всех трех слагаемых. Если при этом какое-то число оказалось записанным на доске несколько раз, то одно из этих одинаковых чисел оставляют на доске, а остальные стирают. Какое наименьшее и наибольшее количество чисел могут быть записаны на доске в результате этих действий?

Решение. Так как студент записывает три исходных числа на доску, то на доске записано не менее трех чисел. При этом, если преподаватель дал листок с числами –1, 0 и 1, то на доске будут записаны эти же три числа, а значит, наименьшее количество чисел равно трем.

Если студент получил листок с числами a; b; c, то на доску он должен записать числа a; b; c; $a + b$; $a + c$; $b + c$; $a + b + c$, а значит, в результате на доске может остаться не более семи чисел. При этом, если был выдан листочек с числами 1, 2 и 4, то на доске будут записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а значит, наибольшее количество чисел равно семи.

Задача 6. Конец A отрезка AB длины a скользит по оси Oy, а конец B – по оси Ox из вертикального положения отрезка до горизонтального. Точка C находится на отрезке AB на расстоянии h от верхнего конца A и движется вместе с отрезком. Найдите уравнение кривой, описываемой точкой C, и определите тип этой кривой.

Решение. $OA^2+OB^2=a^2$. Пусть *C(x;y)*. Из подобия треугольников *AOB* и *CFB* получаем $\frac{OA}{y}=\frac{a}{a-h}$, тогда $OA=\frac{ya}{a-h}$. Из подобия треугольников *AOB* и *ADC* получаем $\frac{OB}{x}=\frac{a}{h}$, тогда $OB=\frac{xa}{h}$. Следовательно, $OA^2+OB^2=\frac{y^2a^2}{(a-h)^2}+\frac{x^2a^2}{h^2}=a^2$, т.е. $\frac{y^2}{(a-h)^2}+\frac{x^2}{h^2}=1$ – это уравнение эллипса (в задаче – четверть эллипса).



ЛИТЕРАТУРА

1. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly» / под ред. В.М. Алексеева. М. : Мир, 1977. 596 с.

2. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. М. : Бюро Квантум, 2007. 158 с.

3. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М. : Наука, 1978. 208 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 2599 от «9» июня 2017 г. Тираж 50 экз.