НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-технический факультет

ДИНАМИКА

Ч. 1. Первая и вторая задачи динамики точки

Учебно-методическое пособие
по курсу «Теоретическая механика»
для студентов физико-технического факультета
направлений подготовки 15.03.03 – Прикладная механика,
15.03.06 – Механотроника и робототехника,
24.03.03 – Баллистика и гидроаэродинамика

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

УДК 531.3(075.8)
ББК 22.213. Я73
Д 466

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физико-технического факультета
Председатель МК ФТФ профессор, д. ф.-м. н. В. А. Скрипняк

Пособие составлено в соответствии с тематикой семинарских занятий и программой курса «Теоретическая механика» студентов физико-технического факультета направлений подготовки 15.03.03 – Прикладная механика, 15.03.06 – Механотроника и робототехника, 24.03.03 – Баллистика и гидроаэродинамика. В пособии рассмотрено решение задач по теме «Первая и вторая задачи динамики точки».

Для преподавателей, аспирантов, студентов и магистрантов.

СОСТАВИТЕЛИ:
профессор кафедры прикладной аэромеханики ФТФ *А.А. Глазунов*
доцент кафедры прикладной аэромеханики ФТФ *А.В. Мерзляков*
Старший преподаватель кафедры прикладной аэромеханики ФТФ *И.В. Еремин*

Введение

Динамика – раздел механики, в котором изучаются механические движении материальных тел в зависимости от причин, их вызывающих. Для описания движения любого тела используется трехмерное эвклидово пространство и абсолютное время. Отсчет времени ведется от некоторого начального момента, который выбирается произвольно.

В статике изучались задачи о приведении систем сил к простейшему виду и относительном равновесии материальных тел, в кинематике рассматривались задачи о геометрических характеристиках механического движения. В динамике — главном разделе курса — на основе сведений из статики и кинематики и специальных законов динамики решаются задачи о связи сил и движений.

Простейшим механическим объектом является **материальная точка**.

Материальная точка называется свободной, если на ее движение не наложены никакие ограничения.

Несвободной называется материальная точка, на которую наложены связи, ограничивающие ее движение.

В дальнейшем будет рассматриваться движение только свободной материальной точки. Для исследования ее движения будут использоваться законы динамики Ньютона.

В настоящей работе рассматриваются следующие разделы: первая (прямая) задача динамики точки, вторая (обратная) задача динамики точки. Теоретические сведения, необходимые для решения задач, приведены в источниках [1 - 3]. Задачи, иллюстрирующие методы решения, а также задачи, рекомендованные для самостоятельного решения, взяты из [4].

1. Первая задача динамики точки.

Как было сказано во введении, движение свободной материальной точки подчиняется основному закону динамики (второму закону Ньютона). Его запись в векторном виде выглядит так:

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

где m – масса точки, $\vec{w}$ - ее ускорение, $\vec{F}$ - равнодействующая системы сил, действующей на точку.

В проекциях на оси декартовой координатной системы этот закон выглядит так:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X \\ m\ddot{y} = Y \\ m\ddot{z} = Z \end{cases} \tag{1}$$

где X, Y, Z – проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси.

Эти равенства являются ***основными дифференциальными уравнениями движения точки***.

Прямая (первая) задача динамики материальной точки формулируется так:

По известному закону движения точки определить силу, действующую на нее в каждый момент времени

Если известен закон движения

$$x(t), y(t), z(t)$$

то после подстановки его в уравнения движения (1) легко определить проекции вектора силы X, Y, Z на оси декартовой системы координат

Иногда для решения задач удобно спроектировать основной закон динамики на оси естественного трехгранника:

$$mw_\tau = F_\tau;\ mw_n = F_n;\ mw_b = F_b$$

где индекс τ соответствует касательной (тангенциальной) оси, индекс n – нормальной оси, индекс b – бинормальной оси. Как известно из кинематики,

$$w_\tau = \frac{dv}{dt};\ w_n = \frac{v^2}{\rho};\ w_b = 0$$

Поэтому система уравнений принимает вид:

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau; m\frac{v^2}{\rho}=F_n; 0=F_b$$

Последнее уравнение говорит о том, что при движении материальной точки ее траектория принимает такой вид, что в каждой ее точке вектор силы, действующей на материальную точку, лежит в плоскости, соприкасающейся с траекторией

С целью успешного решения задач по теме «Динамика точки» с точки зрения авторов целесообразно использовать следующий план действий:

1. Изобразить на рисунке объект задачи (материальную точку) в необходимый момент времени.
2. Расставить все силы, действующие на точку.
3. Если есть возможность – показать направление ускорения точки.
4. Записать второй закон Ньютона для решаемой задачи.
5. Ввести систему координат. Одну из осей желательно направить в направлении ускорения.
6. Выполнить проекции второго закона Ньютона на координатные оси.
7. Решить полученную систему уравнений (для первой задачи – алгебраических, для второй – дифференциальных).

Примеры решения задач.

1.1. *В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.*

Данная простая задача приведена в качестве примера для того, чтобы показать реализацию схемы решения, приведенной в теоретической части, в одномерном случае.

Необходимый рисунок лифта на канате приведен на рис. 1.1. Там же указаны силы, действующие на лифт: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения каната $\vec{T}$.

Согласно условию задачи, лифт движется равноускоренно вниз. Вектор ускорения также приведен на рис. 1.1.

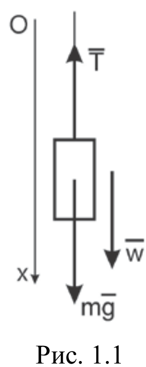

Рис. 1.1

Векторная форма второго закона Ньютона для данной задачи выглядит так:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}$$

Согласно схеме решения, для этой задачи целесообразно ввести систему координат из одной оси и направить ее вниз (см. рис. 1.1). Проекция второго закона Ньютона на ось выглядит так:

$$mw = mg - T$$

Из этого выражения следует:

$$T = mg - mw = m(g - w)$$

Ускорение лифта определяется на основании формулы для пути при равноускоренном движении:

$$S = v_0 t + \frac{w \cdot t^2}{2}$$

Подстановка условий задачи ($v_0 = 0$; $t = 10$ с; $S = 35$ м) приводит к выражению

$35 = \frac{w \cdot 10^2}{2}$, откуда $w = \frac{2 \cdot 35}{10^2} = 0,7$ м/с^2 .

Подстановка всех данных в выражение для T позволяет получить окончательное значение для силы натяжения

$$T = 280 \cdot (9,8 - 0,7) = 2548 \text{ Н}$$

1.2. *Груз М массы 0,102 кг, подвешенный на нити длиной 30 см в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение Т нити.*

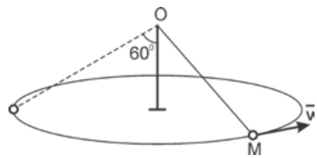

Рис. 1.2

Данная простая задача приведена в качестве примера для того, чтобы показать реализацию схемы решения, приведенной в теоретической части, в двумерном случае.

Необходимый рисунок груза на нити приведен на рис. 1.3. Там же указаны силы, действующие на груз: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$.

Согласно условию задачи, груз движется равномерно по окружности. Вектор ускорения груза в этом случае направлен в сторону центра окружности O_1 и также приведен на рис. 1.3.

Векторная форма второго закона Ньютона для данной задачи выглядит так:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}$$

Согласно схеме решения, для этой задачи целесообразно ввести систему координат из двух осей; ось Mx нужно направить в направлении вектора ускорения, ось My – перпендикулярно оси Mx (см. рис. 1.3). Проекция второго закона Ньютона на координатные оси выглядят так:

$$Mx : mw = T \cdot \cos\left(30^0\right)$$

$$My : 0 = mg + T \cdot \cos\left(120^0\right)$$

Подстановка исходных данных задачи во второе равенство приводит к уравнению

$$0 = 0{,}102 \cdot 9{,}81 + T \cdot (-0{,}5)$$

откуда величина силы натяжения нити

$$T = 2 \cdot 0{,}102 \cdot 9{,}81 = 2 \text{ Н}$$

Для определения скорости груза используется тот факт, что ускорение при равномерном движении точки по окружности

$$w = \frac{v^2}{R}$$

где v – скорость груза, R – радиус окружности, по которой движется груз. На рис. 1.3 $R = O_1M$. Из треугольника OO_1M

$$R = OM \cdot \sin\left(60^0\right) = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ см} = 0{,}15\sqrt{3} \text{ м}$$

Подстановка этой величины в выражение для ускорения, а его, исходных данных задачи и величины силы T – в выражение для проекции на ось Mx, приводит к уравнению:

$$0{,}102 \cdot \frac{v^2}{0{,}15 \cdot \sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 3}{0{,}102}} \approx 2{,}1 \text{ м/с}$$

1.3. *Велосипедный трек на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет собой прямую, наклонную к горизонту, так что на кривых участках внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус R и угол наклона к горизонту α, если коэффициент трения резиновых шин о поверхность трека равен f?*

Согласно общей схеме решения задачи, сначала необходимо изобразить велосипедиста в нужный момент времени. С учетом условия задачи, считается целесообразным изобразить положение велосипедиста в двух видах: вид сверху на треке (рис. 1.4 а) и вид сбоку на поверхности трека (рис. 1.4 б). На этих рисунках показан радиус закругления трека R (радиус окружности, по которой едет велосипедист), а на рис. 1.4 а показан еще и вектор скорости велосипедиста.

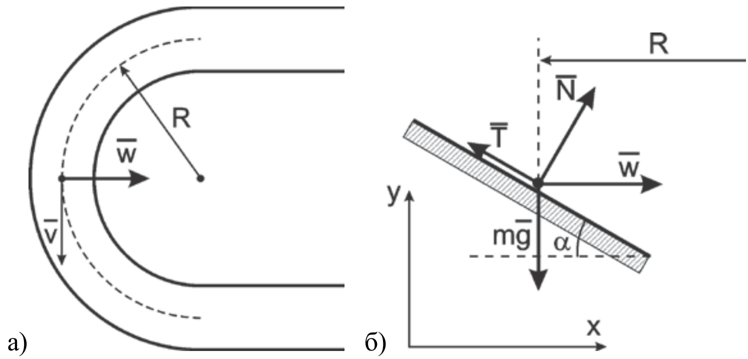

Рис. 1.4

Силы, действующие на велосипедиста, изображены на рис. 1.4 б. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально вниз, сила нормальной реакции поверхности трека $\vec{N}$ - перпендикулярно поверхности вверх. Кроме этого, на велосипедиста действует сила трения $\vec{T}$, направленная вдоль поверхности трека. В зависимости от скорости велосипедиста она может быть направлена вверх (скорость мала, трение препятствует соскальзыванию) и вниз (скорость велика, трение препятствует вылету из трека). В этом примере будет разобран случай, когда сила трения направлена вверх, т.е. поиск минимальной скорости велосипедиста.

При движении с постоянной скоростью ускорение велосипедиста (нормальное) направлено в центр виража. Оно показано на обоих рисунках 1.4.

Второй закон Ньютона в векторной форме для этой задачи выглядит так:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

Для перевода этой формулы в скалярный вид выбирается система координат, изображенная на рис. 1.4 б: ось Ох направлена вдоль вектора ускорения, ось Оу – перпендикулярно ему. Тогда проекции второго закона Ньютона на эти оси будут выглядеть так (проекция вектора на направление равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и направлением):

$$Ox:\ mw\cdot\cos 0^0 = mg\cdot\cos 90^0 + N\cdot\cos(90^0-\alpha) + T\cdot\cos(180^0-\alpha)$$

$$Oy:\ mw\cdot\cos 90^0 = mg\cdot\cos 180^0 + N\cdot\cos\alpha + T\cdot\cos(90^0-\alpha)$$

После подстановки значений косинусов, формул приведения и выражений для силы трения и нормального ускорения получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = N\cdot\sin\alpha - fN\cdot\cos\alpha \\ 0 = -mg + N\cdot\cos\alpha + fN\cdot\sin\alpha \end{cases}$$

Для определения скорости необходимо из второго уравнения выразить N и подставить в первое. После элементарных преобразований окончательно получается:

$$v_{\min} = \sqrt{gR\frac{\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha + f\cdot\sin\alpha}} = \sqrt{gR\frac{tg(\alpha)-f}{1+f\cdot tg(\alpha)}}$$

Совершенно аналогичным путем определяется максимальная скорость; необходимо только изменить направление силы трения между велосипедистом и поверхностью трека на противоположное. В результате решения получается следующее выражение:

$$v_{\max} = \sqrt{gR\frac{\sin\alpha + f\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha - f\cdot\sin\alpha}} = \sqrt{gR\frac{tg(\alpha)+f}{1-f\cdot tg(\alpha)}}$$

1.4. *Во избежание несчастных случаев, происходивших от разрыва маховиков, устраивается следующее приспособление. В ободе маховика помещается тело A, удерживаемое внутри его пружиной S. Когда скорость маховика достигает предельной величины, тело A концом своим задевает выступ B задвижки CD, которая закрывает доступ пара в машину. Пусть масса тела A равна 1,5 кг, расстояние e выступа B от маховика равно 2,5 см, предельная угловая скорость маховика 120 об/мин. Определить необходимый коэффициент жесткости пружины с предполагая, что расстояние от центра тяжести тела A до оси вращения маховика при отсутствии вращения равно 147,5 см.*

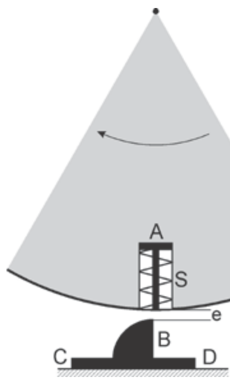

Рис. 1.5

В данной задаче тело А не является материальной точкой и в процессе вращения маховика находится под действием только одной силы – силы упругости пружины. Поэтому необязательно записывать векторное выражение второго закона Ньютона; можно записать его прямо в скалярном виде для центра масс тела А:

$$mw = F_y$$

При достижении предельной угловой скорости тело А смещается на расстояние е = 2, 5 см = 0,025 м (см. рис. 1.5), на столько же сожмется пружина. Поэтому

$$F_y = c\cdot e,$$

где с – жесткость пружины, которую необходимо найти.

Так как центр масс тела А движется по кругу в составе маховика, то его ускорение равно

$$w = \omega^2 R$$

где ω - предельная угловая скорость вращения маховика, R – расстояние от центра масс до оси вращения.

Угловую скорость необходимо перевести в рад/с:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 120}{60} = 4\pi \text{ рад/с}$$

Расстояние R складывается из начального расстояния при отсутствии вращения (см. условие задачи) и расстояния e, на которое тело A сместилось при достижении предельной угловой скорости:

$$R = 147{,}5 + 2{,}5 = 150 \text{ см} = 1{,}5 \text{ м}$$

Подстановка всех чисел в исходное равенство приводит к уравнению

$$1{,}5 \cdot (4\pi)^2 \cdot 1{,}5 = c \cdot 0{,}025$$

откуда

$$c = \frac{1{,}5^2 \cdot \left(4\pi\right)^2}{0{,}025} = 14212 \text{ Н/м}$$

Задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения:

1.5. К телу массы 3 кг, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой прикреплен к точке A. Какое ускорение надо сообщить точке A, поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении T =42 Н.

1.6. Шарик, масса которого равна 100 г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением

$$x = 4{,}9 \cdot t - 2{,}45 \cdot (1 - e^{-2t})$$

где x — в метрах, t — в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить ее как функцию скорости шарика.

1.7. Груз M веса 10 Н подвешен к тросу длины $l = 2$ м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \sin\left(2\pi t\right)$$

где φ - угол отклонения троса от вертикали в

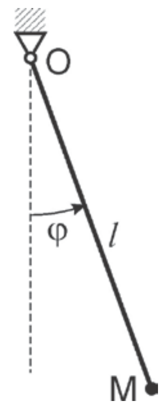

Рис. 1.6

радианах, t – время в секундах (см. рис. 1.6). Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем н нижнем положениях груза.

1.8. Предохранительный выключатель паровых турбин состоит из пальца A массы $m = 0{,}225$ кг, помещенного в отверстии, просверленном в передней части вала турбины перпендикулярно оси, и отжимаемого внутрь пружиной; центр тяжести пальца отстоит от оси вращения вала на расстоянии $l = 8{,}5$ мм при нормальной скорости вращения турбины n = 1500 об/мин. При увеличении числа оборотов на 10% палец преодолевает реакцию пружины, отходит от своего нормального положения на расстояние $x = 4{,}5$ мм, задевает конец рычага B и освобождает собачку C, связанную системой рычагов с пружиной, закрывающей клапан парораспределительного механизма турбины. Определить жесткость пружины, удерживающей тело A, т. е. силу, необходимую для сжатия ее на 1 см, считая реакцию пружины пропорциональной ее сжатию.

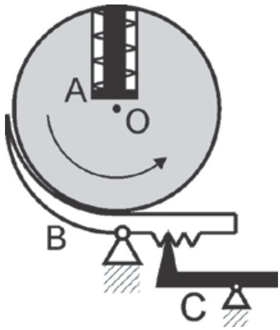

Рис. 1.7

2. Вторая задача динамики точки.

Обратная (вторая) задача динамики материальной точки формулируется так:

По известным силам, действующим на точку в каждый момент времени, определить закон движения точки

Другими словами, необходимо решить систему дифференциальных уравнений (1) и определить неизвестные функции

$$x(t), y(t), z(t)$$

которые и представляют закон движения точки.

Силы, действующие на точку (правые части системы) могут зависеть

а) от: времени t (например, у автомобиля силой тяги двигателя непрерывно управляет водитель);

b) от положения точки, определяемого текущими координатами x, y, z (например, сила в законе всемирного тяготения);
c) от скорости точки, определяемой первыми производными координат по времени $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (например, сила сопротивления при движении материального объекта в вязкой жидкости)

Поэтому в общем случае для определения закона движения придется решать систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений (см. [5]), общее решение этой системы выглядит так:

$$x = x\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right)$$
$$y = y\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right)$$
$$z = z\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right)$$

где C_i – произвольные постоянные (константы интегрирования). Для того, чтобы получить закон движения конкретной точки, их необходимо определить, а для этого необходимо задать 6 дополнительных условий. Обычно эти условия ставят в начальный момент движения точки в виде:

$$x\left(0\right) = x_0; y\left(0\right) = y_0; z\left(0\right) = z_0; \dot{x}\left(0\right) = \dot{x}_0; \dot{y}\left(0\right) = \dot{y}_0; \dot{z}\left(0\right) = \dot{z}_0$$

(начальные условия движения точки).

Таким образом, движение точки определяется не только силой, но и начальными условиями движения.

В процессе решения может случиться так, что в уравнениях движения каждая проекция силы будет зависеть только от соответствующей координаты и ее производной:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X(t, x, \dot{x}) \\ m\ddot{y} = Y(t, y, \dot{y}) \\ m\ddot{z} = Z(t, z, \dot{z}) \end{cases}$$

В этом случае система распадается на три отдельных уравнения, решать которые значительно легче.

Примеры решения задач.

2.1. *За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 10 м/с, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, равно 0,3 веса вагона?*

Решение задач на эту тему проводится по схеме, изложенной в предыдущей части, с двумя дополнениями:

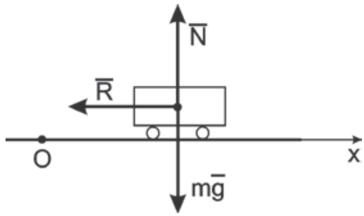

Рис. 2.1

a) вектор ускорения изображать не надо, направление координатных осей выбирается из удобства составления уравнений, для каждой оси указывается начало отсчета;
b) решать придется не алгебраические, а дифференциальные уравнения; методы их решения изложены в [4].

Трамвай в текущий момент времени изображен на рис. 2.1. Там же изображены силы, действующие на него: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции рельсов $\vec{N}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R}$$

Для этой задачи целесообразно ввести систему координат из одной оси, направленной по направлению движения трамвая; начало оси нужно разместить в точке, где началось торможение (см. рис. 2.1). Тогда проекция второго закона Ньютона на эту ось будет выглядеть так:

$$m\ddot{x} = -R$$

Так как согласно условию задачи

$$R = 0,3 \cdot mg$$

то после подстановки в выражение для проекции и несложного преобразования получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} = -0,3g$$

Начальные условия для него

$$x_0 = 0; \dot{x}_0 = 10$$

Полученное уравнение решается двукратным интегрированием правой части. Первое интегрирование дает выражение

$$\dot{x} = -0,3gt + C_1$$

Постоянная C_1 определяется из второго начального условия:

$$10 = -0,3g \cdot 0 + C_1; \quad C_1 = 10 \;\Rightarrow\; \dot{x} = -0,3gt + 10$$

Второе интегрирование приводит к выражению

$$x = -0,3g\frac{t^2}{2} + 10t + C_2$$

Постоянная C_2 определяется из первого начального условия:

$$0 = -0,3g \cdot \frac{0^2}{2} + 10 \cdot 0 + C_2; \quad C_2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -0,3g\frac{t^2}{2} + 10t$$

Полученные выражения используются для ответов на вопросы, поставленные в задаче. Время до остановки трамвая определяется из выражения для скорости. В момент остановки скорость равна нулю, поэтому

$$0 = -0,3g \cdot T + 10; \;\Rightarrow\; T = \frac{10}{0,3g} \approx 3,4 \text{ с}$$

Пройденный путь до остановки трамвая численно равен координате в момент остановки, поэтому

$$S = x(T) = -0,3g\frac{3,4^2}{2} + 10 \cdot 3,4 \approx 17 \text{ м}$$

Таким образом, время, которое трамвай затратил до остановки, составило 3,4 с; путь, который он при этом проехал – 17 м.

2.2. *Тело падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха* $R = k^2Pv^2$, *где* v *– величина скорости тела,* P *– вес тела. Какова будет скорость тела по истечении времени* t *после начала движения? Каково предельное значение скорости?*

Тело в текущий момент времени изображено на рис. 2.2. Там же изображены силы, действующие на него: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{R}$$

Для этой задачи целесообразно ввести систему координат из одной оси Ох, направленной по направлению движения тела; начало оси нужно разместить в точке, где начался полет (см. рис. 2.2). Кроме того, необходимо учесть, что P = mg и в задаче требуется найти скорость тела, а не его координату. Тогда проекция второго закона Ньютона на эту ось будет выглядеть так:

$$\frac{P}{g}\cdot\frac{dv}{dt}=P-R$$

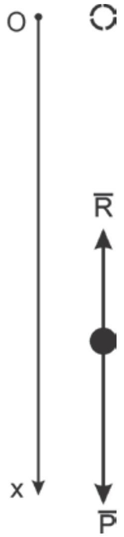

Рис. 2.2

Так как согласно условию задачи

$$R = k^2Pv^2$$

то после подстановки в выражение для проекции и несложного преобразования получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt}=g\cdot\left(1-k^2v^2\right)$$

Начальные условия для него $v(0) = 0$

Разделение переменных приводит к выражению

$$\frac{dv}{1-k^2v^2}=g\cdot dt$$

откуда

$$\int\frac{dv}{1-k^2v^2}=\int g\cdot dt+C\Rightarrow\frac{1}{2k}\cdot\ln\left(\frac{1+kv}{1-kv}\right)=gt+C$$

Постоянная С определяется из начального условия:

$$\frac{1}{2k}\cdot\ln\left(\frac{1+k\cdot 0}{1-k\cdot 0}\right)=g\cdot 0+C\Rightarrow C=0$$

Путем исключения логарифма получается искомая зависимость скорости от времени:

$$\frac{1}{2k}\cdot\ln\left(\frac{1+kt}{1-kt}\right)=gt\Rightarrow v=\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}$$

Для ответа на второй вопрос задачи необходимо понимать, что в процессе падения тела его скорость непрерывно увеличивается; предельное значение скорости будет достигнуто при очень большом времени падения. Поэтому

$$v_{пр} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}\right) = \frac{1}{k}$$

2.3. *Тело веса P, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления R воздуха. Считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости R = kPv, найти уравнения движения тела. Начало координат поместить в точку вылета тела, ось Ох направить по горизонтали в сторону полета тела, ось Оу – вертикально вверх.*

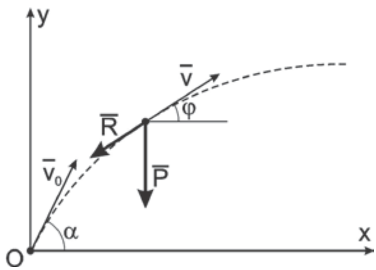

Рис. 2.3

Тело в текущий момент времени изображено на рис. 2.3. Там же изображены силы, действующие на него: сила тяжести $\vec{P}$ и сила сопротивления $\vec{R}$. Сила сопротивления направлена противоположно вектору скорости. Второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{R}$$

Для этой задачи целесообразно ввести систему координат из двух осей Ох и Оу, направленных так, как указано в условии задачи; начало оси нужно разместить в точке, где начался полет (см. рис. 2.3). С целью удобства определения проекций полезно ввести угол φ между вектором скорости тела и положительным направлением оси Ох. Тогда проекции второго закона Ньютона на эти оси будут выглядеть так:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P\cdot\cos 90^0 + R\cdot\cos(180^0 - \varphi) \\ m\ddot{y} = P\cdot\cos 180^0 + R\cdot\cos(90^0 + \varphi) \end{cases}$$

Использование формул приведения, подстановка выражения для R из условия задачи, а также выражения P = mg и проведение несложных преобразований приводит полученную систему уравнений к следующему виду:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kgv \cdot \cos\varphi \\ \ddot{y} = -g(1 + kv \cdot \sin\varphi) \end{cases}$$

Косинус и синус угла наклона вектора скорости к горизонту определяется на основе рис. 2.4. Из него видно, что

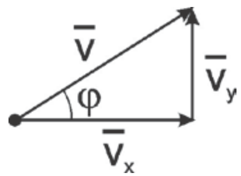

Рис. 2.4

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v}; \sin\varphi = \frac{v_y}{v}$$

а так как

$$v_x = \dot{x}; v_y = \dot{y} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\dot{x}}{v}; \sin\varphi = \frac{\dot{y}}{v}$$

Подстановка этих выражений в систему уравнений и простое упрощение приводит систему к следующему виду:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kg\dot{x} \\ \ddot{y} = -g(1 + k\dot{y}) \end{cases} \qquad (2)$$

Начальными условиями для системы (2) будут:

$$x(0) = 0; \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha); y(0) = 0; \dot{y}(0) = v_0 \sin(\alpha)$$

Так как правые части уравнений содержат те же функции, что и левые, то, как указано в теоретическом введении, уравнения можно решать по отдельности.

В качестве примера подробно рассмотрено решение первого уравнения системы (2).

Уравнение с начальными условиями выглядит так:

$$\ddot{x} = -kg\dot{x}; \quad x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = v_0 \cdot \cos\alpha$$

Разделение переменных, определение первой производной:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -kg\dot{x}; \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -kgdt; \quad \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int kgdt;$$

$$\ln(\dot{x}) = -kgt + C_1; \quad \dot{x} = C_1 e^{-kgt}$$

Определение постоянной C_1 из второго начального условия:

$$v_0 \cdot \cos\alpha = C_1 e^{-kg \cdot 0} \Rightarrow C_1 = v_0 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \dot{x} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot e^{-kgt}$$

Интегрирование полученной зависимости – определение закона изменения координаты x со временем:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot e^{-kgt}; \quad dx = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot e^{-kgt} \cdot dt;$$

$$\int dx = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \int e^{-kgt} \cdot dt; \quad x = -\frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{kg} e^{-kgt} + C_2$$

Определение постоянной C_2 из второго начального условия:

$$0 = -\frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{kg} e^{-kg\cdot 0} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{kg}$$

Окончательное выражение зависимости координаты x от времени:

$$x = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{kg}\left(1 - e^{-kgt}\right)$$

Точно таким же образом получается зависимость координаты y от времени:

$$y = \frac{1 + kv_0 \cdot \sin\alpha}{k^2 g}\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{t}{k}$$

2.4. *Точка М массы m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R (см. рис. 2.5). Текущее положение точки определяется углом φ между вертикальной прямой и радиусом цилиндра, проведенным в точку. В начальный момент угол φ_0=90°, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки М и реакцию поверхности цилиндра при φ=30°.*

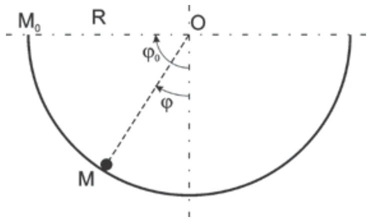

Рис. 2.5

Данная задача включена как пример использования в решении задач динамики естественных уравнений движения. Их форма была приведена в первой части настоящей работы.

Точка в текущий момент времени изображено на рис. 2.6. Там же изображены силы, действующие на нее: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции поверхности $\vec{N}$, направленная вдоль радиуса. Второй закон Ньютона в векторной форме выглядит так:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N}$$

Так как известна траектория движения точки, то целесообразно спроектировать второй закон Ньютона на оси естественной системы координат n и τ, показанные на рис. 2.6:

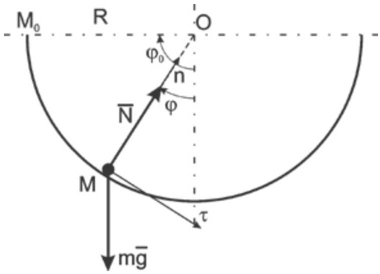

Рис. 2.6

$$\begin{cases} mw_\tau = N\cdot\cos 90^0 + mg\cdot\cos(90^0 - \varphi) \\ mw_n = N\cdot\cos 0^0 + mg\cdot\cos(180^0 - \varphi) \end{cases}$$

Углы, вошедшие в формулы, легко определяются по рис. 2.6.

Первое уравнение упрощается путем использования формул приведения и выражения для касательного ускорения, приведенного выше:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Так как точка движется по окружности, то ее скорость можно выразить через угловую скорость и радиус, а так как движение точки происходит противоположно положительному направлению отсчета угла φ, то выражение для скорости выглядит так:

$$v = -R\dot{\varphi}$$

а касательное ускорение – так:

$$w_\tau = -R\ddot{\varphi}$$

Таким образом, первое уравнение после подстановок и использования формул приведения, а также простейших преобразований, становится дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi$$

со следующими начальными условиями: $\varphi_0 = 90^0; \dot{\varphi}_0 = 0$

Уравнение не содержит аргумента *t*. Поэтому его можно решить методом введения параметра. Суть метода – в замене следующего вида:

$$\dot{\varphi} = \omega(\varphi)$$

Согласно правилу нахождения производной сложной функции

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}$$

После подстановки этого выражения в дифференциальное уравнение, оно принимает следующий вид:

$$\omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{g}{R} \cdot \sin\varphi$$

Это уравнение легко решается:

$$\omega \cdot d\omega = -\frac{g}{R} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \Rightarrow \int \omega \cdot d\omega = -\frac{g}{R} \cdot \int \sin\varphi \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{R} \cdot \cos\varphi + C$$

Постоянная *C* определяется из начальных условий:

$$t = 0; \varphi_0 = 90^0; \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = 0 \Rightarrow \frac{0^2}{2} = \frac{g}{R} \cdot \cos 90^0 + C \Rightarrow C = 0$$

Подстановка и преобразование приводят к выражению:

$$\omega = \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{R} \cdot \cos\varphi}$$

Так как в задаче требуется найти только скорость, то этой формулы достаточно. С учетом вышеприведенного выражения для скорости

$$v = R\omega = \sqrt{2gR \cdot \cos\varphi}$$

Согласно условию задачи, скорость нужно определить для угла 30°. Подстановка приводит к результату:

$$v = \sqrt{2gR \cdot \cos\left(30^0\right)} = \sqrt{2gR \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{gR} \cdot \sqrt[4]{3}$$

Определение силы давления точки на поверхность цилиндра (или нормальной реакции поверхности на точку) N проводится из нормальной проекции второго закона Ньютона. Использование выражения для нормального ускорения

$$w_n = \frac{v^2}{R}$$

и формул приведения приводит формулу для этой проекции к следующему виду:

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg \cdot \cos\varphi$$

Откуда

$$N = m\frac{v^2}{R} + mg \cdot \cos\varphi$$

Подстановка угла 30° и найденного значения скорости дает окончательный результат:

$$N = m\frac{\left(\sqrt{gR} \cdot \sqrt[4]{3}\right)^2}{R} + mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = mg \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

<u>Задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения:</u>

2.5. Принимая в первом приближении сопротивление откатника постоянным, определить продолжительность отката ствола полевой пушки, если начальная скорость отката равна 10 м/с, а средняя длина отката равна 1 м.

2.6. При скоростном спуске лыжник массы 90 кг скользил по склону в 45°, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег f = 0,1. Сопротивление воздуха движению лыжника пропорционально квадрату скорости лыжника и при скорости в 1 м/с равно 0,635 Н. Какую наибольшую скорость мог развить лыжник? Насколько увеличится максимальная скорость, если подобрав лучшую мазь, лыжник уменьшит коэффициент трения до 0,05?

2.7. Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь, а силу притяжения Земли считать обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли. Найти время T, по истечении которого тело достигнет поверхности Земли. Какую скорость v оно приобретет за это время?

Радиус Земли равен R; ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g.

2.8. По негладкой наклонной плоскости движется тяжелое тело М, постоянно оттягиваемое посредством нити в горизонтальном направлении, параллельно прямой АВ. С некоторого момента движение тела становится прямолинейным и равномерным, причем из двух взаимно перпендикулярных составляющих скорости та, которая направлена параллельно АВ, равна 12 м/с. Определить вторую составляющую v_1 скорости, а также натяжение Т нити при следующих данных: уклон плоскости $tg(\alpha) = 1/30$, коэффициент трения $f = 0{,}1$, масса тела 30 кг.

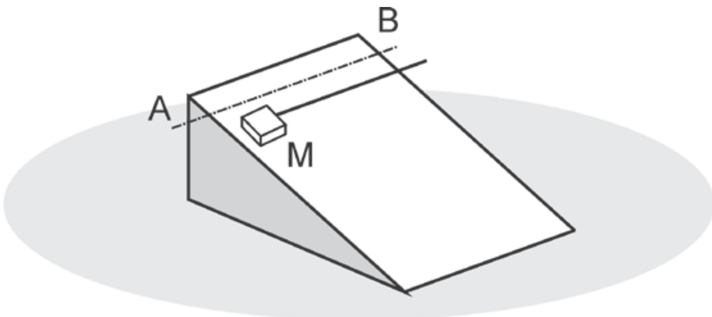

Рис. 2.7

ЛИТЕРАТУРА

1. Томилов Е.Д. Теоретическая механика. Ч. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1966. 304 с.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики (ч. 1). М.: Наука, 1972. 468 с.
3. Шеремет М.А., Штанько В.А. Основы курса теоретической механики: учеб. пособие. Т. 2: Динамика. Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2012. 336 с.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие. 36-е изд. М.: Наука, 1986. 448 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1959. 469 с.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 2616 от «19» июня 2017 г. Тираж 50 экз.