МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА МАТЕРИАЛА ИЗ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Методические указания
для выполнения лабораторных работ

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии: Н.Г. Брянцева

Работа посвящена изучению деформации твердых тел. Рассматривается методика определения модуля сдвига материала из крутильных колебаний.

Методические указания рассчитаны на студентов нефизических специальностей очной и заочной форм обучения.

СОСТАВИТЕЛИ: доцент **Н.А. Александров**
Н.И. Иванова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА МАТЕРИАЛА ИЗ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы: изучение упругих деформаций твердых тел. Измерение модуля сдвига материала из крутильных колебаний.

Деформация

Деформацией твердого тела называется изменение его размеров и объема, сопровождающееся чаще всего изменением формы тела. Деформации вызываются изменением температуры или внешними силовыми воздействиями. При деформациях происходят смещения частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток твердых тел, из первоначальных положений равновесия в новые. Силы взаимодействия между частицами препятствуют этому смещению, вследствие чего в деформированном теле возникают внутренние **упругие силы**, которые уравновешивают внешние силы, приложенные к телу.

В случае твердых тел различают деформации **упругие** и **пластические**. Является ли деформация упругой или пластической зависит не только от материала тела, но и от величины приложенной силы, а точнее от приложенного **напряжения**.

Напряжением называется сила, отнесенная к единице площади $\sigma = F/S$.

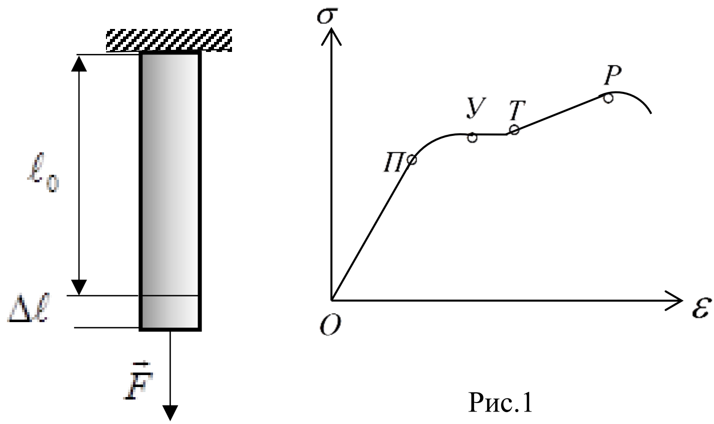

Рис.1

Деформация, исчезающая после прекращения действия вызывающей её силы, называется упругой. При этом происходят смещения частиц из новых положений равновесия в кристаллической решетке в прежние. Все возможные виды деформаций могут быть сведены к **растяжению, сжатию и сдвигу.** Представим, что к основанию однородного стержня (рис.1) приложена растягивающая сила $\vec{F}$. Стержень будет деформирован. Пусть ℓ_0 -длина недеформированного стержня. После приложения силы его длина получает приращение $\Delta\ell$ и становится равной $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$.

Отношение $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$ называют относительным удлинением. На рис.1 также показана экспериментальная зависимость относительной деформации $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$ растяжения металлического стержня длиной ℓ_0 от приложенного напряжения $\sigma = F/S$. Этот график называют диаграммой растяжения.

При небольших значениях напряжение и деформация примерно пропорциональны (участок ОП)

$$\sigma = E\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \qquad (1)$$

Эта зависимость носит название **закона Гука**. Постоянный коэффициент пропорциональности E называется **модулем Юнга** и является одной из существенных характеристик данного материала.

Модуль Юнга – это напряжение, которое вызывает относительную деформацию $\varepsilon = 1$, то есть $\Delta\ell = \ell_0$. Если это стержень , то это то напряжение, которое увеличивает его длину вдвое. Конечно, разрушение металлических образцов наступает при много меньших относительных деформациях, но для характеристики упругих свойств металлов модуль Юнга весьма удобен

Далее деформация растет быстрее (до точки У), а от точки У до точки Т кривая на некотором участке примерно параллельна оси деформации – напряжение почти не увеличивается, а деформации растут. Область деформаций, соответствующая участку кривой от точки Т, называется областью пластических деформаций.

Пластической деформацией называется неупругая деформация твердого тела, которая сохраняется и после прекращения действия внешних приложенных сил. Далее, с увеличением напряжения σ кривая достигает максимума в точке Р и затем, спадая, обрывается. Конец кривой соответствует разрыву тела.

Сдвиг

Сдвигом называется деформация, при которой все плоские слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости (плоскости сдвига), не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис.2). Сдвиг происходит под действием силы $\vec{F}$, приложенной касательно к грани *BC*, параллельной плоскости сдвига. Грань *AD* закреплена неподвижно. Мерой деформации является угол сдвига φ (относительный сдвиг). Для малых углов сдвига $\varphi = tg\,\varphi = \dfrac{\Delta x}{x}$, где $\Delta x = CC'$ – абсолютный сдвиг; $x = AB$.

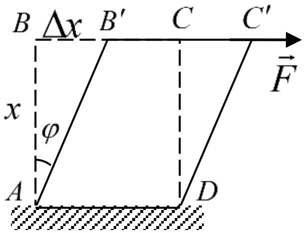

Рис.2

Величина деформации, определяемая углом φ, закономерно связана с величиной касательных напряжений. Опыт показывает, что связь между относительным сдвигом φ и касательным напряжением σ_τ для данного материала примерно такая же, как и зависимость между ε и σ для того же материала. По закону Гука относительный сдвиг пропорционален касательному напряжению

$$\sigma_\tau = G\varphi\ , \qquad (2)$$

где G – **модуль сдвига**, численно равный касательному напряжению, вызывающему относительный сдвиг, равный единице, то есть на угол, тангенс которого равен 1. Это угол 45 градусов. Модуль сдвига наравне с модулем Юнга характеризует упругие свойства вещества.

Кручение

Деформации растяжения и сдвига являются деформациями однородными, то есть все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково. Если верхний конец круглого стержня закрепить, а к другому приложить закручивающие силы, создающие вращающий момент $M_з$ относительно продольной оси стержня, то возникнут **деформации кручения**: стержень закрутится – каждый радиус незакрепленного основания повернется вокруг продольной оси на угол φ (рис.3). Образующая цилиндра *(AB)* станет винтовой линией *(AB₁)*.

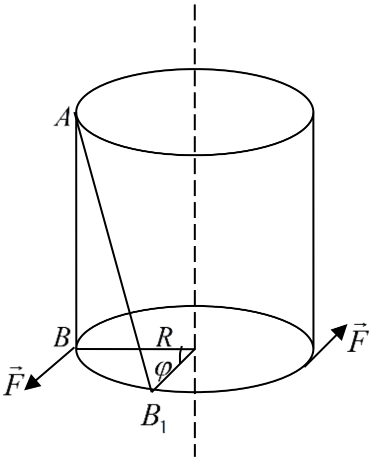

Рис.3

Закон Гука для деформации кручения запишется в виде

$$M_з = D\varphi\ , \tag{3}$$

где D – модуль кручения – постоянная для данного стержня величина, зависит не только от материала, но и от геометрических размеров стержня.

Деформацию кручения можно рассматривать как неоднородный сдвиг. Теоретическими расчетами получена связь модулей кручения и сдвига для сплошного стержня радиусом R

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2\ell} \tag{4}$$

Крутильные колебания

Если к свободному концу стержня прикрепить тело и заставить его под действием сил упругости стержня колебаться, то уравнение, описывающее крутильные колебания , получается из уравнения основного закона динамики вращательного движения

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_з\ ,\ I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi\ , \qquad (5)$$

где I – момент инерции маятника.

Моментом инерции материальной точки называется величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от оси вращения

$$\Delta I = m_i r_i^2 \qquad (6)$$

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции всех материальных точек, составляющих это тело

$$I = \int r_i^2\, dm \qquad (7)$$

Обозначим $\omega^2 = \frac{D}{I}$, тогда уравнение, описывающее крутильные колебания , примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$$

Решением этого уравнения является уравнение гармонических колебаний

$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$, где $\omega = 2\pi\frac{1}{T}$, тогда

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{I}}}$ или период крутильных колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (8)$$

Выразив из (8) D и приравняв его с (4) , получим выражение для модуля сдвига

$$G = \frac{8\pi I \ell}{T^2 R^4} \qquad (9)$$

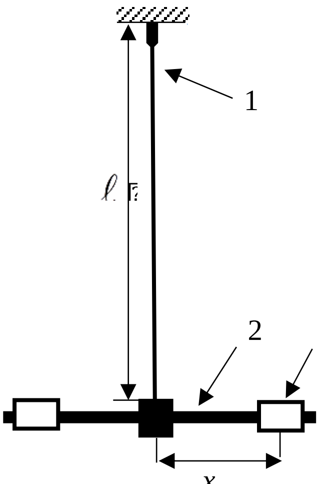

Рис.4

Таким образом, модуль сдвига можно вычислить через измеряемые величины.

Описание экспериментальной установки

Установка для определения модуля сдвига методом крутильных колебаний состоит из кронштейна, в зажиме которого закреплена исследуемая поволока 1. К нижнему концу проволоки прикреплен горизонтальный металлический стержень 2 с двумя симметрично расположенными подвижными грузами 3 одинаковых массы и формы (рис. 4). Различным расположением этих грузов достигается изменение момента инерции маятника относительно оси вращения.

Момент инерции данной системы будет складываться из момента инерции стержня и моментов инерции двух грузиков на стержне относительно оси вращения

$$I = \frac{1}{12} m_{ст} \ell_{ст}^2 + 2 m_г x_г^2 \qquad (10)$$

где x – расстояние грузика до оси вращения.

Необходимость вычисления момента инерции стержня можно избежать, если вычислить периоды колебаний, например, для двух положений грузиков на стержне:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + I_1}{D}},\qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + I_2}{D}} \tag{11}$$

где I_1 и I_2 – моменты инерции грузиков на расстоянии x_1 и x_2 от оси вращения. Возведя правые и левые части равенств (11) в квадрат и вычтя из первого равенства второе, получим выражение для мо кручения

$$D = \frac{4\pi^2\left(I_1 - I_2\right)}{T_1^2 - T_2^2} \tag{12}$$

Приравняем (12) и (4)

$$\frac{4\pi^2\left(I_1 - I_2\right)}{T_1^2 - T_2^2} = \frac{\pi R^4 G}{2\ell}$$. Отсюда следует

$$G = \frac{8\pi\ell\left(I_1 - I_2\right)}{\left(T_1^2 - T_2^2\right)R^4} \tag{13}$$

Так как момент инерции грузиков можно вычислить как момент инерции материальной точки

$$I_1 = 2mx_1^2,\ I_2 = 2mx_2^2,$$

тогда окончательное выражение для вычисления модуля сдвига примет вид

$$G = \frac{16\pi m\ell\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{\left(T_1^2 - T_2^2\right)R^4} \qquad (14)$$

Из выражения (11) видно, что квадрат периода линейно зависит от квадрата расстояния грузика до оси вращения. Если построить график зависимости $T^2 = f\left(x^2\right)$ и найти тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс ,тогда (14) примет вид

$$G = \frac{16\pi m\ell}{tg\alpha \cdot R^4} \qquad (15)$$

Методика работы

1. На горизонтальном стержне расположите грузы на расстоянии x_1 от оси вращения.
2. При помощи рычага на верхнем конце кронштейна приведите в колебания горизонтальный стержень с грузами. Определите секундомером время 10 колебаний и вычислите период колебаний. Опыт повторите не менее пяти раз.
3. Повторите операции 1 и 2 для расстояний x_2 и x_3 положений грузиков на стержне от оси вращения. Результаты занесите в таблицу.
4. Постройте график зависимости $T^2 = f\left(x^2\right)$. Определите тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс и по формуле (15) вычислите модуль сдвига.
5. При расчетах переведите все измеряемые величины в CU.

Таблица 1

$\ell = 59{,}2$ см			$m = 391$ г			$R = 1{,}67$ мм		
x_1 = ———— см			x_2 = ———— см			x_3 = ———— см		
t_1, с	T_1, c	$\langle T_1^2 \rangle$с ^{2}	t_2, с	T_2, c	$\langle T_2^2 \rangle$с ^{2}	t_3, с	T_3, c	$\langle T_3^2 \rangle, c^2$

Контрольные вопросы

1. Что называется деформацией?
2. Дайте определение деформациям растяжения, сдвига и кручения.
3. Запишите закон Гука для деформаций растяжения, сдвига и кручения.
4. Какова связь модуля кручения и модуля сдвига.
5. Как экспериментально определить модуль сдвига?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. М.: АСТ, 2004.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. М.: Наука, 1974.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 2572 от «30» мая 2017 г. Тираж 50 экз.