УДК 519.21

А.М. ГОРЦЕВ, А.А. СОЛОВЬЕВ

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МАР-ПОТОКЕ СОБЫТИЙ

Изучается МАР-поток событий являющейся одной из математических моделей информационных потоков сообщений, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания. Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени, когда длительность мертвого времени неизвестная фиксированная величина. Методом максимального правдоподобия решается задача об оценивании длительности мертвого времени по наблюдениям за моментами наступления событий потока.

Ключевые слова*:* *МАР-поток, непродлевающееся мертвое время, метод максимального правдоподобия, оценка максимального правдоподобия.*

Введение

Широко применяемой математической моделью реальных физических процессов являются случайные потоки событий. Изучаемый МАР-поток событий относится к классу дважды стохастических потоков и является одной из адекватных математических моделей потоков элементарных частиц (фотонов, электронов и т.д.), информационных потоков событий, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания, информационно-телекоммуникационных системах, спутниковых сетях связи и т.д. Задачи по оценке состояний и параметров случайных потоков событий возникают в оптических и лазерных системах, функционирующих в режиме счета фотонов, например, при лазерном зондировании высотных слоев атмосферы, в оптических системах обнаружения, распознавания и сопровождения, работающих через атмосферу на предельно большие расстояния, а также в оптических системах загоризонтной связи.

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование потоков физических событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени, начатое в работах [1–9].

Параметры потоков событий, функционирующих в реальном времени, неизвестны частично, либо полностью, либо представляют собой функцию времени. В подобных ситуациях наиболее рациональным является применение адаптивных систем, которые в процессе функционирования оценивают неизвестные параметры либо состояния потоков событий и изменяют дисциплины обслуживания в соответствии с полученными оценками [10]. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [11–14]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [15–24].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий (фотонов, электронов и т.д.) выступает мертвое время регистрирующих приборов [25], которое порождается зарегистрированным событием (фотоном, электроном и т.д.). Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). Таким образом, эффект мертвого времени влечет за собой потери событий потока (частично теряется информация о потоке событий), что в итоге отрицательно сказывается на оценивании как состояний, так и параметров потока [2–9]. Для того чтобы оценить потери событий потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить значение его длительности.

При оценке параметров потока событий обычно используется метод моментов [3–8,16–18,21–23], как более простой в аналитическом исполнении, реже используется метод максимального правдоподобия [9,24,26–28]. Последнее связано с возникающими при использовании этого метода аналитическими трудностями.

В настоящей статье для оценки значений длительности мертвого времени используется метод максимального правдоподобия [29], так как оценки, полученные на основе этого метода, как правило, обладают привлекательными свойствами.

Математическая модель МАР-потока событий

Рассматривается МАР-поток с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ $(\lambda_1 > \lambda_2)$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_i = 1 - e^{\lambda_i t}$, i = 1, 2. В момент окончания i-го состояния процесса $\lambda(t)$ возможны следующие ситуации, каждая из которых протекает мгновенно: 1) процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в i-ое и наступает событие потока в i-ом состоянии; совместная вероятность этой ситуации $P(\lambda_i \to \lambda_i, 1) = P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)$ i = 1, 2; 2) процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е и наступает событие потока; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \to \lambda_j, 1) = P_1(\lambda_j \mid \lambda_i)$, i, j = 1, 2; $i \neq j$; 3) процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е и событие потока не наступает; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \to \lambda_j, 0)$ = $P_0(\lambda_j \mid \lambda_i)$, i, j = 1,2; $i \neq j$. При этом $P_1(\lambda_i \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_j \mid \lambda_i) + \quad + P_0(\lambda_j \mid \lambda_i) = 1$, i, j = 1, 2; $i \neq j$. Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид:

$$\mathrm{D} = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) & -\lambda_2 & \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \end{array} \right\| = \left\| \mathrm{D}_0 \mid \mathrm{D}_1 \right\|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс.

Заметим, что в определении MAP-потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е (i,j = 1, 2; $i \neq j$). Данное обстоятельство при последующих аналитических выкладках является несущественным, так как наступление события и переход процесса из i-го состояния в j-е (i,j = 1, 2; $i \neq j$) происходят мгновенно.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного MAP-потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где t_1, t_2,… – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; 1 и 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховкой обозначены длительности мертвого времени; черными кружками обозначены события MAP-потока, недоступные наблюдению.

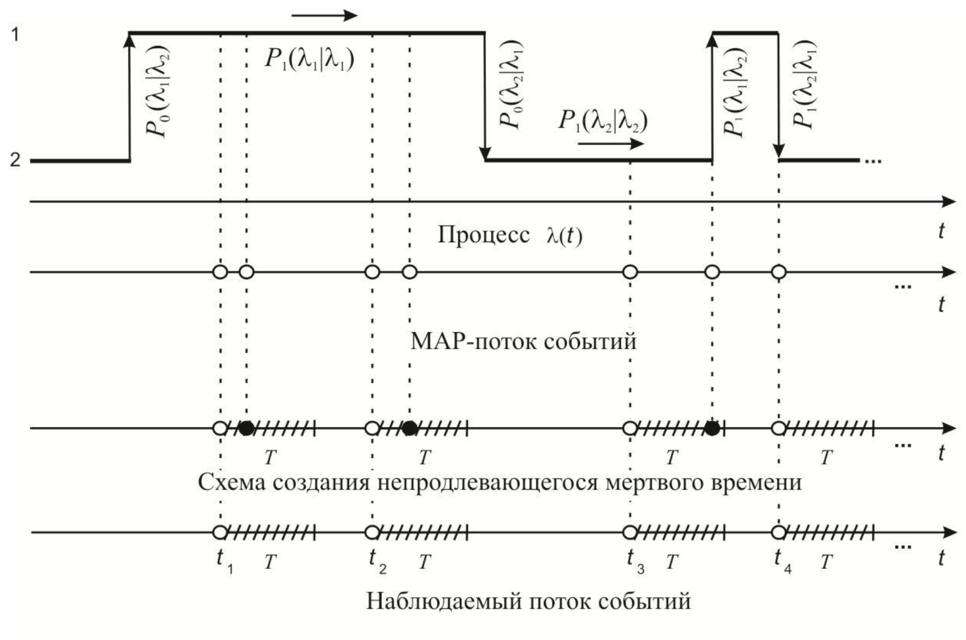

Рис. 1 Формирование наблюдаемого потока событий.

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий t_1, t_2,… наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) осуществить методом максимального правдоподобия оценку $\hat{T}$ значения длительности мертвого времени.

Построение функции правдоподобия

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 1,2,\ldots$) значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ ($\tau \geq 0$) для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). Здесь и далее ситуация, когда $\tau = 0$, означает доопределение изучаемых функций в граничной точке. В силу сказанного момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Тогда [1] плотность вероятности примет вид

$$
\begin{aligned}
&p_T(\tau)=\begin{cases}0, 0\leq\tau\leq T,\\ \dfrac{z_1}{z_2-z_1}\left[z_2-\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2}f(T)\right]e^{-z_1(\tau-T)}-\dfrac{z_2}{z_2-z_1}\left[z_1-\dfrac{1}{\beta_1+\beta_2}f(T)\right]e^{-z_2(\tau-T)}, \tau\geq T,\end{cases}\\
&f(T)=\lambda_1\lambda_2 A+\{\lambda_1[1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)]-\lambda_2[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)]\}\frac{\beta_1P_1-\beta_2P_2}{F(T)}e^{-(\beta_1+\beta_2)T},\\
&F(T)=1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)-Pe^{-(\beta_1+\beta_2)T};\beta_1=\lambda_1[1-P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)],\ \beta_2=\lambda_2[1-P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_2)];\\
&A=P_1+P_2, P_1=P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_2)+P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2), P_2=P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_1)+P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_2)P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1),\\
&P=P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_1)P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_2)-P_1(\lambda_1\,|\,\lambda_2)P_1(\lambda_2\,|\,\lambda_1);\\
&z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\lambda_1+\lambda_2\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4\lambda_1\lambda_2P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)}\right], 0<z_1<z_2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В (1) функция $F(T)>0$ для любых T $(0\leq T\leq\tau)$.

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2,\ldots$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – последовательность измеренных (в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0,t)$) значений длительности интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины $\tau_1 \ldots \tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \ldots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать, начиная с момента наступления события (с момента t_k, k=1,2,…). Тогда функция правдоподобия, с учетом (1) [29], запишется в виде

$$
\begin{aligned}
&L(\lambda_i,P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i),P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_j),P_0(\lambda_i\,|\,\lambda_j),T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)})=0, 0\leq\tau_{\min}<T;\\
&L(\lambda_i,P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i),P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_j),P_0(\lambda_i\,|\,\lambda_j),T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)})=\prod_{j=1}^{k}p_T(\tau^{(j)}), \tau_{\min}\geq T.
\end{aligned}
$$

Поскольку поставленная задача заключается в построении оценки $\hat{T}$ значения длительности мертвого времени (в предположении, что остальные параметры потока λ_i, $P_1(\lambda_i|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_i|\lambda_j)$, $P_0(\lambda_i|\lambda_j)$, i,j=1,2, $i\neq j$ известны), то согласно методу максимального правдоподобия, ее реализация есть решение оптимизационной задачи:

$$
\begin{aligned}
L(T\,|\,\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(k)})=\prod_{j=1}^{k}p_T(\tau^{(j)})=\prod_{j=1}^{k}\{&\frac{z_1}{z_2-z_1}\left[z_2-\frac{1}{\beta_1+\beta_2}f(T)\right]e^{-z_1(\tau^{(j)}-T)}-\\
&-\frac{z_2}{z_2-z_1}\left[z_1-\frac{1}{\beta_1+\beta_2}f(T)\right]e^{-z_2(\tau^{(j)}-T)}\}\Rightarrow\max_T,\ 0\leq T\leq\tau_{\min},\tau_{\min}>0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $f(T)$, β_1, β_2, z_1, z_2 определены в (1).

Значения T, при котором (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка $\hat{T}$ значения длительности мертвого времени.

Решение оптимизационной задачи (2)

Произведем переобозначение: $\tau_m = \tau_{\min}$. В силу того, что функция правдоподобия (2) отличается от нуля при $0 \le T \le \tau_m$, то положим $p_T(\tau^{(j)}) = 0$, $j = \overline{j,k}$, при $T > \tau_m$ ($\tau_m > 0$). Изучим поведение функции $p_T(\tau_m)$, $0 \le T \le \tau_m$, как функции переменной T. Исследуем производную $p'_T(\tau_m)$ по T функции $p_T(\tau_m)$. Имеем

$$p'_T(\tau_m) = \frac{1}{(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)}\left\{z_1\left[z_1 z_2 - z_1 f(T) - f'(T)\right]e^{-z_1(\tau_m - T)} - z_2\left[z_1 z_2 - z_2 f(T) - f'(T)\right]e^{-z_2(\tau_m - T)}\right\},$$

$$f'(T) = -\left\{\lambda_1\left[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)\right] - \lambda_2\left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]\right\}(\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)(\beta_1 + \beta_2)\left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)\right]\times$$
$$\times \frac{1}{F^2(T)} e^{(\beta_1 + \beta_2)T}, 0 \le T \le \tau_m, \tau_m \ge 0, \tag{3}$$

где $f(T)$, $F(T)$ определены в (1); $f'(T)$ – производная функции $f(T)$ по T.

Л е м м а 1. Производная $p'_T(\tau_m)$ – положительная функция переменной τ_m при $T = 0$, $0 \le \tau_m < \infty$ ($p'_0(\tau_m) > 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как τ_m – любое неотрицательное число $\tau_m \ge 0$, то $p'_0(\tau_m)$ можно рассматривать как функцию переменной τ_m. Подставляя $T = 0$ в (3) и проделывая необходимые преобразования, получаем

$$p'_0(\tau_m) = \frac{C}{(z_2 - z_1)A^2}\left[z_1(z_2 A - C)e^{-z_1\tau_m} - z_2(z_1 A - C)e^{-z_2\tau_m}\right], \tau_m \ge 0,$$
$$C = \lambda_1 P_1\left[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)\right] + \lambda_2 P_2\left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right] > 0, \tag{4}$$

где A, P_1, P_2, z_1, z_2 определены в (1).

Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_0(\tau_m) = 0$, которое, с учетом (4), преобразуется к виду

$$B = e^{-(z_2 - z_1)\tau_m}, B = \frac{z_1(z_2 A - C)}{z_2(z_1 A - C)}. \tag{5}$$

В (5) знак B определяется знаками ($z_2A - C$) и ($z_1A - C$).

Из (4) находим

$$p'_0(0) = (C/A)^2 > 0, \lim p'_0(\tau_m) = 0 \text{ при } \tau_m \to \infty. \tag{6}$$

Определим знак величины (z_2A – C). Имеем

$$z_2 A - C \ge (\lambda_1 A - C) = (\lambda_1 - \lambda_2)P_2 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)P_1 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)P_2 > 0. \tag{7}$$

Таким образом, $z_2 A - C > 0$.

1. Пусть $z_1 A - C > 0$. Тогда, во-первых, $B > 0$, во-вторых, $B > 1$ и тогда уравнение (5) корней не имеет. Отсюда, с учетом (6), следует, что $p'_0(\tau_m) \ge 0$, при это равенство $p'_0(\tau_m) = 0$ достигается при $\tau_m \to \infty$, т.е. $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \le \tau_m < \infty$.

2. Пусть $z_1 A - C < 0$. Тогда $B < 0$ и поэтому уравнение (5) корней не имеет. Отсюда, с учетом (6), вытекает, что $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \le \tau_m < \infty$.

3. Пусть $z_1 A - C = 0$. Тогда из (4) следует, что $p'_0(\tau_m) > 0$ для $0 \le \tau_m < \infty$.

Объединение результатов пунктов 1 – 3 доказывает лемму 1.

Л е м м а 2. Производная $p'_T(\tau_m)$ для $T = \tau_m$ строго больше нуля ($p'(\tau_m) > 0$), $0 \le \tau_m < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя $T = \tau_m$ в (3), получаем

$$p'(\tau_m)=\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\{\lambda_1\lambda_2 C+\left[\lambda_1\left(1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right)-\lambda_2\left(1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\right)\right]\left(\beta_1 P_1-\beta_2 P_2\right)\times$$
$$\times\varphi_1(\tau_m)\frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}}{F^2(\tau_m)}\}, \tag{8}$$
$$\varphi_1(\tau_m)=C+(\lambda_1+\lambda_2)P\left[1-e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}\right], \tau_m\ge 0,$$

где $F(\tau_m)$ определена в (1), С – в (4). Отметим, что функция $\varphi_1(\tau_m)>0$ для $0\le\tau_m<\infty$. Рассмотрим (8) как функцию $\tau_m\ge 0$. Имеем

$$p'(0)=(C/A)^2>0, \lim p'(\tau_m)=\lambda_1\lambda_2 C/(\beta_1+\beta_2)>0 \text{ при } \tau_m\to\infty, \tag{9}$$

где A определена в (1), C – в (4). Из вида (8) производной $p'_T(\tau_m)$ следует, что для любых значений $\left[\lambda_1\left(1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right)-\lambda_2\left(1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\right)\right]\left(\beta_1 P_1-\beta_2 P_2\right)\ge 0$ имеет место $p'(\tau_m)>0$ для $0\le\tau_m<\infty$. Пусть

$$\left[\lambda_1\left(1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right)-\lambda_2\left(1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\right)\right]\left(\beta_1 P_1-\beta_2 P_2\right)<0. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение вторую производную $p''_T(\tau_m)$ по переменной T в точке $T=\tau_m$. Используя (8), находим

$$p''(\tau_m)=-\{\lambda_1\left[1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right]-\lambda_2\left[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\right]\}\left(\beta_1 P_1-\beta_2 P_2\right)\left[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right]\times$$
$$\times\varphi_2(\tau_m)\frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}}{F^3(\tau_m)}, \tag{11}$$
$$\varphi_2(\tau_m)=C+(\lambda_1+\lambda_2)P-P\left(\lambda_1+\lambda_2+\beta_1+\beta_2\right)e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}, \tau_m\ge 0,$$

где $F(\tau_m)$ определена в (1). Знак выражения (11) определяется знаком $\varphi_2(\tau_m)$, так как в (11) величина

$$-\{\lambda_1\left[1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right]-\lambda_2\left[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)\right]\}\left(\beta_1 P_1-\beta_2 P_2\right)\left[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)\right]\frac{e^{-(\beta_1+\beta_2)\tau_m}}{F^3(\tau_m)}>0.$$

Рассмотрим $\varphi_2(\tau_m)$ как функцию переменной τ_m ($\tau_m\ge 0$). Имеем

$$\varphi_2(0)=C-P\left(\beta_1+\beta_2\right), \varphi_2(\infty)=\lim\varphi_2(\tau_m)=C+(\lambda_1+\lambda_2)P\ge 0 \text{ при } \tau_m\to\infty, \tag{12}$$

где P определена в (1), C – в (4). Здесь возможны следующие варианты.

1. Пусть $P>0$, $\varphi_2(0)\ge 0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m и тогда, с учетом (12), $\varphi_2(\tau_m)>0$, $\tau_m\ge 0$. Отсюда следует $p''(\tau_m)>0$, $\tau_m\ge 0$, т.е. функция $p'(\tau_m)$ есть также возрастающая функция переменной τ_m. С учетом (9), получаем $p'(\tau_m)>0$, $0\le\tau_m<\infty$.

2. Пусть $P>0$, $\varphi_2(0)<0$. Данный вариант нереализуем и не рассматривается далее, так как неравенство (10) и неравенство $\varphi_2(0)<0$ противоречивы.

3. Пусть $P=0$. Тогда $\varphi_2(\tau_m)=C>0$. Отсюда следует $p''(\tau_m)>0, \tau_m\ge 0.$ Тогда $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m и, с учетом (9), имеем $p'(\tau_m)>0, 0\le\tau_m<\infty$.

4. Пусть $P<0$. Тогда $\varphi_2(0)>0$, при этом функция $\varphi_2(\tau_m)$ – убывающая функция переменной τ_m. Учитывая (12), получаем $\varphi_2(\tau_m)>0, 0\le\tau_m<\infty$. Отсюда следует, что $p'(\tau_m)$ – возрастающая функция переменной τ_m. Тогда, с учетом (9), имеем $p'(\tau_m)>0, 0\le\tau_m<\infty$.

Объединение результатов пунктов 1 – 4 доказывает лемму 2.

Изучим поведение производной $p'_T(\tau_m)$ как функцию переменной T на отрезке $[0,\tau_m]$. Рассмотрим (на предмет существования корней) уравнение $p'_0(\tau_m)=0$, которое с учетом (3), приводится к виду

$$\frac{f_1(T)}{f_2(T)} = e^{-(z_2-z_1)(\tau_m - T)}, 0 \le T \le \tau_m, \tau_m \ge 0, \quad (13)$$

$$f_1(T) = z_1[z_1 z_2(\beta_1+\beta_2) - z_1 f(T) - f'(T)], 0 \le T \le \tau_m, \tau_m \ge 0, \quad (14)$$

$$f_2(T) = z_2[z_1 z_2(\beta_1+\beta_2) - z_2 f(T) - f'(T)], 0 \le T \le \tau_m, \tau_m \ge 0, \quad (15)$$

где $f(T)$, z_1, z_2 определены в (1). Так как, в принципе, τ_m может быть сколь угодно большим числом, то будем считать, что $T \ge 0$. Исследуем функции $f_1(T)$ и $f_2(T)$ на знак при $T \ge 0$. Представим произведение $[\lambda_1(1-P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1-P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2)$ в виде

$$[\lambda_1(1-P_0(\lambda_2 | \lambda_1)) - \lambda_2(1-P_0(\lambda_1 | \lambda_2))](\beta_1 P_1 - \beta_2 P_2) = -\lambda_1\lambda_2(P-p_1)(P-p_2) = x(P), \quad (16)$$

где $p_1 = (z_2/\lambda_1\lambda_2)(z_1-\beta_1-\beta_2)$, $p_2 = (z_1/\lambda_1\lambda_2)(z_2-\beta_1-\beta_2)$, $p_1 < p_2$, P определена в (1). Из (16) следует, что функция $x(P)$ может быть либо равной нулю ($x(P) = 0$), либо больше нуля ($x(P) > 0$), либо меньше нуля ($x(P) < 0$).

Л е м м а 3. Если $x(P) = 0$, то 1) $f_1(T) \equiv 0$ при $P = p_1$; 2) $f_1(T) > 0, T \ge 0$, при $P = p_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала, подставляя $P = p_1$ в (14), получаем $f_1(T) = z_1[z_1 z_2(\beta_1+\beta_2) - z_1\lambda_1\lambda_2 A]$, где A определена в (1), затем подставляя сюда представление величины A в виде $A = (z_1 z_2/\lambda_1\lambda_2) - P$ для $P = p_1$, получаем первое утверждение леммы 3. Аналогично для $P = p_2$ находим $f_1(T) = z_1^2(\beta_1+\beta_2)(z_2 - z_1) > 0$. Тем самым лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. Если $x(P) > 0$, то $f_1(T) > 0, T \ge 0$, для $P \in (p_1, p_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (16) следует, что неравенство $x(P) > 0$ выполняется для P, принадлежащему интервалу (p_1, p_2).

1. Пусть $p_1 > 0$. Производная функции (14) примет вид

$$f_1'(T) = \frac{z_1^2 z_2(\beta_1+\beta_2)}{\lambda_1\lambda_2 F^3(T)} x(P) y_1(T) e^{-(\beta_1+\beta_2)T},$$
$$y_1(T) = z_1 p_1 - (z_1+\beta_1+\beta_2) P e^{-(\beta_1+\beta_2)T}, 0 \le T \le \tau_m, \tau_m \ge 0. \quad (17)$$

Знак производной (17) определяется знаком функции $y_1(T)$. Изучим поведение функции $y_1(T)$. Имеем $y_1'(T) > 0, T \ge 0$, т.е. $y_1(T)$ – возрастающая функция переменной T (возрастает от $y_1(0) = z_1 p_1 - (z_1+\beta_1+\beta_2)P < 0$ до $y_1(\infty) = \lim_{T\to\infty} y_1(T) = z_1 p_1 > 0$). Таким образом, функция $y_1(T)$ равна нулю в единственной точке $T_1(P) = -(\beta_1+\beta_2)^{-1}\ln[z_1 p_1/(z_1+\beta_1+\beta_2)P]$. Последнее означает, что при изменении T от нуля до бесконечности производная (17) меняет знак ($f_1'(T) < 0, 0 \le T < T_1(P)$; $f_1'(T) > 0, T_1(P) < T < \infty$), т.е. в точке $T = T_1(P)$ функция $f_1(T)$ имеет единственный минимум. Подставляя в (14) $T = T_1(P)$, находим

$$f_1(T_1(P)) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4(\beta_1+\beta_2)}(P-p_1)\left[P - \left(\frac{z_1-\beta_1-\beta_2}{z_2+\beta_1+\beta_2}\right)^2 p_2\right]. \quad (18)$$

Так как по условию $p_1 < P < p_2$, то из (18) следует, что $f_1(T_1(P)) > 0$. Последнее влечет за собой выполнение неравенства $f_1(T) > 0, T \ge 0$.

2. Пусть $p_1 = 0.$ Тогда из (17) следует 1) $y_1(T) < 0, T \ge 0,$ 2) $f_1'(T) < 0, T \ge 0.$ То есть функция $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T (убывает от $f_1(0) = [z_1^2(\beta_1+\beta_2)C/A^2](P-p_1) > 0$ до $f_1(\infty) = \lim_{T\to\infty} f_1(T) = z_1^2\lambda_1\lambda_2(P-p_1) > 0$). Тогда $f_1(T) > 0,\ T \ge 0$.

3. Пусть $p_1 < 0,\ p_2 > 0.$ В данной ситуации имеют место три варианта: 1) $p_1 < P < 0,$ 2) $P = 0,$ 3) $0 < P < p_2$. Для первого варианта имеем $y_1'(T) < 0, T \ge 0,$ т.е. $y_1(T)$ – убывающая функция переменной T. При этом $y_1(0) > 0$ для $p_1 < P < p^*,$ $y_1(0) = 0$ для $P = p^*,$ $y_1(0) < 0$ для $p^* < P < 0,$ где $p^* = p_1 z_1/(z_1+\beta_1+\beta_2)$; $y_1(\infty) < 0$. Отсюда следует, что для $p_1 < P < p^*$ производная $f_1'(T) > 0, 0 < T < T_1(P)$, и $f_1'(T) < 0, T > T_1(P)$, т.е. в точке $T_1(P)$ реализуется единственный максимум функции $f_1(T)$. Так как $f_1(0) = z_1^2(\beta_1+\beta_2)(P-p_1)C/A^2 > 0,$ $f_1(\infty) = z_1^2\lambda_1\lambda_2(P-p_1) > 0,$ то $f_1(T) > 0, T > 0.$ Для $p^* < P < 0$ производная $f_1'(T) < 0, T \ge 0,$ т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T ; только для $P = p^*$ производная $f_1'(T)$ обращается в ноль в единственной точке $T = 0$. Так как $f_1(0) > 0, f_1(\infty) > 0,$ то $f_1(T) > 0, T \ge 0.$ Для второго варианта $P = 0$. Тогда функция $y_1(T) = z_1 p_1 < 0, T \ge 0$, и поэтому $f_1(T) < 0, T \ge 0,$ т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T. Так как $f_1(0) > 0, f_1(\infty) > 0,$ то $f_1(T) > 0, T \ge 0.$ Наконец, для третьего варианта имеем $y_1(T) < 0, T \ge 0$, и тогда $f_1'(T) < 0, T \ge 0,$ т.е. $f_1(T)$ – убывающая функция переменной T. Так как $f_1(0) > 0, f_1(\infty) > 0,$ то $f_1(T) > 0, T \ge 0.$

4. Пусть $p_2 = 0.$ Тогда для этого случая выводы аналогичны выводам пункта 3 для вариантов 1) и 2), т.е. $f_1(T) > 0, T \ge 0$, для $p_2 = 0.$

5. Пусть $p_2 < 0.$ Тогда $y_1'(T) < 0, T \ge 0,$ т.е. $y_1(T)$ – убывающая функция переменной T. В данной ситуации имеют место три варианта: 1) $y_1(0) > 0$ для $p_1 < P < p_2$; 2) $y_1(0) \ge 0$ для $p_1 < P \le p_2$, при этом $y_1(0) = 0$ для $P = p_2$; 3) $y_1(0) > 0$ для $p_1 < P < p^*, y_1(0) = 0$ для $P = p^*,$ $y_1(0) < 0$ для $p^* < P < p_2$. Для всех вариантов имеет место $y_1(\infty) < 0$. Первый вариант аналогичен первому варианту пункта 3, когда $p_1 < P < p^*$; второй вариант аналогичен первому варианту пункта 3, когда $p_1 < P \le p^*$; наконец, третий вариант полностью аналогичен первому варианту пункта 3. Тогда выводы пункта 5 аналогичны выводам пункта 3, т.е. $f_1(T) > 0,\ T \ge 0$, для $p_2 < 0.$

Объединение результатов пунктов 1 – 5 доказывает лемму 4.

Последующее изложение сформулируем в виде утверждений, опуская их доказательства, т.к. последние по своей логике повторяют доказательство леммы 4.

У т в е р ж д е н и е 1. Если $x(P) < 0$ и $\varphi_2(0) \ge 0,$ где $\varphi_2(0)$ определена в (12), то $f_1(T) > 0, T \ge 0$, для $P \in (p_2, p^0), p^0 = z_1 z_2(z_1+z_2-\beta_1-\beta_2)/\lambda_1\lambda_2(z_1+z_2+\beta_1+\beta_2) > 0,$ другие варианты нереализуемы.

Утверждения, приведенные ниже, касаются функции $f_2(T)$, определенной в (15).

У т в е р ж д е н и е 2. Если $x(P) = 0,$ то 1) $f_2(T) \equiv 0$ при $P = p_2$; 2) $f_2(T) < 0, T \ge 0,$ при $P = p_1.$

У т в е р ж д е н и е 3. Если $x(P) > 0,$ то $f_2(T) < 0, T \ge 0,$ для $P \in (p_1, p_2).$

У т в е р ж д е н и е 4. Если $x(P) < 0,$ $\varphi_2(0) \ge 0$ то $f_2(T) > 0, T \ge 0,$ для $P \in (p_2, p^0],$ другие варианты нереализуемы.

Утверждение, касающееся функций $f_1(T)$ и $f_2(T)$.

У т в е р ж д е н и е 5. При выполнении одного из нижеперечисленных ограничений: 1) $P = p_1,$ 2) $P = p_2,$ 3) $x(P) > 0,$ 4) $x(P) < 0,$ $P \in (p_2.p^0]$ имеет место неравенство $f_1(T) > f_2(T), T \ge 0.$

Доказанные выше леммы 3,4 и приведенные утверждения 1 – 5 позволяют сформулировать лемму 5.

Л е м м а 5. Уравнение (13) не имеет решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если $P = p_1,$ то $[f_1(T)/f_2(T)] = 0, T \ge 0,$ и уравнение (13) решения не имеет; 2) если $P = p_2,$ то $[f_2(T)/f_1(T)] = 0, T \ge 0,$ и уравнение (13) решения не имеет; 3) если $x(P) > 0,$ $P \in (p_1, p_2),$ то $[f_1(T)/f_2(T)] < 0, T \ge 0,$ и уравнение (13) решения не имеет; 4) если

$x(P)<0,\ \varphi_2(0)\geq 0,\ P\in(p_2.p^0]$, то $[f_1(T)/f_2(T)]>1, T\geq 0,$ и уравнение (13) решения не имеет. Лемма доказана.

Теорема 1. При любых значениях параметров $\lambda_1>\lambda_2\geq 0, P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i)+P_1(\lambda_j\,|\,\lambda_i)+P_0(\lambda_j\,|\,\lambda_i)=1,$ $i,j=1,2; i\neq j,$ производная $p_T'(\tau_m)$ – положительная функция переменной T $(p_T'(\tau_m)>0),$ $0\leq T\leq\tau_m, 0\leq\tau_m<\infty$.

Доказывается последовательным применением результатов лемм 1,2,5.

Теорема 2. При любых значениях параметров $\lambda_1>\lambda_2\geq 0, P_1(\lambda_i\,|\,\lambda_i)+P_1(\lambda_j\,|\,\lambda_i)+P_0(\lambda_j\,|\,\lambda_i)=1,$ $i,j=1,2; i\neq j,$ функция $p_T(\tau_m)$ переменной T $(0\leq T\leq\tau_m)$ достигает своего максимального значения в точке $T=\tau_m, 0\leq\tau_m<\infty$.

Доказательство вытекает из результатов теоремы 1.

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что функции $p_T(\tau^{(j)}), j=\overline{2,k}$ являются возрастающими функциями переменной T $(0\leq T\leq\tau_m)$.

Следствие 2. Из теоремы 2 вытекает, что функция правдоподобия $L(T\,|\,\tau^{(1)},...,\tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T}=\tau_m$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка значения длительности мертвого времени $\hat{T}=\tau_m$.

Заключение

Полученный результат делает возможным решение задачи оценки значения длительности мертвого времени без привлечения численных методов: в процессе наблюдения (в течение временного интервала (0, t)) потока событий вычисляются величины $\tau_k,\ k=\overline{1,n},$ после чего находится $\tau_m=\min\tau_k\,(k=\overline{1,n})$ и полагается $\hat{T}=\tau_m$. Подчеркнем, что по определению оценка максимального правдоподобия значения длительности мертвого времени при конечных t будет всегда смещенной ($\tau_m>T$); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $t\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gortsev A.M. and Solov'ev A.A. // Russian Physics Journal. – 2014. – V.57. – No.7. – P.973–983.
2. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. and Solov'ev A.A. // Automation and Remote Control. – 2012. – V. 73. – No. 8. – P. 1316–1326.
3. Gortsev A.M. and Nissenbaum O.V. // Russian Physics Journal. – 2005. – V. 48. – No. 10. – P. 1039–1054.
4. Gortsev A.M. and Nezhel'skaya L.A. // Radiotekhnika. – 2004. – No. 10. – P. 8–16.
5. Vasil'eva L.A. and Gortsev A.M. // Automation and Remote Control. – 2003. – V. 64. – No. 12. – P. 1890–1898.
6. Gortsev A.M. and Nezhel'skaya L.A. // Measurement Techniques. – 2003. – V.46. – No.6. – P.536–545.
7. Gortsev A.M. and Parshina M.E. // Russian Physics Journal. – 1999. – V.42. – No.4. – P.373–378.
8. Gortsev A.M. and Klimov I.S. // Radiotekhnika. – 1996. – No. 2. – P. 8–11.
9. Gortsev A.M. and Klimov I.S. // Radiotekhnika. – 1991. – No. 12. – P. 3–7.
10. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.
11. Bushlanov I.V. and Gortsev A.M. // Automation and Remote Control. – 2004. – V. 65. – No. 9. – P. 1389–1399.
12. Bushlanov I.V. and Gortsev A.M. // Avtomatika i Telemekhanika. – 2004. – No. 9. – P. 40–51.
13. Gortsev A.M. and Shmyrin I.S. // Automation and Remote Control. – 1999. – V. 60. – No.1. – P. 41–51.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. and Shevchenko T.I. // Russian Physics Journal. – 1993. – V.36. – No.12. – P.1153–1167.
15. Gortsev A.M. and Nezhel'skaya L.A. // Discrete Mathematics and Applications. – 2011. – V.21. – No.3. – P.283–290.
16. Bushlanov I.V., Gortsev A.M. and Nezhel'skaya L.A. // Automation and Remote Control. – 2008. – V.69 – No. 9. – P. 1517–1533.
17. Vasil'eva L.A. and Gortsev A.M. // Avtomatika i Telemekhanika. – 2003. – No. 12. – P. 69–79.
18. Vasil'eva L.A. and Gortsev A.M. // Avtomatika i Telemekhanika. – 2002. – No. 3. – P. 179–184.
19. Vasil'eva L.A. and Gortsev A.M. // Automation and Remote Control. – 2002. – V. 63. – No. 3. – P. 511–515.
20. Gortsev A.M. and Shmyrin I.S. // Russian Physics Journal. – 1999. – V. 42. – No.4. – P. 385–393.

21. Gortsev A.M. and Nezhel'skaya L.A. // Telecommunications and Radio Engineering. – 1996. – V.50. – No.1. – P.56–63.
22. Gortsev A.M. and Nezhel'skaya L.A. // Radiotekhnika. – 1995. – V. 40. – No. 7–8. – P. 6–10.
23. Gortsev A.M. and Klimov I.S. // Telecommunications and Radio Engineering. – 1993. – V.48. – No.10. – P.40–45.
24. Gortsev A.M. and Klimov I.S. // Telecommunications and Radio Engineering. – 1992. – V.47. – No.1. – P.33–38.
25. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 254 с.
26. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015 – №1(30). – С.27–37.
27. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежельская Л.А. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013 – №4(25). – С.32–42.
28. Леонова М.А., Нежельская Л.А. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013 – №2(23). – С.54–63.
29. Шуленин В.П. Математическая статистика. Часть 1. – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – 540 с.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Горцев Александр Михайлович, доктор технических наук, профессор
Соловьев Александр Александрович, аспирант
E-mail: sizal19@mail.ru

GORTZEV A.M., SOLOVEV A.A.

ASSESSMENT OF THE DURATION OF A FIXED DEAD TIME MAP-FLOW OF EVENTS BY MAXIMUM LIKELIHOOD

A Markovian arrival process of flow of events is studied. The flow functions are considered under conditions of unextendable dead time period.The method of maximum likelihood estimation problem is solved for the duration of the dead time Observation time of an event flow.

Keywords: *MAP-flow fixed dead time, the method of maximum likelihood, maximum likelihood estimation.*

REFERENCES

1. Gortsev A.M. and Solov'ev A.A. (2014) Joint Probability Density of Interarrival Interval of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period. *Russian Physics Journal*. vol.57, no.7, pp.973–983.
2. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Soloviev A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. vol.73, no. 8, pp. 1316−1326.
3. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 2005 vol. 48, no. 10, pp. 1039–1054. (In Russian).
4. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotekhnika*. no. 10, pp. 8–16.
5. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. (2003) Estimation of the dead time of an asynchronous double stochastic flow of events under incomplete observability. *Automation and Remote Control*. vol. 64, no. 12, pp. 1890–1898.
6. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. vol. 46, no. 6, pp. 536–545.
7. Gortsev A.M., Parshina M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in "dead" time conditions. *Russian Physics Journal*. vol. 42, no. 4, pp. 373–378.
8. Gortsev A.M., Klimov I.S. (1996) Estimation of the non-observability period and intensity of Poisson event flow. *Radiotekhnika*. no. 2, pp. 8–11.
9. Gortsev A.M., Klimov I.S. (1991) An estimate for intensity of Poisson flow of events under the condition of its partial missing. *Radiotekhnika*. no. 12, pp. 3–7.
10. Gortsev A.M., Nazarov A.A., Terpugov A.F. (1978) Control and adaptation in queueing systems. *Tomsk State University*. (In Russian).
11. Bushlanov I.V., Gortsev A.V. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. vol. 65, no. 9, pp. 1389–1399.

12. Bushlanov I.V., Gortsev A.V. (2004) Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events. *Avtomatika i Telemekhanika*. no. 9, pp. 40–51.
13. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. (1999) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. vol. 60, Part 1, pp. 41–51.
14. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I. (1993) Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. vol. 36, no. 12, pp. 1153–1167.
15. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. vol. 21, no. 3, pp. 283–290.
16. Bushlanov I.V., Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (2008) Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of events. *Automation and Remote Control*. vol. 69, no. 9, pp. 1517–1533.
17. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. (2003) Dead-time interval estimation of incompletely observable asynchronous bistochastic flow of events. *Avtomatika i Telemekhanika*. no. 12, pp. 69–79.
18. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. (2002) Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability. *Avtomatika i Telemekhanika*. no. 3, pp. 179–184.
19. Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control*. vol. 63, no. 3, pp. 511–515.
20. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. (1999) Optimal estimate of the parameters of a twice stochastic poisson stream of events with errors in measuring times the events occur. *Russian Physics Journal*. vol. 42, no. 4, pp. 385–393.
21. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (1996) Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. vol. 50, no. 1, pp. 56–63.
22. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. (1995) Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moments. *Radiotekhnika.* vol. 40, no. 7-8, pp. 6–10.
23. Gortsev A.M., Klimov I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. vol. 48, no. 10, pp. 40–45.
24. Gortsev A.M., Klimov I.S.(1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. vol. 47, no. 1, pp. 33–38.
25. Apanasovich V.V., Kolyada A.A., Chernyavsky A.F. (1988) Statistical analysis of stochastic flows in physical experiment. *Minsk: Publishing house "University's".* (In Russian).
26. Gortsev A. M., Kalyagin A. A., Nezhelskaya L. A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semysynchronous flow of events. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. vol. 1. no. 14. pp. 13-21. (In Russian).
27. *Gortsev A. M., Leonova M A., Nezhelskaya L. A.* (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. vol. 4, no. 25, pp. 32–42. (In Russian).
28. Leonova Maria A., Nezhelskaya Lyudmila A. (2013). Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* vol. 2, no. 23, pp. 54–63. (In Russian).
29. Shulenin V.P. (2012) Mathematical Statistics. Part 1. Publishing House of Scientific and Technology Literature. 540 p. (In Russian).