

УДК: 519.21

М.А. БАХОЛДИНА*, А.М. ГОРЦЕВ*

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ИНТЕРВАЛОВ В МОДУЛИРОВАННОМ ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока и формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, мертвое время, совместная плотность вероятностей длительностей интервалов, условия рекуррентности потока событий.

Введение

Настоящая работа является продолжением исследований, приведенных в [1–4], где решается задача оптимальной оценки состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий, относящегося к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока, в первую очередь, необходимо знание вероятностных свойств потока. Вследствие этого в настоящей работе находится явный вид совместной плотности вероятностей значений длительности интервалов между моментами наступления соседних событий потока при непродлевающемся мертвом времени и условия его рекуррентности.

Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток событий), интенсивность которого представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями 1, 2: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в первом (во втором) состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β (α). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 ; переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид:

$$D_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ (1 - \delta)\alpha & -(\lambda_2 + \alpha) \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} (1 - p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы

D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

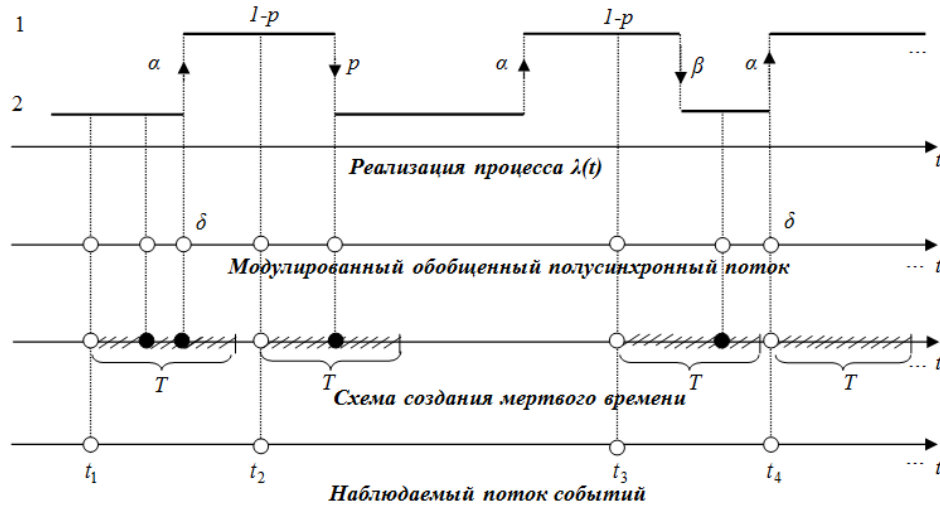


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в первом состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквами δ ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые $t_1, t_2, \dots$ – белыми.

Заметим, что в определении модулированного обобщенного полусинхронного потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает дополнительное событие потока при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое. Данное обстоятельство при последующем выводе плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов является несущественным, так как наступление дополнительного события и переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое происходят мгновенно. В реальных ситуациях возможно два варианта, связанных с наступлением события и переходом процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое: 1) первично наступление события во втором состоянии процесса $\lambda(t)$, затем его переход из второго состояния в первое; 2) первичен переход процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, затем наступление события в первом состоянии. В силу этого при получении численных результатов путем имитационного моделирования наблюдаемого потока событий необходимо учитывать реальную ситуацию.

Отметим, что процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots$. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k , $k=1,2,\dots$. Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k=1,2,\dots$, значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k -го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно

положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau=0$. Пусть теперь (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$. Их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно рассмотреть соседние интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Плотность вероятностей $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал времени $(0, \tau)$ между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Значение длительности данного интервала есть $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ($t \geq 0$). Пусть $p_{jk}(t)$ есть условная вероятность того, что на интервале $(0, t)$ нет событий наблюдаемого потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda(0) = \lambda_j$, $j, k = 1, 2$. Соответствующую этой вероятности плотность вероятностей обозначим через $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$. Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент времени $\tau = 0$) в состояние j (момент времени $\tau = T$), $i, j = 1, 2$, и вероятность $\pi_i(0|T)$ – условную (финальную) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i ($i = 1, 2$) при условии, что в этот момент времени наступило событие наблюдаемого потока, розыгрыш состояний произошел и наступил период мертвого времени длительности T . Тогда искомую плотность вероятностей $p_T(\tau)$ можно записать в виде [5]

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Подставляя в (1) выражения для $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $q_{ij}(T)$, $\pi_i(0|T)$, $i, j, k = 1, 2$, найденные в [5], выполняя при этом достаточно трудоемкие преобразования, получаем

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1} [z_2 - \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)\pi_2(T)],$$

где

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1 - \delta)} \right), \quad 0 < z_1 < z_2, \quad (3)$$

$$\pi_1(T) = \pi_1 + [\pi_2 - \pi_2(0|T)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}, \quad (4)$$

$$\pi_1(0|T) = \frac{\alpha[\lambda_1(1 - p + p\delta) + \delta\beta] + \lambda_1\pi_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{\lambda_1\alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) + \lambda_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}, \quad (5)$$

$$\pi_2(0|T) = \frac{p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2\beta + \lambda_1\pi_2[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]}{\lambda_1\alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) + \lambda_1[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] [1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]},$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{p\lambda_1 + \beta + \alpha}, \quad \pi_2 = \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha}.$$

Совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока, при этом $\tau_1 = 0$ – момент наступления первого события, $\tau_2 = 0$ – момент наступления второго события. В силу того, что последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова, то в обозначениях предыдущего раздела совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$ принимает вид

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \end{cases} \quad (6)$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$. Тогда подставляя в (6) сначала $\tilde{p}_{jk}(t^{(1)})$, $\tilde{p}_{sn}(t^{(2)})$, затем $q_{ij}(T)$, $q_{ks}(T)$, и, наконец, $\pi_i(0|T)$, $i=1, 2$, найденные в [5], и выполняя достаточно трудоемкие преобразования, находим

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{\lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)]}{z_1 z_2} \times \\ \times [z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}] [z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (7)$$

где $z_1 z_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha \delta \beta$ и $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ определены в (2) для $\tau = \tau_k$, $k=1, 2$.

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями потока, дисперсию и ковариацию:

$$M\tau = T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2}, \quad D\tau = 2 \left[\frac{\gamma(T)}{z_1^2} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2^2} \right] - \left[\frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1 - \gamma(T)}{z_2} \right]^2, \\ \text{cov}(\tau_1, \tau_2) = e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \lambda_1 \gamma(T) [1 - \gamma(T)] \frac{(\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta))}{(z_1 z_2)^3} (z_2 - z_1)^2.$$

Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Используя выражения (2)–(4) для $\gamma(T)$, $\pi_1(T)$, $\pi_2(T)$ и выражения (5) для $\pi_1(0|T)$, $\pi_2(0|T)$, можно показать, что

$$\gamma(T) [1 - \gamma(T)] = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha\delta \beta + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha\delta)] (p\lambda_1 + \beta) \pi_1(0) - \alpha \pi_2(0)}{(z_2 - z_1)^2 (p\lambda_1 + \beta + \alpha)^2 [z_1 z_2 - \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}]^2} \times \\ \times \{ z_1 z_2 - [2z_1 z_2 - (p\lambda_1 + \beta + \alpha)(z_1 + z_2)] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} + [z_1 z_2 - (p\lambda_1 + \beta + \alpha)(\lambda_1(1 - p) + \lambda_2)] e^{-2(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \}, \quad (8)$$

здесь $\pi_i(0)$ есть условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в состоянии i ($i=1, 2$) при условии, что в этот момент времени событие потока наступило ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$), и определяется следующими выражениями

$$\pi_1(0) = \alpha \frac{\lambda_1(1 - p + p\delta) + \delta\beta}{\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha\delta \beta + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha\delta)}, \quad \pi_2(0) = \frac{p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha) + \lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \alpha\delta \beta + p\lambda_1(\lambda_2 + \alpha\delta)}.$$

Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (8), обозначим его $f(T)$, после преобразования примет вид

$$f(T) = z_1 z_2 \left[1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \right]^2 + (p\lambda_1 + \beta + \alpha) e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \times \left[z_1 + z_2 - (\lambda_1(1-p) + \lambda_2) e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \right] = \\ = f_1(T) + f_2(T) = f_1(T) + \varphi_1(T)\varphi_2(T).$$

Нетрудно показать, что для любых $T \geq 0$ имеем $f_1(T) \geq 0$, $\varphi_1(T) > 0$ и $\varphi_2(T) > 0$, и, следовательно, $f_2(T) > 0$. Таким образом, для любых $T \geq 0$ имеем $f(T) > 0$. Из (8) вытекает, что:

- 1) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$, то совместная плотность (7) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$; при этом из (3) следует, что $z_1 = \lambda_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha + \beta$; из (2) следует, что $\gamma(T) = 1$, и тогда $p_T(\tau_k) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, то есть $p_T(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$.
- 2) если $(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0) = 0$, то совместная плотность (7) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)$; при этом из (3) следует, что $z_1 = \lambda_1(1-p + p\delta) + \beta\delta$; из (2) следует, что $\gamma(T) = 1$, и тогда $p_T(\tau_k) = z_1 e^{-z_1(\tau_k - T)}$, $\tau_k \geq T$, $k = 1, 2$, то есть $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$.

Из (7) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$: $\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta) = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (2), в которой

$$\pi_2(0|T) = p; \quad \pi_2(T) = \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha} + \left[p - \frac{p\lambda_1 + \beta}{p\lambda_1 + \beta + \alpha} \right] e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T}; \quad p \neq 1.$$

Для $p = 1$ из третьего условия факторизации вытекает, что $\delta = 0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (2), в которой

$$\pi_2(0|T) = 1; \quad \pi_2(T) = \frac{1}{\lambda_1 + \beta + \alpha} \left[\lambda_1 + \beta + \alpha e^{-(p\lambda_1 + \beta + \alpha)T} \right].$$

Поскольку последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ порождает вложенную цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации либо их комбинаций можно показать, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \dots, \tau_k)$ для любого k . Последнее означает, что для данных ситуаций наблюдаемый поток событий является рекуррентным потоком. Отметим, что условия факторизации для случая $T = 0$ [6, 7] и $T \neq 0$ идентичны.

Подчеркнем, что 1) положив в (2)–(5) $\beta = 0$, $\delta = 0$, $T = 0$, получаем полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях отсутствия мертвого времени [8]; 2) положив в (2)–(5) $\beta = 0$, $\delta = 0$, получаем полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающего мертвого времени [9]; 3) положив в (2)–(5), (7), (8) $\beta = 0$, $T = 0$, получаем обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях отсутствия мертвого времени [10]; 4) положив в (2)–(5), (7), (8) $\beta = 0$, получаем обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающего мертвого времени [11].

Заключение

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих модулированный обобщенный полусинхронный поток событий. Для оценки неизвестных параметров потока можно использовать метод моментов и метод максимального правдоподобия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2(23). – С. 10 – 21.
2. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающем мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 1(26). – С. 13 – 24.

3. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // *Applied Mathematical Sciences*. – 2015. – V. 9. – No. 29. – P. 1433–1451.
4. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оценивание состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Известия высших учебных заведений. Физика*. – 2013. – Т. 56. – № 9/2. – С. 217–219.
5. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23-26 фев. 2015 г. / редкол.: Н.Н. Труш [и др.]. Минск: РИВШ. – 2015. – С. 17–22.*
6. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. – 2014. – V. 487. – P. 18–25.
7. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий и условия его рекуррентности // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А.Ф. Терпугова (20-22 ноября 2014 г.). Томск: Изд-во Том. Ун-та. – 2014. – Ч. 2. – С. 137–143.*
8. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. – 2002. – № 1. – С. 18–23.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий // *Измерительная техника*. – 2003. – № 6. – С. 7–13.
10. Горцев А.М., Калягин А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2012. – № 2(19). – С. 80–87.
11. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2014. – № 2(27). – С. 19–29.

*Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Бахолдина Мария Алексеевна, аспирант;
Горцев Александр Михайлович, д. техн. н., профессор.

M.A. BAKHOLDINA, A.M. GORTSEV

JOINT PROBABILITY DENSITY OF THE INTERVALS LENGTH OF MODULATED SEMI-SYNCHRONOUS INTEGRATED FLOW OF EVENTS UNDER THE CONDITIONS OF THE CONSTANT DEAD TIME

The paper studies the modulated semi-synchronous integrated flow of events, which is one of the mathematical models for incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow is considered in condition of its incomplete observability, when the dead time period of a constant duration T is generated after every registered event. The expressions for the joint probability density of the two complementary intervals between consecutive flow events are obtained explicitly and the flow recurrence conditions are determined.

Keywords: modulated semi-synchronous integrated flow of events, dead time, joint probability density of the intervals length, flow recurrence conditions.

REFERENCES

1. Bakholdina M.A. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events. *The bulletin of Tomsk State University. Control, computer engineering and informatics*, 2013, no. 2(23), pp. 10–21. (in Russian)
2. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time. *The bulletin of Tomsk State University. Control, computer engineering and informatics*, 2014, no. 1(26), pp. 13–24. (in Russian)
3. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Science*, 2015, vol. 9, no. 29, pp. 1433–1451.
4. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. States estimation of modulated semi-synchronous integrated flow of events under the conditions of the constant dead time. *Russian Physics Journal*, 2013, vol. 56, no. 9/2, pp. 217–219.

5. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Probability density of the interval length between neighboring events of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of a constant dead time. *Probability Theory, Random Processes, Mathematical Statistics and Applications: materials of International Scientific Conference dedicated to 80th anniversary of Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences G.A. Medvedev. Minsk*, 2015, pp. 17–22. (in Russian)
6. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*, 2014, vol. 487, pp. 18–25.
7. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2014): materials of XIII International Scientific Research and Practice Conference named after A.F. Terpugov (November 20-22, 2014). Tomsk: Publishing house of Tomsk State University*, 2014, vol. 2, pp. 137–143. (in Russian)
8. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments. *The bulletin of Tomsk State University*, 2002, no. 1, pp. 18–23. (in Russian)
9. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*, 2003, vol. 46, no. 6, pp. 536–545.
10. Gortsev A.M., Kalyagin A.A. Joint probability density of the intervals length of integrated semi-synchronous flow of events. *The bulletin of Tomsk State University. Control, computer engineering and informatics*, 2012, no. 2(19), pp. 80–87. (in Russian)
11. Gortsev A.M., Kalyagin A.A., Nezhelskaya L.A. Joint probability density of the intervals length of integrated semi-synchronous flow of events under conditions of the constant dead time. *The bulletin of Tomsk State University. Control, computer engineering and informatics*, 2014, no. 2(27), pp. 19–29. (in Russian)