ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
№ 1 ФИЗИКА 2015

УДК: 519.872

Е.Г. УБОНОВА, Е.В. ПАНКРАТОВА

ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ MMPP/M/∞ С РАЗНОТИПНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Аннотация: Предлагается исследование системы массового обслуживания (СМО) с входящим MMPP - потоком, неограниченным числом разнотипных обслуживающих приборов и экспоненциальным временем обслуживания. Методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах получены выражения для характеристических функций первого и второго порядка числа занятых приборов.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, марковский модулированный поток.*

Общие выгоды от связи между математической теорией и ее практическим применением в теории массового обслуживания (ТМО) прослеживаются особенно хорошо. В начале 20-го века Эрланг [1], основал теорию массового обслуживания, а именно разработал стохастические модели для анализа эффективности технических систем. Первоначальная область применения ТМО для анализа телефонных систем, вскоре была увеличена путем применения в ремонте машин, контроле запасов, оценке страхового риска и позже конструкции и анализа компьютерных систем. Тесное взаимодействие теории и практики осталось движущей силой для развития теории массового обслуживания и на сегодняшний день.

Современные потоки данных включают в себя интегрированные разнотипные потоки, включающие передачу голоса, текстовых данных и видео источников, что требует использования более сложной модели потоков, чем уже существующий классический Пуассоновский процесс. Развитие компьютерных и мобильных сетей связи привело к необходимости создания новых математических моделей процессов передачи данных.

Системы массового обслуживания являются адекватными математическими моделями реальных процессов и систем в различных сферах деятельности. Например, система массового обслуживания MMPP/M/∞ с разнотипными заявками, требующими разного времени обслуживания является моделью информационных телекоммуникационных систем. Как правило, в таких системах на обработку информационных единиц затрачивается разное время в зависимости от формата, соответствующих протоколов, типа заявок и т.д.

В настоящей статье рассматривается система массового обслуживания MMPP/M/∞ с разнотипным обслуживанием и проводится ее исследование методом асимптотического анализа.

Постановка задачи

Рассмотрим СМО, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP-поток) разнотипных заявок, управляемый цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний K [2], заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$ и условными интенсивностями наступления событий λ_k. Дисциплина обслуживания заключается в том, что заявка из MMPP/M/∞ входящего потока занимает любой свободный прибор и с вероятностью p_1 время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_1, а с вероятностью p_2 время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2.

Поставим задачу исследования двумерного случайного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ числа занятых приборов в системе каждого типа в момент времени t. Так как входящий поток не является пуассоновским, то рассматриваемый двумерный процесс немарковский. Рассмотрим трехмерный марковский случайный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$, для которого можно записать совместное распределение вероятностей $P(k,i,t) = P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\}$, где $k(t)$ - состояние управляющей цепи Маркова. Для этого распределения вероятностей получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,i_1,i_2,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + i_1\mu_1 + i_2\mu_2)P(k,i_1,i_2,t) + \lambda_k p_1 P(k,i_1-1,i_2,t) + \lambda_k p_2 P(k,i_1,i_2-1,t) +$$

$$+(i_1+1)\mu_1 P(k,i_1+1,i_2,t)+(i_2+1)\mu_2 P(k,i_1,i_2+1,t)+\sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu,i_1,i_2,t). \qquad (1)$$

где k, ν =1, 2, …, K.

Введем функцию, которую будем называть частичной характеристической функцией [3],

$$H(k,u,w,t)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=1}^{\infty} e^{jui_1} e^{jwi_2} P(k,i_1,i_2),$$

где $j=\sqrt{-1}$.

Тогда из (1) получаем следующую систему уравнений

$$\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial t}=\lambda_k(p_1 e^{ju}+p_2 e^{jw}-1)H(k,u,w,t)+\mu_1 j(1-e^{-ju})\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial u}+$$

$$+\mu_2 j(1-e^{-jw})\frac{\partial H(k,u,w,t)}{\partial w}+\sum_{\nu} q_{\nu k} H(\nu,u,w,t).$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u,w,t)\left[\mathbf{\Lambda}(p_1 e^{ju}+p_2 e^{jw}-1)+\mathbf{Q}\right]+$$

$$+\mu_1 j\left[1-e^{-ju}\right]\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial u}+\mu_2 j\left[1-e^{-jw}\right]\frac{\partial \mathbf{H}(u,w,t)}{\partial w}, \qquad (2)$$

где

$$\mathbf{H}(u,w,t)=\left[H(1,u,w,t),H(2,u,w,t),...,H(K,u,w,t)\right],$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & \lambda_K\end{bmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & . & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & . & q_{2K}\\ . & . & . & .\\ q_{K1} & q_{K2} & . & q_{KK}\end{bmatrix}.$$

Для исследования числа занятых приборов каждого типа рассмотрим систему при ее стационарном функционировании, перепишем (2) в следующем виде:

$$\mathbf{H}(u,w)\left[\mathbf{\Lambda}(p_1 e^{ju}+p_2 e^{jw}-1)+\mathbf{Q}\right]=\mu_1 j\left[e^{-ju}-1\right]\frac{\partial \mathbf{H}(u,w)}{\partial u}+\mu_2 j\left[e^{-jw}-1\right]\frac{\partial \mathbf{H}(u,w)}{\partial w} \qquad (3)$$

Полученное уравнение позволяет определить основные вероятностные характеристики процесса, характеризующего среднее число занятых приборов каждого типа в момент времени t, при стационарном функционировании системы [3].

Исследование характеристической функции числа занятых приборов в системе методом асимптотического анализа

Асимптотика первого порядка

Применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов каждого типа в системе MMPP/M/∞ при некоторых асимптотических (предельных) условиях. Рассмотрим условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах [4].

Введем следующие обозначения:

$$\mu_1=\varepsilon,\ \mu_2=q\varepsilon,\ u=\varepsilon x_1,\ w=\varepsilon q x_2,\ \mathbf{H}(u,w)=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon). \qquad (4)$$

Тогда из (3) получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}\left(p_1 e^{j\varepsilon x_1}+p_2 e^{j\varepsilon q x_2}-1\right)+\mathbf{Q}\right]=j\left[e^{-j\varepsilon x_1}-1\right]\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_1}+$$

$$+j\left[e^{-j\varepsilon q x_2}-1\right]\frac{\partial \mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)}{\partial x_2}. \qquad (5)$$

Теорема 1: Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon\to 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}_1(x_1,x_2)$ решения $\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)$ уравнения (5) имеет вид:

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2)\mathbf{E}=\exp\{\lambda j(p_1x_1+p_2x_2)\},$$

где $\lambda=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}$, $\mathbf{R}$ - вектор стационарного распределения вероятностей управлявющей цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой уравнений $\mathbf{RQ}=0$ и условием нормировки $\mathbf{RE}=1$.

Доказательство: В уравнении (4) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, тогда имеем уравнение

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2)\mathbf{Q}=0,$$

решение которого определим в виде

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2)=\mathbf{R}\Phi_1(x_1,x_2). \tag{6}$$

Чтобы найти функцию $\Phi_1(x_1,x_2)$, домножим обе части уравнения (5) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}=[1,\ 1,\ \dots,\ 1]^T$. Далее раскладывая в полученном выражении экспоненты в ряд и подставляя (6), получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\lambda j\Phi_1(x_1,x_2)(p_1x_1+p_2qx_2)=x_1\frac{\partial\Phi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+qx_2\frac{\partial\Phi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}.$$

Решение которого, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_1(0,0)=1$, имеет вид

$$\Phi_1(x_1,x_2)=\exp\{\lambda j(p_1x_1+p_2x_2)\}.$$

Тогда,

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2)=\mathbf{R}\cdot\exp\{\lambda j(p_1x_1+p_2x_2)\},$$

откуда

$$\mathbf{F}_1(x_1,x_2)\mathbf{E}=\exp\{\lambda j(p_1x_1+p_2x_2)\}.$$

Теорема доказана.

В силу обратных замен (4) запишем асимптотическое равенство

$$\mathbf{H}(u,w)=\mathbf{F}_1(x_1,x_2,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_1(x_1,x_2)=\mathbf{R}\cdot\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u}{\mu_1}+p_2\frac{w}{\mu_2}\right)\right\}.$$

Тогда для характеристической функции процесса $\{i_1(t),i_2(t)\}$ получаем асимптотическое приближение первого порядка

$$h(u,w)=\mathbf{H}(u,w)\mathbf{E}=\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u}{\mu_1}+p_2\frac{w}{\mu_2}\right)\right\}. \tag{7}$$

Полученное равенство (7) будем называть асимптотикой первого порядка для системы MMPP/M/∞ с разнотипными заявками.

Асимптотика второго порядка

Для построения аппроксимации характеристической функции второго порядка в уравнении (3) выполним следующую замену

$$\mathbf{H}(u,w)=\mathbf{H}_2(u,w)\cdot\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u}{\mu_1}+p_2\frac{w}{\mu_2}\right)\right\}.$$

Тогда, учитывая (2) получим уравнение относительно $\mathbf{H}_2(u,w)$

$$\mathbf{H}_2(u,w)\left[\mathbf{\Lambda}\left(p_1e^{ju}+p_2e^{jw}-1\right)+\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{I}\left(p_1\left(e^{-ju}-1\right)+p_2\left(e^{-jw}-1\right)\right)\right]=$$
$$=\mu_1 j\left[e^{-ju}-1\right]\frac{\partial\mathbf{H}_2(u,w)}{\partial u}+\mu_2 j\left[e^{-jw}-1\right]\frac{\partial\mathbf{H}_2(u,w)}{\partial w}. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\mu_1=\varepsilon^2,\ \mu_2=q\varepsilon^2,\ u=\varepsilon y_1,\ w=\varepsilon q y_2,\ \mathbf{H}_2(u,w)=\mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon). \tag{9}$$

Из (8) получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}\left(p_1e^{j\varepsilon y_1}+p_2e^{j\varepsilon q y_2}-1\right)+\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{I}\left(p_1\left(e^{-j\varepsilon y_1}-1\right)+p_2\left(e^{-j\varepsilon q y_2}-1\right)\right)\right]=$$

$$= j\varepsilon\left[e^{-j\varepsilon y_1}-1\right]\frac{\partial \mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon)}{\partial y_1}\mathbf{I}+j\varepsilon\left[e^{-j\varepsilon q y_2}-1\right]\frac{\partial \mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon)}{\partial y_2}\mathbf{I}\,. \qquad (10)$$

Теорема 2: Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon\to 0$, значения вектор-функции $\mathbf{F}_2(y_1,y_2)$ решения $\mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon)$ уравнения (10) имеет вид:

$$\mathbf{F}_2(y_1,y_2)\mathbf{E}=\exp\left\{j^2\left(\frac{\lambda}{2}\left(p_1y_1^2+p_2qy_2^2\right)+\mathbf{f}\left(\frac{(p_1y_1)^2}{2}+\frac{q(p_2y_2)^2}{2}+2p_1p_2\frac{y_1y_2q}{q+1}\right)(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}\right)\right\}, \qquad (11)$$

где $\lambda=\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{E}$, вектор-функция $\mathbf{f}$ определяется решением системы уравнений $\mathbf{fQ}+\mathbf{R}[\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I}]=0$, $\mathbf{R}$ - вектор стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой уравнений $\mathbf{RQ}=0$ и условием нормировки $\mathbf{RE}=1$.

Доказательство: В уравнении (10) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и получим следующее уравнение

$$\mathbf{F}_2(y_1,y_2)\mathbf{Q}=0\,,$$

решение которого запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon)=\Phi_2(y_1,y_2)\left(\mathbf{R}+j\varepsilon\mathbf{f}\left(p_1y_1+p_2qy_2\right)\right)+O(\varepsilon^2)\,. \qquad (12)$$

Подставляем данное выражение в (10) и раскладываем в нем экспоненты в ряд Тейлора, получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения вектор-функции $\mathbf{f}$

$$\mathbf{fQ}+\mathbf{R}[\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I}]=0\,.$$

Чтобы найти функцию $\mathbf{\Phi}_2(y_1,y_2)$ домножим обе части уравнения (11) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}=[1,\ 1,\ \ldots,\ 1]^T$. Далее, раскладывая в полученном выражении экспоненты в ряд и подставляя (12), получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\Phi_2(y_1,y_2)\,j^2\left[\lambda\left(p_1y_1^2+p_2(qy_2)^2\right)+\mathbf{f}\left(p_1y_1+p_2qy_2\right)^2(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}\right]=y_1\frac{\partial\Phi_2(y_1,y_2)}{\partial y_1}+qy_2\frac{\partial\Phi_2(y_1,y_2)}{\partial y_2}\,.$$

Решение $\Phi_2(y_1,y_2)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\Phi_2(0{,}0)=1$, имеет вид

$$\Phi_2(y_1,y_2)=\exp\left\{j^2\left(\frac{\lambda}{2}\left(p_1y_1^2+p_2qy_2^2\right)+\mathbf{f}\left(\frac{(p_1y_1)^2}{2}+\frac{q(p_2y_2)^2}{2}+2p_1p_2\frac{y_1y_2q}{q+1}\right)(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}\right)\right\}.$$

Подставляя полученное выражение в (12), получаем необходимое выражение (11).

Теорема доказана.

В силу обратных замен (9) запишем асимптотическое равенство

$$\mathbf{H}_2(u,w)=\mathbf{F}_2(y_1,y_2,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_2(y_1,y_2)=$$

$$=\mathbf{R}\cdot\exp\left\{j^2\left(\frac{\lambda}{2}\left(p_1\frac{u^2}{\mu_1}+p_2\frac{w^2}{\mu_2}\right)+\mathbf{f}\left(\frac{(p_1u)^2}{2\mu_1}+\frac{(p_2w)^2}{2\mu_2}+2p_1p_2\frac{uw}{\mu_1+\mu_2}\right)(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}\right)\right\}.$$

Следовательно получаем асимптотическое приближение второго порядка характеристической функции процесса $\{i_1(t),i_2(t)\}$ имеет вид

$$h_2(u,w)=\mathbf{H}_2(u,w)\mathbf{E}=\exp\left\{\lambda j\left(p_1\frac{u}{\mu_1}+p_2\frac{w}{\mu_2}\right)+j^2\left(\frac{\lambda}{2}\left(p_1\frac{u^2}{\mu_1}+p_2\frac{w^2}{\mu_2}\right)+\mathbf{f}\left(\frac{(p_1u)^2}{2\mu_1}+\frac{(p_2w)^2}{2\mu_2}+2p_1p_2\frac{uw}{\mu_1+\mu_2}\right)(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{E}\right)\right\}$$

Заключение

Таким образом, в настоящей работе построена модель системы массового обслуживания MMPP/M/∞ с разнотипным обслуживанием. Методом асимптотического анализа получена гауссовская аппроксимация исследуемого двумерного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erlang, A. K. The theory of probability and telephone conversations / A.K. Erlang // Nyt Tidsskrift Mat. – 1911. – B. 20. – P. 33–39.
2. Назаров, А. А., Моисеева С.П. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
3. Artalejo, J. R., A. Gómez-Corral. Retrial queueing systems: A computational approach. – Springer, Berlin. – 2008. – 318 p.
4. Панкратова, Е.В., Коновалова Е.В. Исследование системы MMAP/M/∞ с разнотипными заявками // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы десятой российской конференции с международным участием. – Томск : Изд-во Томского государственного университета, 2014. – с.107-108.
5. Pankratova E., Moiseeva S.P. Queueing System MAP/M/∞ with n Types of Customers // Information Technologies and Mathematical Modelling: proc. Of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F.Terpugov. - Anzhero-Sudzhensk, 2014. - P. 356-366.
6. Синякова, И. А. Математические модели и методы исследования систем параллельного обслуживания сдвоенных заявок случайных потоков: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Ирина Анатольевна Синякова. – Томск, 2013. – С.145.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: rikka07@list.ru, pankate@sibmail.com

Панкратова Екатерина Владимировна, аспирант факультета прикладной математики и кибернетики;
Убонова Елена Георгиевна, магистрант факультета прикладной математики и кибернетики.

E.G.UBONOVA, E.V.PANKRATOVA

GAUSSIAN APPROXIMATION FOR MMPP / M / ∞ WITH VARIED SERVICE

The research of the queuing system with incoming MAP-flow, 2 types of customers, unlimited number of servers and exponential service time is proposed. Investigation of 2-dimensional stochastic process that characterizes the number of busy devices of different types of customers is held by asymptotic method.

Keywords: *queuing system, incoming MAP-flow.*

REFERENCES

1. Erlang, A. K. The theory of probability and telephone conversations. Nyt Tidsskrift Mat, 1911, B. 20, pp. 33–39.
2. Nazarov, A. A., Moiseeva S.P. Metodi asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obslugivania [The methods of asymptotic analysis in queuing theory], Tomsk, NTL Publ., 2006, 112 p.
3. Artalejo, J. R., A. Gómez-Corral. Retrial queueing systems: a computational approach. Springer, Berlin, 2008, 318 p.
4. Pankratova E.V., Konovalova E.V. Issledovanie sistemi MMAP/M/∞ s raznotipnimi zayavkami [Research of MMAP / M / ∞ with heterogeneous customers], Novie informacionnie tehnologii v issledovanii slognih struktur: materiali desyatoi rossyiskoi konferecii s megdunarodnim uchastiem [New information technologies in the research of complex structures: materials tenth Russian conference with international participation], Tomsk, TSU Publ., 2014, pp.107-108.
5. Pankratova E., Moiseeva S.P. Queueing System MAP/M/∞ with n Types of Customers, Information Technologies and Mathematical Modelling: proc. Of the 13th International Scientific Conference ITMM 2014 named after A.F.Terpugov. - Anzhero-Sudzhensk, 2014, p.356-366.
6. Sinyakova I.A. Matematicheskie modeli i metodi issledovania system parallelnogo obslugivania sdvoennih zayavok sluchainih potokov [Mathematical models and methods of research of systems of parallel service of dual customers of random flows], PhD dissertation, TSU, Tomsk, 2013, 145 p.