Л.А. ЗАДИРАНОВА*, С.П. МОИСЕЕВА*

СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИК ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЧИСЛА ЗАНЯТЫХ ПРИБОРОВ В СИСТЕМЕ ММРР|M| ∞ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Аннотация: Для системы массового обслуживания вида ММРР|M| ∞ с повторным обслуживанием получены аналитические выражения для нахождения моментов 1-3 порядка, характеризующих число занятых приборов в системе, а также асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов 2-3 порядка при условии растущего времени обслуживания.

Введение

В связи с бурным развитием телекоммуникационных и информационно-вычислительных систем, оценка пропускной способности и качества обслуживания является очень важным этапом их проектирования. Здесь аналитические расчеты строятся на математическом описании реакции системы на внешние воздействия. Под реакцией системы понимается ее состояние (количество занятых серверов или мест ожидания, время задержки и др.), а под внешними воздействиями – потоки требований, сбои, отказы из-за ненадежности и т.п.

В качестве математических моделей данных систем используют RQ-системы [2-3], многолинейные СМО [4-5], в том числе с неограниченным числом приборов [6-8].

Как правило, математические модели реальных систем должны учитывать ее особенности, такие как пульсирующий трафик и необходимость в повторном обслуживании [9-12] и т.д. Все это приводит к модификациям классических моделей ТМО, и, как следствие, к необходимости почти для каждой СМО разрабатывать оригинальные методы исследования.

В данной статье приводится исследование числа занятых приборов в СМО с неограниченным числом обслуживающих устройств и возможностью повторного обслуживания заявок, на вход системы поступает марковский модулированный поток (ММРР). С помощью метода начальных моментов найдены основные вероятностные характеристики исследуемого процесса, такие как среднее число занятых приборов в системе второй и третий моменты числа занятых приборов. Кроме того, для более детального исследования процессов, указанных выше, предложен метод асимптотического анализа.

Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания ММРР|M| ∞ , заданной матрицей условных интенсивностей Λ и матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, K$, управляемой цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний, $k(t) = 1, 2, \dots, K$ [13].

Продолжительность обслуживания заявки является случайной величиной и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1-r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается для повторного обслуживания.

Ставится задача исследования числа занятых приборов в системе ММРР|M| ∞ повторным обращением.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t , $k(t)$ – состояние управляющей цепи Маркова.

Очевидно, что процесс $\{i(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в рассматриваемую систему зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$, поэтому будем рассматривать двумерную цепь Маркова $\{k(t), i(t)\}$. Для распределения вероятностей полученного процесса $P(k, i, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}$, $k = 1, 2, \dots, K$, $i = 0, 1, 2, \dots$, получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k, i, t)}{\partial t} = -\lambda_k P(k, i, t) - i\mu P(k, i, t) + \lambda_k P(k, i-1, t) + \mu(1-r)(1+i)P(k, i+1, t) + \sum P(v, i, n, t)q_{vk}, \quad (1)$$

где $k, v = 1, 2, \dots, K$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Введем частичные характеристические функции [14]

$$H(k, u, t) = \sum_i e^{ju_i} P(k, i, t),$$

тогда из (1) получаем следующую систему уравнений

$$\frac{\partial H(k, u, t)}{\partial t} + j\mu \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial u} (1-r)(e^{-ju} - 1) = H(k, u, t)[\lambda_k (e^{ju} - 1)] + \sum H(v, u, t) q_{vk}.$$

Запишем данную систему в виде дифференциального матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} + j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} = \mathbf{H}(u, t)[(e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{Q}], \quad (2)$$

где

$$\mathbf{H}(u, w, t) = [H(1, u, w, t), H(2, u, w, t), \dots, H(K, u, w, t)],$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdot & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdot & q_{2K} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{K1} & q_{K2} & \cdot & q_{KK} \end{bmatrix}.$$

Для исследования числа занятых приборов рассмотрим систему при ее стационарном функционировании, тогда перепишем (2) в следующем виде:

$$j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u} = \mathbf{H}(u)[\mathbf{\Lambda}(e^{ju} - 1) + \mathbf{Q}]. \quad (3)$$

Полученное уравнение позволяет определить основные вероятностные характеристики процесса, характеризующего среднее число заявок в момент времени t , при стационарном функционировании системы.

Асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе

Для более полного исследования применим метод асимптотического анализа, заключающийся в нахождении аппроксимации характеристической функции числа занятых приборов в системе ММРР|M| ∞ при определенных условиях. Для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания [16].

Найдем асимптотическую характеристическую функцию числа занятых приборов в системе ММРР|M| ∞ в условии растущего времени.

Для решения поставленной задачи сформулируем вспомогательное утверждение, доказательство которых приведено в работе [15].

Лемма. Асимптотическое приближение второго порядка для характеристической функции числа занятых приборов в системе ММРР|M| ∞ имеет вид Гауссовской характеристической функции вида

$$h_2(u) = \exp \left\{ \frac{ju}{(1-r)} \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2(1-r)} \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\mu} \right\}, \quad (4)$$

где $\kappa_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{E}$, $\kappa_2 = \mathbf{f}_2 \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}$, а вектор-функция $\mathbf{f}_2$ определяется решением системы уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_2 \mathbf{Q} = 0$.

Чтобы сформулировать следующую теорему, в уравнении (3) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_3(u) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\mu(1-r)} \right\},$$

тогда получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$j\mu(1-r)(e^{-ju} - 1) \frac{\partial \mathbf{H}_3(u)}{\partial u} = \mathbf{H}_3(u) [\mathbf{Q} + \mathbf{\Lambda}(e^{ju} - 1) + (\kappa_1 + ju(\kappa_1 + \kappa_2))(e^{-ju} - 1)\mathbf{I}]. \quad (5)$$

Обозначив

$$\mu = \varepsilon^3, \quad u = \varepsilon y, \quad \mathbf{H}_3(u) = \mathbf{F}_3(y, \varepsilon) \quad (6)$$

из (5) получаем систему дифференциальных уравнений

$$j\varepsilon^2(1-r)(e^{-j\varepsilon y} - 1) \frac{\partial \mathbf{F}_3(y, \varepsilon)}{\partial y} = \mathbf{F}_3(y, \varepsilon) \left[\mathbf{Q} + \Lambda(e^{j\varepsilon y} - 1) + (\kappa_1 + j\varepsilon y(\kappa_1 + \kappa_2))(e^{-j\varepsilon y} - 1) \mathbf{I} \right], \quad (7)$$

Теорема. Сумма компонентов предельного, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значения вектор-функции $F(y)$ решения $F(y, \varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид:

$$\mathbf{F}_2(y) = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(jy)^3}{6(1-r)} \kappa_3 \right\},$$

где $\kappa_3 = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \mathbf{f}_3 \Lambda \mathbf{E}$, а вектор-функция $\mathbf{f}_3$ определяется решением системы уравнений $\mathbf{R}(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I} - 2\kappa_2 \mathbf{I}) + 2\mathbf{f}_2(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_3 \mathbf{Q} = 0$.

Доказательство. В уравнении (7) выполним предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда имеем уравнение

$$0 = \mathbf{F}_3(y) \mathbf{Q},$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{F}_3(y) = \mathbf{R} \Phi_3(y). \quad (8)$$

Определим вид функции $\Phi_3(y)$, для этого запишем решение системы (7) в следующем виде

$$\mathbf{F}_3(y, \varepsilon) = \Phi_3(y) \left\{ \mathbf{R} + j\varepsilon y \mathbf{f}_2 + \frac{(j\varepsilon y)^2}{2} \mathbf{f}_3 \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (9)$$

Подставляя данное выражение в (7) и раскладывая в нем экспоненты в ряд, получаем уравнение для нахождения вектор-функции $\mathbf{f}_3$

$$\mathbf{R}(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I} - 2\kappa_2 \mathbf{I}) + 2\mathbf{f}_2(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) + \mathbf{f}_3 \mathbf{Q} = 0.$$

Чтобы найти функцию $\Phi_3(y)$ домножим обе части уравнения (7) на единичный вектор-столбец $\mathbf{E} = [1, 1, \dots, 1]^T$. Далее раскладывая в полученном выражении экспоненты в ряд и подставляя (9) получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(1-r) \mathbf{R} \mathbf{E} \frac{\partial \Phi_3(y)}{\partial y} = \frac{(jy)^3}{2} \Phi_3(y) [(\kappa_1 + 2\kappa_2) \mathbf{I} + \mathbf{f}_3(\Lambda - \kappa_1 \mathbf{I}) \mathbf{E}],$$

решая которое имеем

$$\Phi_3(y) = \exp \left\{ \frac{(jy)^3}{6} \kappa_3 \right\},$$

где $\kappa_3 = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \mathbf{f}_3 \Lambda \mathbf{E}$.

Теорема доказана.

В силу замен (6) запишем асимптотическое равенство для $\mathbf{H}_3(u)$

$$\mathbf{H}_3(u) = \mathbf{F}_3(y, \varepsilon) \approx \mathbf{F}_3(y) = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(jy)^3}{6(1-r)} \kappa_3 \right\} = \mathbf{R} \cdot \exp \left\{ \frac{(ju)^3}{6(1-r)} \frac{\kappa_3}{\mu} \right\}. \quad (10)$$

С учетом (10) для характеристической функции числа занятых приборов $i(t)$ получаем асимптотическое приближение третьего порядка в следующей форме:

$$h_3(u) = \mathbf{H}(u) \mathbf{E} = \exp \left\{ \frac{ju}{(1-r)} \frac{\kappa_1}{\mu} + \frac{(ju)^2}{2(1-r)} \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\mu} + \frac{(ju)^3}{6(1-r)} \frac{\kappa_3}{\mu} \right\}. \quad (11)$$

Численный анализ полученных результатов

Для определенности области применимости асимптотических результатов, проведем сравнение распределения числа повторных обращений в систему за время t , полученные методом асим-

птотического анализа и допредельным способом для частного случая входящего потока, когда все λ_k равны.

Запишем асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

$$P_v(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} h_v(u) du, \quad (12)$$

где $h_v(u)$, $v=2, 3$ определяются выражениями (4), (11) соответственно.

Допредельное распределение вероятностей имеет вид

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} h_0(u) du, \quad (13)$$

где $h_0(u) = \exp\left\{(e^{ju} - 1) \cdot \frac{\lambda}{\mu(1-r)}\right\}$, которое было получено в работе [17].

Пример.

Рассмотрим СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием заявок, на вход которой поступает поток ММРР, заданный матрицей инфинитезималь-

ных характеристик $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & -0.8 \end{pmatrix}$ управляющей цепи Маркова $k(t)$, набором услов-

ных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Заявка, поступившая в систему занимает любой свободный

прибор, на котором обслуживается в течение случайного времени, распределенного согласно экспоненциального закона с параметром μ . Вероятность возврата заявки в систему $r = 0.7$. Используя заданные параметры, определим расстояние Колмогорова между распределениями (12) и (13)

$$D_v = \max_{0 \leq m < \infty} \left| \sum_{i=0}^m P_v(i) - \sum_{i=0}^m P(i) \right|.$$

Сравним результаты для аппроксимации второго (Δ_2) и третьего (Δ_3) порядков.

Δ \ μ	1	0,5	0,2	0,1	0,05
Δ_2	0,053	0,029	0,020	0,012	0,008
Δ_3	0,011	0,005	0,002	0,001	0,000

Таблица 1. Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $r = 0.7$

Положим вероятность возврата заявки в систему $r = 0.01$, тогда имеем

Δ \ μ	1	0,5	0,2	0,1	0,05
Δ_2	0,124	0,081	0,036	0,021	0,015
Δ_3	0,054	0,028	0,009	0,003	0,001

Таблица 2. Сравнение асимптотических и аналитических результатов при $r = 0.01$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при уменьшении значения величины параметра μ , точность аппроксимации допредельного распределения распределением, полученным методом асимптотического анализа увеличивается. Кроме того, на область применимости асимптотических результатов влияет не только время обслуживания заявки, но вероятность ее возврата в систему для повторного обслуживания.

Следует отметить, что область применимости такой аппроксимации повышается при переходе от асимптотики второго порядка к асимптотики третьего порядка. Полагая приемлемой погрешность аппроксимации равную значению 0,02 расстояния Колмогорова, можно считать, что применение асимптотики второго порядка допустимо при значении $\mu \leq 0,01$, и $\mu \leq 0,02$ для

СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИК ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЧИСЛА ЗАНЯТЫХ ПРИБОРОВ В СИСТЕМЕ ММРР|M| ∞ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

третьего порядка. Следовательно, применение асимптотики третьего порядка расширяет область применимости данного метода в два раза.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе получено асимптотическое приближение второго и третьего порядков характеристической функции числа занятых приборов в системе ММРР|M| ∞ повторным обращением, проведен численный анализ полученных результатов и определена их область применимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artalejo, J. R. Accessible bibliography on retrial queues / J. R. Artalejo // *Mathematical and Computer Modelling*. – 1999. – Vol. 30. – P. 223–233.
2. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: A computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. – Springer, Berlin. – 2008. – 318 p.
3. Falin, G. I. Retrial Queues / G. I. Falin, J. G. C. Tempeston. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.
4. Печинкин, А. В. Многолинейные системы массового обслуживания с независимыми отказами и восстановлениями приборов / А. В. Печинкин, И. А. Соколов, В. В. Чаплыгин // *Системы и средства информатики. Спец. выпуск «Математическое и алгоритмическое обеспечение информационно-телекоммуникационных систем»*. – М.: ИПИ РАН. - 2006. - С. 99–123.
5. Mandelbaum, A. State-dependent queues: approximations and applications / A. Mandelbaum, G. Pats // *In Stochastic Networks, IMA Volumes in Mathematics*, F. P. Kelly and R. J. Williams, eds. – Springer, 1995. – P. 239–282.
6. Ананина, И. А. Исследование потоков в системе M/GI/ ∞ с повторными обращениями методом предельной декомпозиции / И. А. Ананина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2009. – № 3(8). – С. 56–67.
7. Вишневецкий, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневецкий. – Москва: Техносфера, 2003. – 512 с.
8. Borst, S. Dimensioning Large Call Centers / S. Borst, A. Mandelbaum, M. Reiman // *Operations Research*. – 2004. – Vol. 52. – P. 17–34.
9. Asmussen, S. Fitting phase-type distributions via the EM algorithm / S. Asmussen, O. Nerman // *In Symposium i Anvendt Statistik*, K. Vest Nielsen (ed.) Copenhagen, January, 1991. – P. 335–346.
10. Brandt, A. On the GI/M/ ∞ Service system with batch arrivals and different types of service distributions / A. Brandt // *Queueing Systems*. – 1989. – Vol. 4 – P. 351–365.
11. Chakravarthy, S. A multiserver queue with Markovian arrival process and group services with thresholds / S. Chakravarthy, A. S. Alfa // *Naval Research Logistics*. – 1993. – Vol.40. – P.811–812.
12. Movaghar, A. Analysis of a Dynamic Assignment of Impatient Customers to Parallel Queues / A. Movaghar // *Queueing Systems*. – 2011. – Vol. 67. No. 3. - P. 251–273.
13. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: Изд-во НТЛ. 2004. – 228 с.
14. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М.: Физмат-лит. – 1963. – 236 с.
15. Жидкова, Л. А. Исследование числа занятых приборов в системе ММРР|M| ∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2014. – № 1 (26). – С. 53–62.
16. Назаров, А. А. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева – Томск : Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
17. Морозова, А. С. Исследование математических моделей стимулирования сбыта продукции: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18; Филиал Кемеровского гос. ун-та в г. А.-Судженске – Анжеро-Судженск. 2007. 115 с.

*Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: ZhidkovaLA@mail.ru

Задиранова Любовь Александровна, аспирантка;
Моисеева Светлана Петровна, д.ф.-м.н., доцент

COMPARISON OF SECOND- AND THIRD- ORDER ASYMPTOTIC ANALYSIS RESULTS FOR MMPP|M| ∞ WITH REPEATED REQUESTS

Abstract: For the queuing system MMPP|M| ∞ with repeated requests the analytical expressions of moments order 1-3 of the customers and an asymptotic approximation of the characteristic function of the number of customers 2-3 orders in a condition of a growing service time was obtained.

REFERENCES

1. Artalejo, J. R. Accessible bibliography on retrial queues / J. R. Artalejo // *Mathematical and Computer Modelling*. – 1999. – Vol. 30. – P. 223–233.
2. Artalejo, J. R. Retrial queueing systems: A computational approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. – Springer, Berlin. – 2008. – 318 p.
3. Falin, G. I. Retrial Queues / G. I. Falin, J. G. C. Tempeton. – London: Chapman and Hall, 1997. – 328 p.
4. Pechinkin, A. V. Mnogolineynye systemy massovogo obsluzhivaniya s nezavisimymi otkazami i vosstanovleniyami priborov [Multiline queuing system with independent failure and recovery equipment] / A. V. Pechinkin, I. A. Sokolov, V. V. Chaplygin // *Systemy i sredstva informatiki. Spec. vypusk "Matimatischeskoe i algoritmicheskoe obespechenie informacionno-telekomunikacionnyh sistem"* [Systems and means of computer. Cpets. Issue "Mathematical and algorithmic support of information and telecommunication systems"]. – M.: IPI RAN. – 2006. – P. 99–123. (In Russian)
5. Mandelbaum, A. State-dependent queues: approximations and applications / A. Mandelbaum, G. Pats // In *Stochastic Networks, IMA Volumes in Mathematics*, F. P. Kelly and R. J. Williams, eds. – Springer, 1995. – P. 239–282.
6. Ananina, I. A. Issledovanie potokov v sisteme M|GI| ∞ s povtornymi obrashcheniyami metodom predelnoy dekompozicii. [Research of streams in system M|GI| ∞ with repeated references the method of limiting decomposition] / I. A. Ananina, S. P. Moiseeva, A. A. Nazarov // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo yuni-versiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]– 2009. – № 3(8). – P. 56–67. (In Russian)
7. Vishnevskiy, V. M. Teoriticheskie osnovy proektirovaniya komp'uternyh system [Theoretical bases of designing of computer networks] / V. M. Vishnevskiy. – Moscow: Technosphere, 2003. – 512 p. (In Russian)
8. Borst, S. Dimensioning Large Call Centers / S. Borst, A. Mandelbaum, M. Reiman // *Operations Research*. – 2004. – Vol. 52. – P. 17–34.
9. Asmussen, S. Fitting phase-type distributions via the EM algorithm / S. Asmussen, O. Nerman // *In Symposium i Anvendt Statistisk*, K. Vest Nielsen (ed.) Copenhagen, January, 1991. – P. 335–346.
10. Brandt, A. On the GI/M/ ∞ Service system with batch arrivals and different types of service distributions / A. Brandt // *Queueing Systems*. – 1989. – Vol. 4 – P. 351–365.
11. Chakravarthy, S. A multiserver queue with Markovian arrival process and group services with thresholds / S. Chakravarthy, A. S. Alfa // *Naval Research Logistics*. – 1993. – Vol.40. – P.811–812.
12. Movaghar, A. Analysis of a Dynamic Assignment of Impatient Customers to Parallel Queues / A. Movaghar // *Queueing Systems*. – 2011. – Vol. 67. No. 3. – P. 251–273.
13. Nazarov, A. A. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queueing Theory] / A. A. Nazarov., A. F. Terpugov.. – Tomsk: NTL. 2004. – 228 p. (In Russian)
14. Khinchin, A. Ya. Raboty po matematicheskoi teorii massivogo obsluzhivaniya [Works on the mathematical queuing theory] / A. Ya. Khinchin. – M: Fizmatlit. – 1963. – 236 p. (In Russian)
15. Zhidkova, L. A. Issledovanie chisla zanyatykh priborov v sisteme MMPP|M| ∞ s povtornymi obrashcheniyami [Investigation of customer number in the queueing system MMPP|M| ∞ with repeated requests] / L.A. Zhidkova, S.P. Moiseeva // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. – 2014. – № 1 (26). – P. 53–62. (In Russian)
16. Nazarov, A. A. Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya [Method of asymptotic analyze on Queueing Theory] / A. A. Nazarov, S.P. Moiseeva – Tomsk: NTL, 2006. – 112 p. (In Russian)
17. Morozova, A.S. Issledovanie matematicheskikh modeley stimulirovaniya sbyta produkcii [Research of mathematical models to stimulate product sales]: dissertation Candidate of Physical and Mathematical

***СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИК ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЧИСЛА ЗАНЯТЫХ ПРИБОРОВ
В СИСТЕМЕ ММРР/ $M|_{\infty}$ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ***

Sciences: 05.13.18; Kemerovo state university branch in Anzhero-Sudzhensk – Anzhero-Sudzhensk. 2007.
115 p. (In Russian)