УДК 519.872

И.А. КОНОНОВ, Е.А. ФЕДОРОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМ $M_2|M_2|1$ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАДЕРЖКИ[1]

Исследована математическая модель RQ-системы $M_2|M_2|1$ с двумя источниками повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой задержки. Найдено совместное распределение вероятностей числа заявок в первом и во втором источниках повторных вызовов. Проведено численное сравнение асимптотического и точного распределений.

Ключевые слова: *RQ-система, метод асимптотического анализа, два источника повторных вызовов, большая задержка.*

Математические модели систем массового обслуживания являются важным инструментом при исследовании различных экономических, технических систем, а также в сферах обслуживания и производства. Но с развитием информационных технологий возникает интерес к исследованию нового класса систем массового обслуживания – RQ-систем (Retrial Queueing Systems) или систем с повторными вызовами. RQ-системы отличаются от классических тем, что при обращении заявки к обслуживающему прибору в случае, когда прибор был занят, заявка не теряется, а уходит в источник повторных вызовов, откуда она повторно обращается к прибору после некоторой задержки. Такие системы применяются при моделировании телекоммуникационных систем, систем сотовой связи, компьютерных сетей и т.д.

Наиболее широкое исследование систем с повторными вызовами приведено в работах Дж.Р. Арталехо [1] и Г.И. Фалина [2]. Анализом этих моделей так же занимались А.Н. Дудин [3], А.А. Назаров [4], А. Гомез-Коррел, Дж. Коэн и др. [5], которыми были рассмотрены различные методы исследования RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|C и других систем с одним источником повторных вызовов.

В данной же статье применяется метод асимптотического анализа для исследования системы $M_2|M_2|1$ с двумя источниками повторных вызовов. Исследованием подобных систем занимались К. Авчаренков, P. Nain, U. Yechiali [6].

1. Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему (рис. 1) с двумя источниками повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступают два простейших потока заявок с интенсивностями λ_1 и λ_2. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания, время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2. Если прибор занят, то заявка 1-го типа переходит в первый источник повторных вызовов, а заявка 2-го типа – во второй, где они осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметрами σ_1 и σ_2 соответственно. Из ИПВ (это может быть как первый, так и второй) после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору. Если прибор свободен, то заявка занимает его для обслуживания, если же он занят, то заявка мгновенно возвращается в свой ИПВ для реализации следующей задержки.

[1] Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 1.511.2614/К.

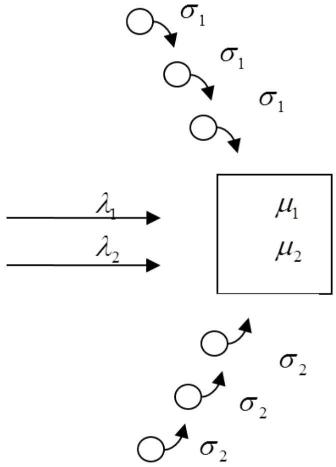

Рис. 1. RQ-система $M_2|M_2|1$

Обозначим $i_1(t)$ – число заявок в 1-м источнике повторных вызовов, а $i_2(t)$ – число заявок во 2-м источнике. Случайный процесс $k(t)$ описывает состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если на приборе находится 1-я заявка,}\\ 2, \text{ если на приборе находится 2-я заявка.}\end{cases}$$

Очевидно, что трехмерный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$ является марковским.

Обозначим $P\ \{k(t)=k,\ i_1(t)=i_1,\ i_2(t)=i_2\} = P_k\,(i_1, i_2, t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k, в 1-м источнике повторных вызовов i_1 заявок и во 2-м источнике повторных вызовов i_2 заявок.

Ставится задача найти совместное распределение вероятностей числа заявок в первом и во втором источниках повторных вызовов.

Для распределения вероятностей $P_k\,(i_1, i_2, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P_0(i_1,i_2,t)}{\partial t}=\mu_1 P_1(i_1,i_2,t)+\mu_2 P_2(i_1,i_2,t)-\\ -(\lambda_1+\lambda_2+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_0(i_1,i_2,t),\\ \dfrac{\partial P_1(i_1,i_2,t)}{\partial t}=\lambda_1 P_0(i_1,i_2,t)+(i_1+1)\sigma_1 P_0(i_1+1,i_2,t)+\\ +\lambda_1 P_1(i_1-1,i_2,t)+\lambda_2 P_1(i_1,i_2-1,t)-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_1(i_1,i_2,t),\\ \dfrac{\partial P_2(i_1,i_2,t)}{\partial t}=\lambda_2 P_0(i_1,i_2,t)+(i_2+1)\sigma_2 P_0(i_1,i_2+1,t)+\\ +\lambda_1 P_2(i_1-1,i_2,t)+\lambda_2 P_2(i_1,i_2-1,t)-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P_2(i_1,i_2,t).\end{cases} \tag{1}$$

В стационарном режиме система (1) примет вид:

$$\begin{cases}\mu_1 P_1(i_1,i_2)+\mu_2 P_2(i_1,i_2)-(\lambda_1+\lambda_2+i_1\sigma_1+i_2\sigma_2)P_0(i_1,i_2)=0,\\ \lambda_1 P_0(i_1,i_2)+(i_1+1)\sigma_1 P_0(i_1+1,i_2)+\lambda_1 P_1(i_1-1,i_2)+\\ +\lambda_2 P_1(i_1,i_2-1)-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P_1(i_1,i_2)=0,\\ \lambda_2 P_0(i_1,i_2)+(i_2+1)\sigma_2 P_0(i_1,i_2+1)+\lambda_1 P_2(i_1-1,i_2)+\\ +\lambda_2 P_2(i_1,i_2-1)-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P_2(i_1,i_2)=0.\end{cases} \tag{2}$$

Перейдем в системе (2) к частичным характеристическим функциям: $H_k(u_1,u_2)=\sum\limits_{i_1}\sum\limits_{i_2} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P_k(i_1,i_2)$, где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда система уравнений (2) перепишется в виде:

$$
\begin{cases}
\mu_1 H_1(u_1,u_2) + \mu_2 H_2(u_1,u_2) - (\lambda_1+\lambda_2) H_0(u_1,u_2) + \\
+ j\sigma_1 \dfrac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1} + j\sigma_2 \dfrac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2} = 0, \\
\lambda_1 H_0(u_1,u_2) - j\sigma_1 e^{-ju_1} \dfrac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_1} + \lambda_1 e^{ju_1} H_1(u_1,u_2) + \\
+ \lambda_2 e^{ju_2} H_1(u_1,u_2) - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1) H_1(u_1,u_2) = 0, \\
\lambda_2 H_0(u_1,u_2) - j\sigma_2 e^{-ju_2} \dfrac{\partial H_0(u_1,u_2)}{\partial u_2} + \lambda_1 e^{ju_1} H_2(u_1,u_2) + \\
+ \lambda_2 e^{ju_2} H_2(u_1,u_2) - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2) H_2(u_1,u_2) = 0.
\end{cases}
\tag{3}
$$

2. Асимптотика первого порядка

Аналитически данную систему решить не представляется возможным. Будем решать полученную систему (3) методом асимптотического анализа в условии большой задержки, то есть при $\sigma_1 \to 0$ или при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon=\sigma_1$ – бесконечно малая величина.

Введем обозначения $u_1 = \varepsilon y$, $H_k(u_1,u_2) = F_k(y,u_2,\varepsilon)$. Тогда система (3) примет вид:

$$
\begin{cases}
\mu_1 F_1(y,u_2,\varepsilon) + \mu_2 F_2(y,u_2,\varepsilon) - (\lambda_1+\lambda_2) F_0(y,u_2,\varepsilon) + \\
+ j\varepsilon \dfrac{\partial F_0(y,u_2,\varepsilon)}{\partial(\varepsilon y)} + j\sigma_2 \dfrac{\partial F_0(y,u_2,\varepsilon)}{\partial u_2} = 0, \\
\lambda_1 F_0(y,u_2,\varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon y} \dfrac{\partial F_0(y,u_2,\varepsilon)}{\partial(\varepsilon y)} + \lambda_1 e^{j\varepsilon y} F_1(y,u_2,\varepsilon) + \\
+ \lambda_2 e^{ju_2} F_1(y,u_2,\varepsilon) - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1) F_1(y,u_2,\varepsilon) = 0, \\
\lambda_2 F_0(y,u_2,\varepsilon) - j\sigma_2 e^{-ju_2} \dfrac{\partial F_0(y,u_2,\varepsilon)}{\partial u_2} + \lambda_1 e^{j\varepsilon y} F_2(y,u_2,\varepsilon) + \\
+ \lambda_2 e^{ju_2} F_2(y,u_2,\varepsilon) - (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2) F_2(y,u_2,\varepsilon) = 0.
\end{cases}
\tag{4}
$$

В системе (4) совершим предельный переход $\varepsilon \to 0$, обозначив $F_k(y,u_2) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_k(y,u_2,\varepsilon)$. Получим систему:

$$
\begin{cases}
\mu_1 F_1(y,u_2) + \mu_2 F_2(y,u_2) - (\lambda_1+\lambda_2) F_0(y,u_2) + \\
+ j \dfrac{\partial F_0(y,u_2)}{\partial y} + j\sigma_2 \dfrac{\partial F_0(y,u_2)}{\partial u_2} = 0, \\
\lambda_1 F_0(y,u_2) - j \dfrac{\partial F_0(y,u_2)}{\partial y} + \\
+ \lambda_2 e^{ju_2} F_1(y,u_2) - (\lambda_2+\mu_1) F_1(y,u_2) = 0, \\
\lambda_2 F_0(y,u_2) - j\sigma_2 e^{-ju_2} \dfrac{\partial F_0(y,u_2)}{\partial u_2} + \\
+ \lambda_2 e^{ju_2} F_2(y,u_2) - (\lambda_2+\mu_2) F_2(y,u_2) = 0.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Будем искать $F_k(y,u_2)$ в виде произведения $F_k(y,u_2) = R_k(u_2)\Phi(y)$. Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \mu_1 R_1(u_2)\Phi(y) + \mu_2 R_2(u_2)\Phi(y) - (\lambda_1+\lambda_2)R_0(u_2)\Phi(y) + \\ + jR_0(u_2)\dfrac{\partial \Phi(y)}{\partial y} + j\sigma_2 \Phi(y)\dfrac{\partial R_0(u_2)}{\partial u_2} = 0, \\ \lambda_1 R_0(u_2)\Phi(y) - jR_0(u_2)\dfrac{\partial \Phi(y)}{\partial y} + \\ + \lambda_2 e^{ju_2} R_1(u_2)\Phi(y) - (\lambda_2+\mu_1)R_1(u_2)\Phi(y) = 0, \\ \lambda_2 R_0(u_2)\Phi(y) - j\sigma_2 e^{-ju_2}\Phi(y)\dfrac{\partial R_0(u_2)}{\partial u_2} + \\ + \lambda_2 e^{ju_2} R_2(u_2)\Phi(y) - (\lambda_2+\mu_2)R_2(u_2)\Phi(y) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Во 2-м уравнении системы (6) примем u_2=0 и найдем Ф(у):

$$\Phi(y) = e^{\frac{\lambda_1 R_0 - \mu_1 R_1}{jR_0} y}. \tag{7}$$

Подставим (7) в систему (6).

$$\begin{cases} \mu_1 R_1(u_2) + \mu_2 R_2(u_2) - \lambda_2 R_0(u_2) - \mu_1 \dfrac{R_1}{R_0} R_0(u_2) + j\sigma_2 \dfrac{\partial R_0(u_2)}{\partial u_2} = 0, \\ \mu_1 \dfrac{R_1}{R_0} R_0(u_2) + (\lambda_2 e^{ju_2} - \lambda_2 - \mu_1) R_1(u_2) = 0, \\ \lambda_2 R_0(u_2) - j\sigma_2 e^{-ju_2} \dfrac{\partial R_0(u_2)}{\partial u_2} + \lambda_2 e^{ju_2} R_2(u_2) - (\lambda_2+\mu_2)R_2(u_2) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

К системе (8) добавим еще 2 уравнения полученные следующим образом:

1. Складываем все уравнения системы (4) и положим y=0.
2. Складываем все уравнения системы (4) и положим u_2=0.

Из полученной системы уравнений в результате были найдены следующие функции:

$$R_0(u_2) = R_0\left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_1}(1 - e^{ju_2})\right)^{\frac{\mu_1 \frac{R_1}{R_0}(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_2(\mu_1+\lambda_2-\mu_2)}} \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2}(1 - e^{ju_2})\right)^{-\frac{\lambda_2\left(\mu_1 \frac{R_1}{R_0} + \mu_1 + \lambda_2 - \mu_2\right)}{\sigma_2(\mu_1+\lambda_2-\mu_2)}}.$$

$$R_1(u_2) = \frac{\mu_1 \frac{R_1}{R_0}}{\mu_1 + \lambda_2(1 - e^{ju_2})} R_0(u_2),$$

$$R_2(u_2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2(1 - e^{ju_2})} R_0(u_2) - \frac{\sigma_2 j e^{-ju_2}}{\mu_2 + \lambda_2(1 - e^{ju_2})} \frac{\partial R_0(u_2)}{\partial u_2},$$

где $R_0 = 1 - \left[\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right]$, $\quad R_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\quad R_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Учитывая, что $F(y,u_2) = F_0(y,u_2) + F_1(y,u_2) + F_2(y,u_2)$, получим вид асимптотической функции.

$$F(y,u_2) = e^{\frac{\lambda_1 R_0 - \mu_1 R_1}{jR_0} y} R_0(u_2)\Bigg(1 + \frac{\mu_1 \frac{R_1}{R_0}}{\mu_1 + \lambda_2(1 - e^{ju_2})} +$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2(1 - e^{ju_2})} + \frac{\mu_1 \frac{R_1}{R_0} \lambda_2}{(\mu_2 + \lambda_2(1 - e^{ju_2}))(\mu_1 + \lambda_2(1 - e^{ju_2}))} +$$

$$+ \frac{{\lambda_2}^2 \mu_1 \frac{R_1}{R_0}}{(\mu_2 + \lambda_2(1 - e^{ju_2}))(\mu_1 + \lambda_2(1 - e^{ju_2}))(\mu_2 - \lambda_2 e^{ju_2})} + \frac{{\lambda_2}^2}{(\mu_2 + \lambda_2(1 - e^{ju_2}))(\mu_2 - \lambda_2 e^{ju_2})}\Bigg)$$

Вернемся к переменной $u_1=\varepsilon y$ и параметру σ_1.

$$H(u_1,u_2)=e^{\frac{\lambda_1 R_0-\mu_1 R_1}{jR_0}\frac{u_1}{\sigma_1}}R_0(u_2)\left[1+\frac{\mu_1\frac{R_1}{R_0}}{\mu_1+\lambda_2(1-e^{ju_2})}+\right.$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2})}+\frac{\mu_1\frac{R_1}{R_0}\lambda_2}{(\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_1+\lambda_2(1-e^{ju_2}))}+ \tag{9}$$

$$\left.+\frac{\lambda_2^{\,2}\mu_1\frac{R_1}{R_0}}{(\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_1+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_2-\lambda_2 e^{ju_2})}+\frac{\lambda_2^{\,2}}{(\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_2-\lambda_2 e^{ju_2})}\right].$$

Таким образом, получили асимптотическую характеристической функции распределения вероятностей числа заявок в двух ИПВ в условии большой задержки.

Чтобы получить характеристическую функцию одномерного распределения, примем в (9) $u_1=0$.

$$H(u_2)=R_0(u_2)\left[1+\frac{\mu_1\frac{R_1}{R_0}}{\mu_1+\lambda_2(1-e^{ju_2})}+\right.$$

$$+\frac{\lambda_2}{\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2})}+\frac{\mu_1\frac{R_1}{R_0}\lambda_2}{(\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_1+\lambda_2(1-e^{ju_2}))}+ \tag{10}$$

$$\left.+\frac{\lambda_2^{\,2}\mu_1\frac{R_1}{R_0}}{(\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_1+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_2-\lambda_2 e^{ju_2})}+\frac{\lambda_2^{\,2}}{(\mu_2+\lambda_2(1-e^{ju_2}))(\mu_2-\lambda_2 e^{ju_2})}\right],$$

где $$R_0(u_2)=R_0\left[1+\frac{\lambda_2}{\mu_1}(1-e^{ju_2})\right]^{\frac{\mu_1\frac{R_1}{R_0}(\mu_2-\mu_1)}{\sigma_2(\mu_1+\lambda_2-\mu_2)}}\left[1+\frac{\lambda_2}{\mu_2-\lambda_2}(1-e^{ju_2})\right]^{-\frac{\lambda_2(\mu_1\frac{R_1}{R_0}+\mu_1+\lambda_2-\mu_2)}{\sigma_2(\mu_1+\lambda_2-\mu_2)}},$$ а

$$R_0=1-\left[\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right],\qquad R_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1},\qquad R_2=\frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

Из (10) можно найти маргинальное распределение вероятностей числа заявок во втором ИПВ по формуле обратного преобразования Фурье:

$$P(i_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ju_2 i_2}H(u_2)du_2.$$

Если принять в (9) $u_2=0$, получим следующее:

$$H(u_1)=e^{-\frac{\lambda_1 R_0-\mu_1 R_1}{R_0\sigma_1}ju_1}.$$

Очевидно, что такая асимптотическая характеристическая функция не описывает исследуемый процесс, а лишь указывает математическое ожидание числа заявок в первом ИПВ, поэтому необходимо продолжение исследования в виде получения второй асимптотики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
2. Falin G. L., Templeton J. G. C. Retrial Queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.
3. Deepak T., Dudin A., Joshua V., Krishnamoorthy A. On an M(X)/G/1 Retrial System with Two Types of Search of Customers from the Orbit // Stochastic Analysis and Applications. 2013. V.31. №1. P. 92-107.
4. Моисеева Е. А., Назаров А. А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 84–94.
5. Yang Woo Shin, Dug Hee Moon. M/M/c Retrial Queue with Multiclass of Customers // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2014. – V. 16. - № 4. – P. 931–949.
6. Avrachenkov, K., Nain, P., Yechiali, U. A retrial system with two input streams and two orbit queues // Queueing Syst. – 2014. – V. 77. - № 1. – P. 1-31.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: develi@sibmail.com

Кононов Илья Алексеевич, студент;
Фёдорова Екатерина Александровна, к.ф.-м.н., мл. науч. сотр.

I.A. KONONOV, E.A. FEDOROVA

STUDY OF RETRIAL QUEUING SYSTEM $M_2|M_2|1$ WITH TWO ORBITS BY ASYMPTOTIC ANALYSIS METHOD UNDER LONG DELAY CONDITION

In the article we study the retrial queuing system with two orbits by using asymptotic analysis method under heavy delay condition. We found joint probability distribution of the number of calls in the first and second orbits.

Keywords: Retrial queuing systems*, method of asymptotic analysis, two orbits, long delay.*

REFERENCES

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
2. Falin G. L., Templeton J. G. C. Retrial Queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.
3. Deepak T., Dudin A., Joshua V., Krishnamoorthy A. On an M(X)/G/1 Retrial System with Two Types of Search of Customers from the Orbit // Stochastic Analysis and Applications. 2013. V.31. №1. P. 92-107.
4. Moiseeva E.A., Nazarov A.A. Issledovanie RQ-sistemy MMPP|GI|1 metodom asimptoticheskogo analisa v uslovii bolshoy zagruzki [Researching of Retrial Queueing system MMPP|GI|1 by using asymptotic analysis method on heavy load condition] // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science, 2013, № 4 (25). – P. 84–94.
5. Yang Woo Shin & Dug Hee Moon. M/M/c Retrial Queue with Multiclass of Customers // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2014. – V. 16. - № 4. – P. 931–949.
6. Avrachenkov, K., Nain, P., Yechiali, U. A retrial system with two input streams and two orbit queues // Queueing Syst. – 2014. – V. 77. - № 1. – P. 1-31.