МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

IV Международной молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 20–21 мая 2016 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

$$F_2(z,w,\varepsilon) = \Phi_2(w)\left\{R(z) + j\varepsilon w f_2(z)\right\} + O(\varepsilon^2).$$

В работе получено предельное при $\varepsilon \to 0$ выражение для $F_2(z,w,\varepsilon)$, имеющее вид:

$$F_2\left(z,w\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_2\left(z,w,\varepsilon\right) = R\left(z\right)\exp\left\{\frac{\left(ju\right)^2}{2}\left[\frac{\lambda+\kappa}{\mu}\right]\right\},$$

где $\kappa = \dfrac{\lambda}{\mu}\int\limits_0^\infty \left[A(z) - R(z)\right]dz$. Следовательно, асимптотика второго порядка характеристической функции числа заявок в системе примет вид

$$h_2\left(u\right) = \exp\left\{ju\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(ju\right)^2}{2}\left[\frac{\lambda+\kappa}{\mu}\right]\right\}.$$

Тогда для характеристической функции суммарного объёма заявок в системе GI/M/∞ можно записать

$$h_2\left(u\right) = \exp\left\{ju\frac{\lambda}{\mu}a_1 + \frac{\left(ju\right)^2}{2}\left[\frac{\lambda+\kappa}{\mu}\right]a_2\right\}. \tag{11}$$

Таким образом, асимптотическое приближение характеристической функции суммарного объёма находившихся в системе заявок имеет нормальное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихоненко О.М.* Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О.М. Тихоненко. – Минск: БГУ, 2008. – 148 с.

2. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ. 2010. – 228 с.

3. *Назаров А.А.* Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

4. *Моисеева С.П.* Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками: Дис. … докт. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Светлана Петровна Моисеева. – Томск, 2014. – 280 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ MMPP/GI/∞ С ОБСЛУЖИВАНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЁМА

Е.Ю. Лисовская, С.П. Моисеева

Томский государственный университет

ekaterina_lisovs@mail.ru, smoiseeva@mail.ru

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) требований случайного объёма имеют свое применение в задачах проектирования информационных и телекоммуникационных систем, где информация передается порциями в виде сообщений случайного объёма. Как было замечено в работах [1,4,8] задачи исследования таких систем играют большую роль при моделировании современных информационно-вычислительных систем. Однако аналитических решений при дисциплине обслуживания FIFO не было получено, поскольку для построения корректного марковского процесса необходимо учитывать объёмы тех заявок, которые находятся в системе.

В работах [1,4–6] были исследованы СМО требований случайного объёма с дисциплиной обслуживания LIFO и ограничением на суммарный объём требований. Оказалось, что в этом случае можно получить алгоритмы, пригодные для численных расчетов стационарных характеристик.

Целью данной работы является исследование многолинейной системы массового обслуживания MMPP/GI/∞ со случайным объёмом требований методом асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока.

Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает марковский модулированный поток (MMPP-поток), управляемый цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$ и диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}$. Продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения, одинаковую для всех приборов $B(x)$. Предполагаем, что каждое требование характеризуется некоторым случайным объёмом $\nu > 0$, $G(y) = P\{\nu < y\}$ — функция распределения случайной величины ν. Объёмы различных требований независимы. По окончании обслуживания заявка покидает систему и «уносит» свой объём.

Пусть $i(t)$ — число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент t, $V(t)$ — полная сумма объёмов требований, находящихся в системе в момент времени t. Поставим задачу нахождения характеристик двумерного случайного процесса $\{i(t), V(t)\}$. Отметим, что исследуемый процесс не является марковским, поэтому для его исследования будем использовать метод динамического просеивания (метод просеянного потока) [2,3].

Построим просеянный поток для рассматриваемой СМО MMPP/GI/∞. Для этого зафиксируем некоторый момент времени T. Полагаем, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t < T$ с вероятностью $S(t) = 1 - B(T - t)$ формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ эта заявка не рассматривается.

Обозначим $n(t)$ — число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t. Тогда, если в начальный момент $t_0 < T$ система была свободна, то для момента времени T для любых m выполняется равенство $P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\}$.

Следует отметить, что использование метода просеянного потока позволяет более точно определить характеристики процесса $V(t)$, так как в просеянном потоке присутствуют только те заявки, которые не закончат обслуживание к моменту времени T.

Дифференциальное уравнение Колмогорова в матричном виде

Введем обозначение $P(k,n,z,t) = P\{k(t) = k, n(t) = n, V(t) < z\}$ — распределение вероятностей трехмерного Марковского процесса, где $k(t)$ — состояние управляющей цепи Маркова в момент времени t, $n(t)$ — число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, $V(t)$ — суммарный объём требований, находящихся в просеянном потоке в момент времени t. Для этого распределения составим Δt-методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем равенство

$$P(k,n,z,t+\Delta t)=P(k,n,z,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1-q_{kk})+P(k,n,z,t)\lambda_k\Delta t(1-S(t))+$$

$$+\lambda_k\Delta t S(t)\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)\,dG(y)+\sum_{\nu\neq k}q_{\nu k}\Delta t P(\nu,n,z,t)+o(\Delta t),$$

$$k=\overline{1,K},\ n=0,1,2,...,\ z>0,$$

откуда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,n,z,t)}{\partial t}=\lambda_k S(t)\left[\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)\,dG(y)-P(k,n,z,t)\right]+\sum_{\nu}q_{\nu k}P(\nu,n,z,t), \quad (1)$$

$$k=\overline{1,K},\ n=0,1,2,...,\ z>0.$$

Введем частичные характеристические функции вида:

$$H(k,u_1,u_2,t)=M\left\{\exp\left(ju_1 n(t)+ju_2 V(t)\right)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1 n}\int_0^{\infty}e^{ju_2 z}P(k,n,z,t)\,dz,$$

$$k=\overline{1,K},\ n=0,1,2,...,\ z>0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1 n}\int_0^{\infty}e^{ju_2 z}\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)\,dG(y)dz=$$

$$=e^{ju_1}\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1(n-1)}\int_0^{\infty}e^{ju_2 y}\cdot e^{ju_2(z-y)}\int_0^z P(k,n-1,z-y,t)\,dG(y)dz=$$

$$=e^{ju_1}\int_0^{\infty}e^{ju_2 y}\left[\sum_{n=0}^{\infty}e^{ju_1(n-1)}\int_0^{\infty}e^{ju_2(z-y)}P(k,n-1,z-y,t)\,dz\right]dG(y)=$$

$$=e^{ju_1}\int_0^{\infty}e^{ju_2 y}H(k,u_1,u_2,t)\,dG(y)=e^{ju_1}H(k,u_1,u_2,t)\int_0^{\infty}e^{ju_2 y}dG(y)=$$

$$=e^{ju_1}H(k,u_1,u_2,t)G^*(u_2),$$

где $G^*(u_2)$ обозначено как $G^*(u_2)=\int_0^{\infty}e^{ju_2 y}dG(y)$, можно записать следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H(k,u_1,u_2,t)}{\partial t}=\lambda_k S(t)H(k,u_1,u_2,t)\left[e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right],\ k=\overline{1,K}.$$

Запишем данную систему в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda}S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q}\right] \quad (2)$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0)=\mathbf{r}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t)=\left[H(1,u_1,u_2,t),H(2,u_1,u_2,t),...,H(K,u_1,u_2,t)\right]$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_K\end{bmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K}\\ ... & ... & ... & ...\\ q_{K1} & q_{K2} & \cdots & q_{KK}\end{bmatrix},\ \mathbf{r}=\left[r(1),r(2),...,r(K)\right].$$

Здесь и далее $\mathbf{r}$ — вектор-строка стационарного распределения управляющей цепи Маркова, определяемая системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = 0 \\ \mathbf{re} = 1 \end{cases}, \tag{4}$$

$\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

Метод асимптотического анализа

Так как прямое решение уравнения (2) не представляется возможным, то для решения задачи (2)–(3) воспользуемся методом асимптотического анализа [3] в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока [2]. Обозначим $\mathbf{\Lambda} = N\mathbf{\Lambda}^1$, $\mathbf{Q} = N\mathbf{Q}^1$, где $N \to \infty$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(u_1,u_2,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u_1,u_2,t)\left[\mathbf{\Lambda}^1 S(t)\left(e^{ju_1}G^*(u_2)-1\right)+\mathbf{Q}^1\right] \tag{5}$$

с начальным условием

$$\mathbf{H}(u_1,u_2,t_0) = \mathbf{r}\,. \tag{6}$$

Асимптотический анализ первого порядка проведем в виде доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей процесса* $\{k(t),n(t),V(t)\}$ *первого порядка имеет вид* $\mathbf{H}(u_1,u_2,t) = \mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\left[ju_1 + ju_2a_1\right]\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)\,d\tau\right\}$, *где вектор-строка r определяется системой линейных уравнений* ***Ошибка! Источник ссылки не найден.****, а* λ *— выражением* $\lambda = \mathbf{r}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{e}$, a_1 *— математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объёма требований* $G(y)$.

Доказательство.

Выполним в выражениях (5) и (6) замены

$$\varepsilon = \frac{1}{N},\ u_1 = \varepsilon w_1,\ u_2 = \varepsilon w_2,\ \mathbf{H}(u_1,u_2,t) = \mathbf{F_1}(w_1,w_2,t,\varepsilon)\,. \tag{7}$$

Тогда задача (5)–(6) примет вид

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F_1}(w_1,w_2,t,\varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F_1}(w_1,w_2,t,\varepsilon)\left[\mathbf{\Lambda}^1 S(t)\left(e^{ju_1}G^*(\varepsilon w_2)-1\right)+\mathbf{Q}^1\right], \tag{8}$$

с начальным условием

$$\mathbf{F_1}(w_1,w_2,t_0,\varepsilon) = \mathbf{r}\,, \tag{9}$$

Найдем асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (8)–(9), то есть $\mathbf{F_1}(w_1,w_2,t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F_1}(w_1,w_2,t,\varepsilon)$.

Этап 1. Положим в (8) $\varepsilon \to 0$, получим $\mathbf{F_1}(w_1,w_2,t)\mathbf{Q}^1 = 0$. Сравнивая это равенство с первым уравнением **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, можем сделать вывод, что $\mathbf{F_1}(w_1,w_2,t)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{F_1}(w_1,w_2,t) = \mathbf{r}\varPhi_1(w_1,w_2,t), \tag{10}$$

где $\varPhi_1(w_1,w_2,t)$ — некоторая скалярная функция, в силу (9), удовлетворяющая условию $\varPhi_1(w_1,w_2,t_0) = 1$.

Этап 2. Умножим (8) на вектор **e**, подставим (10), поделим результат на ε и выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Тогда с учётом того, что $\mathbf{Q}^1\mathbf{e} = 0$ и $\mathbf{re} = 1$, получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_1(w_1, w_2, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_1(w_1, w_2, t)}{\partial t} = \Phi_1(w_1, w_2, t)\left[\lambda S(t)(jw_1 + jw_2 a_1)\right]. \tag{11}$$

Здесь и далее $a_1 = \int\limits_0^\infty y dG(y)$ — математическое ожидание случайной величины, определяемой функцией распределения объёма требований $G(y)$, $\lambda = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{e}$. Решение (11) с учётом начального условия дает

$$\Phi_1(w_1, w_2, t) = \exp\left\{\lambda(jw_1 + jw_2 a_1)\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя данное выражение в (10), получаем

$$\mathbf{F_1}(w_1, w_2, t) = \mathbf{r}\exp\left\{\lambda(jw_1 + jw_2 a_1)\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

В силу замен (7) можно записать асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ равенство:

$$\mathbf{H}(u_1, u_2, t) = \mathbf{F_1}(w_1, w_2, t, \varepsilon) \approx \mathbf{F_1}(w_1, w_2, t) = \mathbf{r}\Phi_1(w_1, w_2, t) =$$

$$= \mathbf{r}\exp\left\{\lambda\left[j\frac{u_1}{\varepsilon} + j\frac{u_2}{\varepsilon}a_1\right]\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\} = \mathbf{r}\exp\left\{N\lambda\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\int\limits_{t_0}^{t} S(\tau)d\tau\right\}.$$

Теорема доказана.

Следствие. При $t = T$ для характеристической функции процесса $\{i(t), V(t)\}$ в стационарном режиме получим

$$H(u_1, u_2) = \exp\left\{N\lambda b_1\left[ju_1 + ju_2 a_1\right]\right\}.$$

Здесь и далее

$$b_1 = \int\limits_{-\infty}^{T} S(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{T}\left(1 - B(T - \tau)\right)d\tau = \int\limits_{0}^{\infty}\left(1 - B(\tau)\right)d\tau$$

определяет математическое ожидание случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Заключение

Для бесконечнолинейной системы массового обслуживания требований случайного объёма была получена асимптотическая характеристическая функция первого порядка двумерного распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объёма требований, находящихся в системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.М., Кац Б.А.* Обслуживание потоков неоднородных требований // Изв. АН СССР. Технич. Кибернетика, 1973. №2. С. 47–53.

2. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2015. – 240с.

3. *Назаров А.А., Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112с.

4. *Печинкин А.В., Печинкина О.А.* Система Mk|G|1|n с дисциплиной обслуживания LIFO с прерыванием и ограничением на суммарный объём требований // Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика, 1996. №1. С. 86-93.
5. *Печинкин А.В.* Система M|G|1|n с дисциплиной обслуживания LIFO и ограничением на суммарный объём требований // Автоматика и телемеханика, 1998. №4. С. 106–116.
6. *Печинкин А.В.* Система обслуживания с дисциплиной LIFO и ограничением на суммарный объём требований // Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. Прикладная математика и информатика, 1996. №2. С. 85-99.
7. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.* Исследование суммарного объёма требований в бесконечнолинейной системе массового обслуживания вида M|GI|∞ // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы Российской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 18–22 апреля 2016 г. – Москва : РУДН, 2016. – С. 28–30.
8. *Тихоненко О.М.* Модели массового обслуживания в системах обработки информации. – Минск: Университетское, 1990.
9. *Колбасова В.А., Лисовская Е.Ю.* Исследование суммарного объёма требований в СМО вида GI|GI|∞ методом асимптотического анализа // Научное творчество молодежи. Математика. Информатика : материалы XX Всероссийской научно-практической конференции (28-29 апреля 2016 г.) / сост. Ю.А. Наумкина. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2016. – Ч.1. – С. 97–101.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБОБЩЁННОГО СИНХРОННОГО ПОТОКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л.А. Нежельская, Е.Ф. Сидорова
Томский государственный университет
ludne@mail.ru, katusha_sidorova@mail.ru

Введение

В настоящее время теория массового обслуживания представляет собой одну из наиболее интенсивно развивающихся ветвей теории вероятностей и имеет широкое практическое применение в разнообразных направлениях исследований: в экономике, в планировании и организации процессов производства и потребления, в логистике, технике, транспорте, военном деле, а также в других сферах деятельности [1].

Бурное развитие информационных технологий и компьютерных наук привело к появлению важной сферы приложений теории массового обслуживания — проектированию и разработке информационно-вычислительных систем, компьютерных и телекоммуникационных сетей связи и т.д.

Зачастую работы по теории массового обслуживания направлены на определение стационарных характеристик систем обслуживания, для которых параметры входящих потоков заранее известны. В реальных ситуациях данные параметры изменяются с течением времени, и при этом в большинстве случаев подобные изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий [2]. Двойная случайность (стохастика) подразумевает, во-первых, случайность моментов времени наступления событий потока, и, во-вторых, определение интенсивности потока как случайного процесса. Дважды стохастические потоки событий можно разделить на два класса, а именно:

1) потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс;
2) потоки, для которых интенсивность — кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний.

Потоки второго класса носят название МС-потоков (Markov chain) [3]. Заметим, что обобщённый синхронный поток второго порядка относится именно к МС-потокам и представляет собой актуальную математическую модель реальных потоков случайных событий.

В настоящей статье построена имитационная модель обобщённого синхронного потока второго порядка, а также проведен ряд экспериментов с целью получения численных результатов, подтверждающих работоспособность построенной модели.