МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ТГУ

V Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики»

25–27 ноября 2015 г., Томск

Издательство Томского университета
2016

DOI: 10.17223/9785751124199/7

УТОЧНЕНИЕ КООРДИНАТ, ПОЛУЧАЕМЫХ ПО ДАННЫМ СПУТНИКОВЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ, С ПОМОЩЬЮ ВВЕДЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.П. Батурин, А.А. Аксенов

Рассмотрены два способа назначения весовых коэффициентов в задаче определения координат наземных пунктов по данным наблюдений навигационных спутников: стандартный способ, когда веса назначаются с использованием остаточных невязок, и новый способ, основанный на построении так называемого разброса возможных решений. В обоих способах применяется возведение весов в некоторую степень. С помощью решения ряда модельных задач выполнено сравнение точности способов, а также выведен возможный критерий подбора оптимальных степеней весовых коэффициентов.

REFINEMENT OF COORDINATES OBTAINED FROM OBSERVATION OF NAVIGATIONAL SATELLITES BY MEANS OF IMPLEMENTATION OF POWERS OF WEIGHT COEFFICIENTS

A.P. Baturin, A.A. Axenov

Two ways of setting of weight coefficients in the problem of calculation of coordinates of ground-based points from the observations of navigational satellites have been considered. Tne first way is a standard one, it uses residuals for the setting of the weights. The second way is a new one, it is based on the construction of so called set of possible solutions. In both ways some powers of weights have been implemented. By solving of several simulational examples the comparison of the accuracy of the ways has been done and a possible method of choosing of optimal powers of the weights has been elaborated.

Задача определения координат наземного пункта по данным наблюдений навигационных спутников (системы ГЛОНАСС или GPS) в рамках метода наименьших квадратов (МНК) является [1, 2] задачей минимизации вида

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^{2p}\left(\sqrt{(X-x_i)^2+(Y-y_i)^2+(Z-z_i)^2}-d_i-c\Delta t\right)^2 \rightarrow \min, \tag{1}$$

где X, Y, Z – координаты определяемого пункта (GPS-приемника); x_i, y_i, z_i $(i=1,...n)$ – координаты наблюдаемых навигационных спутников; n – их число; d_i – измеренные дальности до спутников; $\Delta\, t$ – ошибка часов приемника; c – скорость света; w_i – веса отдельных измерений; p – некоторые степени, в которые возводятся веса. Данная задача решается путем приравнивания нулю производных от левой части (1) по определяемым параметрам X, Y, Z, $\Delta\, t$ и решения полученной системы нелинейных уравнений итерационным методом Ньютона.

Весовые коэффициенты w_i должны задаваться как величины, обратные точности отдельных измерений, которая, как правило, неизвестна и может лишь оцениваться из каких-либо сторонних соображений. Поэтому часто эти коэффициенты задаются как величины, обратные остаточным невязкам, полученным в результате решения задачи (1) с единичными весами, и задача (1) решается второй раз с этими коэффициентами. Будем называть такой способ задания весов w_i «стандартным» или способом I.

В работе рассматривается еще один способ (способ II) задания весов w_i с помощью построения так называемого разброса возможных решений, в котором каждому наблюдаемому спутнику соответствует одно возможное решение. При построении разброса для каждого из наблюдаемых спутников моделируются положения еще трех спутников, образующих вместе с ним вершины тетраэдра. Положения этих модельных спутников вычисляются на основе МНК-оценки $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ координат определяемого пункта, полученной с единичными весами (МНК-оценка является центром тетраэдра). Далее по каждой четверке спутников, состоящей из одного наблюдаемого и трех модельных, определяется возможное решение, соответствующее этому спутнику, путем решения методом Ньютона системы четырех уравнений

$$(\tilde{X}_i - \tilde{x}_k)^2 + (\tilde{Y}_i - \tilde{y}_k)^2 + (\tilde{Z}_i - \tilde{z}_k)^2 = (\tilde{d}_k + c\Delta t)^2 \quad (k = 1,...4), \tag{2}$$

где $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k$ $(k = 2,3,4)$ – координаты модельных спутников; $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1 = x_i, y_i, z_i$ – координаты наблюдаемого i-го спутника, для которого определяется возможное решение; $\tilde{d}_1 = d_i$ – измеренная дальность до него; $\tilde{d}_k^2 = (\tilde{x}_k - \hat{X})^2 + (\tilde{y}_k - \hat{Y})^2 + (\tilde{z}_k - \hat{Z})^2$ $(k = 2,3,4)$. Веса w_i в рамках способа II назначаются как величины, обратные расстояниям от соответствующих возможных решений до МНК-оценки, полученной с единичными весами:

$$w_i = 1 / \sqrt{(\tilde{X}_i - \hat{X})^2 + (\tilde{Y}_i - \hat{Y})^2 + (\tilde{Y}_i - \hat{Y})^2}.$$

Описанные способы были применены при решении ряда модельных задач, в которых координаты x_i и y_i наблюдаемых спутников задавались как случайные числа, равномерно распределенные на интервале [–26000 км; 26000 км]; z_i – на интервале [20000 км; 26000 км]. «Точные» координаты X_T, Y_T, Z_T определяемого пункта полагались равными нулю. «Измеренные» дальности моделировались в виде $d_i = \sqrt{(x_i - X_T)^2 + (y_i - Y_T)^2 + (z_i - Z_T)^2} + \; + c\Delta t + c\sigma_i$, где σ_i – ошибки измерений, задаваемые как случайные нормально распределенные числа с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением 10^{-9} с. Величина Δt задавалась таким же образом, но со стандартным отклонением 10^{-7} с. Моделирование повторялось N = 100 000 раз с применением обоих способов назначения весов при решении задачи (1). Кроме того, для обоих способов выполнялось варьирование показателя степени p в (1). Для каждого из модельных вариантов вычислялись разности полученных решений, обозначаемых $X_j^{\mathrm{I}}, Y_j^{\mathrm{I}}, Z_j^{\mathrm{I}}$ и $X_j^{\mathrm{II}}, Y_j^{\mathrm{II}}, Z_j^{\mathrm{II}}$ $(j = 1,...N)$ для способов I и II соответственно, и «точного» решения X_T, Y_T, Z_T по формулам

$$\Delta r_j^{\mathrm{I}} = \sqrt{(X_j^{\mathrm{I}} - X_T)^2 + (Y_j^{\mathrm{I}} - Y_T)^2 + (Z_j^{\mathrm{I}} - Z_T)^2}, \quad \Delta r_j^{\mathrm{II}} =$$
$$= \sqrt{(X_j^{\mathrm{II}} - X_T)^2 + (Y_j^{\mathrm{II}} - Y_T)^2 + (Z_j^{\mathrm{II}} - Z_T)^2}.$$

Вычислялись также разности МНК-оценок $\widehat{X}_j, \widehat{Y}_j, \widehat{Z}_j$, полученных в результате решения задачи (1) с единичными весами и «точного» решения по аналогичной формуле

$$\Delta r_j^0 = \sqrt{(\widehat{X}_j - X_T)^2 + (\widehat{Y}_j - Y_T)^2 + (\widehat{Z}_j - Z_T)^2}.$$

Показателями относительной точности способов I и II по сравнению со способом, использующим в (1) единичные веса, в каждом модельном варианте являются отношения $\Delta r_j^{\mathrm{I}} / \Delta r_j^0$ и $\Delta r_j^{\mathrm{II}} / \Delta r_j^0$ $(j = 1,...N)$. Наконец, окончательными показателями относительной точности способов I и II являются значения этих отношений, усредненные для всех N модельных вариантов:

$$\overline{\Delta r_{\mathrm{I}} / \Delta r_0} = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^{N} \Delta r_j^{\mathrm{I}} / \Delta r_j^0}, \quad \overline{\Delta r_{\mathrm{II}} / \Delta r_0} = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^{N} \Delta r_j^{\mathrm{II}} / \Delta r_j^0}.$$

В таблице приведены результаты описанного моделирования в случае 7, 8, 9 и 10 наблюдаемых спутников.

Результаты оценивания точности способов I и II

	$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$		$n = 10$	
p	$\overline{\Delta r_{\mathrm{I}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{II}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{I}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{II}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{I}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{II}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{I}} / \Delta r_0}$	$\overline{\Delta r_{\mathrm{II}} / \Delta r_0}$
1	0,640	0,884	0,641	0,888	0,636	0,879	0,634	0,885
2	0,550	0,805	0,550	0,805	0,557	0,815	0,551	0,806
3	0,467	0,734	0,464	0,724	0,457	0,726	0,467	0,737
4	0,400	0,660	0,398	0,657	0,400	0,667	0,395	0,664
5	0,345	0,596	0,348	0,602	0,345	0,600	0,346	0,603
6	0,284	0,533	0,301	0,548	0,294	0,541	0,297	0,549
7	0,247	0,480	0,262	0,503	0,256	0,489	0,260	0,492
8	0,226	0,446	0,223	0,456	0,225	0,458	0,225	0,454
9	0,191	0,401	0,201	0,407	0,199	0,416	0,198	0,413
10	0,176	0,371	0,175	0,373	0,171	0,367	0,180	0,384
11	0,154	0,337	0,157	0,341	0,163	0,351	0,163	0,347
12	0,137	0,312	0,146	0,319	0,147	0,325	0,148	0,327
13	0,124	0,289	0,122	0,283	0,130	0,295	0,131	0,301
14	0,116	0,267	0,116	0,271	0,117	0,273	0,118	0,275
15	0,102	0,242	0,104	0,247	0,110	0,252	0,107	0,252
16	0,096	0,230	0,093	0,227	0,104	0,241	0,097	0,231
17	0,087	0,212	0,090	0,213	0,088	0,214	0,090	0,214
18	0,078	0,189	0,084	0,201	0,082	0,204	0,082	0,202
19	0,072	0,179	0,074	0,183	0,077	0,190	0,079	0,190
20	0,064	0,163	0,072	0,174	0,069	0,170	0,072	0,174
21	0,060	0,148	0,062	0,156	0,062	0,155	0,064	0,162
22	0,061	0,148	0,059	0,147	0,058	0,148	0,061	0,155
23	0,053	0,134	0,054	0,137	0,056	0,142	0,056	0,142
24	0,050	0,126	0,050	0,127	0,052	0,133	0,051	0,131
25	0,044	0,116	0,046	0,120	0,047	0,119	0,048	0,124

Как видно из таблицы, значения $\overline{\Delta r_{\mathrm{II}} / \Delta r_0}$ примерно вдвое больше значений $\overline{\Delta r_{\mathrm{I}} / \Delta r_0}$, что означает во столько же раз большую точность способа I по сравнению со способом II. Из таблицы также видно, что точность обоих способов возрастает при увеличении показателя степени p, в которую возводятся весовые коэффициенты. Так, если при $p = 1$ относительная точность способов I и II составляет 0.6 и 0.9 соответственно, то при $p = 25$ она равна примерно 0.05 и 0.1, т.е. увеличивается на порядок. Кроме того, возрастание точности обоих способов, как это видно из таблицы, замедляется при возрастании показателя p. Поэтому значение p, при котором возрастание точности станет практически незаметным, можно считать оптимальным.

Проведенное исследование позволяет сделать выводы, что, во-первых, точность определения координат наземных пунктов по данным спутниковых навигационных систем значительно возрастает при использовании в задаче (1) весовых коэффициентов, обратных как остаточным невязкам, так и расстояниям от возможных решений до МНК-оценки, полученной с единичными весами; во-вторых, точность заметно возрастает при возведении весов в достаточно большую степень; и, в-третьих, оптимальным значением показателя этой степени является такое, в окрестности которого полученные решения становятся неразличимо близки друг к другу.

Данное научное исследование (проект 8.1.54.2015) выполнено при поддержке Программы «Научный фонд им. Д.И. Менделеева Томского государственного университета» в 2015 г.

Литература

1. *Инженерная* геодезия: учебник для вузов / под ред. Д.Ш. Михелева. М.: Высш. шк., 2000. 464 с.

2. *Антонович К.М.* Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии: в 2 т. Т. 2. М.: ФГУП «Картгеоцентр», 2006. 360 с.

DOI: 10.17223/9785751124199/8

ВЛИЯНИЕ ДИАМЕТРА ПОР НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА ПРИ ПОСТОЯННОЙ ПОРИСТОСТИ

С.В. Воронин, М.Е. Ледяев, П.С. Лобода

Проведено компьютерное моделирование испытаний на одноосное растяжение пористых образцов. Получены диаграммы растяжения образцов с различным диаметром пор. Установлено влияние диаметра пор на механические свойства материала при постоянной пористости.

THE EFFECT OF PORE DIAMETER ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF THE MATERIAL AT THE CONSTANT POROSITY

S.V. Voronin, M.E. Ledyaev, P.S. Loboda

Computer simulation was made for testing uniaxial tensile tests on porous samples. The strain diagrams of the samples with different pore diameter has been obtained. The influence of pore diameter on the mechanical properties of the material at the constant porosity has been found.

В настоящее время появляется все больше разработок в области пористых материалов [1, 2]. Это связано с их высоким уровнем удельных механических свойств.