МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЁНЫХ ТГУ

V Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики»

25–27 ноября 2015 г., Томск

Издательство Томского университета
2016

DOI: 10.17223/9785751124199/24

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ КАПЛИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОДЛОЖКЕ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

А.С. Фролов, Е.И. Борзенко

Рассматривается неподвижная капля жидкости, лежащая на твёрдой подложке в поле силы тяжести, форма которой определяется уравнением Лапласа. С помощью численного метода Рунге–Кутты вычисляются равновесные формы в зависимости от краевого угла и соотношения гравитационных и поверхностных сил.

DETERMINATION OF THE DROP EQUILIBRIUM SHAPE LYING ON THE SUBSTRATE USING NUMERICAL METHOD

A.S. Frolov, E.I. Borzenko

In this paper the static liquid droplet lying on a solid substrate in the gravity field was considered. The shape of drop is defined by the Laplace equation. The equilibrium shapes as a function of the contact angle and the ratio of gravitational and surface forces were obtained using numerical Runge–Kutta method.

Введение

Поверхностное натяжение – это явление, протекающее на границе раздела сред. Оно наблюдается как на границе жидкость–газ, так и на границах газ–твёрдое тело, жидкость–твердое тело. Проявление сил поверхностного натяжения часто можно увидеть в природе: капли росы на траве, водомерки на поверхности воды и т.п. Во многих отраслях промышленности рассматриваемое явление имеет широкое распространение, например, лакокрасочная и фармацевтическая индустрия, обогащение природных ископаемых, производство композитных материалов.

Явление смачивания характеризуется краевым двугранным углом, который образован касательными плоскостями к межфазным поверхностям. Вершина угла лежит на границе раздела трёх фаз, при этом он отсчитывается от границы твердое тело-жидкость к границе жидкость–газ. Угол зависит от свойств самой жидкости, воздуха , и поверхности, на которой она лежит. Твёрдые поверхности, которые составляют с жидкостью тупой угол, называются гидрофобными, острый угол – гидрофильными.

Целью работы являлось исследование влияния основных параметров задачи на равновесную форму капели, лежащей на твёрдой поверхности в поле силы тяжести.

Постановка задачи

В данной работе исследуется равновесная форма капли жидкости, лежащая на твердой поверхности в поле силы тяжести. Первые исследования формы поверхности жидкости, взаимодействующей с твёрдыми границами, проводились ещё в XIX в., тогда и был сформулирован закон капиллярного давления Лапласа [1]:

$$\Delta P = \sigma_{LG}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{1}$$

где ΔP – разность давления P_L внутри жидкости и давления газа P_G снаружи; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизн поверхности; σ_{LG} – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость–газ. Уравнение Лапласа является условием механического равновесия, которое позволяет определить стационарную форму капли в зависимости от величины равновесного краевого угла и соотношения масштабов поверхностных сил и силы тяжести.

Прямоугольная система координат *xOz* вводится таким образом, чтобы начало координат совпадало с вершиной капли. Так как последняя находится в покое, то распределение давления описывается следующей формулой:

$$\Delta P = \Delta P_0 - gz\Delta\rho\,, \tag{2}$$

где ΔP_0 – разность давлений ΔP в вершине; $\Delta\rho$ – разность плотностей жидкости и газа. С учетом симметрии формы относительно центральной оси в точке z=0 имеем $R_1=R_2=R_0=1/b$, где R_0 и b – радиус кривизны и кривизна поверхности капли в её вершине. Тогда перепад давления ΔP_0 вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta P_0 = \frac{2\sigma_{LG}}{R_0} = 2b\sigma_{LG}\,. \tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение Лапласа (1), получаем

$$\sigma_{LG}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = 2b\sigma_{LG} - gz\Delta\rho\,. \tag{4}$$

В цилиндрической системе координат с осью симметрии *z* выражения для главных кривизн имеют вид [2]

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}\,,\quad \frac{1}{R_2} = \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}}\,,$$

где $z' = dz/dx$, а $z'' = d^2z/dx^2$. Таким образом, равновесная форма капли определяется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}} = \frac{2b - gz\Delta\rho}{\sigma_{LG}},$$

граничными условиями для которого являются статический краевой угол θ и объём капли.

Для удобства проведения параметрических расчетов уравнение (4) обезразмеривается

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2b - \mathrm{Bo}\cdot z,$$

где $Bo = g\Delta\rho R_0^2/\sigma_{LG}$ – число Бонда, определяющее соотношение гравитационных и поверхностных сил. В качестве масштаба длины используется радиус, эквивалентной по объему сферической капли.

Понизим порядок дифференциального уравнения, перейдя от переменных *x* и *z* к новым переменным *l*, φ, *x* и *z*, где *l* – длина дуги вдоль поверхности капли, отсчитываемая от вершины, а φ – угол отклонения касательной к поверхности капли от горизонтальной оси *Ox*.

Из определения радиуса кривизны следует $\frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{dl}$, откуда $R_1 d\varphi = dl$. По свойству второй главной кривизны осесимметричных поверхностей имеем $\frac{x}{R_2} = \sin\varphi$, откуда $R_2 \sin\varphi = x$. Тогда с учетом сделанных замечаний задача сводится к системе трёх дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dl} = \cos\varphi, \quad \frac{dz}{dl} = -\sin\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dl} = 2b - \mathrm{Bo} \cdot z - \frac{\sin\varphi}{x}. \tag{5}$$

Начальные условия для данной системы записываются следующим образом:

$$x(0) = 0, \; z(0) = 0, \; \varphi(0) = 0.$$

Для устранения сингулярности в точке l=0 вводится дополнительное условие

$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{l=0} = b.$$

Метод решения

Для решения системы (5) используется численный метод Рунге–Кутты четвёртого порядка [3]. При этом область решения, которая представляет собой дугу, разбивается на конечное число частей с введением узловых точек. Предполагается, что узловые точки делят область на равные отрезки длиной h, тогда $l_k = kh$, где k – номер узла. Расчетная формула для нахождения последовательности точек x_k имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \; F_1 = f(\varphi_k), \; F_2 = f\left(\varphi_k + \frac{hF_1}{2}\right),$$

$$F_3 = f\left(\varphi_k + \frac{hF_2}{2}\right), \quad F_4 = f\left(\varphi_k + hF_3\right),$$

где $f(\varphi)$ – правя часть первого уравнения системы (5). Аналогичные формулы записываются для двух других уравнений. Вычисления продолжаются до выполнения следующего условия:

$$\varphi(l_{конеч}) = \theta.$$

Значение параметра b выбирается таким, чтобы безразмерный объем капли жидкости равнялся $4/3\pi$, величина которого рассчитывается по следующей формуле:

$$V = \int_0^{l_{конеч}} \pi x^2 \sin\phi dl.$$

Последовательность точек (x_k, z_k) будет описывать равновесную форму капли.

Результаты расчётов

Для проверки аппроксимационной сходимости метода решения построены равновесные формы, вычисленные на сетках с шагами *h=1/10, 1/20, 1/40, 1/80*, при заданном значении краевого угла θ=60º и Bo=1 (рис. 1). Из рисунка видно, что, начиная с некоторого *h* формы капли практически не отличаются, что говорит о сходимости алгоритма.

Для проведения сравнительного анализа были построены формы капли для разных значений числа Бонда (рис. 2, *а*) и краевого угла (рис. 2, *б*).

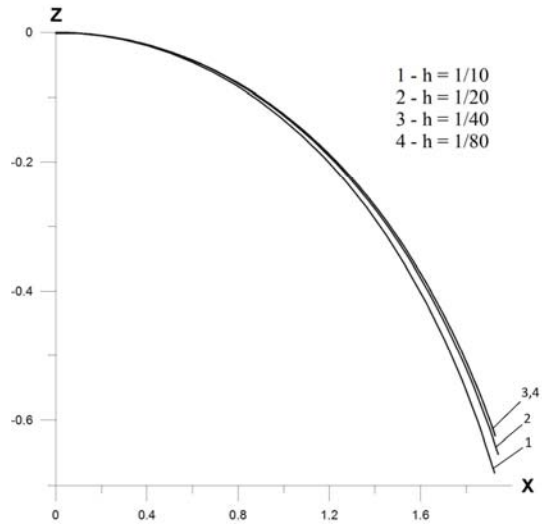

Рис. 1. Равновесные формы капли

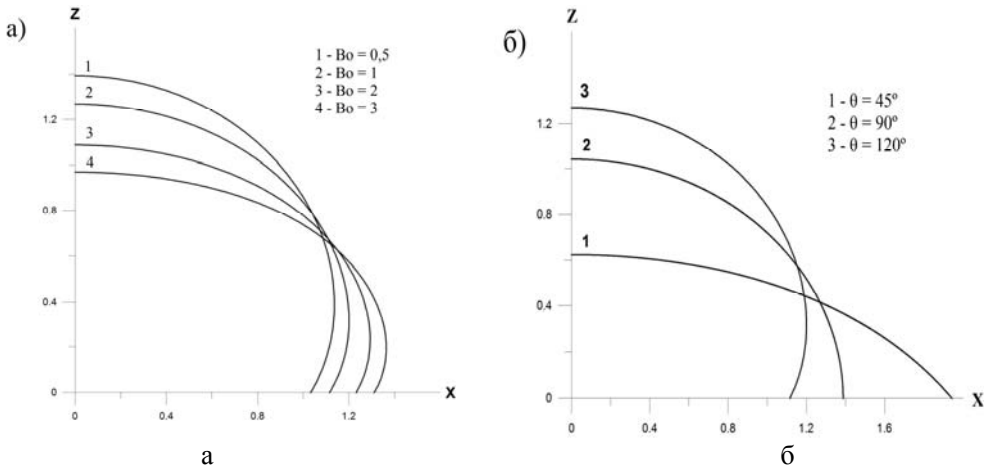

Рис. 2. Равновесные формы капли для различных чисел Bo (*а*), краевых углов θ (*б*)

Из данного сравнения следует, что при уменьшении значений равновесного краевого угла θ растет радиус пятна смачивания. А при уменьшении числа Бонда Bo уменьшается радиус пятна смачивания, при этом капля стремится приобрести сферическую форму, что объясняется ростом капиллярных эффектов.

Заключение

В результате проведенного исследования сформулирована математическая постановка задачи о равновесной форме капли, лежащей на твердой поверхности в поле силы тяжести, и реализованная численная методика ее решения. Проведены параметрические исследования от основных параметров задачи: числа Бонда и равновесного краевого угла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-02256).

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 736 с.

2. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. 6-е изд. М.: Наука, 1974. 176 с.

3. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / пер. с англ. Н.Б. Конюхова. М.: Наука, 1986. 288 с.

DOI: 10.17223/9785751124199/25

VOLUME OF FLUID METHOD FOR COMPUTING SOLUTION TO INCOMPRESSIBLE TWO-PHASE FLOWS

Hussam Ali Khalaf

This work presents numerical computations for the analysis of Dam-Break Flow using two-dimensional equations with some obstacles. The differential equations that describe the flow were integrated by the Finite Volumes Method, in two dimensions, using *SIMPLE* algorithm. The mesh is structured, with rectangular volumes. The aim of the study is to understand the flow structure over obstacles in order to better design them and improve their possibility

Introduction

The finite volume method is a method for representing and evaluating partial differential equations as algebraic equations [1]. Similar to the finite difference method, values are calculated at discrete places on a meshed geometry. "Finite volume" refers to the small volume surrounding each node point on a mesh. In the finite volume method, volume integrals in a partial differential equation that contain a divergence term are converted to surface integrals, using the divergence theorem. These terms are then evaluated as fluxes at the surfaces of each finite volume. Because the flux entering a given volume is identical to that leaving the adjacent volume, these methods are conservative. Another advantage of the finite volume method is that it is easily formulated to allow for unstructured meshes.

The workspace is divided into control volumes and discretisation is done by integrating over the control volume [2].

The water flow after the sudden break of a dam is schematically represented as an initially rectangular column of fluid supported by a horizontal bottom, limited by two obstacles on one side (Fig.1).