МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

Главным «плюсом» модели является возможность ее реального применения и высокая эффективность, благодаря которой, при заданных нами параметрах инвестор сам может выбирать желаемую доходность ИП.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Домбровский Д. В.* Динамические модели управления инвестиционным портфелем на нестационарном финансовом рынке с учетом транзакционных издержек и ограничений : дис. канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.

2. *Dombrovskii V.V.* Adaptive data-driven portfolio optimization in the non-stationary financial market under constraints // Вестник Томского государственного университета. 2013. № 3. С. 5–13.

3. *Домбровский В. В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля// Автоматика и телемеханика. 2006. №12. С. 71–85.

4. *Гальперин В.А., Домбровский В.В.* Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени // Вестник томского государственного университета. 2002. №1. С. 141–146.

5. *Гальперин В.А., Домбровский В.В., Федосов Е.Н.* Динамическое управление инвестиционным портфелем на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами // Автоматика и телемеханика. 2005. №5. С. 175–189.

6. *Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. №12. С. 71–85.

7. *Dombrovskii V., Obyedko T.* Portfolio Optimization in the Financial Market with Correlated Returns under Constraints, Transaction Costs and Different Rates for Borrowing and Lending// Electronic copy Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=2516364. P. 8

8. *Dombrovskii V., Obyedko T.* Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization //Automatica. 2015. № 54. P. 325–331.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА НЕКОММЕРЧЕСКОГО ФОНДА ПРИ ГИСТЕРЕЗИСНОМ УПРАВЛЕНИИ КАПИТАЛОМ

А. А. Лисичников, Л. Ю. Сухотина
Томский государственный университет
E-mail: artem-921003@mail.ru

Введение

Некоммерческий фонд – не имеющая членства некоммерческая организация, учрежденная гражданами и (или) юридическими лицами на основе добровольных имущественных взносов, преследующая социальные, благотворительные, культурные, образовательные или иные цели, основанная для достижения общественно полезных целей путем использования имущества, переданного в ее собственность учредителями.

В связи с тем, что фонды не основаны на членстве участников, последние не только не обязуются участвовать в деятельности организации, но, и лишены возможности прямо участвовать в управлении ее делами. Кроме того, фонд является собственником своего имущества, на которые у его учредителя (участников) отсутствуют какие-либо права.

Учитывая эти факторы, вполне обоснованным представляются предъявляемые законодателем требования о создании попечительского совета, осуществляющего надзор за деятельностью фонда и его должностных лиц.

В данной статье задача решается в предположении, что потоки поступающих в фонд премий и выплат из фонда являются пуассоновскими, а управление капиталом фонда является гистерезисным.

1. Математическая модель изменения капитала фонда

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $s(t)$ в момент времени t. В статье предполагается, что с капиталом могут происходить следующие изменения:

1. В фонд поступают денежные средства. Будем предполагать, что моменты поступления средств образуют, пуассоновский поток с интенсивность λ. Поступающие премии являются независимыми одинаково распределенными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$.

2. Фонд расходует поступившие на его счет средства. Будем считать, что выплаты являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с плотностью $\psi(x)$.

Моменты начисления выплат так же образуют пуассоновский поток, интенсивность которого зависит от капитала фонда. Установим два пороговых значения $S1$ и $S2$, причем $S1 < S2$. В области $S < S1$ $\mu = \mu_1$, в области $S > S2$ $\mu(s) = \mu_2$.

Так как фонд не имеет целью получение прибыли, то считаем, что

$$\mu_1 b < \lambda a < \mu_2 b .$$

Таким образом, при $S < S1$ фонд расходует в среднем меньше средств, чем в него поступает, а при $S > S2$ расходует в среднем больше средств, чем в него поступает.

Область $S1 \le S \le S2$ является областью гистерезиса в управлении и в ней устанавливается значение $\mu = \mu_1$ или $\mu(s) = \mu_2$ в зависимости от того, как процесс вошел в эту область.

Будем считать, что при $S < 0$ фонд не прекращает своей деятельности, но переходит в период неплатежеспособности фонда, по мере поступление денежных средств фонд возобновляет свои обязательства.

2. Плотность распределения капитала фонда

Выпишем уравнения, определяющие плотность вероятностей $P(s)$ величины капитала фонда s во всех областях изменения капитала в стационарном режиме. Плотность $P(\mathrm{s})$ существует и может иметь разрывы лишь в точках $S1$ и $S2$, так как суммы поступающих премий и расходуемых денежных средств представляют собой сложно-пуассоновские процессы [1] в каждой из областей.

Назначим началом отсчета в точку $S = -S1$ и обозначим $S_0 = S2 - S$, при этом нижний порог $S1 = 0$.

Начнем с области $S > S0$. Через $p(s,t)$ обозначим плотность распределения капитала фонда s в момент времени t. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Значение капитала s в момент времени $t + \Delta t$ может быть получено в следующих случаях.

1. В момент времени t капитал равнялся s, и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1 - (\lambda + \mu_2)\Delta t + o(\Delta t)$ /

2. В момент времени t капитал равнялся $s - x$, и за время Δt поступила случайная премия x. Вероятность этого события $\lambda \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$.

3. В момент времени t капитал равнялся $s - x$, и за это время была произведена выплата x. Вероятность этого события $\mu_2 \Delta t \psi(x) + o(\Delta t)$.

По формуле полной вероятности получаем

$$p(s,t+\Delta t) = (1 - (\lambda + \mu_2)\Delta t) p(s,t) + \lambda \Delta t \int_0^\infty p(s - x, t)\varphi(x) dx +$$

$$+\mu_2 \Delta t \int_0^\infty p(s + x, t)\psi(x) dx + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, $t \to 0$ получим, что при $S > S_0$

$$(\lambda+\mu_2)p(s)=\lambda\int_0^\infty p(s-x)\varphi(x)dx+\mu_2\int_0^\infty p(s+x)\psi(x)dx. \quad (1)$$

Решение этого уравнение должно удовлетворять граничному условию $p(+\infty)=0$.

Рассмотрим область $0\le S\le S_0$. Так как здесь возможны два вариант $\mu=\mu_1$ или $\mu(s)=\mu_2$. Обозначим

$$p_1(s)=\frac{p(0\le s(t)\le S_0+ds,\mu(s)=\mu_1)}{ds},\ p_2(s)=\frac{p(0\le s(t)\le S_0+ds,\mu(s)=\mu_2)}{ds}$$

в стационарном режиме. Очевидно, что

$$p(s)=p_1(s)+p_2(s).$$

Рассмотрим первую траекторию, в которой $\mu=\mu_1$.

1. В момент времени t капитал равнялся s, и за время Δt он не изменился. Вероятность этого события $1-(\lambda+\mu_1)\Delta t+o(\Delta\mathrm{t})$.

В момент времени t капитал равнялся $s-x$, и за время Δt поступила случайная премия x. Возможны два случая

А) Мы находились в интервале $0\le S\le S_0$ и поступление ничего не изменило. Вероятность этого события $\lambda\Delta t\varphi(x)dx+o(\Delta t)$, причем $0\le s-x\le 0$.

Б) Мы находились в интервале $S<0$, и поступление x привело нас в $0\le S\le S_0$ интервал. Вероятность этого события равна $\lambda\Delta t\varphi(x)dx+o(\Delta t)$, причем $s-x<0$.

2. В момент времени t капитал равнялся $s+x$, и за время Δt была произведена случайная выплата x. Вероятность этого события равна $\mu_1\Delta t\psi(x)ds+o(\Delta t)$, причем $0<s+y\le S_0$.

По формуле полной вероятности получим в стационарном режиме

$$(\lambda+\mu_1)p_1(s)=\lambda\int_0^s p_1(s-x)\varphi(x)dx+\lambda\int_s^\infty P(s-x)\varphi(x)dx+\mu_1\int_0^{s_0-s} p_1(s+x)\psi(x)dx. \quad (2)$$

Аналогичным способом получим уравнение для второй траектории, в которой $\mu=\mu_2$. В стационарном режиме получаем

$$(\lambda+\mu_2)p_2(s)=\lambda\int_0^s p_2(s-x)\varphi(x)dx+\mu_2\int_0^{s_0-s} p_2(s+x)\psi(x)dx+\mu_2\int_{s_0-s}^\infty \mathrm{P}(s+x)\psi(x)dx. \quad (3)$$

Наконец в области $s<0$, учитывая, что переход в эту область возможен из области $s>S_0$, а из области $0\le s\le S_0$ как с траектории $\mu=\mu_1$, так и с траектории $\mu=\mu_2$, получим в стационарном режиме.

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu_1)p(s)=\lambda\int_0^\infty p(s-x)\varphi(x)dx+\mu_1\int_0^{-s} p(s+x)\psi(x)dx+\\+\mu_1\int_{-s}^{s_0-s} p_1(s+x)\psi(x)dx+\mu_2\int_{-s}^{s_0-s} p_2(s+x)\psi(x)dx+\mu_2\int_{s_0-s}^\infty p(s+x)\psi(x)dx.\end{gathered} \quad (4)$$

3. Экспоненциальные распределения премий и выплат

Пусть распределения поступающих премии и выплат из фонда являются экспоненциальными

$$\varphi(s)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{s}{a}\right),\psi(s)=\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{s}{b}\right).$$

В этом случае может быть найдено точное решение системы уравнений (1)–(4). Рассмотри, например, уравнение в области $S > S_0$, подставив туда экспоненциальную плотность распределения. Получаем

$$(\lambda + \mu_2)p(s) = \lambda\int_0^\infty p(s-x)\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}dx + \mu_2\int_0^\infty p(s+x)\frac{1}{b}e^{-\frac{x}{b}}dx . \qquad (5)$$

Дважды дифференцируя (5), приходим к уравнению

$$p''(s) + \frac{\mu_2 b - \lambda a}{ab(\mu_2 + \lambda)}p'(s) = 0 . \qquad (6)$$

Решение в общем виде

$$p(s) = A_1e^{k_1s} + A_2e^{-k_2s} .$$

Так как $p(\infty) = 0$ окончательное решение будет иметь вид

$$p(s) = Ae^{-k_1s} . \qquad (7)$$

Постоянная A должна быть теперь определена так, чтобы решение (7) дифференциального уравнения (6) удовлетворяло исходному уравнению (5).

Аналогично, решение уравнения (2) имеет в области $0 < s < S_0$ вид

$$p_1(s) = B_1 + B_2e^{k_2s} ,$$

решение уравнения (3)

$$p_2(s) = C_1 + C_2e^{-k_1s} ,$$

решение уравнения в области $s > S_0$ имеет вид

$$p(s) = De^{k_2s} .$$

Постоянные A, B_1, C_1, B_2, C_2, D должны быть определены, удовлетворяя исходным уравнениям (1)–(4) и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{0} P(s)ds + \int_0^{S_0}(p_1(s) + p_2(s))ds + \int_0^{+\infty} P(s)ds = 1 .$$

Получаем систему соотношений постоянных

$$B_1 + B_2\frac{1}{ak_1 + 1} = D\frac{1}{ak_2 + 1} , \qquad (8)$$

$$B_1 + B_2\frac{e^{k_2s_0}}{1 - bk_2} = 0 , \qquad (9)$$

$$C_1 + C_2\frac{1}{1 - ak_1} = 0 , \qquad (10)$$

$$C_1 + C_2\frac{e^{-k_1s_0}}{1 + bk_1} = A\frac{e^{-k_1s_0}}{1 + bk_1} , \qquad (11)$$

$$A\frac{k_1e^{-k_1s_0}}{(1 - ak_1)((1 + bk_1) - (1 - ak_1)e^{-k_1s_0})} = D\frac{k_2e^{k_2s_0}}{(1 - ak_2)((1 + ak_2)e^{-k_1s_0} - (1 - ak_1))} . \qquad (12)$$

Решаем получившуюся систему (8)–(12) и, учитывая условие нормировки, окончательно получим, что

$$p(s) = \begin{cases} G_1((1 + ak_2) - (1 - bk_2)e^{-k_2s_0})e^{k_2s}, \ \mathrm{s} < 0, \\ G_1(1 - (1 - bk_2)e^{k_2(s - s_0)}) + G_2(1 - (1 - \mathrm{a}\,k_1)e^{-k_1s}), \ 0 \le s \le S_0, \\ G_2((1 + bk_1)e^{k_1s_0} - (1 - ak_1))e^{-k_1s}, \ \mathrm{s} > \mathrm{S}_0, \end{cases} \qquad (13)$$

где

$$G_1 = \frac{k_1(1+ak_2)}{(k_1+k_2)(a+b+s_0)},\ G_2 = \frac{k_2(ak_1-1)}{(k_1+k_2)(a+b+s_0)}.$$

4. Аппроксимация плотности распределения капитала

При произвольных распределениях x поступающих премий $\varphi(x)$ и выплат $\psi(x)$ получить точное решение системы (1)–(4) не удается. Однако в этом случае можно построить приближенное решение уравнений при некоторых дополнительных предположениях. Введем параметр θ, где $0<\theta<1$, и будем считать, что

$$\mu_1 b = (1-\theta)\lambda a, \mu_2 b = (1+\theta)\lambda a \,. \tag{14}$$

Параметр θ имеет тот же смысл, что и нагрузка страховых премий в задаче страхования. Рассмотрим, далее, асимптотический случай, когда нагрузка премий $\theta \ll 1$. Практически это означает, что при любом значении капитала s фонд расходует почти столько же денежных средств, сколько в него поступает. При этом естественно считать, что пороги S_1 и S_2, определяющие гистерезисное управление капиталом, зависят от нагрузки премий θ. Более того будем считать, что при $\theta \to 0$ разность порогов $S_0(\theta) = S_2(\theta) - S_1(\theta) \to \infty$, но существует конечный предел

$$z_0 = \lim_{\theta\to\infty} \theta S_0(\theta).$$

Перенесем начало отсчета в точку $s=-S_1$. Решение уравнений будем искать в виде

$$p(s) = \theta f(\theta s,\theta),\ p_2(s) = \theta f_2(\theta s,\theta),\ p_1(s) = \theta f_1(\theta s,\theta), \tag{15}$$

где $f(z,\theta)$, $f_i(z,\theta)$ – некоторые функции, которые считаются дважды дифференцируемыми по z и равномерно непрерывными по θ.

Подставляем (15) в уравнение (1) и делая замену переменной $\theta s = z$, получим уравнение относительно функции $f(z,\theta)$:

$$(\lambda+\mu_2) f(z,\theta) = \lambda \int_0^\infty f(z-\theta x,\theta)\varphi(x)\,dx + \mu_2 \int_0^\infty f(z+\theta x,\theta)\psi(x)\,dx.$$

Раскладывая подынтегральную часть в ряд Тейлора, по первому аргументу и ограничиваясь тремя первыми членами разложения, получим

$$\frac{\lambda a_2 + \mu_2 b_2}{2} f''(z,\theta)\theta^2 + (\mu_2 b - \lambda a) f'(z,\theta) + o(\theta^2) = 0. \tag{16}$$

Учитывая в (16) выражения (14), и разделим на θ^2, получаем

$$\frac{\lambda a_2 + \mu_2 b_2}{2} f''(z,\theta) + \lambda a f'(z,\theta) + \frac{o(\theta^2)}{\theta^2} = 0. \tag{17}$$

Обозначим $f(z) = \lim_{\theta\to 0} f(z,\theta)$. Перейдем в (17) к пределу при $\theta \to 0$.

$$f''(z) + \frac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_2 b_2} f'(z) = 0.$$

Откуда $z\to\infty$, $f(z,\theta)=0$ получаем $f(z) = Ae^{-k_1 z}$, и, следовательно,

$$p(s) = \theta A e^{-k_1 s\theta} + o(\theta). \tag{18}$$

Таким образом получаем, что

$$p(s) = \theta D e^{k_2 s\theta} + o(\theta). \tag{19}$$

Аналогичные рассуждения позволяют показать, что функция $f_1(z) = \lim_{\theta\to 0} f_1(z,\theta)$ определяется выражением $f_1(z) = B_1 + B_2 e^{k_2 z}$, где $k_2 = \dfrac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_1 b_2}$, и, следовательно,

$$p_1(s) = \theta(B_1 + B_2 e^{k_2\theta s}) + o(\theta). \tag{20}$$

Наконец, функция $f_2(\text{z}) = \lim_{\theta\to 0} f_2(z,\theta)$ определяется выражением $f_2(z) = C_1 + C_2 e^{-k_1 z}$, где $k_1 = \dfrac{2\lambda a}{\lambda a_2 + \mu_2 b_2}$, и, следовательно,

$$p_2(s) = \theta(\text{C}_1 + C_2 e^{-k_1\theta s}) + o(\theta). \tag{21}$$

При выводе соотношений (18)–(21) неявно предполагалось, что $s \neq 0$ и $s \neq S_0$. Рассмотрим теперь уравнения системы (1) – (4) при $s = 0$ и $s = S_0$ получаем систему соотношений постоянных

$$B_1 + B_2 = D,\ B_1 + B_2 e^{k_2 z_0} = 0,\ C_1 + C_2 = 0,\ C_1 + C_2 e^{-k_1 z_0} = A e^{-k_1 z_0},\ A\frac{k_1}{e^{k_1 z_0} - 1} = D\frac{k_2}{1 - e^{-k_2 z_0}}.$$

Таким образом, учитывая условие нормировки, окончательно получим, что при $\theta \ll 1$ плотность распределения капитала фонда $p(s)$ имеет вид

$$p(s) = \begin{cases} \dfrac{k_1(1 - e^{-k_2\theta s_0})}{s_0(k_1 + k_2)} e^{k_2\theta s} + o(\theta),\ s < 0, \\ \dfrac{k_1(1 - e^{k_2\theta(s - s_0)})}{s_0(k_1 + k_2)} + \dfrac{k_2(1 - e^{-k_1\theta s})}{s_0(k_1 + k_2)} + o(\theta),\ 0 \le s \le S_0, \\ \dfrac{k_2(e^{k_1\theta s_0} - 1)}{s_0(k_1 + k_2)} e^{-k_1\theta s} + o(\theta),\ s > S_0. \end{cases} \tag{22}$$

Построенная аппроксимация (22) плотности распределения капитала может быть улучшена за счет учета дополнительных членов разложения функций $p_i(z,\theta)$, $p(z,\theta)$ в ряд по степеням θ. Будем считать, что для плотности распределений $\varphi(x)$, $\psi(x)$ существуют третьи моменты a_3, b_3 соответственно.

Решение функций $p(z,\theta)$ будем искать в виде $p(s) = f(\text{s},\theta) + \theta\bar{f}(\theta s,\theta)$. Раскладывая подынтегральную часть в ряд Тейлора, по первому аргументу, с точностью до $o(\theta^3)$ и учитывая, что $f(s,\theta)$ удовлетворяет уравнению (6), будем иметь

$$\frac{-a_3\lambda + b_3\mu_2}{6}\bar{f}'''(z,\theta)\theta + \frac{a_2\lambda + b_2\mu_2}{2}\bar{f}''(z,\theta) + \lambda a\bar{f}'(z,\theta) = \frac{a_3\lambda - b_3\mu_2}{6} f'''(z,\theta).$$

Обозначим $\bar{f}(\text{z}) = \lim_{\theta\to 0}\bar{f}(z,\theta)$. Переходя к пределу при $\theta \to 0$ получим, что функция $\bar{f}(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{f}''(z) + \frac{2\lambda a}{a_2\lambda + b_2\mu_2}\bar{f}'(z) = \frac{a_3\lambda - b_3\mu_2}{3(a_2\lambda + b_2\mu_2)} f'''(z,\theta). \tag{23}$$

Решениt уравнения (21), удовлетворяющее граничному условию $\bar{f}(+\infty) = 0$, имеет вид

$$\bar{f}(z) = Ae^{-k_1 z} + z\bar{A}e^{-k_1 z}. \tag{24}$$

Аналогично получаем остальные решения:

$$\bar{f}_1(z) = B_1 + B_2 e^{k_2 z} + z\bar{B}e^{k_2 z}, \tag{25}$$

$$\bar{f}_2(z) = C_1 + C_2 e^{-k_1 z} + z\bar{C}e^{-k_1 z}, \tag{26}$$

$$\bar{f}(z) = De^{k_2 z} + z\bar{D}e^{k_2 z}. \tag{27}$$

Учитывая условие нормировки и соотношения, полученные путем подстановки решений (24)–(27) в исходные (1)–(4) при $s=0$ и $s=S_0$, окончательно получим плотность распределения капитала фонда, которая имеет вид

$$p(s)=\begin{cases}\dfrac{k_1(1-e^{-k_2\theta s_0})}{s_0(k_1+k_2)}e^{k_2\theta s}\left[1+\dfrac{\theta k_1}{2}+\theta^2 k_1{}^3\,\dfrac{a_3\lambda-b_3\mu_1}{3(a_2\lambda+b_2\mu_1)}\right]+o(\theta),\ s<0,\\[2ex] \dfrac{k_1}{s_0(k_1+k_2)}\left[1-e^{k_2\theta(s-s_0)}+\theta k_1-\theta e^{k_2\theta(s-s_0)}+\theta^2 k_1{}^3\,\dfrac{a_3\lambda-b_3\mu_1}{3(a_2\lambda+b_2\mu_1)}e^{k_2\theta s}\right]+\\[2ex] +\dfrac{k_2}{s_0(k_1+k_2)}\left[1-e^{-k_1\theta s}+\theta k_2-\theta e^{-k_1\theta s}+\theta^2 k_2{}^3\,\dfrac{a_3\lambda-b_3\mu_2}{3(a_2\lambda+b_2\mu_2)}e^{-k_1\theta s}\right]+\\ \qquad\qquad +o(\theta),\ 0\le s\le S_0,\\[2ex] \dfrac{k_2(e^{k_1\theta s_0}-1)}{s_0(k_1+k_2)}e^{-k_1\theta s}\left[1-\dfrac{\theta k_2}{2}+\theta^2 k_2{}^3\,\dfrac{a_3\lambda-b_3\mu_2}{3(a_2\lambda+b_2\mu_2)}\right]+o(\theta),\ s>S_0.\end{cases} \tag{28}$$

Заключение

В работе найдена плотность распределения капитала некоммерческого фонда при пуассоновских потоках премий и выплат и гистерезисном управлении капиталом, а так же были произведены две аппроксимации разного порядка, для уточнения найденной плотности. На рис. 1 приведены графики плотности распределения капитала, построенной по формулам (13) (сплошная линия), (22) (точечная линия), (28) (пунктирная линия), при значении параметра $\theta=0.1$. Как видно из рис. 1, введение дополнительный слагаемых в аппроксимирующие формулы позволяет естественно улучшить точность аппроксимации.

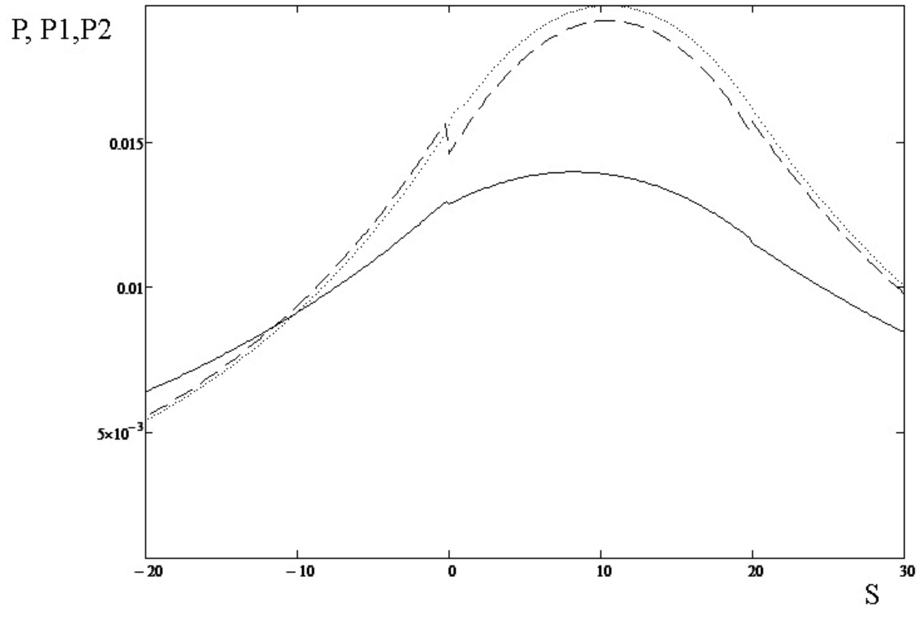

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.

2. *Глухова Е.В., Змеев О.А., Ливщиц К.И.* Математические модели страхования. Томск: Изд-во ТГУ, 2004. 180 с.

3. *Бейтмен Г.* Таблицы интегральных преобразований. / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – Т.1. – М.:Наука, 1969.– 344 с.

4. *Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 379 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НАЛОГОВОЙ СТАВКИ В УСЛОВИЯХ ЗАКРЫТОЙ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

С. Е. Пашко
Томский государственный университет
E-mail: svetlana_pashko@list.ru

Введение

Важнейшей целью экономической политики является стимулирование экономического роста. С помощью налоговой политики государство способно создать такую налоговую систему, которая должна стимулировать накопление и рациональное использование национальных богатств страны и тем самым обеспечить социально-экономический прогресс общества. Налоговые поступления формируют бюджет государства, а он в свою очередь расходуется на нужды общества в различных сферах жизни.

В работе рассматривается модель закрытой односекторной экономики в долгосрочном периоде, в которой производится один национальный продукт, который как потребляется, так и инвестируется. В модели учитываются два участника экономической деятельности: государство и частный сектор, который представлен домашними хозяйствами и частными фирмами. Домашние хозяйства получают доходы от продажи собственного труда и инвестирования в производство, и используют их на непроизводственное потребление и накопление. Государство формирует свой бюджет, взимая налог с капитала, и расходует его на финансирование общественных услуг, а также инвестирование в производство.

Целью частного и государственного сектора является максимизировать суммарную функцию полезности на конечном интервале времени $[0,T]$, отражающую благосостояние населения.

Налоговая система представлена системой налогообложения с единой налоговой ставкой на капитал. Модель предпринимательского сектора определяется производственной функцией Кобба-Дугласа с учетом доли государственного бюджета в процессе производства. Трудовые ресурсы полагаются постоянными и нормированными на единицу.

В работе поставлена задача определения оптимальной налоговой ставки на траектории сбалансированного роста экономики, обеспечивающей максимум непроизводственного потребления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим экономический процесс на интервале времени $[0,T]$ с заданным уровнем трудовых ресурсов $L=1$ и текущим уровнем $K(t)$, а также однородной производственной функцией $F\left(K\left(t\right),L\right)$, удовлетворяющей неоклассическим условиям.

Текущее значение выпуска продукции