МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ M|GI|N|∞

Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева
Томский государственный университет
E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru

Введение

Математические модели систем массового обслуживания (СМО) широко применяют при решении важных практических задач, возникающих в связи с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления.

Многолинейные СМО могут являться математическими моделями реальных систем и процессов в области телекоммуникаций, сетях связи и т.д. Известны работы по моделированию call-центров [0, 2].

В данной работе рассматривается система с произвольным временем обслуживания на приборах и бесконечной очередью для ожидания обслуживания (M|GI|N|∞).

1. Постановка задачи

На вход системы поступает простейший поток с параметром λ. Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов или становится в очередь в случае, когда все приборы заняты. Система имеет N обслуживающих приборов, время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $A(x)$, одинаковой для всех приборов.

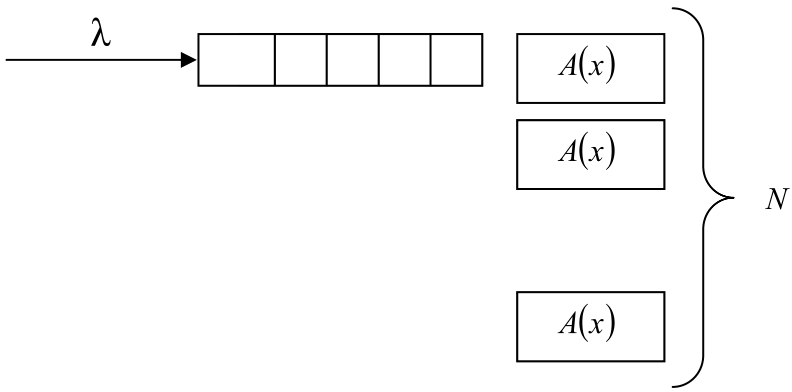


Рис. 1. Система M|GI|N|∞

Рассмотрим случай, когда время обслуживания равномерно распределено в интервале $[0, 2a]$, то есть функция распределения $A(x)$ определяется выражением

$$A(x)\begin{cases} 0, \ x<0, \\ \dfrac{x}{2a}, \ 0<x<2a, \\ 1, \ x>2a. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в системе M|GI|N|∞

Обозначим $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t. Тогда $P(i)=P\{i(t)=i\}$ – распределение вероятностей числа заявок в системе в момент времени t.

Аппроксимация π_i распределения вероятностей $P(i)$, полученная в работе [0], определяется в виде составного распределения

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)\left(1 - \left(P_2(0) + P_2(N)\right)\right)} P_1(i),\ 0 \le i \le N, \\ \dfrac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)\left(1 - \left(P_2(0) + P_2(N)\right)\right)} P_2(i - N + 1),\ i \ge N. \end{cases} \tag{2}$$

Вероятности $P_1(i), 0 \le i \le N$ – вероятности числа занятых приборов в *N*-линейной СМО (M|GI|N|0) с потерями заявок, когда все приборы заняты. Тогда их можно определить формулами Эрланга [0].

$$P_1(i) = {\dfrac{(\lambda a)^i}{i!}} \Big/ {\left(\sum_{k=0}^{N} \dfrac{(\lambda a)^k}{k!}\right)}, \tag{1}$$

где $a = \int\limits_0^\infty \left(1 - A(x)\right) dx$ – среднее время обслуживания.

Вероятности $P_2(i)$ определяются для случая, когда все приборы заняты. В таком случае блок занятых приборов представляется как один прибор, который обслуживает случайное время с функцией распределения $B(x)$ [0], имеющей вид

$$B(x) = 1 - \left(1 - A(x)\right)\left(1 - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \left(1 - A(z)\right) dz\right)^{N-1}. \tag{2}$$

то есть для равномерного распределения

$$B(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{2a}\right)^{2N-1},\ 0 < x < 2a, \\ 1,\ x > 2a. \end{cases}$$

а плотность этого распределения имеет вид

$$b(x) = B'(x) = (2N - 1)\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{2N-2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{(2N-1)}{2a}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{2N-2}.$$

Вероятности $P_2(i)$, $i = 0,1,...$ определяются как вероятности числа заявок в однолинейной системе M|GI|1|∞ с ожиданием.

Используя формулу Поллачека-Хинчина для производящей функции

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_2(n) = (1 - \lambda b)\frac{(1 - x)B^*(\lambda - \lambda x)}{B^*(\lambda - \lambda x) - x}, \tag{5}$$

раскладывая функцию **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в ряд по степеням *x*, находим вероятности $P_2(i)$

$$P_2(i) = (1 - \lambda b)\sum_{k=0}^{i} \alpha_k b_{i-k}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}, \ \alpha_n = \frac{1}{\beta_0}\left[\alpha_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\beta_{n-k}\right], \ b_0 = \beta_0, \ b_n = \beta_n - \beta_{n-1}, \ \beta_n = \int_0^\infty e^{-\lambda z}\frac{(\lambda z)^n}{n!}dB(z).$$

3. Вероятность немедленного обслуживания

Пусть τ – время ожидания заявки до начала обслуживания. Вероятность немедленного обслуживания, учитывая **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, можно записать в виде

$$P_0 = \sum_{i=0}^{N-1}\pi_i = C_1\sum_{i=0}^{N-1}P_1(i) = C_1(1 - P_1(N)) = \frac{P_2(1)(1 - P_1(N))}{P_2(1) + P_1(N)\left[1 - (P_2(0) + P_2(1))\right]}, \quad (7)$$

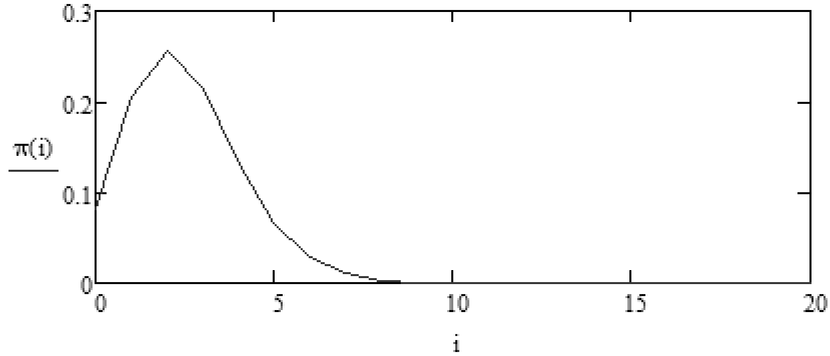
где в силу (1) и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** выполняются равенства

$$P_2(0) = G(0) = 1 - \lambda b, \ P_2(1) = G'(0) = (1 - \lambda b)\frac{1 - B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}, \ P_1(N) = \frac{(\lambda a)^N}{N!}\Big/\sum_{i=0}^{N}\frac{(\lambda a)^i}{i!}.$$

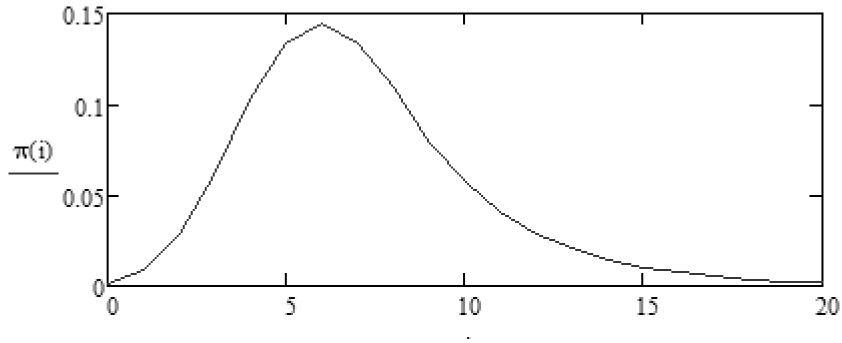
4. Численные результаты

Следует отметить, что для существования стационарного режима, при котором $P\{\tau > 0\} > 0$, необходимо выполнение неравенства $N > \lambda a$.

На рис. 1 приведены численные реализации аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в системе M|GI|N|∞ для различных интенсивностей входящего потока, N=9.



а) λ=25



б) λ=65

Рис. 1. Аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в системе M|GI|N|∞ для различных интенсивностей входящего потока

В таблице 1 приведены значения вероятностей немедленного обслуживания из **Ошибка! Источник ссылки не найден.** при $a = 0{,}1$ для различных значений λ и N.

Таблица 1

Значения вероятностей немедленного обслуживания для различных входных данных.

N \ λ	25	35	45	55	65	75
3	0.314					
4	0.691	0.274				
5	0.873	0.632	0.246			
6	0.954	0.827	0.587	0.226		
7	0.985	0.925	0.788	0.551	0.210	
8	0.996	0.971	0.898	0.754	0.522	0.198
9	0.999	0.989	0.955	0.873	0.724	0.497

Заключение

В данной работе для равномерного распределения времени обслуживания в системе M|GI|N|∞ проведен численный анализ. Очевидно, что с увеличением интенсивности входящего потока, увеличивается потребность в количестве обслуживающих приборов. Полученные результаты позволяют определить их оптимальное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown L.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center: A Queueing-Science Perspective. / L. Brown, N. Gans, A. Mandelbaum et al. // Journal of the American Statistical Association. – 2005. – 100 p.
2. *Jouini O.* Call Centers with Delay Information: Models and Insights / O. Jouini, Z. Ak_sin, Y. Dallery, // Manufacturing & Service Operations Management, – 13. – 2011. – P. 534-548.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок пер с англ. И.И. Грушко ; ред. В.И. Нейман. // – М. : Машиностроение. – 1979. – 432 с.
4. *Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П.* Исследование процесса числа заявок в системе M|GI|N|∞ // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Геннадия Алексеевича Медведева. / Минск – 2015. – С. 123-127.
5. *Назаров А.А.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. // Томск: Изд-во НТЛ. – 2010. – 228 с.

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ MAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Л. А. Нежельская, А. И. Ненова
Томский государственный университет
E-mail: ludne@mail.ru, nenova.94@mail.ru

Введение

В связи с развитием информационных технологий была предпринята успешная попытка создания математических моделей информационных потоков телекоммуникационных системах - дважды стохастических потоков событий[1]. Данный поток определяется как случайный поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: первый класс включает в себя потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; второй – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Вторые начиная с конца 1980-х гг. носят название MAP (Markovian arrival process)-потоков событий, они характерны при описании информационных потоков в реальных телекоммуникационных сетях [2].

Режим функционирования системы массового обслуживания зависит от параметров MAP-потока и состояний, в которых он находится. В реальных ситуациях парамет-