МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

11. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* // Radiotekhnika. – 1995. – V. 40. – No. 7–8. – P. 6–10.
12. *Шуленин В.П.* Математическая статистика. Часть 1. – Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – 540 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Н. М. Феропонтова
Томский государственный университет
E-mail: feropontova.natalia@gmail.com

Введение

Система массового обслуживания с отрицательными заявками может описать реальные физические, экономические, телекоммуникационные процессы. В системах обслуживания такого типа в различных ее вариантах отрицательные заявки «убивают» положительные, находящиеся в обслуживании, либо приходящие в систему после отрицательных, также возможны другие варианты в зависимости от занятости системы на момент прихода отрицательной заявки. Понятие отрицательной заявки впервые ввел Геленбе в 1991 году [1].

На настоящий момент было проведено исследование бесконечнолинейных систем с отрицательными заявками и экспоненциальным обслуживанием в системах: с потерей отрицательной заявки в пустой системе [2] и с её ожиданием в пустой системе. Также исследованы процессы числа положительных и отрицательных заявок в системе с ожиданием и произвольным обслуживанием и найдена асимптотическая характеристическая функция [3, 4]. Исследованиями конечнолинейных СМО с отрицательными заявками также занимались П.П. Бочаров, Ч. Д'Апиче, Р. Манзо, А.В. Печинкин, Р.В. Разумчик [5,6], Yang Woo S. [7], Quan-Lin L., Yiqiang Q.Z. [8].

В настоящей работе рассматривается имитационная модель бесконечнолинейной системы обслуживания с ожиданием и произвольным обслуживанием, и анализируются результаты проведенного имитационного моделирования.

1. Описание модели

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступают два потока: простейший поток положительных заявок с параметром λ^+ и простейший поток отрицательных заявок с параметром γ^-. Время обслуживания положительных заявок случайное с функцией распределения $B(x)$.

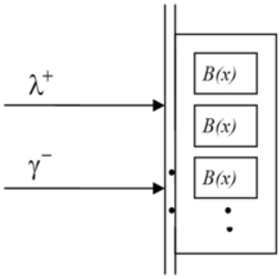

Рис. 1. Схема системы с ожиданием отрицательными заявками новых положительных заявок

В рассматриваемой системе, изображенной на рис. 1, положительные и отрицательные заявки приходят в систему параллельно. Любая положительная заявка, приходящая в систему без отрицательных заявок, сразу начинает обслуживание, занимая любой из свободных приборов. Отрицательная заявка, приходящая в систему, ожидает прихода новой положительной, «убивает» ее и обе покидают систему. Если в системе нет положительных заявок, отрицательная заявка ожидает поступления положительной и повторяет указанную процедуру.

Обозначим $i(t)$ – число положительных и $l(t)$ – число отрицательных заявок в системе в момент времени t, но процесс $\{i(t),l(t)\}$ – немарковский.

2. Основные результаты исследования системы с ожиданием и произвольным обслуживанием

Обозначим $P(i,l,t)=P\{i(t)=i,l(t)=l\}$. С помощью метода просеянного потока [9] исследуется двумерный процесс $\{n(t),m(t)\}$. Введем $S(\tau)=1-B(T-\tau)$ – вероятность того, что положительная заявка, поступившая в момент τ, просеется в новый поток. Потоки $n(t)$ и $m(t)$ формируют те заявки, которые находятся в системе в момент t и будут находиться еще до момента T.

Рассмотрим вероятности $P(n,m,t)=P\{n(t)=n,m(t)=m\}$ и запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(n,m,t)}{\partial t}=-(\lambda^{+}+\gamma^{-})P(n,m,t)+\gamma^{-}P(n,m-1,t)+\lambda^{+}P(n,m+1,t),\ n\geq 0,\\ \dfrac{\partial P(n,0,t)}{\partial t}=-(\lambda^{+}S(t)+\gamma^{-})P(n,0,t)+\lambda^{+}S(t)P(n-1,0,t)+\lambda^{+}P(n,1,t),\ n\geq 1,\\ \dfrac{\partial P(0,0,t)}{\partial t}=-(\lambda^{+}S(t)+\gamma^{-})P(0,0,t)+\lambda^{+}P(0,1,t).\end{cases} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции

$$H(u,m,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,m,t).$$

Предельное условие высокой интенсивности входящих потоков определим равенствами

$$\lambda^{+}=\lambda N,\ \gamma^{-}=\gamma N, \quad (2)$$

где λ, γ – некоторые конечные величины, а $N\to\infty$.

Характеристическая функция числа положительных заявок в системе удовлетворяет уравнению

$$H(u,t)=\sum_{m-0}^{\infty}H(u,m,t)=\exp\left\{j\kappa_{1}(t)uN-\kappa_{2}(t)u^{2}N\right\}, \quad (3)$$

где

$$\kappa_{1}(t)=(\lambda-\gamma)\int_{0}^{t}S(\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$\kappa_{2}(t)=\left[(\lambda-\gamma)\int_{0}^{t}S(\tau)d\tau+2\gamma\int_{0}^{t}S^{2}(\tau)d\tau\right]. \quad (5)$$

3. Имитационная модель системы. Блок-схема

Блок-схема имитационной модели рассматриваемой бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием новых положительных.

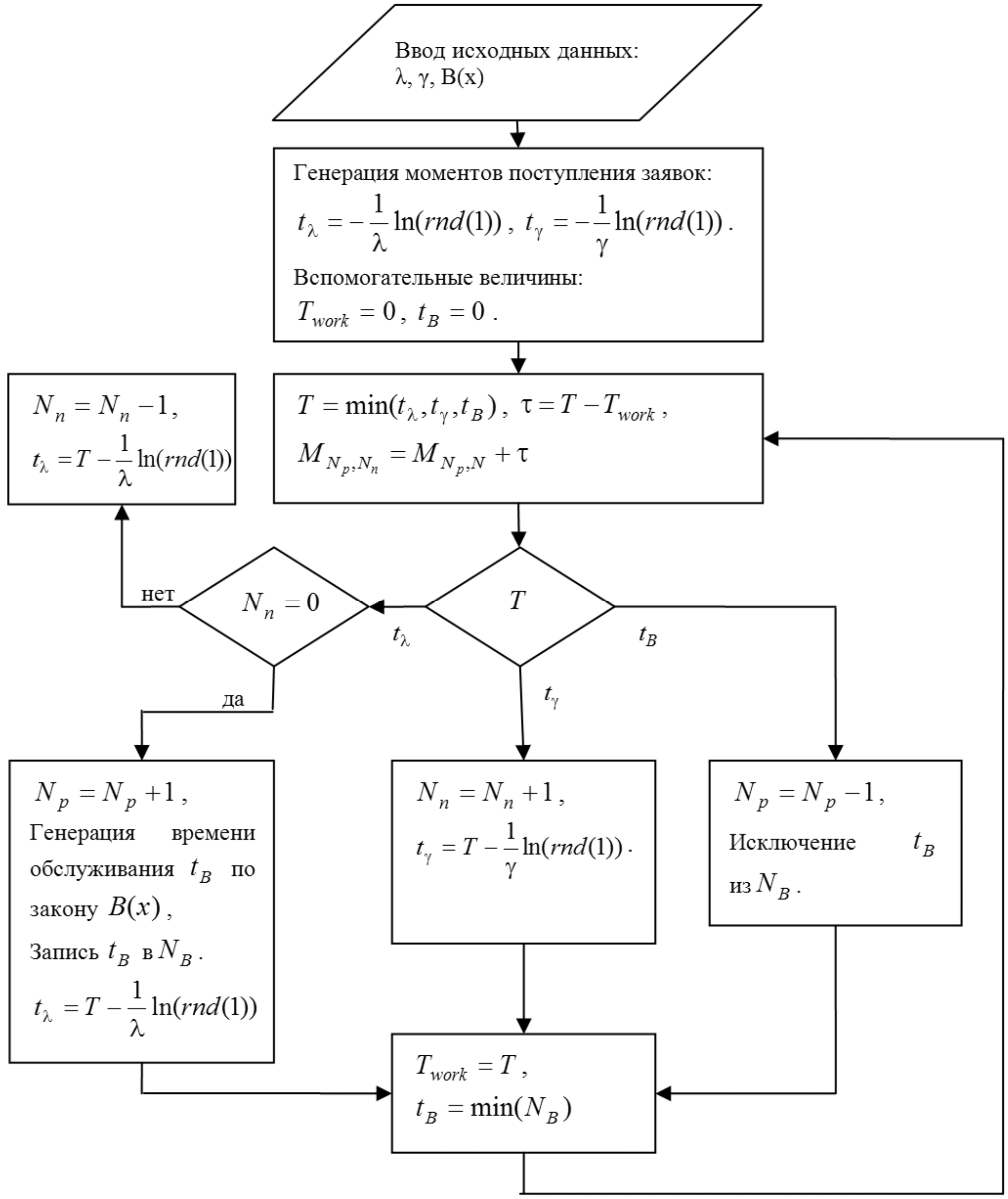

Рис. 2. Блок схема системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием

Используем обозначения: T – время, t_B – время обслуживания, t_λ – интервал времени между поступлениями положительных заявок, t_γ – интервал времени между поступлениями отрицательных заявок, N_p – число положительных заявок в системе; N_n – число отрицательных заявок в системе; N_B – вектор времен обслуживания текущих заявок, τ – интервал времени между последовательными событиями (приход положительной заявки, приход отрицательной заявки, обслуживание), M – матрица значений суммарных времен пребывания в определенном состоянии, по горизонтали которой изменяется число отрицательных заявок в системе, а по вертикали – положительных.

4. Численные результаты

Для моделирования был выбран математический пакет MathCad. Время обслуживания распределено по Гамма-закону с параметром s. Количество циклов имитационной модели 20000.

Проведем сравнение распределений вероятностей, полученных для данной системы методом асимптотического анализа и имитационным моделированием. Для сравнения полученных распределений воспользуемся расстояниями Колмогорова, которые вычисляются по формуле:

$$\Delta = \max_{0<i<\infty} \left| \sum_{n=0}^{i} (P_{\text{imit}}(i) - P_a(i)) \right|$$

где $P_a(i)$ – гауссовская аппроксимация, определенная в (1.15), а $P_{\text{imit}}(i)$ - маргинальное распределение вероятностей того, что число положительных заявок равно i, определенное имитационным моделированием.

Определим область действия полученных имитационных и асимптотических результатов. Рассмотрим 2 примера.

Пример 1. Для отношений λ/γ интенсивностей входящих потоков заявок, изменяющихся от 1 до 10, и параметров Гамма-распределения обслуживания $s = 0.7$, имеем:

Таблица 1

Расстояния Колмогорова для значения параметра распределения времени обслуживания s = 0.7

λ \ λ/γ	1.00	1.20	1.40	1.5	2	4	10
1	0.42	0.27	0.24	0.24	0.24	0.16	0.16
2	0.46	0.36	0.33	0.26	0.22	0.09	0.07
5	0.61	0.44	0.27	0.18	0.12	0.06	0.06
10	0.71	0.30	0.19	0.17	0.07	0.03	0.03
30	0.68	0.19	0.15	0.02	0.02	0.03	0.03
50	0.73	0.14	0.04	0.03	0.01	0.02	0.03
100	0.59	0.08	0.07	0.06	0.04	0.05	0.07

Расстояния Колмогорова принимают значения меньше 0.05 в выделенной области в таблице 1. То есть для определенных комбинаций параметров λ и γ, соответствующих таблице, имеет место и численное и асимптотическое распределение.

Пример 2. Для отношений λ/γ интенсивностей входящих потоков заявок, изменяющихся от 1 до 10, и параметров Гамма-распределения обслуживания $s = 3$, имеем:

Таблица 2

Расстояния Колмогорова для значения параметра распределения времени обслуживания s = 3

λ \ λ/γ	1.00	1.20	1.40	1.5	2	4	10
1	0.65	0.46	0.35	0.27	0.18	0.09	0.06
2	0.74	0.44	0.24	0.22	0.10	0.05	0.017
5	0.82	0.33	0.17	0.11	0.04	0.05	0.03
10	0.85	0.18	0.06	0.02	0.07	0.05	0.03
30	0.85	0.07	0.02	0.07	0.03	0.04	0.05
50	0.84	0.09	0.02	0.05	0.04	0.03	0.04
100	0.91	0.22	0.06	0.03	0.06	0.04	0.11

В таблице 2 представлены величины расстояний Колмогорова для системы с параметром Гамма-распределения $s = 3$. Выделенная область соответствует значением расстояний Колмогорова меньше 0.05.

Для разных значений параметров функции распределения времени обслуживания в рассматриваемой системе область действия асимптотики начинается с $\lambda/\gamma \geq 1.4$. Таким образом, для аппроксимации гауссовским распределением определенного формулой (3) вида необходимо выполнение условия, при котором интенсивность входящего потока положительных заявок превышает интенсивность потока отрицательных заявок как минимум в 1,4 раза.

Заключение

В настоящей работе приведены результаты имитационного моделирования бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием, с произвольным обслуживанием. Представлен алгоритм данной имитационной модели рассматриваемой системы. Проведено сравнение результатов численного имитационного моделирования и асимптотических результатов, полученных в [4]. Найдены области для значений параметров, в которых имеют место асимптотические и численные результаты в соответствии с расстояниями Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E.* Queueing networks with negative and positive customers, J. Appl. Prob., 1991, vol. 28, pp. 656–653
2. *Назаров А.А., Феропонтова Н.М.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их потерей в пустой системе. // Теория вероятностей математическая статистика и приложения: материалы междунар. науч. конф., Минск, 23–26 февраля 2015. Минск: РИВШ, 2015. С. 208-213.
3. *Назаров А.А., Феропонтова Н.М.* Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием. // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014): материалы XIII междунар. науч.-практич. конф. им. А.Ф. Терпугова (20-22 ноября 2014). – Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2015. С. 71–76
4. *Назаров А.А., Феропонтова Н.М.* Исследование взаимодействия потоков аннигилирующих частиц / А.А. Назаров [и др.] // Известия вузов. Физика : научный журнал / Национальный исследовательский Томский государственный университет (ТГУ). — 2015. — (В печати).
5. *Печинкин А.В., Разумчик Р.В.* Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени, Автомат. и телемех., 2009, выпуск 12, 109–120
6. *Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Манзо Р., Печинкин А.В.* Анализ многолинейной марковской системы массового обслуживания с неограниченным накопителем и отрицательными заявками, Автомат. и телемех., 2007, выпуск 1, 93–104
7. *Yang Woo S.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. № 55. P. 223-237.
8. *Quan-Lin L., Yiqiang Q.Z.* A MAP/G/1 Queue with Negative Customers // Queueing Systems. 2004. № 47. P. 5-43.
9. *Назаров А.А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ С R-НАСТОЙЧИВЫМ ВЫТЕСНЕНИЕМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЗАЯВОК

Я. Е. Черникова
Томский государственный университет
E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Введение

Первые математические результаты, касающиеся систем с повторными вызовами, были опубликованы в 40-х гг. прошлого века. Системы такого рода были рассмотрены Вилкинсоном и Коэном. Основные подходы к описанию систем с источником повторных вызовов (ИПВ) были рассмотрены Гоштони , Элдином. Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Artalejo J.R. [1–3] и Г.И. Фалина [4]. Ими получены допредельные характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|c и т.д., а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем.