

На правах рукописи



**Измайлова Яна Евгеньевна**

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
RQ-СИСТЕМ С ВЫТЕСНЕНИЕМ ЗАЯВОК**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Томск – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» на кафедре теории вероятностей и математической статистики.

**Научный руководитель:** доктор технических наук, профессор  
**Назаров Анатолий Андреевич**

**Официальные оппоненты:**

**Рожкова Светлана Владимировна**, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», кафедра высшей математики, профессор

**Семенова Дарья Владиславовна**, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», кафедра высшей и прикладной математики, доцент

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

Защита диссертации состоится 27 апреля 2017 г. в 10 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 102).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» [www.tsu.ru](http://www.tsu.ru).

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/IzmaylovaYaE27042017.html>

Автореферат разослан «\_\_» марта 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор технических наук,  
профессор



Скворцов  
Алексей Владимирович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Интерес к задачам теории массового обслуживания (ТМО), сформулированным еще в начале XX века, проявляется и в настоящее время. Модели ТМО широко используются в различных сферах жизни: call-центры, интеллектуальные транспортные системы, телекоммуникационные сети, административные, производственные, банковские системы и т.д.

Классические модели теории массового обслуживания с ожиданием и потерями не всегда адекватны реальным техническим системам, где наблюдается эффект повторных обращений. Поэтому для анализа характеристик таких систем используют модели Retrial Queueing System (RQ-систем, систем с повторами). Модели с повторными вызовами широко применяются для проектирования и оптимизации информационно-коммуникационных систем различного уровня (локальных, глобальных), цифровых сетей связи, управляемых протоколами случайного множественного доступа, в сетях сотовой связи, вычислительных кластерах, в call-центрах, для оптимизации работы транспортных систем и во многих других областях. RQ-системы характеризуются тем, что прибывшая в систему заявка, обнаружив прибор занятым, уходит в зону ожидания и через некоторое случайное время повторяет попытку обслуживания. Между повторами заявки (клиенты) находятся в «источнике повторных вызовов» (ИПВ или «орбита»). Обзор работ по этой тематике приведен в работах J.R. Artalejo, Г. И. Фалина, Г. П. Башарина, К. Е. Самуйлова.

В классических RQ-системах предполагается, что поступающие запросы являются однородными. Однако в реальности требования могут быть неоднородными как по распределению времени обслуживания, так и по их ценности для системы и, следовательно, имеют право претендовать на первоочередное (приоритетное) обслуживание. RQ-системам с приоритетами посвящено немалое количество исследований, к которым можно отнести работы A. Cobham, T. E. Phipps, L. E. Schrage, N. K. Jaiswal, K. C. Madan, B. Simon, B. D. Choi, K. Altinkemer, I. Bose, N. Rengnanathan, R. Kalayanaraman, M. Martin, G. V. Krishna Reedy, R. Nadarajan, П. П. Бочарова, О. И. Павловой.

Во всех указанных выше работах интервалы между повторами обращения заявок к прибору имеют экспоненциальное распределение. В реальных системах интервалы между повторами могут иметь и не экспоненциальное распределение. В исследованиях K. Avrachenkov, A. Н. Дудина, В. И. Клименок, S. R. Chakravarthy, Y. W. Lee рассматриваются системы, в которых два типа входящих потоков (заявки первого и второго типов), и при этом назначается приоритет заявкам

первого типа, которые в дальнейшем образуют очередь, а заявки второго типа уходят в ИПВ. В работе А. Н. Дудина, S.R. Chakravarthy предполагается, что интервалы между повторами обращения заявок из ИПВ имеют экспоненциальное распределение и зависят от количества заявок в источнике повторных вызовов (constant retrial policy). В работе А. А. Назарова и Н. И. Яковлева рассматривается RQ-система с фазовым распределением повторного времени.

Кроме того следует отметить работы, касающиеся изучению RQ-систем с дискретным временем. В работе I. M. Atencia рассматривается система с повторными вызовами с дискретным временем, в которой прибывшая заявка, обнаружившая прибор занятым, может решить, начать ли обслуживание или присоединиться к орбите и повторить попытку позже согласно дисциплине FCFS (First Come First Served – первым пришел, первым обслужен).

Однако в рассмотренных выше моделях приоритетных RQ-систем не учитывается эффект вытеснения требований, что существенно влияет на характеристики исследуемых систем. То есть возникает необходимость построения и исследования математических моделей RQ-систем с вытеснением заявок.

**Цель и задачи исследования.** Целью данной диссертационной работы является исследование математических моделей однолинейных RQ-систем с вытеснением заявок.

Были поставлены следующие задачи:

1. Проанализировать существующие и предложить новые варианты систем массового обслуживания для моделирования предметных областей с приоритетами и вытеснением заявок.
2. Построить математическую модель RQ-систем с вытеснением заявок.
3. Найти пропускную способность RQ-систем с вытеснением заявок.
4. Построить математическую модель RQ-систем с двумя входящими потоками, произвольным распределением времени обслуживания и двумя источниками повторных вызовов.
5. Модифицировать метод асимптотического анализа для нахождения распределения вероятностей состояний обслуживаемого прибора и числа заявок в источнике (источниках) повторных вызовов.
6. Модифицировать метод диффузионной аппроксимации для нахождения распределения вероятностей состояний обслуживаемого прибора и числа заявок в источнике повторных вызовов.
7. Разработать численный алгоритм для вычисления допредельного распределения вероятностей числа заявок в ИПВ и состояний прибора RQ-системы с вытеснением обслуживаемых заявок.

8. Разработать комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа RQ-систем с вытеснением заявок.

**Научная новизна результатов.** Научная новизна результатов данной диссертации состоит в следующем:

1. Впервые предложен новый класс математических моделей RQ-систем с вытеснением заявок и случайным доступом, отличающиеся от приоритетных RQ-систем тем, что в последних доступ приоритетных заявок осуществляется в порядке очереди.
2. Впервые построена математическая модель RQ-систем  $M | GI | 1$  с вытеснением заявок. Найдена пропускная способность RQ-системы  $M | GI | 1$  с вытеснением поступающих заявок. Определена область стабильного функционирования нестационарных систем, то есть область, в которой вероятностные характеристики RQ-систем не меняются с течением времени до момента выхода из нее.
3. Впервые построены математические модели RQ-систем  $M | GI | 1$  с вытеснением и гиперэкспоненциальной задержкой заявок в источнике повторных вызовов, RQ-систем с двумя входящими потоками и вытеснением альтернативных заявок.
4. Впервые для исследования RQ-систем с вытеснением проведена модификация метода асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок в ИПВ. С помощью данного метода получен вид предельной характеристической функции для систем с экспоненциальной и гиперэкспоненциальной задержкой заявок в источнике повторных вызовов в виде характеристической функции гауссовского распределения.
5. Впервые для RQ-системы с вытеснением заявок и с экспоненциальным распределением времени между повторами обращения заявок из ИПВ проведена модификация метода асимптотического анализа в виде асимптотических семиинвариантов. Данный метод позволяет получить более точную аппроксимацию характеристической функции по сравнению с гауссовской аппроксимацией.
6. Проведена модификация метода асимптотического анализа для RQ-системы с вытеснением заявок и экспоненциальной задержкой заявок в ИПВ, с помощью которой, найдена диффузионная аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в ИПВ и состояний прибора. Этот метод позволяет выполнить аппроксимацию двумодальных распределений.
7. Разработан численный алгоритм на основе рекуррентных формул, представленных в диссертации, для нахождения двумерного рас-

предела вероятностей состояний обслуживающего прибора и числа заявок в ИПВ для RQ-системы с вытеснением заявок.

**Положения и результаты, выносимые на защиту.**

1. Новый класс математических моделей RQ-систем с вытеснением заявок и случайным доступом.
2. Математические модели RQ-систем  $M | GI | 1$  с вытеснением, экспоненциальной и гиперэкспоненциальной задержкой заявок в источнике повторных вызовов, RQ-систем с двумя входящими потоками и вытеснением альтернативных заявок.
3. Модификация метода асимптотического анализа для получения вида предельной характеристической функции распределения вероятностей состояний RQ-систем с экспоненциальной и гиперэкспоненциальной задержкой заявок в источнике повторных вызовов и вытеснением заявок.
4. Модификация метода асимптотического анализа в виде асимптотических семиинвариантов для нахождения аппроксимации третьего порядка RQ-системы  $M | GI | 1$  с вытеснением заявок.
5. Модификация метода асимптотического анализа для нахождения диффузионная аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в ИПВ и состояний прибора RQ-системы с вытеснением заявок и экспоненциальной задержкой.
6. Комплекс проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для имитационного моделирования и численного анализа RQ-систем с вытеснением заявок.

**Методы исследования.** Исследования основаны на использовании аппарата теории вероятности, теории случайных процессов, теории массового обслуживания. Применялся метод характеристических функций. Основное исследование проводилось методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки. Для установления области применимости асимптотических результатов используются метод имитационного моделирования и численные эксперименты.

Результаты, изложенные в данной диссертации, имеют теоретическое и практическое значения.

**Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы.**

Предложенный новый класс RQ-систем с вытеснением заявок существенно расширяет возможности решения ряда научных проблем, связанных с исследованием систем массового обслуживания аналитическими и численными методами. Разработанные методы и алгоритмы позволяют выполнять анализ более широкого класса систем с повтор-

ными вызовами, который является важным разделом теории массового обслуживания.

RQ-системы с вытеснением заявок могут быть использованы в качестве математических моделей телекоммуникационных и транспортных систем, а также компьютерных операционных систем.

В телекоммуникационных системах при проектировании сетей нового поколения для создания новых протоколов случайного множественного доступа и модификации уже существующих.

В транспортных системах при разрешении коллизий при проезде перекрестков автономно управляемыми системами.

В компьютерных операционных системах при разработке алгоритмов управления процессами (планировщиков).

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов подтверждается корректным использованием математического аппарата, теории массового обслуживания, теории случайных процессов, согласованностью результатов, полученных разными методами, а также численными экспериментами и имитационным моделированием.

**Личное участие автора в получении результатов.** Постановка изложенных задач была сделана научным руководителем, доктором технических наук, профессором А. А. Назаровым. Математические выкладки выполнены Я. Е. Измайловой. В совместных публикациях А. А. Назарову принадлежат постановки задач и указание основных направлений исследования.

**Связь работы с крупными научными проектами.** Значительная часть результатов диссертации была получена в рамках выполнения: 1) госзадания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012-2013 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-коммуникационных систем обработки, хранения и передачи информации» № 8.4055.2011, номер госрегистрации 01201261193 в 2012-2013 гг.; 2) научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в 2014-2016 гг.; 3) научного проекта № 16-31-00292 мол\_а «Разработка асимптотических методов исследования математических моделей телекоммуникационных систем» при финансовой поддержке РФФИ.

**Соответствие паспорту специальности.**

Данное диссертационное исследование выполнено в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно соответствует следующим областям (номера соответствуют пунктам в паспорте специальности):

п.2 – Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

п.4 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

п.5 – Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Апробация работы.** Основные положения работы и отдельные ее результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Научное творчество молодежи: XVII, XVIII Всероссийская научно-практическая конференция, г. Анжеро-Судженск, 2013-2014 гг; XX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи. Математика. Информатика» (28-29 апреля 2016 г.), г. Анжеро-Судженск; I, II, III Всероссийская молодежная научная конференция с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» г. Томск, 2013-2015 гг; XII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование» (29-30 ноября 2013 г.), г. Анжеро-Судженск; XIII, XIV Международная научно-практическая конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», г. Анжеро-Судженск, 2014-2015 гг; XV Международная конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2016) (12-16 сентября 2016 г.), пос. Катунь Алтайского края; 52-ая международная научная студенческая конференция (11-18 апреля 2014 г.), г. Новосибирск; IV, VI Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем», г. Москва, 2014 г., 2016 г.; X Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (8-12 июня 2014 г.), пос. Катунь Алтайского края; XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (29-31 октября 2014 г.), г. Тюмень; «Теория вероят-



ностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (23-26 февраля 2015 г.), г. Минск (Республика Беларусь); Международная научная конференция «Information Technologies for Complex System Analysis and Synthesis. The Second International Summer School» (8-12 июня 2015 г.), г. Анапа.

**Публикации.** По результатам исследований опубликовано 21 печатная работа, в том числе 3 в журналах, включенных в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, 18 в сборниках материалов международных и всероссийских конференций, из которых 3 публикации в сборниках, индексируемых Web of Science и Scopus.

**Структура работы.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (105 наименований). Общий объем работы 148 страниц.

Во **введении** описана актуальность работы, поставлены цели и задачи, изложена теоретическая и практическая значимость диссертационной работы.

**В первой главе** проводится исследование RQ-систем  $M | GI | 1$  с вытеснением заявок.

Рассматривается RQ-система  $M | GI | 1$  с вытеснением заявок и экспоненциальным распределением времени между повторами обращений заявок из ИПВ.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени с функцией распределения  $B(x)$ . Если прибор занят, то поступившая заявка вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор, а вытесненная заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь встает на прибор. Если прибор свободен, то заявка занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка из ИПВ вытесняет обслуживаемую заявку и сама встает на прибор, а вытесненная заявка уходит в ИПВ.

Ставится задача исследования процесса  $i(t)$  – числа заявок в ИПВ. Так как рассматриваемый процесс немарковский, то определим состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят} \end{cases}$$

и проведем исследование марковского процесса с переменным числом компонент. Если  $k(t) = 0$ , то рассматриваем процесс  $\{k(t), i(t)\}$ . Если  $k(t) = 1$ , то рассматриваем процесс  $\{k(t), i(t), z(t)\}$ , где  $z(t)$  – остаточное время от момента  $t$  до момента окончания обслуживания.

Для распределения вероятностей  $P_0(i) = P\{k(t) = 0, i(t) = i\}$ ,  $P_1(i, z) = P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z\}$  составлена система уравнений Колмогорова, которая в стационарном режиме имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(i, 0)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, z)}{\partial z} &= \lambda B(z) P_0(i) - (\lambda + i\sigma) P_1(i, z) + \\ &+ i\sigma B(z) P_1(i, \infty) + \lambda B(z) P_1(i-1, \infty) + (i+1)\sigma B(z) P_0(i+1), \quad (1) \\ \frac{\partial P_1(i, 0, t)}{\partial z} &= (\lambda + i\sigma) P_0(i). \end{aligned}$$

**Определение.** Пропускной способностью  $S$  будем называть максимальное среднее число заявок, которые может обслужить система в единицу времени.

Сформулирована и доказана теорема, определяющая пропускную способность системы.

**Теорема 1.** Пропускная способность  $S$  RQ-системы  $M|GI|1$  с вытеснением заявок имеет вид

$$S = B'(0). \quad (2)$$

Так как условием существования стационарного режима в системе массового обслуживания с пропускной способностью  $S$  является неравенство  $\lambda < S$ , то для рассматриваемой RQ-системы при  $B'(0) = \infty$  стационарный режим существует при любых конечных значениях интенсивности  $\lambda$  входящего потока. При  $B'(0) = 0$  стационарного режима в данной системе не существует при любых, даже сколь угодно малых положительных значениях интенсивности  $\lambda$ .

На основе системы (1), разработан численный алгоритм нахождения двумерного стационарного распределения вероятностей  $P_0(i)$ ,  $P_1(i) = P_1(i, \infty)$ , которое будет использовано для определения области применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации.

Далее система исследуется методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок в источнике повторных вызовов ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Получена асимптотическая характеристическая функция вида

$$h_2^{as}(w) = \exp \left\{ jw\kappa_1 + \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \right\}, \quad (3)$$

позволяющая найти аппроксимацию второго порядка распределения вероятностей  $P(i)$ , которую будем называть гауссовской аппроксимацией. Значения параметров  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  определены в диссертации.

Также получена функция

$$h_3^{as}(w) = \exp \left\{ jw\kappa_1 + \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 + \frac{(jw)^3}{6} \kappa_3 \right\}, \quad (4)$$

не являющаяся характеристической, но позволяющая построить дискретное распределение, которое будем называть аппроксимацией третьего порядка. Здесь  $\kappa_1$  определяется уравнением, а  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  равенствами, представленными в диссертации.

Далее рассматривается RQ-система той же структуры, но с гиперэкспоненциальным распределением вероятностей времени между повторами обращений заявок из ИПВ. То есть с вероятностью  $q$  заявки попадают на первую фазу (ИПВ 1), где осуществляют задержку экспоненциально распределенной продолжительности с параметром  $\sigma_1$ . С вероятностью  $1 - q$  заявки попадают на вторую фазу (ИПВ 2), где осуществляют задержку экспоненциально распределенной продолжительности с параметром  $\sigma_2$ .

Ставится задача нахождения двумерного стационарного распределения вероятностей случайного процесса  $\{i_1(t), i_2(t)\}$  числа заявок в ИПВ на каждой фазе. Показано, что асимптотическая характеристическая функция указанного распределения имеет вид характеристической функции двумерного нормального распределения.

**Во второй главе** с помощью метода асимптотического анализа в предельном условии большой задержки, выполнена диффузионная аппроксимация распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов RQ-системы  $M | GI | 1$  с вытеснением заявок.

Сформулирована и доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $i(t)$  число требований в ИПВ RQ-системы с вытеснением заявок. Тогда при  $\sigma \rightarrow 0$  процесс

$y(\tau) = \sqrt{\sigma} \left( i \left( \frac{\tau}{\sigma} \right) - \frac{x(\tau)}{\sigma} \right)$  является диффузионным, распределение вероятностей  $P(y, \tau)$  которого, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a(x(\tau))yP(y, \tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{b(x(\tau))P(y, \tau)\}, \quad (5)$$

где  $a(x(\tau))y = [R_1^*(x(\tau)) - R_0(x(\tau))]y$  – коэффициент переноса,

$b(x(\tau)) = x(\tau)R_0(x(\tau)) + \lambda R_1(x(\tau)) + 2x'(\tau)R_1^*(x(\tau))$  – коэффициент диффузии.

Применяя решение  $P(y, \tau)$  уравнения (5), построена локальная диффузионная аппроксимация для одномодальных распределений вероятностей  $P(i)$ .

Для аппроксимации двумодальных распределений вероятностей  $P(i)$  построена глобальная диффузионная аппроксимация.

Для нахождения глобальной диффузионной аппроксимации сформулирована и доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $i(t)$  число требований в ИПВ RQ-системы с вытеснением заявок. Тогда при  $\sigma \rightarrow 0$  процесс

$z(\tau) = \sigma i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) = x(\tau) + \sqrt{\sigma}y(\tau)$  является диффузионным, распределение

вероятностей которого, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \pi(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z} \{A(z)\pi(z, \tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{\sigma b(z)\pi(z, \tau)\}. \quad (6)$$

**Следствие.** Стационарное распределение, определяемое уравнением Фоккера-Планка (6), имеет вид

$$\pi(z) = \frac{1}{b(z) \int_0^{\infty} \frac{1}{b(y)} \exp\left(\frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{A(x)}{b(x)} dx\right) dy} \exp\left\{\frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{A(x)}{b(x)} dx\right\}, \text{ где } a(z) = A'(z).$$

В третьей главе проводится исследование RQ-системы с двумя входящими потоками, с двумя источниками повторных вызовов и с г-настоячивым вытеснением заявок другого потока.

На вход RQ-системы поступают два простейших потока заявок с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответственно. Если прибор свободен, то пришедшая заявка занимает прибор для обслуживания в течение случайного времени с функциями распределения  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$ , соответственно. Если в момент прихода заявка первого потока обнаруживает прибор занятым заявкой первого потока, то она уходит в ИПВ1 (источник повторных вызовов для заявок первого потока), где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром  $\sigma_1$ . После случайной задержки заявка вновь обра-

щается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если же в момент прихода заявка первого потока обнаруживает прибор занятым заявкой второго потока, то пришедшая заявка с вероятностью  $r_1$  вытесняет заявку второго потока, которая уходит в ИПВ2 (источник повторных вызовов для заявок второго потока), а сама встает на обслуживание, иначе с вероятностью  $1 - r_1$  уходит в ИПВ1, где осуществляет случайную задержку.

Если в момент прихода заявка второго потока обнаруживает прибор занятым заявкой первого потока, то пришедшая заявка с вероятностью  $r_2$  вытесняет заявку первого потока, которая уходит в ИПВ1, а сама встает на обслуживание, иначе с вероятностью  $1 - r_2$  уходит в ИПВ2, где осуществляет случайную задержку, распределенную по экспоненциальному закону с параметром  $\sigma_2$ . После случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Таким образом происходит  $r$ -настойчивое вытеснение альтернативных заявок. При обращении заявок из ИПВ1 и ИПВ2  $r$ -настойчивое вытеснение происходит аналогичным образом.

Ставится задача нахождения совместного распределения вероятностей числа заявок в ИПВ1, в ИПВ2 и состояний прибора:

$$P\{k(t) = 0, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2\} = P_0(i_1, i_2, t),$$

$$P\{k(t) = n, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, z(t) < z\} = P_n(i_1, i_2, z, t), \quad n = 1, 2,$$

где  $k(t)$  – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят заявкой первого потока,} \\ 2, & \text{если прибор занят заявкой второго потока.} \end{cases}$$

Исследование проводится с помощью метода асимптотического анализа в условии большой задержки заявок в источниках повторных вызовов ( $\sigma \rightarrow 0$ ), полагая, что  $\sigma_1 = \sigma\gamma_1$ ,  $\sigma_2 = \sigma\gamma_2$ .

Показано, что асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок в источниках повторных вызовов имеет вид

$$H(w_1, w_2) = \exp \left\{ jw_1x_1 + jw_2x_2 + \frac{(jw_1)^2}{2} Q_{11} + \frac{(jw_2)^2}{2} Q_{22} + jw_1jw_2Q_{12} \right\},$$

определяющий двумерное нормальное распределение.

Величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$  получены в диссертации.

**В четвёртой главе** приведен численный алгоритм и представлены численные результаты исследований и примеры для различных

функций распределения времени обслуживания и различных интенсивностях входящего потока. В качестве примера времени обслуживания была рассмотрена взвешенная сумма гамма и экспоненциально-го распределений вероятностей вида:

$$B'(x) = q \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} + (1-q)\gamma e^{-\gamma x},$$

так как при определенных значениях параметров  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  она охватывает все случаи пропускной способности рассматриваемых систем.

Приведен численный анализ RQ-систем  $M | GI | 1$  с вытеснением заявок в условии конечной ненулевой пропускной способности системы. Параметры времени обслуживания мы полагали  $\alpha > 1$ ,  $q < 1$ . Для различных значений параметров распределения времени обслуживания, были найдены распределения  $P_k(i)$ ,  $k = 0, 1$  и  $P(i)$ , полученные с помощью реализации численного алгоритма. По данным распределениям найдены первые три момента  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  числа заявок в ИПВ. Выполнена аппроксимация распределения  $P(i)$  гауссовским распределением  $P_2(i)$  и распределением третьего порядка  $P_3(i)$ , которые заданы теми же моментами  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , что и распределение  $P(i)$ . Для оценки точности аппроксимаций приняты величины

$$\Delta_2 = \max_{0 \leq i \leq N} \left| \sum_{n=0}^i (P(n) - P_2(n)) \right|, \quad \Delta_3 = \max_{0 \leq i \leq N} \left| \sum_{n=0}^i (P(n) - P_3(n)) \right|,$$

которые равны расстоянию Колмогорова между функциями распределения, найденными численным алгоритмом и аппроксимациями. Здесь  $N$  выбирается из условия, что величина  $P(N)$  достаточно мала, например, равняется величине машинного нуля.

Показано, что:

1. Предложенные аппроксимации являются достаточно точными при  $\sigma < 0,1$ , так как их погрешность за редким исключением не превосходят 0,05.

2. С уменьшением значений  $\sigma$  точность аппроксимации возрастает и при  $\sigma < 0,01$  точность аппроксимации за редким исключением не превосходит 0,01.

3. Точность аппроксимации третьего порядка, как правило, выше точности аппроксимации второго порядка и при  $\sigma = 0,05$  в 2 раза, при  $\sigma = 0,01$  в пять раз, а при  $\sigma = 0,005$  в десять раз.

Выполнен численный анализ RQ-системы с вытеснением заявок в условии неограниченной пропускной способности. В этом случае значения  $\lambda$  могут быть достаточно большими, поэтому для численно-

го анализа распределения вероятностей  $P(i)$  рассматриваются величины погрешностей  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  аппроксимаций второго и третьего порядка не только для различных значений  $\sigma$ , но и для различных  $\lambda$ , выбирая их в интервале от 5 до 50.

В таблице 1 приведены значения погрешностей  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  аппроксимаций второго и третьего порядка распределения  $P(i)$  при различных значениях  $\lambda$  и  $\sigma$ .

Взяты следующие значения параметров

$$q = 0,5, \alpha = 0,2, \beta = 1, \gamma = 5, S = B'(0) = \infty, N = 400.$$

Таблица 1 – Значения погрешностей  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  аппроксимаций второго и третьего порядка распределения вероятностей  $P(i)$

$\lambda \backslash \sigma$		100	50	20	10	1	0,5
5	$\Delta_2$	<b>0,064</b>	<b>0,022</b>	<b>0,186</b>	0,207	0,063	<b>0,032</b>
	$\Delta_3$	<b>0,058</b>	<b>0,057</b>	<b>0,064</b>	0,041	0,014	<b>0,008</b>
15	$\Delta_2$	0,197	0,201	0,088	0,062	<b>0,012</b>	<b>0,008</b>
	$\Delta_3$	0,041	0,017	0,009	0,017	$8 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$
25	$\Delta_2$	0,194	0,103	0,056	<b>0,031</b>	<b>0,008</b>	<b>0,005</b>
	$\Delta_3$	0,010	0,010	0,017	<b>0,005</b>	$3 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$
50	$\Delta_2$	0,054	0,054	<b>0,023</b>	<b>0,015</b>	<b>0,004</b>	<b>0,082</b>
	$\Delta_3$	0,018	0,016	<b>0,003</b>	<b>0,001</b>	$1 \times 10^{-4}$	<b>0,073</b>

Как видно из таблицы, предложенные аппроксимации имеют гораздо более широкую область применимости по сравнению с предыдущим разделом. Полагая, что аппроксимация приемлема, допустима при погрешности  $\Delta_2 < 0,05$ ,  $\Delta_3 < 0,05$ , данные таблицы 1 разделены на три области.

В первой левой верхней не рекомендуется применять предложенные аппроксимации, так как каждая из аппроксимаций имеет погрешность  $\Delta_2 > 0,05$ ,  $\Delta_3 > 0,05$ .

Во второй области применять аппроксимацию второго порядка не рекомендуется, а аппроксимация третьего порядка применима, так как в этой области выполняются неравенства  $\Delta_3 < 0,05 < \Delta_2$ .

В правой нижней области применимы обе аппроксимации, так как их погрешность  $\Delta_2 < 0,05$ ,  $\Delta_3 < 0,05$ .

Обратим внимание, что во второй области аппроксимация третьего порядка в 2 – 10 раз точнее аппроксимации второго порядка, а в правой нижней области эта точность увеличивается в 25 раз.

Был проведен численный анализ RQ-систем с вытеснением заявок в условии нулевой пропускной способности  $S = B'(0) = 0$ . При таком значении  $S$  данная RQ-система нестационарна при любой, сколь угодно малой, но положительной интенсивности  $\lambda$  входящего потока.

Показано, что если положить правую границу  $N$  изменения аргумента  $0 \leq i \leq N$   $N = 400$  и значения интенсивностей  $\lambda = 0,35$ , то получим случай, когда график распределения  $P(i)$  близок к нормальному (с моментами  $a_1 = 63,87$  и  $a_2 = 256,86$ ) настолько, что погрешность  $\Delta_2$  его аппроксимации гауссовским распределением составляет  $\Delta_2 = 0,025$ . Также определена область стабильного функционирования нестационарных RQ-систем с вытеснением заявок.

Далее график распределения  $P(i)$  сравнивается с гауссовским распределением  $P_2^{as}(i)$  и распределением третьего порядка  $P_3^{as}(i)$ , с моментами заданными асимптотическими семиинвариантами  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$ . Показано, что аппроксимация  $P_3^{as}(i)$  третьего порядка распределения вероятностей  $P(i)$  лучше гауссовской. Определена область применимости асимптотических результатов.

Приведены примеры численной реализации диффузионной аппроксимации. Время обслуживания рассматриваемой RQ-системы имеет распределение с преобразованием Лапласа-Стилтьеса вида:

$$B^*(x) = qe^{-\alpha x} + (1-q) \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{-1}.$$

Значения параметров распределений времени обслуживания и экспоненциальной задержки положены равными

$$q = 0,93, \alpha = 1, \gamma = 10, \sigma = 0,01.$$

При интенсивности  $\lambda = 0,3118$  и  $N = 1000$ , показано, что эта аппроксимация является достаточно точной, так как значение величины

$\Delta_d = \max_{0 \leq i \leq N} \left| \sum_{n=0}^i (P(n) - Pd(n)) \right|$ , при заданных значениях параметров составляет  $\Delta_d = 0,03$ .

Представлено описание комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов для расчета характеристик исследуемых процессов. Приводится описание программ имитационного моделирования RQ-систем с вытеснением и с неэкспоненциальной задержкой заявок в ИПВ и RQ-систем с двумя входящими потоками и с двумя



ИПВ. Также проведена оценка области применимости асимптотических результатов для этих систем.

В **заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

### ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:*

1. Назаров А. А. Исследование RQ-системы  $M/GI/1$  с вытеснением в условии большой задержки / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323, № 5. – С. 16–20. – 0,6 / 0,3 п.л.

2. Назаров А. А. Исследование двумерной RQ-системы  $M^{(2)}/M^{(2)}/1$  с  $r$ -настойчивым вытеснением альтернативных заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 211–214. – 0,24 / 0,12 п.л.

3. Назаров А. А. Исследование RQ-системы  $M^{(2)}/B^{(2)}(x)/1$  с  $r$ -настойчивым вытеснением альтернативных заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Измайлова** // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева. – 2016. – Т. 17, № 2. – С. 328–334. – 0,7 / 0,35 п.л.

*Статьи в сборниках материалов конференций, индексируемых Web of Science и Scopus:*

4. Nazarov A. The Accuracy of Gaussian Approximations of Probabilities Distribution of States of the Retrial Queueing System with Priority New Customers / A. Nazarov, **Ya. Chernikova (Izmaylova)** // Communications in Computer and Information Science. – 2014. – Vol. 487 : Information Technologies and Mathematical Modelling : Proceedings of the 13th International Scientific Conference, ITMM 2014. Anzhero-Sudzhensk, November 20–22, 2014. – P. 325–333. – DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4\_34. – 0,6 / 0,3 п.л.

5. Nazarov A. A. Gaussian Approximation of Distribution of States of the Retrial Queueing System with  $r$ -Persistent Exclusion of Alternative Customers / A. Nazarov, **Y. Chernikova (Izmaylova)** // Communications in Computer and Information Science. 2015. – Vol. 564 : Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proceedings of the 14th International Scientific Conference, ITMM 2015. Anzhero-Sudzhensk, Russia, November 18–22, 2015. – P. 200–208. – DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4\_17. – 0,6 / 0,3 п.л.

6. Nazarov A. A. Asymptotic Analysis Retrial Queueing System M/GI/1 with Hyper Exponential Distribution the Delay Time in the Orbit and Exclusion of Alternative Customers / A. Nazarov, **Ya. Izmaylova** // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 638 : Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proceedings of the 15th International Scientific Conference, ITMM 2016, named after A.F. Terpugov. Katun, Russia, September 12–16, 2016. – P. 292–302. – DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8\_26. – 0,8 / 0,4 п.л.

*Публикации в других научных изданиях:*

7. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Исследование RQ-системы M / GI / 1 / ИПВ с вытеснением заявки из прибора в условии большой задержки [Электронный ресурс] / Я. Е. Черникова (Измайлова) // Научное творчество молодежи : материалы XVII всероссийской научно-практической конференции. Анжеро-Судженск, 25–26 апреля 2013 г. – Томск, 2013. – Ч. 1. – С. 57–59. – URL: <http://www.asf.ru/upload/sbornik-NTM-2013.pdf>. – 0,18 / 0,09 п.л.

8. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Исследование RQ-системы M / GI / 1 / ИПВ с вытеснением заявки из прибора в условиях большой задержки/ Я. Е. Черникова (Измайлова) // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы I всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 17–18 мая 2013 г. – Томск, 2013. – Т. 288. – С. 125–127. – 0,26 п.л.

9. Назаров А. А. Асимптотический метод исследования RQ-системы M / GI / 1 с вытеснением / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Информационные технологии и математическое моделирование (ITMM – 2013) : материалы XII всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Анжеро-Судженск, 29–30 ноября 2013 г. – Томск, 2013. – Ч. 2. – С. 65–70. – 0,29 / 0,15 п.л.

10. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Численный анализ нестационарных RQ-систем с приоритетом поступающих заявок / Я. Е. Черникова (Измайлова), А. А. Назаров // Научное творчество молодежи : Математика. Информатика : материалы XVIII всероссийской научно-практической конференции. Анжеро-Судженск, 24–25 апреля 2014 г. – Томск, 2014. – Ч. 2. – С. 100–104. – 0,29 / 0,14 п.л.

11. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Исследование RQ-системы M / GI / 1 с приоритетом поступающих заявок методом асимптотических семиинвариантов / Я. Е. Черникова (Измайлова) // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2014. – Т. 295 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы

II всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 16–17 мая 2014 г. – С. 142–146. – 0,4 п.л.

12. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Численное исследование RQ-системы  $M/GI/1$  с приоритетом поступающих заявок в случае конечной ненулевой пропускной способности / Я. Е. Черникова (Измайлова) // МНСК – 2014 : Математика : материалы 52-й международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г. – Новосибирск, 2014. – С. 240. – 0,06 п.л.

13. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Численное исследование некоторых свойств RQ-систем  $M/GI/1$  с приоритетом поступающих заявок в случае неограниченной пропускной способности / Я. Е. Черникова (Измайлова) // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы всероссийской конференции с международным участием. Москва, 22–25 апреля 2014 г. – М., 2014. – С. 107–109. – 0,18 п.л.

14. Черникова Я. Е. Исследование RQ-системы с приоритетом поступающих заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой российской конференции с международным участием. Катунь, 09–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 109–110. – 0,24 / 0,12 п.л.

15. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Нестационарные RQ-системы с приоритетом поступающих заявок / Я. Е. Черникова (Измайлова), А. А. Назаров // XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям : тезисы докладов. Тюмень, 29–31 октября 2014 г. – Тюмень, 2014. – С. 82–83. – 0,06 / 0,03 п.л.

16. Назаров А. А. Гауссовская аппроксимация дискретного распределения вероятностей состояний RQ-системы с приоритетом заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2014) : материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 20–22 ноября 2014 г. – Томск, 2014. – Ч. 2. – С. 188–193. – 0,29 / 0,14 п.л.

17. Назаров А. А. Исследование бистабильной RQ-системы с приоритетом поступающих заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева. Минск, Республика Беларусь, 23–26 февраля 2015 г. – Минск, 2015. – С. 214–219. – 0,6 / 0,3 п.л.

18. **Черникова (Измайлова) Я. Е.** Асимптотический анализ RQ-системы с  $r$ -настойчивым вытеснением альтернативных заявок / Я. Е. Черникова (Измайлова) // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2015. – Т. 297 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы III всероссийской молодежной научной конференции. – С. 143–149. – 0,7 п.л.

19. Назаров А. А.  $M^{(2)}|M^{(2)}|1$  retrial queueing system with  $r$ -persistent exclusion of alternative customers / А. А. Назаров, **Я. Е. Черникова (Измайлова)** // Информационные технологии и математическое моделирование : материалы XIV Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г. – Томск, 2015. – Ч. 1. – С. 72–76. – 0,23 / 0,11 п.л.

20. Назаров А. А. Исследование RQ-системы  $M/GI/1$  с неэкспоненциальной задержкой заявок в ИПВ и вытеснением заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Измайлова** // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем : материалы всероссийской конференции с международным участием. Москва, 18–22 апреля 2016 г. – Москва, 2016. – С. 43–45. – 0,24 / 0,12 п.л.

21. Назаров А. А. RQ-система  $M/GI/1$  с гиперэкспоненциальной задержкой заявок в ИПВ и вытеснением альтернативных заявок / А. А. Назаров, **Я. Е. Измайлова** // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016) : материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Катунь, 12–16 сентября 2016 г. – Томск, 2016. – С. 97–102. – 0,29 / 0,14 п.л.

Издание подготовлено в авторской редакции  
 Отпечатано на участке цифровой печати  
 Издательского Дома Томского государственного университета  
 Заказ №170217 от «17» февраля 2017 г. Тираж 100 экз.  
 г. Томск Московский тр.8 тел. 53-15-28