МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕРИАЛЫ

III Всероссийской молодежной научной конференции

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ, ТЕХНИЧЕСКИХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Томск, 22–23 мая 2015 г.

Под общей редакцией
кандидата технических наук И.С. Шмырина

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента эластичности по основным фондам время пребывания на магистрали увеличивается.

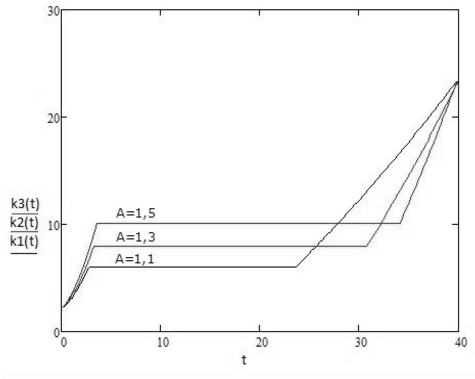

Рис. 5. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях *A*

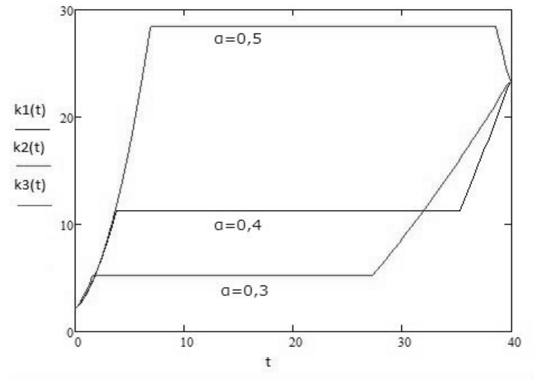

Рис. 6. Графики фондовооруженности первого сектора при различных значениях α

Заключение

В данной работе рассмотрена задача оптимального распределения ресурсов для двухсекторной модели экономики с целью максимизации непроизводственного потребления. Задача решена как задача оптимального управления с использованием принципа максимума Понтрягина. Проведено моделирование для производственной функции Кобба-Дугласа. Проанализировано влияния экзогенных факторов на решение задачи: установлено, что темп изменения трудовых ресурсов и норма дисконтирования не оказывают влияния на время нахождения на магистрали, а такие факторы как норма амортизации, технологический коэффициент и коэффициент эластичности по основным фондам влияют на время нахождения на магистрали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М. : Прогресс, 1975. – Гл. 14 : Принцип максимума. – С. 414-469.

2. Макроэкономика : учебное пособие / Н.И. Демин, Т.И. Грекова. – Томск : Из-во Томский государственный университет, 2008. – 228 с.

3. *Параев Ю.И.* Решение терминальной задачи оптимального управления односекторной экономикой / Ю. И. Параев, Т. И. Грекова // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – №3(19). – С. 14-19.

4. *Параев Ю.И.* Оптимальное управление в динамической задаче экономики // Palmarium Academic Publishing. – 2013. – С.77-82.

5. *Полуэктова К.О.* Оптимальное распределение ресурсов в двухсекторной модели экономики // Сборник докладов II Всероссийской молодежной научной конференции с международным участием «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». – 2014.

6. *Полуэктова К.О.* Оптимальное распределение ресурсов в двухсекторной модели экономики : отчет по преддипломной практике / К.О. Полуэктова. – Томск, 2014. – 42 с.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ

Е. С. Ульянова

Томский государственный университет

E-mail: katerina_tomsk@sibmail.com

Введение

Модели управления запасами с ограниченным сроком годности интенсивно изучаются в последние годы. За это время появилось несколько обзорных статей по данной теме, например, обзоры S.K. Goyal, B.C. Giri [1], M. Bakker, J. Riezebos и R. H. Teunter [2]. Укажем еще на работы V. K. Mishra и L. S. Singh [3,4], R. Begum, S. K. Sahu and R. R. Sahoo [5,6], R. P. Tripathi, D. Singh and T. Mishra [7], в которых рассматриваются модели управления запасами, непрерывно портящимися с течением времени, при условии, что спрос на продукты является известной функцией от времени. В работе V. Sharma и R. R. Chaudhary [8] рассматривается модель управления запасами, где спрос на продукты является известной функцией от времени, а процесс ухудшения продукции рассматривается как случайный с функцией распределения Вейбулла. В статье C. K. Tripathy и U. Mishra [9] рассматривается модель управления непрерывно портящимися запасами, где спрос является известной функцией от цены.

Однако более реалистичным является описание спроса пуассоновским потоком. Следовательно, существует возможность расширения моделей управления запасами с ограниченным сроком годности и их исследования.

В данной работе рассматривается задача производства и сбыта скоропортящейся продукции с постоянной скоростью поступления и пуассоновским потоком спроса.

1. Математическая модель задачи

В настоящей работе задача поступления (производства) и сбыта скоропортящейся продукции рассматривается при следующих предположениях. Считается, что продукция поступает с постоянной скоростью *C*, так что за время *t* поступает *Ct* единиц продукции. При хранении продукция непрерывно портится. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени *t*. Тогда потери за малое время Δt равны $kS(t)\Delta t$. Будем считать, далее, что величины покупок – независимые случайные величины с плотность распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и вторым моментом $M\left\{x^2\right\} = a_2$. Моменты продаж образуют пуассоновский поток, интенсивность которого λ зависит от цены продажи *b*. Считается, что интенсивность потока продаж λ монотонно убывает с ростом цены *b*.

Управление продажами осуществляется следующим образом. Вводится пороговое значение допустимого запаса продукции S_0. При $S(t) \le S_0$ назначается цена продажи b_0, при $S(t) > S_0$ назначается цена продажи $b_1 < b_0$. В соответствии с этим текущая интенсивность потока моментов продаж имеет вид

$$\lambda(S) = \begin{cases} \lambda_0, S \le S_0, \\ \lambda_1, \mathrm{S} > \mathrm{S}_0. \end{cases} \tag{13}$$

Естественно считать, что $C - \lambda_0 a > 0$ и $C - \lambda_1 a < 0$. До достижения критического уровня S_0 создается запас продукции, затем начинается ее распродажа. Наконец, возможна ситуация, когда текущий спрос не может быть удовлетворен полностью. В этом случае считается, что $S(t) < 0$. Заказы удовлетворяются в порядке их поступления.

Обозначим

$$P(S,t) = \frac{F\{S \le S(t) < S + dS\}}{dS}$$

– плотность распределения количества продукции *S* в момент времени *t*.

Теорема 1. Если $P(S,t)$ дифференцируема по *t*, $SP(S,t)$ дифференцируема по *S*, то функция $P(S,t)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial S}\left[(kSI(S) - C)P(S,t)\right] - \lambda(S)P(S,t) + \int_0^\infty \lambda(S+y)P(S+y,t)\varphi(y)dy\,, \tag{14}$$

где $I(S)$ – единичная ступенчатая функция.

2. Экспоненциальное распределение покупок

Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда покупки имеют экспоненциальное распределение

$$\varphi(S) = \frac{1}{a}\exp(-\frac{S}{a}).$$

Рассмотрим сначала область $S < S_0$. Уравнение (2) в стационарном режиме при $t \to \infty$ в этой области перепишется в виде

$$\frac{d}{dS}\left[(kSI(S)-C)P(S)\right]-\lambda_0 P(S)+\frac{\lambda_0}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^{S_0}P(z)e^{-\frac{z}{a}}dz+\frac{\lambda_1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_{S_0}^{\infty}P(z)e^{-\frac{z}{a}}dz=0, \tag{15}$$

$$-\infty < S \le S_0.$$

В области $S < 0$ коэффициент порчи $k(S) = 0$ и решение уравнения (3) имеет вид

$$P(S) = Be^{\frac{C-\lambda_0 a}{Ca}}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь область $0 < S < S_0$. В этой области коэффициент порчи $k(S) = kS$. Продифференцировав уравнение (3), получим

$$\frac{d^2}{dS^2}\left[(kS-C)P(S)\right]-\lambda_0\dot{P}(S)+\frac{\lambda_0}{a^2}e^{\frac{S}{a}}\int_S^{S_0}P(z)e^{-\frac{z}{a}}dz-\lambda_0 P(S)+\frac{\lambda_1}{a^2}e^{\frac{S}{a}}\int_{S_0}^{\infty}P(z)e^{-\frac{z}{a}}dz=0. \tag{17}$$

Умножая (3) на $\frac{1}{a}$ и вычитая из (5), получим уравнение

$$\frac{d^2}{dS^2}\left[(C-kS)P(S)\right]-\frac{d}{dS}\left[\left(\frac{C-kS}{a}-\lambda_0\right)P(S)\right]=0. \tag{18}$$

Решая дифференциальное уравнение (6), получим

$$P(S)=\left[D_1+D\int_0^S e^{-\frac{x}{a}}(C-kx)^{-\frac{\lambda_0}{k}}dx\right]e^{\frac{S}{a}}(C-kx)^{\frac{\lambda_0}{k}-1},\ S\ge 0, \tag{19}$$

где D и D_1 – постоянные интегрирования.

Для нахождения констант рассмотрим точку $S = 0$. В точке $S = 0$ должны выполняться условия непрерывности $P(0-0) = P(0+0), P'(0-0) = P'(0+0)$. Откуда получим $D = 0$ и $B = D_1 C^{\frac{\lambda_0}{k}-1}$.

Рассмотрим область $S > S_0$. Уравнение (2) в стационарном режиме при $t \to \infty$ в этой области перепишется в виде

$$\frac{d}{dS}\left[(kS-C)P(S)\right]-\lambda_1 P(S)+\frac{\lambda_1}{a}e^{\frac{S}{a}}\int_S^{\infty}P(\mathrm{z})\mathrm{e}^{-\frac{z}{a}}dz=0,\ S > S_0. \tag{20}$$

Решение уравнения (8) в области $S < S_0 \le \frac{C}{k}$ имеет вид

$$P(S) = Ae^{\frac{S}{a}}(C-kS)^{\frac{\lambda_1}{k}-1}. \tag{21}$$

Из уравнения (5) при $S = S_0$ получим связь между константами A и B

$$A = B(1-\frac{k}{C}S_0)^{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{k}}C^{\frac{\lambda_1}{k}-1}. \tag{22}$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид

$$P(S)=\begin{cases} Be^{\frac{C-\lambda_0 a}{Ca}S}, & S<0,\\ B(1-\frac{k}{C}S)^{\frac{\lambda_0}{k}-1}e^{\frac{S}{a}}, & 0\le S\le S_0,\\ B(1-\frac{k}{C}S_0)^{\frac{\lambda_0-\lambda_1}{k}}(1-\frac{k}{C}S)^{\frac{\lambda_1}{k}-1}e^{\frac{S}{a}}, & S_0<S\le\frac{C}{k}, \end{cases} \tag{23}$$

где постоянная B определяется из условия нормировки.

3. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта

В общем случае найти решение уравнения (2) не удается даже в стационарном режиме. Поэтому представляет интерес построение приближенных решений уравнения (2).

Будем предполагать, что скорость производства $C=cN$, интенсивности потоков покупок $\lambda_0=\Lambda_0 N,\ \lambda_1=\Lambda_1 N$, порог $S_0=s_0 N$, где $N\gg 1$. Рассмотрим поведение решения уравнения (2) при $N\to\infty$. Обозначим $\varepsilon^2=1/N$. Введем функцию

$$F(S,t,\varepsilon)=P(\frac{S}{\varepsilon},t)\,. \tag{24}$$

Рассмотрим вначале область $S>S_0$. Уравнение (2) в этой области перепишется в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}+\Lambda_1 F(y,t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\big[(k\varepsilon y-c)F(y,t,\varepsilon)\big]+\Lambda_1\int_0^\infty F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)\varphi(z)dz\,. \tag{25}$$

Раскладывая функцию $F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по первому аргументу и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\big[(k\varepsilon y-c+\Lambda_1 a)F(y,t,\varepsilon)\big]+\Lambda_1\frac{a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(y,t,\varepsilon)}{\partial y^2}+o(\varepsilon^2)\,. \tag{26}$$

Введем новые переменные

$$t=t\,,\ u=y-\frac{1}{\varepsilon}x(t)\,, \tag{27}$$

где функцию $x(t)$ определим ниже, и функцию $Q(u,t,\varepsilon)$ соотношением

$$F(y,t,\varepsilon)=Q(y-\frac{1}{\varepsilon}x(t),t,\varepsilon)\,. \tag{28}$$

Потребуем, чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению

$$\dot{x}(t)=-kx(t)+c-\Lambda_1 a\,. \tag{29}$$

Тогда для функции $Q(u,t,\varepsilon)$ будем иметь

$$\frac{\partial Q(u,t,\varepsilon)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\big[kuQ(u,t,\varepsilon)\big]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}Q(u,t,\varepsilon)+\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}\,. \tag{30}$$

Пусть

$$Q(u,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}Q(u,t,\varepsilon)\,. \tag{31}$$

Тогда

$$\frac{\partial Q(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\big[kuQ(u,t)\big]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}\frac{\partial^2 Qu,t)}{\partial u^2}\,. \tag{32}$$

Соответствующее (20) стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $u(t)$

$$du(t)=-ku(t)dt+\sqrt{\Lambda_1 a_2}\,dW(t)\,, \tag{33}$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Из уравнений (17) и (21), учитывая сделанные замены переменных, будем иметь для процесса $\xi(t)=\varepsilon^2 S(t)$ при $\varepsilon \ll 1$

$$d\xi(t)=-k\xi(t)dt+(c-\Lambda_1 a)dt+\sqrt{\Lambda_1 a_2}\,\varepsilon dW(t)\,. \tag{34}$$

Пусть

$$h(z,t)=\frac{\partial \Pr\{\xi(t)<z\}}{\partial z}\,. \tag{35}$$

Согласно (22) плотность распределения $h(z,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\big[(c-\Lambda_1 a-kz)h(z,t)\big]+\frac{\Lambda_1 a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 h(z,t)}{\partial z^2}\,. \tag{36}$$

В стационарном режиме получим для плотности распределения

$$h(z)=\lim_{t\to\infty}h(z,t)\,,\ \frac{\Lambda_1 a_2\varepsilon^2}{2}\frac{d^2h(z)}{dz^2}+\frac{d}{dz}\big[(\Lambda_1 a-c+kz)h(z)\big]=0\,, \tag{37}$$

откуда

$$h(z)=Be^{-\frac{(\Lambda_1 a-c+kz)^2}{\Lambda_1 a_2\varepsilon^2 k}}\,. \tag{38}$$

Рассмотрим теперь область $S<S_0$. Уравнение (2) относительно функции $F(S,t,\varepsilon)$ (6) теперь перепишется как

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}+\Lambda_0 F(y,t,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\big[(k\varepsilon yI(y)-c)F(y,t,\varepsilon)\big]+\Lambda_0\int_0^\infty F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)\varphi(z)dz+R(y,\varepsilon),$$

где

$$R(y,\varepsilon)=(\Lambda_1-\Lambda_0)\int_{S_0-\frac{y}{\varepsilon}}^{\infty}F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)\varphi(z)dz=o(\varepsilon^2)\,,$$

так как функция $F(y,t,\varepsilon)$ ограничена и второй момент a_2 существует. Поэтому последнее слагаемое в уравнении (19) в дальнейшем не учитывается. Раскладывая $F(y+\varepsilon z,t,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по первому аргументу, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(y,t,\varepsilon)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\big[(k\varepsilon yI(\mathrm{y})-c+\Lambda_0 a)F(y,t,\varepsilon)\big]+\Lambda_0\frac{a_2}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 F(\mathrm{y},t,\varepsilon)}{\partial y^2}+o(\varepsilon^2)\,. \tag{39}$$

Рассмотрим область $y<0$. Сделав замены (17) и (18) и положив

$$\dot{x}(t)=c-\Lambda_0 a\,, \tag{40}$$

получим при $\varepsilon\to 0$ для функции (13)

$$\frac{\partial Q(u,t)}{\partial t}=\frac{\Lambda_0 a_2}{2}\frac{\partial^2 Q(u,t)}{\partial u^2}\,. \tag{41}$$

Пусть $y>0$. Сделав замены (9) и (10) и положив

$$\dot{x}(t)=-kx(t)+c-\Lambda_0 a\,, \tag{42}$$

получим при $\varepsilon\to 0$ для функции (19)

$$\frac{\partial Q(u,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}\big[kuQ(u,t)\big]+\frac{\Lambda_0 a_2}{2}\frac{\partial^2 Qu,t)}{\partial u^2}\,. \tag{43}$$

Из соотношений (28)–(31) вытекает, что при $\varepsilon \ll 1$ процесс $\xi(t)=\varepsilon^2 S(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t)=-k\xi(t)I(\xi(\mathrm{t}))dt+(c-\Lambda_0 a)dt+\sqrt{\Lambda_0 a_2}\,\varepsilon dW(t)\,. \tag{44}$$

Из соотношения (32) вытекает, что в стационарном режиме плотность распределения (23) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}{2} \frac{d^2 h(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz}\left[(\Lambda_0 a - c + kzI(z))h(z)\right] = 0 . \tag{45}$$

С учетом граничного условия $h(-\infty) = 0$ в области $z < 0$ получим

$$h(z) = De^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2} z} . \tag{46}$$

В области $0 \le z \le s_0$ решение уравнения (26) имеет вид

$$h(z) = (D_1 + D_2 \int_0^z e^{-\frac{(kx+c-\Lambda_0 a)^2}{k\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}} dx) e^{\frac{(kz+c-\Lambda_0 a)^2}{k\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}} \tag{47}$$

В точке $z = 0$ должны выполняться условия непрерывности $h(0-0) = h(0+0)$, $h'(0-0) = h'(0+0)$, так как функция $h(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, откуда $D_2 = 0$ и $D = D_1 e^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2}}$.

Таким образом, плотность распределения $h(s)$ определяется соотношением

$$h(s) = \begin{cases} Ae^{\frac{(c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2 k}} e^{\frac{2(c-\Lambda_0 a)}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2} s}, \ s < 0, \\ Ae^{\frac{(ks+c-\Lambda_0 a)^2}{\Lambda_0 a_2 \varepsilon^2 k}}, \ 0 \le s \le s_0, \\ Be^{-\frac{(ks+c-\Lambda_1 a)^2}{\Lambda_1 a_2 \varepsilon^2 k}}, \ s > s_0. \end{cases} \tag{48}$$

Связь между постоянными *A* и *B* определяется далее, во-первых, условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{0} h(s)ds + \int_{0}^{s_0} h(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} h(\mathrm{s})ds = 1,$$

и, во-вторых, рассмотрением уравнения (2) при $S = S_0$ в стационарном режиме, которое в этом случае принимает вид

$$(kS_0 - C)\frac{\partial P(S_0,\infty)}{\partial S} + (k - \lambda_0)P(S_0,\infty) + \lambda_1 \int_0^{\infty} P(S_0 + y,\infty)\varphi(y)dy = 0 . \tag{49}$$

Заменяя плотность $P(S,\infty)$ на ее аппроксимацию (36), получим второе уравнение, связывающее постоянные *A* и *B*. Для получения окончательных соотношений необходимо, очевидно, задать явный вид плотности распределения $\varphi(y)$.

Для оценки точности получившейся аппроксимации рассмотрим в качестве примера случай, когда плотность распределения покупок являются экспоненциальной с параметром *a*. В этом случае точная формула для плотности распределения количества продукции имеет вид (11).

На рис. 1 приведены графики функций плотности распределения количества продукции $P(s)$ (сплошная линия), построенной по точной формуле (11), и $h(s)$ (пунктирная линия), построенной по формуле (36), при следующих значениях параметров: $C = 30$, $\lambda_0 = 0.8$, $\lambda_1 = 16$, $S_0 = 19$, $k = 1.2$, $a = 2$, $a_2 = 200$, $N = 10$.

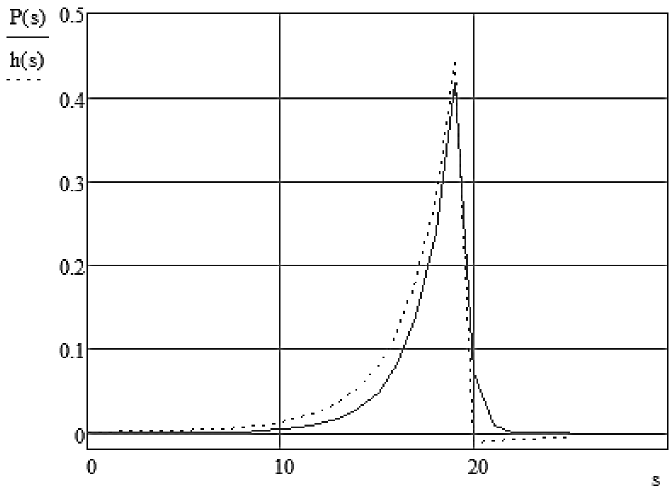

Рис. 1. Графики функций плотности распределения количества продукции

Заключение

Таким образом, в работе найдена плотность распределения количества скоропортящейся продукции при релейном управлении интенсивностью продаж и дополнительном предположении о том, что темп производства и интенсивность продаж достаточно велики. Аналогично вышеизложенному могут быть исследованы и более сложные алгоритмы управления продажами, например алгоритм с гистерезисным управлением продажами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goyal S.K., Giri B.C.* // European Journal of Operational Research. – 2001.– V. 134 (1). – P. 1–16.
2. *Bakker M., Riezebos J., Teunter R.H.* // European Journal of Operational Research. –2012. – V. 221. – P. 275–284.
3. *Mishra V.K.* // Journal of Industrial Engineering and Management. – 2013. – V. 6(2). – P. 495-506.
4. *Mishra V.K., Singh L.S.* // Applied Mathematical Sciences. – 2010. – V. 4. – No. 72. – P. 3611-3619.
5. *Begum R., Sahu S.K., Sahoo R.R.* // British Journal of Applied Science & Technology. – 2012. – V. 2(2). – P. 112-131.
6. *Begum R., Sahu S.K.* // International Journal of Inventory Control and Management. – 2012. – V. 2. – No. 2. – P. 257 – 268.
7. *Tripathi R.P., Singh D., Mishra T.* // International Journal of Supply and Operations Management. – 2014. – V. 1. – I. 1. –P. 20-37.
8. *Sharma V., Chaudhary R.* // Research Journal of Management Sciences. –2013. – V. 2(3). – P. 28-30.
9. *Tripathy C.K., Mishra U.* // Applied Mathematical Sciences. – 2010. – V. 4. – No. 44. – P., 2171 – 2179.