Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский педагогический государственный университет»

Абелевы группы

*Материалы Международного симпозиума,
посвященного 100-летию со дня рождения Л.Я. Куликова
(Москва, 2–6 ноября 2014 г.)*

Москва – 2014

[2] *Кочетова Ю.В.* Декартова сумма решеточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, Вып. 1. С. 92–101.

[3] *Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е.* Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, Вып. 1. С. 85–158.

[4] *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы / М.: Мир, 1965.

Формальные матрицы и их определители

Крылов П.А. (Томск), **Туганбаев А.А.** (Москва)

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, $M(n,R)$ — полное кольцо матриц порядка n над R, $n \geqslant 2$. Определим другое умножение матриц из $M(n,R)$ следующим образом. Пусть дано произвольное множество $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ центральных элементов s_{ijk} кольца R, $i,j,k = 1,\ldots,n$, удовлетворяющих равенствам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell} \tag{$*$}$$

для всех $i,j,k,\ell = 1,\ldots,n$. Если $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы из $M(n,R)$, то положим $AB = C = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj}a_{ik}b_{kj}$. Относительно этого нового умножения все матрицы образуют кольцо. Оно называется *кольцом формальных матриц* порядка n над кольцом R и обозначается через $M(n,R,\Sigma)$. Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца $M(n,R,\Sigma)$. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем кольцо $M(n,R)$. Свойства колец $M(n,R,\Sigma)$ могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n,R)$. При $n = 2$ кольцо $M(n,R,\Sigma)$ введено в [5], [6]. Кольца $M(n,R,\Sigma)$ также изучались и использовались в [2–8].

Зафиксируем индекс $\ell = 1,\ldots,n$ и положим $t_{ij} = s_{ij\ell}$ для всех $i,j = 1,\ldots,n$. Отображение $\eta\colon M(n,R,\Sigma) \to M(n,R)$, $(a_{ij}) \to (t_{ij}a_{ij})$, является кольцевым гомоморфизмом.

С данным кольцом $M(n,R,\Sigma)$ можно связать несколько матриц. Именно, положим $S = (s_{iji})$. Затем для каждого $k = 1,\ldots,n$ образуем матрицу $S_k = (s_{ikj})$. Будем называть матрицы S, S_k *матрицами множителей* кольца $M(n,R,\Sigma)$. Матрица S является симметрической.

Сформулируем несколько взаимосвязанных задач о кольцах формальных матриц $M(n,R,\Sigma)$.

(I). Задача реализации и характеризации. Пусть даны матрицы T, T_1, $\dots$, T_n порядка n с элементами из центра $C(R)$. При каких условиях эти матрицы являются матрицами множителей какого-либо кольца $M(n, R, \Sigma)$?

(II). Задача классификации. Описать кольца формальных матриц в зависимости от систем множителей или матриц множителей.

(III). Проблема изоморфизма. Когда две системы множителей определяют изоморфные кольца формальных матриц?

В общем случае решить задачи (I)–(III) трудно. Рассмотрим случай, когда $s_{ijk} = 1$, либо $s_{ijk} = s$ для всех i, j, k, где s — некоторый центральный элемент кольца R. Любое соответствующее кольцо матриц обозначается через $M(n, R, s)$.

Считаем, что дано кольцо $M(n, R, s)$. Дополнительно предполагаем, что $s^2 \neq 1$ и $s^2 \neq s$. В дальнейшем слова «матрица множителей» означают определенную выше матрицу S. Между элементами матрицы S существуют определенные соотношения. Невозможен случай, когда некоторые два элемента из трех множителей s_{iji}, s_{iki}, s_{jkj} равны 1, а третий элемент равен s.

Определим понятие абстрактной матрицы множителей. Пусть s — некоторый центральный элемент кольца R, причем $s^2 \neq 1$ и $s^2 \neq s$. Пусть $T = (t_{ij})$ — симметрическая матрица порядка n, в которой все элементы равны 1 или s, причем главная диагональ состоит из единиц, и для любых трех элементов t_{ij}, t_{ik}, t_{jk} невозможен случай, когда некоторые два элемента из трех равны 1, а третий элемент равен s. Назовем такую матрицу T *матрицей множителей.*

Теорема 1. *Пусть T — матрица множителей. Существует кольцо $M(n, R, s)$, матрица множителей которого совпадает с T.*

Рассмотрим проблему изоморфизма (III) для таких колец формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, что при $i \neq j$ и $j \neq k$ каждый множитель s_{ijk} равен s^m для некоторого $m \geqslant 1$, где s — фиксированный центральный элемент кольца R. Здесь мы обозначаем такие кольца также через $M(n, R, s)$.

Пусть теперь s и t — два ненулевых центральных элемента кольца R. На элементы s и t накладываются некоторые дополнительные условия. В следующей теореме $Z(R)$ обозначает множество всех (левых или правых) делителей нуля кольца R, $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R.

Теорема 2. *Пусть R — такое коммутативное кольцо, что $Z(R) \subseteq J(R)$. Кольца $M(n,R,s)$ и $M(n,R,t)$ изоморфны в точности тогда, когда $t = v\alpha(s)$, где v — обратимый элемент в R и α — автоморфизм кольца R.*

Пусть R — коммутативное кольцо и дано некоторое кольцо $M(n,R,\Sigma)$. Можно ввести понятие определителя матрицы в кольце $M(n,R,\Sigma)$. Это можно сделать с помощью обычного определителя и определенного выше гомоморфизма η, либо с помощью аналога формулы полного развертывания. Такие определители обладают свойствами, похожими на свойства обычного определителя матрицы над коммутативным кольцом. Верны также аналоги теоремы Гамильтона–Кэли и одного известного критерия обратимости матрицы. В нескольких случаях определители матриц в кольце $M(n,R,\Sigma)$ встречаются в [1], [2], [3], [8], [9].

Литература

[1] *Абызов А.Н., Тапкин Д.Т.* О некоторых классах колец формальных матриц // Известия вузов. Математика. – Принято к печати.

[2] *Gurgun O., Halicioglu S., Harmanci A.* Quasipolarity of generalized matrix rings // arxiv: 1303. 3173v1 [math. RA] 13 Mar2013.

[3] *Gurgun O., Halicioglu S., Harmanci A.* Strong J-cleanness of formal matrix rings // arxiv: 1308. 4105v1 [math. RA] 19 Aug2013.

[4] *Huang Q., Tang G., Zhou Y.* Quasipolar property of generalized matrix rings // Comm. Algebra. 2014. V. 42, No. 9. P. 3883–3894.

[5] *Крылов П.А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, вып. 4. Р. 456–463.

[6] *Krylov P.A., Tuganbaev A.A.* Modules over Formal Matrix Rings // J. Math. Sci. 2010. V. 171, No. 2. P. 248–295.

[7] *Tang G., Li Ch., Zhou Y.* Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. V. 42. P. 1668–1681.

[8] *Tang G., Zhou Y.* Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. P. 2546–2559.

[9] *Tang G., Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438, No. 12. P. 4672–4688.