На правах рукописи

Нежельская Людмила Алексеевна

ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ И ПАРАМЕТРОВ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск – 2017

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», на кафедре исследования операций.

Научный консультант: доктор технических наук, профессор **Горцев Александр Михайлович**

Официальные оппоненты:

Дудин Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, научно-исследовательская лаборатория прикладного вероятностного анализа, заведующий лабораторией

Малинковский Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра экономической кибернетики и теории вероятностей, заведующий кафедрой

Цициашвили Гурами Шалвович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, научно-исследовательская группа вероятностных методов и системного анализа, главный научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится 26 апреля 2017 г. в 10 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.12, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 212Б).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/Nezhel'skayaLA26042017.htm

Автореферат разослан «___» января 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Тарасенко Петр Феликсович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Теория массового обслуживания (ТМО), называемая зарубежными авторами теорией очередей, возникла в начале XX века и была представлена работами датского ученого А. К. Эрланга, связанными с решением задач в области телефонии – проектированием и расчетом систем обслуживания телефонного трафика. В середине XX века аналогичные телефонным задачи возникают в естествознании, медицине, организации производства, что обусловило возросший интерес ученых (как зарубежных, так и отечественных) к их решению методами ТМО. Основы и фундаментальные результаты по ТМО изложены в трудах И. Н. Гнеденко, Г. И. Ивченко, Л. Клейнрока, А. Кофмана, Г. А. Медведева, Д. Риордана, Т. Л. Саати, А. Я. Хинчина, D. Cox, C. Palm.

Развитию ТМО, совершенствованию применяемого математического аппарата способствуют работы Г. П. Башарина, В. М. Вишневского, А. Н. Дудина, В. Н. Задорожного, В. А. Ивницкого, Ю. В. Малинковского, М. А. Маталыцкого, А. З. Меликова, А. А. Назарова, К. Е. Самуйлова, М. П. Фархадова, Г. Ш. Цициашвили, S. Balsamo, R. Disney, E. Gelenbe, J. Harrison, J. Jackson, J. McKenna, J. Walrand по проектированию, внедрению, эксплуатации и модернизации информационно-вычислительных систем и сетей разной конфигурации, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей и т. п.

Основные вехи и тенденции развития ТМО до 90-х годов XX в., а также методы ТМО изложены в работах П. П. Бочарова, И. Н. Коваленко, Д. Кенига, Д. Штойяна, В. В. Рыкова. В 60–80-х годах прошлого столетия возникает повышенный интерес учёных в области ТМО к управляемым системам массового обслуживания (СМО), представляющим собой адекватные модели технических систем и систем экономического назначения, требующих решения в том числе и оптимизационных задач.

В подавляющем большинстве работ по исследованию СМО и сетей массового обслуживания в качестве входящих потоков событий рассматривались пуассоновские потоки. Однако в связи с развитием спутниковых, компьютерных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным потокам событий. Таким образом, требования практики послужили стимулом к рассмотрению дважды стохастических потоков в качестве математических моделей реальных потоков. D. Cox и J. Kingman первыми в своих статьях определяют дважды стохастический поток как поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; второй – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Потоки первого класса исследованы, в частности, в трудах D. Cox, J. Kingman, D. Snyder. Впервые результаты исследований потоков второго класса опубликованы практически одновременно, в 1979 г., в работах Г. П. Башарина, В. А. Кокотушкина, В. А. Наумова, где потоки названы МС-потоками, и M. Neuts, где потоки названы MVP-потоками. D. Lucantoni определил потоки второго класса как МАР-потоки. Зарубежными и отечественными учеными при описании подобных входящих потоков используются термины: дважды стохастические потоки событий, МАР-потоки, МС-потоки.

Автором предложена классификация МАР-потоков на МАР-потоки первого порядка и МАР-потоки второго порядка в зависимости от вариантов смены состояний интенсивности потока. Рассмотрен случай, когда кусочно-постоянный случайный процесс, являющийся интенсивностью МАР-потока, имеет два состояния. Класс МАР-потоков первого порядка составляют потоки, у которых смену состояний интенсивности определяет одна случайная величина: 1) *синхронные потоки*; 2) собственно *МАР-потоки* как обобщение синхронных потоков. Класс МАР-потоков второго порядка составляют потоки, у которых смена состояний интенсивности определяется двумя независимыми случайными величинами: 1) *модулированные МАР-потоки;* 2) *обобщенные асинхронные потоки*, являющиеся обобщением *асинхронных потоков*; 3) *обобщенные полусинхронные потоки* как обобщение *полусинхронных потоков* и *полусинхронных альтернирующих потоков.* Все перечисленные потоки с двумя состояниями исследованы в диссертационной работе.

Достаточно большое количество литературы посвящено исследованию СМО с входящими дважды стохастическими потоками событий, однако лишь в незначительной её части исследуются системы, в которых все параметры входящего потока неизвестны полностью или частично. В реальных же ситуациях параметры, определяющие поток событий, как правило, полностью неизвестны либо частично неизвестны. В подобных случаях с целью решения задачи управления обслуживанием такого потока и решения задачи адаптации реальной системы к входящему потоку необходимо оценивать неизвестные параметры либо состояния потоков событий в режиме реального времени. Вследствие этого актуальной является задача исследования потоков событий в двух направлениях: 1) оценка состояний потока; 2) оценка параметров потока.

Большинством авторов исследование СМО осуществляется в условиях, когда все события входящего потока доступны наблюдению. В реальности зарегистрированное событие может создать период мертвого времени, в течение которого другие события потока становятся недоступными для наблюдения (теряются). Можно считать, что мертвое время выступает искажающим фактором при решении задачи оценивания, так как эффект мертвого времени влечет за собой потери событий потока, что отрицательно сказывается на оценивании как состояний, так и параметров потока. Для того, чтобы оценить потери событий потока, возникающие из-за эффекта мертвого времени, необходимо оценить значение его длительности. Период ненаблюдаемости потока событий может продолжаться некоторое фиксированное время, а также может быть случайным.

В России исследования в области ТМО, в том числе, изучение СМО с входящими дважды стохастическими потоками событий проводились и проводятся в Институте проблем управления РАН учеными В. М. Вишневским, М. П. Фархадовым; в Российском университете дружбы народов учеными Г. П. Башариным, П. П. Бочаровым, А. В. Печинкиным, К. Е. Самуйловым, Ю. В. Гайдамака; в Российском государственном университете нефти и газа ученым В. В. Рыковым; в Московском университете путей сообщения ученым В. А. Ивницким; в Национальном исследовательском Томском государственном университете учеными А. Ф. Терпуговым, А. М. Горцевым, А. А. Назаровым, К. И. Лившицем, С. П. Моисеевой, С. П. Сущенко; в Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете учеными М. А. Федоткиным, А. В. Зориным; в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения РАН учеными Г. Ш. Цициашвили, Н. И. Головко, М. А. Осиповой; в Омском государственном техническом университете ученым В. Н. Задорожным. Подобными исследованиями занимаются в Белорусском государственном университете ученые Г. А. Медведев, А. Н. Дудин, В. И. Клименок, Г. В. Царенков; в Гомельском государственном университете ученый Ю. В. Малинковский; в Гродненском государственном университете ученый М. А. Маталыцкий; в Азербайджанской НАН ученый А. З. Меликов; в Австрийском университете им. И. Кеплера ученый Д. В. Ефросинин; в Варшавском университете ученый О. М. Тихоненко; в университете г. Пиза ученый M. Pagano; в США ученые M. Neuts, D. Lucantoni.

Итак, задачи оценивания состояний и параметров дважды стохастических потоков событий при полной или частичной наблюдаемости потоков являются актуальными научными проблемами.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является аналитическое и численное исследование различных видов дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях их полной или частичной наблюдаемости, разработка алгоритмов оценивания состояний и алгоритмов оценивания параметров и длительности мертвого времени изучаемых потоков событий.

Задачи исследования:

1) построить математические модели дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях их полной наблюдаемости, а также в условиях непродлевающегося и продлевающегося мертвого времени;

2) разработать эвристические пороговые алгоритмы оценивания состояний дважды стохастических потоков событий при полной наблюдаемости потоков: алгоритм оценки состояния при равноценных наблюдениях за потоком, алгоритм, учитывающий старение информации, алгоритм, учитывающий ошибки измерений моментов наступления событий потока; применить предложенные эвристические алгоритмы для оценки состояний синхронного, полусинхронного и асинхронного потоков событий при полной наблюдаемости потоков;

3) разработать алгоритм оптимальной оценки состояний дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях их полной наблюдаемости, основанный на методе максимума апостериорной вероятности; применить сформулированный алгоритм оптимального оценивания для асинхронного, синхронного, полусинхронного, обобщенного асинхронного, обобщенного полусинхронного, MAP-потока и модулированного MAP-потока событий;

4) разработать алгоритм оптимальной оценки состояний дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности; применить предложенный алгоритм оптимального оценивания для обобщенного асинхронного, полусинхронного, обобщенного полусинхронного, MAP-потока и модулированного MAP-потока событий;

5) разработать алгоритм оценки параметров дважды стохастических потоков событий либо параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в дважды стохастических потоках, функционирующих в условиях их полной наблюдае-

мости, с использованием метода моментов; применить разработанный алгоритм для синхронного, полусинхронного, полусинхронного альтернирующего, обобщенного асинхронного, MAP-потока и модулированного MAP-потока событий;

6) разработать алгоритм оценки параметров дважды стохастических потоков событий или параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в дважды стохастических потоках, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности, а также длительности мертвого времени с использованием метода моментов; применить сформулированный алгоритм для синхронного, полусинхронного и полусинхронного альтернирующего потоков событий;

7) разработать алгоритмы оценки длительности мертвого времени для дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности, основанные на методе максимального правдоподобия и модифицированном методе моментов; применить разработанные алгоритмы к решению задачи оценивания длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном, обобщенном полусинхронном и модулированном MAP-потоке событий;

8) сформулировать алгоритм расчета условной и безусловной вероятности вынесения ошибочного решения о состоянии дважды стохастического потока в произвольный момент времени на примере обобщенного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях его полной наблюдаемости;

9) разработать алгоритм оценивания длительности мертвого времени для рекуррентных дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях продлевающегося мертвого времени, с использованием метода моментов; применить разработанный алгоритм для рекуррентных синхронного и полусинхронного потоков событий;

10) провести статистические эксперименты на имитационных моделях дважды стохастических потоков для установления качества оценивания.

Научная новизна результатов, изложенных в диссертации:

1) впервые построены математические модели дважды стохастических потоков событий: синхронного, полусинхронного, полусинхронного альтернирующего, обобщенного полусинхронного, обобщенного асинхронного, MAP-потока, модулированного MAP-потока, функционирующих при непродлевающемся и продлевающемся мертвом времени;

2) разработан эвристический пороговый алгоритм оценивания состояний асинхронного потока, учитывающий старение информации и ошибки измерений моментов наступления событий потока;

3) разработан алгоритм оптимальной оценки состояний синхронного, полусинхронного, обобщенного полусинхронного, обобщенного асинхронного, МАР-потока и модулированного МАР-потока событий при полной наблюдаемости потоков, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;

4) разработан алгоритм оптимальной оценки состояний обобщенного асинхронного, полусинхронного, обобщенного полусинхронного, МАР-потока и модулированного МАР-потока событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности;

5) разработан алгоритм оценки параметров синхронного, полусинхронного, полусинхронного альтернирующего и обобщенного асинхронного потоков событий, а также алгоритм оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в МАР-потоке и модулированном МАР-потоке событий, функционирующих в условиях полной наблюдаемости потоков, основанный на методе моментов, с использованием явных видов одномерной и двумерной плотностей вероятностей;

6) разработан алгоритм оценки параметров синхронного, полусинхронного и полусинхронного альтернирующего потоков событий, функционирующих в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности, и длительности мертвого времени, основанный на методе моментов, с использованием явных видов одномерной плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемых потоках;

7) разработаны алгоритмы оценки длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном, обобщенном полусинхронном и модулированном МАР-потоке событий, основанные на методе максимального правдоподобия и модифицированном методе моментов, с использованием явных видов одномерной и двумерной плотностей вероятностей в наблюдаемых потоках;

8) разработан алгоритм расчета условной вероятности вынесения ошибочного решения о состоянии обобщенного асинхронного потока событий при полной наблюдаемости потока, а также получен явный вид безусловной вероятности ошибочного решения о состоянии рекуррентно-

го обобщенного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях полной наблюдаемости;

9) разработан алгоритм оценивания длительности мертвого времени в рекуррентных синхронном и полусинхронном потоках событий, функционирующих в условиях продлевающегося мертвого времени, основанный на методе моментов, с использованием преобразования Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемых потоках.

Методы исследования. При проведении исследования применялись методы теории вероятностей и математической статистики, теории массового обслуживания, случайных марковских процессов, теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, математического анализа, линейной алгебры, методы оптимизации.

Рассматриваемые задачи считаются решенными, если либо получено аналитическое решение, либо их решение доведено до процедур, которые могут быть выполнены численными методами с использованием компьютерной программы. К таким процедурам относятся, например, отыскание корней нелинейного трансцендентного уравнения, отыскание корней многочлена высокой степени, вычисление определенных интегралов и т.п. Статистические эксперименты поставлены на построенных (с использованием методов имитационного моделирования) имитационных моделях дважды стохастических потоков при их полной наблюдаемости, а также при непродлевающемся и продлевающемся мертвом времени.

Теоретическая и практическая значимость работы. Для широкого класса дважды стохастических потоков событий при их полной наблюдаемости аналитически решены: 1) задача оптимальной оценки состояний в произвольный момент времени по наблюдениям за моментами наступления событий; 2) задача оценки параметров потока, а также задача оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями.

Для широкого класса дважды стохастических потоков событий, функционирующих в условиях их частичной наблюдаемости (при непродлевающемся мертвом времени), аналитически решены: 1) задача оптимальной оценки состояний в произвольный момент времени по наблюдениям за моментами наступления событий; 2) задача оценки параметров потока и длительности мертвого времени.

Решена задача оценки длительности мертвого времени для рекуррентных синхронного и полусинхронного потоков при продлевающемся мертвом времени.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в том, что разработанные алгоритмы оценивания состояний, параметров и длительности мертвого времени в дважды стохастических потоках событий, функционирующих в условиях их полной и частичной наблюдаемости (при непродлевающемся и продлевающемся мертвом времени), являются математическим инструментом при исследовании функционирования реальных систем, математическими моделями которых являются СМО и сети массового обслуживания с входящими дважды стохастическими потоками. Разработанные алгоритмы могут быть применены для решения задач проектирования реальных сетей связи, информационно-телекоммуникационных сетей и их адаптации к информационным потокам сообщений, а также для обработки результатов физических экспериментов при наличии мертвого времени регистрирующих приборов.

На основе результатов диссертационной работы разработан курс лекций образовательной дисциплины «Методы идентификации и оценки параметров телекоммуникационных потоков» для магистров 2-го года обучения факультета прикладной математики и кибернетики Томского госуниверситета (ФПМК ТГУ). Результаты диссертации также использованы при разработке курсов лекций общеобразовательных дисциплин «Марковские системы обслуживания» и «Имитационное моделирование» для бакалавров 4-го года обучения ФПМК ТГУ. Результаты диссертации используются при выполнении курсовых работ бакалаврами 3-го курса и магистрами 1-го и 2-го курсов ФПМК, при выполнении выпускных квалификационных работ бакалаврами 4-го курса ФПМК и магистерских диссертаций магистрами 2-го курса ФПМК, а также при подготовке кандидатских диссертаций по указанной тематике.

Положения, выносимые на защиту:

1) математические модели дважды стохастических потоков – синхронного, полусинхронного, полусинхронного альтернирующего, обобщенного полусинхронного, обобщенного асинхронного, МАР-потока, модулированного МАР-потока при непродлевающемся и продлеваюшемся мертвом времени;

2) пороговый алгоритм оценивания состояний асинхронного потока с учетом старения информации и ошибок измерений моментов наступления событий;

3) алгоритм оптимальной оценки состояний синхронного, полусинхронного, обобщенного полусинхронного, обобщенного асинхронного, MAP-потока и модулированного MAP-потока событий при полной наблюдаемости потоков, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;

4) алгоритм оптимальной оценки состояний обобщенного асинхронного, полусинхронного, обобщенного полусинхронного, MAP-потока и модулированного MAP-потока с непродлевающимся мертвым временем, основанный на методе максимума апостериорной вероятности;

5) алгоритм оценки параметров синхронного, полусинхронного, полусинхронного альтернирующего и обобщенного асинхронного потоков событий, а также алгоритм оценки параметров плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в MAP-потоке и модулированном MAP-потоке при полной наблюдаемости потоков, основанный на методе моментов, с использованием явных видов одномерной и двумерной плотностей вероятностей;

6) алгоритм оценки параметров синхронного, полусинхронного и полусинхронного альтернирующего потоков событий с непродлевающимся мертвым временем и длительности мертвого времени, основанный на методе моментов, с использованием явных видов одномерной плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемых потоках;

7) алгоритмы оценки длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном, обобщенном полусинхронном и модулированном MAP-потоке событий, основанные на методе максимального правдоподобия и модифицированном методе моментов, с использованием явных видов одномерной и двумерной плотностей вероятностей в наблюдаемых потоках;

8) алгоритм расчета условной вероятности вынесения ошибочного решения о состоянии обобщенного асинхронного потока событий при полной наблюдаемости потока, а также явный вид безусловной вероятности ошибочного решения о состоянии рекуррентного обобщенного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях полной наблюдаемости;

9) алгоритм оценивания длительности мертвого времени в рекуррентных синхронном и полусинхронном потоках событий с продлевающимся мертвым временем, основанный на методе моментов, с использованием преобразования Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемых потоках.

Достоверность полученных результатов подтверждается корректным применением математического аппарата к доказательству лемм и теорем, представленных в работе, корректностью применяемых методик исследования, согласованностью аналитических результатов для разных моделей исследуемых дважды стохастических потоков между собой, многочисленными статистическими экспериментами, поставленными на имитационных моделях исследуемых потоков при их полной и частичной наблюдаемости, и анализом численных результатов.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Автор лично участвовал в построении математических моделей исследуемых дважды стохастических потоков событий при их полной и частичной наблюдаемости, получении всех формул и математических выкладок, доказательстве представленных в диссертационной работе лемм и теорем, разработке алгоритмов имитационного моделирования дважды стохастических потоков событий, проведении статистических экспериментов и анализе полученных численных результатов. Программная реализация имитационной модели асинхронного потока выполнена лично автором. Программная реализация имитационных моделей других потоков, описанных в диссертации, осуществлена учениками автора. Отдельные подходы к решению поставленных в диссертационной работе задач оформились в процессе обсуждения с научным консультантом А. М. Горцевым.

Связь работы с крупными научными проектами. Диссертационная работа выполнена в рамках: 1) единого заказ-наряда (ЕЗН) министерства общего и профессионального образования РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 1997–2000 годы «Разработка алгоритмов оценки параметров и состояний дважды стохастических потоков заявок, циркулирующих в информационно-вычислительных, локально-вычислительных сетях и коммутационных системах», госшифр 1.5.97; 2) единого заказ-наряда (ЕЗН) министерства общего и профессионального образования РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2001–2005 годы «Исследование и разработка моделей высокопроизводительных многопроцессорных систем и методов обеспечения компьютерной безопасности», госшифр 1.2.01; 3) госзадания Рособразования на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2005 год «Разработка математических и программных средств для анализа и обработки информационных потоков в телекоммуникационных сетях», госшифр 15444; 4) госзадания Рособразования на проведение научных исследований в Томском исследований в Томском государственном университете на 2006–2008 годы «Исследование вероятностных, статистических и логических моделей информационных потоков в технических, экономических системах и компьютерных системах обработки информации», госшифр 1.22.06; 5) единого заказ-наряда (ЕЗН) Федерального агентства по образованию на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2009–2011 годы «Исследование математических моделей программно-аппаратной передачи, обработки, управления и защиты информации в телекоммуникационных сетях и компьютерных комплексах технических и экономико-социальных систем», госшифр 1.17.09; 6) госзадания Минобрнауки России на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации», госшифр 8.4055.2011.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с паспортом специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации» (отрасль наук: физико-математические науки) и включает в себя оригинальные результаты из следующих областей исследований (номера соответствуют пунктам в паспорте специальности):

1) теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

2) формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

4) разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

5) разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: Всесоюзная научная конференция «Распределенные микропроцессорные управляющие системы и локальные вычислительные сети», Томск, июнь 1991 г.; Всесоюзная научная конференция «Микросистема-91», Суздаль, 8–12 октября 1991 г.; VIII Белорусская школа-семинар

«Сети связи и сети ЭВМ. Анализ и применение», Брест, февраль 1992 г.; Международная конференция по проблемам моделирования в бионике «Биомод-92», Санкт-Петербург, 21–26 июня 1992 г.; Международная научная конференция «Судовые энергетические установки и перспективы их развития», Одесса, 14–15 сентября 1994 г.; XI Белорусская школа-семинар «Исследование сетей связи и компьютерных сетей методами теории массового обслуживания», Минск, февраль 1995 г.; Международная конференция «Всесибирские чтения по математике и механике», Томск, 17–20 июня 1997 г.; XIV Белорусская школа-семинар «Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети», Минск, 27–29 января 1998 г.; Международная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения», Минск, 21–25 февраля 2005 г.; Международная научная конференция «Математические методы повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей», Гродно, 29 января – 1 февраля 2007 г.; VII Российская конференция с междунар. участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Томск, 2–5 сентября 2008 г.; Международная научная конференция «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 26–29 января 2009 г.; Международная конференция «Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения», Минск, 22–25 февраля 2010 г.; VII Российская конференция с междунар. участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Томск, 5–8 октября 2010 г.; Международная научная конференция «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 31января – 3 февраля 2011 г.; IX Российская конференция с междунар. участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Катунь, 5–8 июня 2012 г.; Международная научная конференция «Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 28–31января 2013 г.; X Российская конференция с междунар. участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Катунь, 9–11 июня 2014 г.; XIII Международная научная конференция «Информационные технологии и математическое моделирование», Анжеро-Судженск, 20–22 ноября 2014 г.; Международная научная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения», Минск, 23–26 февраля 2015 г.; III Всероссийская молодёжная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 22–23 мая 2015 г.; II Международная школа для молодых ученых «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Анапа, 2015 г.; XVIII Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь», Москва, 19–22 октября 2015 г.; XIV Международная научная конференция «Информационные технологии и математическое моделирование», Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г.; III Международная научная конференция «Современные тенденции развития науки и производства», Кемерово, 21–22 января 2016 г.; IV Международная молодёжная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», Томск, 20–21 мая 2016 г.; XI Международная конференция «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», Екатеринбург, 6–10 июня 2016 г.

Публикации. По материалам диссертации Л.А. Нежельской опубликовано 69 работ, в том числе 29 статей в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 2 статьи в зарубежном научном журнале, индексируемом Web of Science, 9 статей в российских научных журналах, переводные версии которых индексируются Web of Science и/или Scopus), 6 статей в приложениях к научным журналам, 1 статья в сборнике избранных докладов по итогам Всесибирских чтений по математике и механике, 33 публикации в сборниках материалов международных и всероссийских научных и научно-практических конференций. Общий объем публикаций – 45,21 п.л., авторский вклад – 25,01 п.л. В работах достаточно полно отражены все материалы диссертационного исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем работы составляет 341 страницу. Список литературы включает в себя 263 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Нумерации лемм, теорем, формул, таблиц и рисунков в автореферате и в диссертационной работе совпадают.

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цель и задачи исследования, изложена научная новизна, теоретическая и практическая значимость результатов исследования, дано краткое содержание диссертации.

В **первой главе** предложены эвристические пороговые алгоритмы оценивания состояний дважды стохастических потоков, функционирующих в условиях полной наблюдаемости за потоком: в разделе 1.1 – алгоритм оценки состояний без учета старения информации; в разделе 1.2 – алгоритм оценки состояний с учетом старения информации; в разделе 1.3 – алгоритм оценки состояний потока с учетом старения информации и при наличии ошибок измерений моментов наступления событий.

Интенсивность рассматриваемых во всей работе потоков представляет собой кусочно-постоянный марковский случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t)=\lambda_1$ либо $\lambda(t)=\lambda_2$, $\lambda_1>\lambda_2\ge 0$; рассматривается стационарный режим функционирования потока; наблюдения за каждым потоком производятся на интервале времени $(0,t)$; процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс); наблюдаемыми являются только моменты времени $t_1, t_2, ...$ наступления событий исследуемого потока на временном интервале $(0, t)$.

Результатом наблюдений в главах 1–3 являются моменты $t_1,t_2,...,t_k$, $k=\overline{1,n},$ наступления событий на $(0,t)$. *Необходимо по наблюдениям за потоком оценить состояние процесса* $\lambda(t)$ *(потока) в момент t.*

В разделе 1.1 дается определение *асинхронного, синхронного, полусинхронного* потоков событий при их полной наблюдаемости и приводятся соответствующие матрицы инфинитезимальных характеристик. Для названных потоков предлагается следующий алгоритм оценки состояний.

Алгоритм оценки. Так как $\lambda_1>\lambda_2,$ то наблюдаемое за время t число событий n сравнивается с порогом N: если $n>N,$ то имеет место оценка $\hat{\lambda}(t)=\lambda_1;$ если $n\le N,$ то имеет место оценка $\hat{\lambda}(t)=\lambda_2.$

При нахождении оптимальных N и t рассматривается асимптотический случай при $t\to\infty$. Тогда распределение случайной величины *n* для каждого состояния стремится к нормальному со средним M_i и дисперсией D_i, $i=1,2$. В качестве критерия оптимальности при оптимизации порога N и длины интервала наблюдения t выбирается полная вероятность ошибки

$$P(N,t)=\pi_1\Phi\left(\frac{N-M_1}{\sqrt{D_1}}\right)+\pi_2\left[1-\Phi\left(\frac{N-M_2}{\sqrt{D_2}}\right)\right]\Rightarrow\min_{N,t},\qquad(1.1.4)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл ошибок; $N\geq 0$, $t>0$; π_1,π_2 – стационарные вероятности состояний для исследуемых потоков. Находятся оптимальные порог N^* и длина интервала наблюдения t^*.

В разделе 1.2 для *асинхронного потока* рассмотрен алгоритм оценки состояний, учитывающий старение информации. События, наступившие ближе к концу интервала наблюдений, несут большую информацию о состоянии потока в момент времени t. Поставим каждому событию в соответствие некоторый вес $\varphi(t_i)$, где $\varphi(u)$ есть непрерывная, неубывающая, дифференцируемая функция. Строится сумма $\xi=\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i)$, где n – количество событий, наступивших на интервале $(0,t)$.

Алгоритм оценки. Если $\xi>N$, то имеет место оценка $\hat{\lambda}(t)=\lambda_1$; если $\xi\leq N$, то имеет место оценка $\hat{\lambda}(t)=\lambda_2$, где N – некоторый порог.

Для реализации алгоритма оценивания состояний асинхронного потока необходимо определить вид функции $\varphi(u)$. Рассматривается асимптотический случай при $t\to\infty$. В качестве критерия оптимальности выбирается полная вероятность ошибки (1.1.4), где $M_i=M_i(\varphi)$, $D_i=D_i(\varphi)$, $i=1,2.$ Минимизация (1.1.4) по N при фиксированном $\varphi(u)$ обеспечивает единственное решение для оптимального порогового значения N^*. Оптимизация (1.1.4) по $\varphi(u)$ сводится к интегральному уравнению Вольтерра, решение которого дает явный вид функции $\varphi(u)$ в виде бесконечных сходящихся рядов с точностью до неизвестного параметра Г. Параметр Г находится численно из условия минимума функции $P(\varphi,N^*)=P(\Gamma)$ по Г.

В разделе 1.3 для *асинхронного потока* рассмотрен алгоритм оценки состояний, учитывающий наряду со старением информации ошибки измерений моментов наступления событий. Моменты наступления событий представляются в виде $t_i=t_i^0+\Delta t_i$, где t_i – наблюдаемые моменты наступления событий, t_i^0 – истинные моменты наступления событий, Δt_i – ошибки измерений, являющиеся независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым средним и дисперсией σ^2 для любых *i*. Строится сумма $\xi = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(t_i^0 + \Delta t_i\right)$, где n – количество событий, наступивших на интервале наблюдения $(0, t)$.

Алгоритм оценки. Если $\xi > N$, то имеет место оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$; если $\xi \le N$, то имеет место оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$, где N – некоторый порог.

Рассматривается асимптотический случай при $t \to \infty$. В качестве критерия оптимальности выбирается полная вероятность ошибки (1.1.4). Решение поставленной задачи оптимизации обеспечивает явный вид оптимального порогового значения N^* и явный вид функции $\varphi(u)$ с точностью до неизвестного параметра Г. Оптимальный параметр Γ^* находится численно из условия минимума функции $P(\varphi, N^*) = P(\Gamma)$ по Г.

Поставлены численные эксперименты для *асинхронного* потока. Проведенное сравнение численных результатов для алгоритмов разделов 1.1 и 1.2 показывает преимущества алгоритма, учитывающего старение наблюдений. Выигрыш в вероятности ошибки оценивания для отдельных значений параметров асинхронного потока составляет до 300 %. Что касается результатов алгоритма раздела 1.3, то вероятность ошибки оценивания состояний растет при увеличении дисперсии ошибки наблюдений.

Отличительной чертой и несомненным достоинством всех предложенных эвристических алгоритмов является простота их реализации.

Во **второй главе** рассматриваются алгоритмы оптимального оценивания состояний *асинхронного, обобщенного асинхронного, синхронного, полусинхронного*, *обобщенного полусинхронного, MAP-потока* и *модулированного MAP-потока* при их полной наблюдаемости. Дается математическое определение *обобщенного асинхронного*, *обобщенного полусинхронного, модулированного MAP-потока* и приводятся соответствующие матрицы инфинитезимальных характеристик.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $w(\lambda_1 | t) + w(\lambda_2 | t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, обеспечивающему минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения по наблюдениям за моментами наступления событий.

Оптимальное оценивание состояний процесса $\lambda(t)$ в главах 2 и 3 выглядит следующим образом: если $w(\lambda_i \mid t) \geq w(\lambda_j \mid t)$, то оценка есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$; если $w(\lambda_i \mid t) < w(\lambda_j \mid t)$, то оценка состояния есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2,\ i \neq j$. Для каждого потока находятся явные выражения для апостериорных вероятностей $w(\lambda_i | t)$, $i = 1, 2$, состояний с использованием рекуррентного соотношения.

Теорема 2.2. Для дважды стохастических потоков событий с двумя состояниями справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей $w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right)$, $w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right)$:

$$w\left(\lambda^{(m+1)} \mid t + \Delta t\right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)}{\sum\limits_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum\limits_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w\left(\lambda^{(m)} \mid t\right) p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1} \mid \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)}. \quad (2.1.3)$$

Полагая в (2.1.3) $r_{m+1} = 0$, что соответствует случаю отсутствия событий наблюдаемого потока на интервале $(t, t + \Delta t)$, а также расписывая для каждого из указанных потоков соответствующие переходные вероятности $p\left(\lambda^{(m+1)} \mid \lambda^{(m)}, r_m\right)$, $p\left(r_{m+1} \middle| \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right)$, приходим к дифференциальным уравнениям Риккати, определяющим поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t)$ в течение времени между моментами наступления событий t_k и t_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots$. Для каждого из потоков сформулированы леммы о решениях полученных уравнений в явном виде. Полагая в (2.1.3) $r_{m+1} = 1$, что соответствует случаю наблюдения одного события потока на интервале $(t, t + \Delta t)$, для каждого из указанных потоков формулируются леммы о явных видах апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | t_k + 0)$ в момент времени t_k наступления события. В силу определения изучаемых потоков вероятность того, что $r_{m+1} \geq 2$ равна $o(\Delta t)$. Объединение результатов лемм позволяет сформулировать теоремы о явных видах апостериорной вероятности на интервале $(0,t)$. В частности, для *синхронного* потока имеет место теорема.

Теорема 2.5. Для синхронного потока событий поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на временной оси определяется выражениями

$$w(\lambda_1 \mid t)=\frac{w(\lambda_1 \mid t_k+0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t-t_k)}}{1-w(\lambda_1 \mid t_k+0)+w(\lambda_1 \mid t_k+0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t-t_k)}}, \quad k=0,1,\ldots, \tag{2.4.9}$$

$$w(\lambda_1 \mid t_0+0)=\pi_1=\frac{\lambda_2 q}{\lambda_1 p+\lambda_2 q},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k+0)=\frac{\lambda_2 q+\left[\lambda_1(1-p)-\lambda_2 q\right]w(\lambda_1 \mid t_k-0)}{\lambda_2+(\lambda_1-\lambda_2)w(\lambda_1 \mid t_k-0)}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2.4.10}$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k-0)=\frac{w(\lambda_1 \mid t_{k-1}+0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t_k-t_{k-1})}}{1-w(\lambda_1 \mid t_{k-1}+0)+w(\lambda_1 \mid t_{k-1}+0)e^{-(\lambda_1-\lambda_2)(t_k-t_{k-1})}}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{2.4.11}$$

где $t_k \le t < t_{k+1}$, $k=0,1,\ldots$.

В (2.4.9) – (2.4.11) p (q) – вероятность перехода $\lambda(t)$ из первого (второго) состояния во второе (в первое) в момент наступления события.

На основании полученных формул для $w(\lambda_1|t)$ и $w(\lambda_1|t_k+0)$ сформулированы алгоритмы расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1|t)$ и алгоритмы принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t. На имитационных моделях *обобщенного полусинхронного* и *МАР-потока* проведены эксперименты для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$. Результаты экспериментов иллюстрируют приемлемую оценку полной вероятности ошибочного решения.

В **третьей главе** рассматриваются алгоритмы оптимального оценивания состояний *обобщенного асинхронного, полусинхронного, обобщенного полусинхронного*, *МАР-потока* и *модулированного МАР-потока* при непродлевающемся мертвом времени. Опишем схему формирования наблюдаемого потока событий, справедливую для всех исследуемых потоков в главах 3, 5, 6. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. В качестве примера на рисунке 3.7 представлен вариант возникающей ситуации для модулированного МАР-потока, где 1, 2 – состояния процесса $\lambda(t)$; $P_1(\lambda_j \mid \lambda_i)$ – вероятность того, что в момент окончания i-го состояния $\lambda(t)$ переходит в j-е с наступлением события, $i, j = 1,2$, $P_0(\lambda_j \mid \lambda_i)$ – вероятность перехода $\lambda(t)$ в j-е состояние $(i \neq j)$ без события $\left(P_0(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_i \mid \lambda_i) = 1,\ i, j = 1, 2,\ i \neq j\right)$; α_i – параметр экспоненциального распределения длительности i – го состояния; штриховкой обозначены длительности мертвого времени, черными кружками – события модулированного МАР-потока, недоступные наблюдению; $t_1, t_2, \ldots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

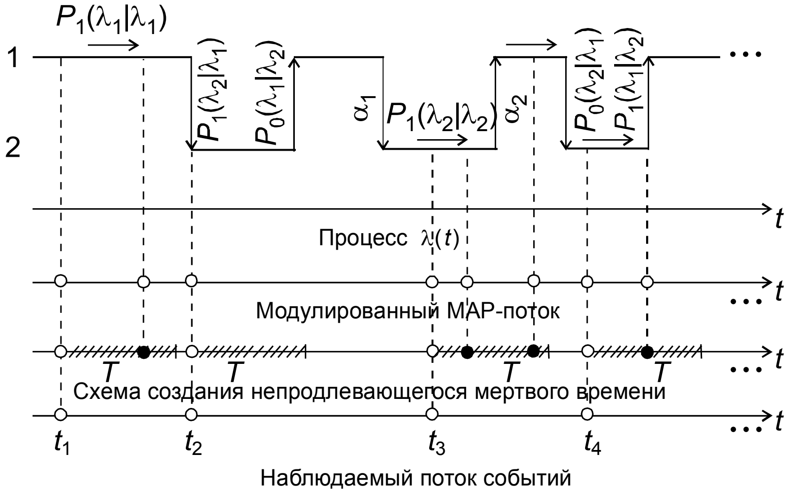

Рисунок 3.7 – Формирование наблюдаемого потока событий

Момент вынесения решения t о состоянии процесса $\lambda(t)$ принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}), $k = 1,2,\ldots$. Для начального интервала $t_0 < t < t_1$, $t_0 = 0$. Значение длительности интервала (t_k, t_{k+1}) есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$,

$k = 0, 1, \ldots$. Наблюдаемое в момент t_k событие порождает мертвое время длительности *T*, тогда $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени $t_k + T$ и моментом t_{k+1} . Предполагается, что значение *T* известно точно.

Для каждого потока находятся явные выражения для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на полуинтервале $(t_k, t_k + T]$, где поток событий недоступен наблюдению, и на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, где поток событий становится наблюдаемым. Поведение вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на $(t_k, t_k + T]$ для исследуемых потоков определяется соответствующими теоремами. В частности, для *модулированного MAP-потока* справедлива теорема.

Теорема 3.5. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ для модулированного MAP-потока событий на временных полуинтервалах $(t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \ldots$, определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + \left[w(\lambda_1 \mid t_k + 0) - \pi_1 \right] e^{-(\beta_1+\beta_2)(t-t_k)} , \qquad (3.6.1)$$

$t_k < t \le t_k + T$, $k = 1, 2, \ldots;$ $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 \left[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) \right] + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \right];$

$$w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = \frac{\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \left[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)}{\lambda_2 \left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] + \left[\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \right] w(\lambda_1 \mid t_k - 0)},$$

$$w(\lambda_1 \mid t_k - 0) = \frac{w_1 \left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0) \right] - w_2 \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1})}}{w_2 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0) - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_{k-1} + 0) \right] e^{-a(w_2 - w_1)(t_k - t_{k-1})}};$$

$$w_{1,2} = (1/2a)\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) \mp \sqrt{D} \right),$$

$$D = \left[(\lambda_1 - \lambda_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \right]^2 + 4\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2) + 4\left[\alpha_1 \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) + \alpha_2 \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) \right] +$$

$$+4\lambda_1 \lambda_2 P_0(\lambda_1 | \lambda_2) P_0(\lambda_2 | \lambda_1), \quad a = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) \ne 0 ,$$

$$\pi_1 = w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \left(\alpha_2 + \lambda_2 \left[1 - P_1(\lambda_2 | \lambda_2) \right] \right) (\beta_1 + \beta_2)^{-1} .$$

На интервалах наблюдения $(t_k + T,\ t_{k+1})$ вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ определяется явной формулой

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w_1\left[w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right] - w_2\left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k - T)}}{w_2 - w(\lambda_1 \mid t_k + T) - \left[w_1 - w(\lambda_1 \mid t_k + T)\right]e^{-a(w_2 - w_1)(t - t_k - T)}},$$

$k = 0$, $T = 0$ для $t_0 = 0 \le t < t_1$; $t_k + T \le t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, ...$; $w(\lambda_1 | t_k + T)$ определена в (3.6.1) для $t = t_k + T$; a, w_1, w_2 определены в теореме 3.5.

На основании полученных формул сформулированы алгоритмы расчета $w(\lambda_1 \mid t)$ и алгоритмы принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$. На имитационных моделях *МАР-потока* и *модулированного МАР-потока* проведен ряд статистических экспериментов для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$. Результаты эксперимента для *модулированного МАР-потока*, приведенные в таблице 3.10 при значениях параметров $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 0{,}2$, $P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}7$, $P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0{,}1$, $P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0{,}8$, $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}1$, $P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0{,}1$, $T = 1$, времени моделирования $T_m = 100$ и количестве опытов $N = 100$, иллюстрируют приемлемую оценку полной вероятности ошибки $\hat{P}_0$ и достаточно малую выборочную дисперсию $\hat{D}$.

Таблица 3.10 – Результаты статистического эксперимента (α_1)

α_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{P}_0$	0,025	0,037	0,049	0,059	0,071	0,079	0,090	0,094	0,104	0,112	0,121
$\hat{D}$	$0{,}63\times10^{-4}$	$0{,}72\times10^{-4}$	$0{,}81\times10^{-4}$	$0{,}93\times10^{-4}$	$0{,}89\times10^{-4}$	$1{,}37\times10^{-4}$	$1{,}26\times10^{-4}$	$1{,}51\times10^{-4}$	$1{,}83\times10^{-4}$	$1{,}92\times10^{-4}$	$2{,}04\times10^{-4}$

В **четвертой главе** формулируется задача об оценке параметров *синхронного, полусинхронного, обобщенного асинхронного, альтернирующего*, *МАР-потока* и *модулированного МАР-потока* событий при их полной наблюдаемости. В разделе 4.4 приводится математическое описание *альтернирующих* потоков событий без инициирования и с инициированием дополнительных событий.

Наблюдения за каждым потоком осуществляются на интервале времени $(0,t)$. *Необходимо по наблюдениям* $t_1, t_2, ..., t_k$, $k = \overline{1,n}$, *оценить в момент окончания наблюдений параметры указанных потоков событий.*

Для всех перечисленных потоков находятся явные выражения для плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями. С использованием полученных выражений для плотности вероятности методом моментов строятся либо оценки параметров распределения, либо оценки параметров потока событий. Для *синхронного, полусинхронного, обобщенного асинхронного* и *модулированного MAP-потока* получены явные виды совместной плотности вероятности значений длительностей двух смежных интервалов, из которых следует коррелированность потоков, что обусловливает погрешность оценок, получаемых (здесь и далее) методом моментов. Выписываются условия рекуррентности потоков, при выполнении которых получаемые оценки лишены указанной погрешности и являются состоятельными.

Обозначим $p(\tau_k)$ – плотность вероятности значений длительности k-го интервала ($\tau_k = t_{k+1} - t_k$). Так как рассматривается стационарный режим, то $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для $k \geq 1$. Тогда момент времени t_k наступления события полагается равным нулю или момент наступления события есть $\tau = 0$. В моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k$, $k = \overline{1, n}$, последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова. В этой связи искомая плотность $p(\tau)$ находится в виде

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^{2} \pi_i(0) \sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij}(\tau), \tag{4.3.12}$$

где $\pi_i(0)$ – условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i при условии, что в момент $\tau = 0$ событие потока наступило, $(\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1)$; $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ – плотность вероятности того, что без наступления событий на интервале $(0, \tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет на этом интервале из состояния i в состояние j; $i, j = 1, 2$.

Так, для *MAP-потока* с использованием (4.3.12) справедлива теорема.

Теорема 4.12. В MAP-потоке плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями имеет вид

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1}\left\{z_2 - \lambda_1\pi_1(0)\left[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)\right] - \lambda_2\pi_2(0)\left[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)\right]\right\}, \quad (4.5.8)$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(\lambda_1 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}\right], \quad 0 < z_1 < z_2,$$

$$\pi_1(0) = \frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) + P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}.$$

Для всех рассматриваемых потоков плотности $p(\tau)$ имеют вид, аналогичный (4.5.8). Доказывается, что совместными являются системы из трех уравнений моментов. Поэтому из выписанных систем можно лишь частично определить оценки неизвестных параметров потоков либо полностью определить оценки трех неизвестных параметров плотности $p(\tau)$. Так, для *MAP-потока* процедура построения оценок неизвестных параметров z_1, z_2, γ плотности (4.5.8) выглядит следующим образом.

Имеется выборка $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ из распределения $p(\tau \mid z_1, z_2, \gamma)$. Введем статистики $C_l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k^l$. Для оценки z_1, z_2, γ выписываются уравнения моментов:

$$M\left(\tau^l\right) = C_l, \ l = \overline{1,3}; \ M\left(\tau^l\right) = \int_0^\infty \tau^l p(\tau \mid z_1, z_2, \gamma)\, d\tau = \frac{l!\gamma}{z_1^l} + \frac{l!(1-\gamma)}{z_2^l}, \quad l = \overline{1,3}. \quad (4.5.9)$$

В результате преобразований система (4.5.9) приводится к виду

$$z_1 z_2 C_1 - z_2\gamma - z_1(1-\gamma) = 0; \ (z_1 + z_2)C_1 - \frac{1}{2}z_1 z_2 C_2 = 1; \ (z_1 + z_2)C_2 - \frac{1}{3}z_1 z_2 C_3 = 2C_1. \quad (4.5.10)$$

Из (4.5.10) находятся оценки параметров

$$\hat{z}_1 = \frac{1}{2}\left\{-\frac{2(C_3 - 3C_1C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} - \sqrt{\left(\frac{2(C_3 - 3C_1C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}\right)^2 + 4\frac{6\left(C_2 - 2C_1^2\right)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}}\right\},$$

$$\hat{z}_2 = \frac{1}{2}\left\{-\frac{2(C_3 - 3C_1C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3} + \sqrt{\left(\frac{2(C_3 - 3C_1C_2)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}\right)^2 + 4\frac{6\left(C_2 - 2C_1^2\right)}{3C_2^2 - 2C_1C_3}}\right\},$$

$$\hat{\gamma} = \hat{z}_1(\hat{z}_2 C_1 - 1)(\hat{z}_2 - \hat{z}_1)^{-1}.$$

На имитационных моделях *синхронного, полусинхронного, MAP-потока* и *модулированного MAP*-потока поставлены статистические эксперименты по оценке неизвестных параметров. Численные результаты показывают работоспособность разработанных алгоритмов оценивания.

В **пятой главе** формулируется задача об оценке параметров *синхронного, полусинхронного* и *альтернирующего* потока без инициирования дополнительных событий, функционирующих в условиях мертвого времени. Для каждого потока находится явное выражение для плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. С использованием полученных выражений для плотности вероятности методом моментов строятся либо оценки параметров распределения, либо оценки параметров потока. Подчеркнем, что оценивание происходит в условиях неполной наблюдаемости, поэтому корреляционные связи в потоках ослабевают, что приводит к уменьшению погрешности получаемых оценок по сравнению со случаем $T=0$.

Необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, ..., t_k$, $k=\overline{1,n}$, *оценить в момент* t *параметры указанных потоков и значение T.*

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, ...$, – значение длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Плотность вероятности значений длительности *k*-го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k. Тогда момент t_k регистрации события в наблюдаемом потоке положим равным нулю ($\tau = 0$). Поскольку в момент $\tau = 0$ событие создает период мертвого времени длительности T, то $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени $\tau = T$ и моментом наступления следующего события $(t > 0)$. Для всех перечисленных потоков находятся явные выражения для $p_T(\tau)$. Так, для *альтернирующего* потока ($\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$) имеем

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)\lambda e^{-\lambda(\tau - T)} + \left[1 - \gamma(T)\right]\alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (5.4.1)$$

$$\gamma(T) = \frac{\alpha_2\left(\lambda(1-p) - \alpha_2\right)}{(\lambda p + \alpha_2)(\lambda - \alpha_2)}\left[1 + \frac{\lambda p}{\alpha_2 e^{(\lambda p + \alpha_2)T}}\right], \quad \lambda - \alpha_2 \neq 0,$$

где p определена в (2.4.9); α_2 – в описании модулированного MAP-потока.

Для каждого потока решена задача об оценке четырех неизвестных параметров плотности $p_T(\tau)$, которые отчасти являются параметрами потока. Для *альтернирующего* потока справедливо примечание.

Примечание 5.3. Так как альтернирующий поток без инициирования дополнительных событий в случае отсутствия мертвого времени ($T=0$) является рекуррентным, то указанный поток при наличии мертвого времени ($T \neq 0$) тем более является рекуррентным.

Для *альтернирующего* потока имеет место следующая процедура построения оценок параметров $\lambda, \alpha_2, \gamma(T), T$ плотности (5.4.1) методом моментов.

Имеется выборка $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ из распределения $p_T\left(\tau \middle| \lambda, \alpha_2, \gamma(T), T\right)$. Вводятся статистики $C_l = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k^l$. Выписываются уравнения моментов:

$$M\left(\tau^l\right) = C_l,\ l=\overline{1,4};\ M\left(\tau^l\right) = \int_T^\infty \tau^l p_T(\tau)\,d\tau = T^l + \sum_{j=1}^{l}\frac{l!}{(l-j)!}T^{l-j}\left(\frac{\gamma(T)}{\lambda^j} - \frac{1-\gamma(T)}{\alpha_2^j}\right). \quad (5.4.2)$$

Преобразовывая систему (5.4.2), получаем уравнение для определения $\hat{T}$:

$$\begin{gathered} T^6 - 6C_1T^5 + 3\left(6C_1^2 - C_2\right)T^4 + 4\left(C_3 - 6C_1^3\right)T^3 + \\ +3\left(C_4 + 12C_1^2C_2 - 8C_1C_3\right)T^2 + 6\left(4C_1^2C_3 - 6C_1C_2^2 - C_1C_4 + 2C_2C_3\right)T + \\ +4C_3^2 - 24C_1C_2C_3 + 18C_2^3 - 3C_2C_4 + 6C_1^2C_4 = 0. \end{gathered} \quad (5.2.22)$$

Решение (5.2.22) возможно только численно. Предлагается алгоритм нахождения единственной оценки $\hat{T}$, учитывающий значение $\tau_{\min}$. Подставляя $\hat{T}$ в (5.4.2), находим $\hat{\lambda}, \hat{\alpha}_2, \hat{\gamma}(T)$. Если известно, что $\lambda > \alpha_2$, то

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4c}\right),\quad \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{2}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4c}\right), \quad (5.4.3)$$

$$b = \frac{2\left(2\hat{T}^3 - 6C_1\hat{T}^2 + 6C_1^2\hat{T} + C_3 - 3C_1C_2\right)}{\hat{T}^4 - 4C_1\hat{T}^3 + 6C_1^2\hat{T}^2 - 6C_1C_2\hat{T} + 2C_3\hat{T} - 2C_1C_3 + 3C_2^2},$$

$$c = \frac{6\left(\hat{T}^2 - 2C_1\hat{T} - C_2 + 2C_1^2\right)}{\hat{T}^4 - 4C_1\hat{T}^3 + 6C_1^2\hat{T}^2 - 6C_1C_2\hat{T} + 2C_3\hat{T} - 2C_1C_3 + 3C_2^2};$$

иначе оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\alpha}_2$ в (5.4.3) меняются местами. Оценка $\hat{\gamma}(T)$ имеет вид

$$\hat{\gamma}(T) = \hat{\lambda}\hat{\alpha}_2\left(\hat{\alpha}_2 - \hat{\lambda}\right)^{-1}\left(C_1 - \hat{T} - 1/\hat{\alpha}_2\right). \qquad (5.4.4)$$

После того, как по формулам (5.2.22), (5.4.3), (5.4.4) найдены оценки $\hat{T}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}_2,\ \hat{\gamma}(T)$, выписывается уравнение для нахождения оценки $\hat{p}$:

$$\hat{\lambda}\left(C_1 - \hat{T} - 1/\hat{\alpha}_2\right) = \frac{\hat{\alpha}_2 - \hat{\lambda}(1-p)}{\hat{\lambda}p + \hat{\alpha}_2}\left[1 + \left(\hat{\lambda}p/\hat{\alpha}_2\right)e^{-\left(\hat{\lambda}p + \hat{\alpha}_2\right)\hat{T}}\right].$$

Данное уравнение решается численно. Таким образом, в *альтернирующем* потоке в условиях непродлевающегося мертвого времени возможно оценить параметры потока λ, α_2, p и значение длительности мертвого времени T .

На имитационных моделях *синхронного* и *полусинхронного* потоков поставлены статистические эксперименты по оценке параметров распределений $p\left(\tau \middle| \lambda_1, \lambda_2, \gamma(T), T\right)$ и $p\left(\tau \middle| \lambda_1, z, \gamma(T), T\right)$ соответственно.

В **шестой главе** решается задача об оценке длительности непродлевающегося мертвого времени в *обобщенном асинхронном, обобщенном полусинхронном* и *модулированном MAP-потоке*. Оценивание осуществляется методом, основанным на методе максимального правдоподобия (МП-оценка), и модифицированным методом моментов (ММ-оценка). Для каждого потока находится явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями, а также явный вид совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов. Все потоки коррелированные. Выписываются условия рекуррентности потоков.

Необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, ..., t_k$, $k = \overline{1, n}$, *оценить в момент* t *значение длительности мертвого времени T.*

Предпосылки для вывода явного вида $p_T(\tau)$ аналогичны предпосылкам главы 5. Тогда $p_T(\tau)$ для всех потоков отыскивается в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, \ 0 \le \tau < T, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \pi_i(0 \mid T) \sum\limits_{j=1}^{2} q_{ij}(T) \sum\limits_{k=1}^{2} \tilde{p}_{jk}(\tau - T), \ \tau \ge T. \end{cases} \qquad (6.1.1)$$

В (6.1.1) $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T

процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i ($\tau = 0$) в состояние j ($\tau = T$); $\pi_i(0\,|\,T)$ – условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент $\tau = 0$ находится в состоянии i при условии, что в момент $\tau = 0$ наступило событие наблюдаемого потока и наступило мертвое время длительности T ; плотность $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$ имеет тот же смысл, что и в (4.3.12), $i, j, k = 1,2$.

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока; $\tau_1 = 0$ – момент наступления первого события, $\tau_2 = 0$ – момент наступления второго события. Совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p_T(\tau_1,\tau_2) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le \tau_1 < T, \quad 0 \le \tau_2 < T, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \pi_i(0\,|\,T) \sum\limits_{j=1}^{2} q_{ij}(T) \sum\limits_{k=1}^{2} \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum\limits_{s=1}^{2} q_{ks}(T) \sum\limits_{n=1}^{2} \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), \\ \tau_1 \ge T, \quad \tau_1 \ge T, \end{cases} \tag{6.1.10}$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T)$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T)$ определены в (4.3.12).

Для каждого потока доказан ряд лемм о вероятностях и плотностях вероятностей в (6.1.1) и (6.1.10). Объединение результатов лемм позволяет сформулировать теоремы о явных видах $p_T(\tau)$ и $p_T(\tau_1, \tau_2)$. В частности, для *обобщенного полусинхронного* потока имеют место теоремы.

Теорема 6.5. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в обобщенном полусинхронном потоке, функционирующем в условиях мертвого времени, имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, \quad 0 \le \tau < T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - T)} + \left[1 - \gamma(T)\right](\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)(\tau - T)}, \quad \tau \ge T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = 1 - \pi_2(T)\frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2\delta}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2}, \quad \pi_2(T) = \pi_2 - \left[\pi_2 - \pi_2(0\,|\,T)\right]e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}, \tag{6.2.6}$$

$$\pi_2(0\,|\,T) = \frac{p(\lambda_2 + \alpha_2) + \pi_2\left[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha_2\delta)\right]\left[1 - e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}\right]}{\alpha_2 + p(\lambda_2 + \alpha_2\delta) + \left[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha_2\delta)\right]\left[1 - e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}\right]},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \ne 0, \qquad \pi_2 = \lambda_1 p / (\lambda_1 p + \alpha_2)^{-1}.$$

В (6.2.6) δ – вероятность инициирования дополнительного события в первом состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое.

Теорема 6.6. Обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком и совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1,\tau_2)$ имеет вид

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=0\,,\quad 0\le\tau_1<T,\quad 0\le\tau_2<T\,;$$

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)\,p_T(\tau_2)+e^{-(\alpha_2+p\lambda_1)T}\gamma(T)\left[1-\gamma(T)\right]\frac{\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha_2\delta)}{\lambda_2+\alpha_2}\times$$
$$\times\left[\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_1-T)}-(\lambda_2+\alpha_2)e^{-(\lambda_2+\alpha_2)(\tau_1-T)}\right]\left[\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau_2-T)}-(\lambda_2+\alpha_2)e^{-(\lambda_2+\alpha_2)(\tau_2-T)}\right],$$

$$\tau_1\ge T,\ \tau_2\ge T, \qquad (6.2.7)$$

где $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ определены в (6.2.6) для $\tau=\tau_k$, $k=1,2$.

С использованием явного вида плотности вероятности для каждого потока строится целевая функция. При построении целевой функции учитывается априорная информация: 1) из рисунка 3.7 следует, что значение длительности мертвого времени $T<\tau_{\min}$, где $\tau_{\min}=\min\tau_j$, $j=\overline{1,k}$; 2) наблюдаемые потоки в общем случае являются коррелированными (например, формула (6.2.7)) и получить явные виды k-мерной плотности $p_T(\tau_1,...,\tau_k)$ не представляется возможным; 3) корреляционные связи в последовательности величин $\tau_1,...,\tau_k$ наблюдаемых потоков ослабевают при увеличении *T*; 4) последовательность $\tau_1,...,\tau_k$ является последовательностью значений взаимно независимых случайных величин при выполнении условий рекуррентности потока.

Таким образом, когда потоки рекуррентные, оценивание осуществляется методом максимального правдоподобия путем построения функции правдоподобия как произведения одномерных плотностей вероятности. Для коррелированных потоков предлагается целевая функция также в виде произведения одномерных плотностей, которая совпадает с функцией правдоподобия для рекуррентных потоков.

Упорядочим измерения $\tau_1,...,\tau_k$ по возрастанию: $\tau_{\min}=\tau^{(1)}<\tau^{(2)}<...<\tau^{(k)}$. Для всех потоков строятся целевые функции и решаются задачи оптимизации. В частности, для *обобщенного полусин-*

хронного потока (в предположении, что параметры $\lambda_i, p, \alpha_2, \delta$ известны) решается оптимизационная задача:

$$L\left(T \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(k)}\right) = \prod_{j=1}^{k} p_T\left(\tau^{(j)}\right) = \prod_{j=1}^{k} \left\{ \left[1 - f(T)\right] \lambda_1 e^{-\lambda_1\left(\tau^{(j)} - T\right)} + \right.$$
$$\left. + f(T)(\lambda_2 + \alpha_2) e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\left(\tau^{(j)} - T\right)} \right\} \Rightarrow \max_T, \ 0 \le T \le \tau_{\min}, \tau_{\min} > 0, \qquad (6.2.12)$$

$$f(T) = \frac{p(\lambda_2 + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2\delta)\left[\lambda_1 + (\alpha_2 + p\lambda_1 - \lambda_1) e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}\right]}{(\alpha_2 + p\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2) F(T)},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \ne 0,$$

$$F(T) = (\lambda_2 + \alpha_2) - \left[\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha_2\delta)\right] e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}, \ F(T) > 0, \quad T \ge 0.$$

Переобозначим $\tau_m = \tau_{\min}$. Положим $p_T\left(\tau^{(j)}\right) = 0$, $j = \overline{2, k}$, при $T > \tau_m$. Сформулирован ряд лемм, в которых исследована функция $p_T(\tau_m)$ переменной T, $0 \le T \le \tau_m$. Объединение лемм приводит к теореме.

Теорема 6.8. При любых значениях параметров $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \ge 0$ $(\lambda_1 > \lambda_2)$, $\alpha_2 > 0$, $0 < p \le 1$, $0 \le \delta \le 1$ и ограничении $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \ne 0$ функция $p_T(\tau_m)$ переменной T, $0 \le T \le \tau_m$, достигает максимального значения при $T = \tau_m$.

Следствие теоремы 6.8. Целевая функция $L\left(T \mid \tau^{(1)}, ..., \tau^{(k)}\right)$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T} = \tau_m$, то есть решением оптимизационной задачи (6.2.12) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T} = \tau_m$.

С использованием полученных выражений для плотности вероятности и совместной плотности вероятности для каждого потока находится ММ-оценка длительности мертвого времени. В качестве примера рассмотрим задачу оценивания T модифицированным методом моментов для *обобщенного полусинхронного* потока. Для того, чтобы учесть корреляционные связи в наблюдаемом потоке, при построении уравнения моментов используем совместную плотность вероятности (6.2.7).

Теоретическая ковариация длительностей смежных интервалов запишется в виде

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=\int\limits_T^\infty\int\limits_T^\infty \tau_1\tau_2 p_T(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2-\left[\int\limits_T^\infty \tau\, p_T(\tau)\,d\tau\right]^2. \qquad (6.1.25)$$

Подставляя в (6.1.25) $p_T(\tau_1,\tau_2)$ из (6.2.7), $p_T(\tau)$ из (6.2.6), находим

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=\gamma(T)\big[1-\gamma(T)\big](\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2)^2\frac{\lambda_2-(\lambda_2+\alpha_2\delta)p}{\lambda_1^2(\lambda_2+\alpha_2)^3}e^{-(\alpha_2+p\lambda_1)T}. \qquad (6.2.27)$$

Вводится статистика

$$\hat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\tau_{k+1}-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right)^2,$$

являющаяся оценкой теоретической ковариации (6.2.27). Тогда уравнение моментов, учитывающее коррелированность потока событий (модифицированный метод моментов), примет вид

$$\gamma(T)\big[1-\gamma(T)\big](\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2)^2\frac{\lambda_2-(\lambda_2+\alpha_2\delta)p}{\lambda_1^2(\lambda_2+\alpha_2)^3}e^{-(\alpha_2+p\lambda_1)T}=\hat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2). \qquad (6.2.28)$$

Подставляя в (6.2.28) выражение $\gamma(T)$ из (6.2.6), вводя переменную $x=e^{-(\alpha_2+p\lambda_1)T}$ и проделывая преобразования, находим (6.2.28) в виде

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad a=h\big\{\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2)-(\alpha_2+p\lambda_1)\big[\lambda_1(1-p)+\lambda_2\big]\big\},$$

$$b=-\Big\{h\big[2\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2)-(\alpha_2+p\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_2)\big]+\big[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha_2\delta)\big]^2\hat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2)\Big\},$$

$$c=(\lambda_2+\alpha_2)\Big\{\lambda_1 h+2\big[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha_2\delta)\big]\hat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2)\Big\},\ d=(\lambda_2+\alpha_2)^2\hat{\operatorname{cov}}(\tau_1,\tau_2),$$

$$h=\frac{p\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2\delta)\big[\lambda_1(1-p+\delta p)-(\lambda_2+\alpha_2)\big]\big[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha_2\delta)\big]}{\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2)(\alpha_2+p\lambda_1)}. \qquad (6.2.29)$$

Решением уравнения (6.2.29) являются три корня x_i, $i=\overline{1,3}$, определяющие три ММ-оценки $\hat{T}_{\text{ММ}}^{(i)}$, $i=\overline{1,3}$. Разработан алгоритм нахождения единственной оценки $\hat{T}_{\text{ММ}}$, учитывающий значение $\tau_{\min}$.

Для *обобщенного асинхронного*, *обобщенного полусинхронного* и *модулированного MAP-потока* на имитационных моделях поставлены статистические эксперименты для численного сравнения качества МП- и ММ-оценок. Для примера в таблицах 6.11 и 6.14 приводятся численные результаты для *обобщенного полусинхронного потока.* В первых строках таблиц указано время моделирования T_m. Во второй и третьей строках для каждого T_m приведены оценки вариаций $\hat{V}_{\text{ММ}}$ и $\hat{V}_{\text{МП}}$. В четвертых строках для каждого T_m приведены численные значения разности $\hat{V}_{\text{МП}}-\hat{V}_{\text{ММ}}$.

Таблица 6.11 – Результаты статистического эксперимента $(\lambda_1=0{,}9$, $\lambda_2=0{,}2$, $\alpha_2=0{,}1$, $p=0{,}2$, $\delta=0{,}2$, $N=100$, $T=1)$

T_m	30	40	50	60	70
$\hat{V}_{\text{ММ}}$	0,47389	0,06118	0,05562	0,04330	0,04432
$\hat{V}_{\text{МП}}$	0,4759	0,06667	0,05884	0,04336	0,04432
$\hat{V}_{\text{МП}}-\hat{V}_{\text{ММ}}$	0,00201	0,00549	0,00322	$6{,}38402\cdot10^{-5}$	0

Таблица 6.14 – Результаты статистического эксперимента $(\lambda_1=0{,}7$, $\lambda_2=0{,}2$, $\alpha_2=0{,}1$, $p=0{,}2$, $\delta=0{,}2$, $N=100$, $T=1)$

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{\text{ММ}}$	0,0094	0,0327	0,0116	0,0376	0,0238
$\hat{V}_{\text{МП}}$	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
$\hat{V}_{\text{МП}}-\hat{V}_{\text{ММ}}$	–0,0091	–0,0325	–0,0115	–0,0375	–0,0237

Анализ приведенных численных результатов показывает, что: 1) для низкоинтенсивного потока и малых временах наблюдения (при малых T_m) ММ-оценки лучше (таблица 6.11) либо не хуже МП-оценок; 2) при больших временах наблюдения за потоком (при больших T_m) МП-оценки лучше ММ-оценок (таблица 6.14), так как при больших временах наблюдения смещение оценки $\hat{T}_{\text{МП}}$ относительно T уменьшается.

В **седьмой главе** *решается задача нахождения вероятности ошибочного решения о состоянии дважды стохастических потоков в произвольный момент времени*. Для вычисления условной и безусловной вероятностей ошибки оценивания используются результаты второй главы (полная наблюдаемость потока). Нахождение безусловной вероятности ошибки требует знания плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями рекуррентного потока. Явные виды плотностей вероятностей для различных типов потоков при их полной наблюдаемости получены в главе 4.

Наблюдение за потоком событий осуществляется на интервале $(0,t)$. На указанном интервале события потока наступают в случайные моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k$ $(t_1 < t_2 < ... < t_k < t)$, тогда случайна и разность $t - t_k$. Таким образом, момент t вынесения решения о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ лежит между моментами t_k и t_{k+1}, $t_k < t < t_{k+1}$. Момент t рассматривается как некоторая точка, случайным образом «падающая» на временную ось. Обозначим $\tau_k = t - t_k$, $k = 0, 1, ...;$ $\tau_k \geq 0$, $t_0 = 0$ – момент начала наблюдений. С учетом обозначения $w(\lambda_1 | t) = w(\lambda_1 | t_k + \tau_k)$, $\tau_k \geq 0$. В момент $t = t_k$ имеем $w(\lambda_1 | t = t_k) = w(\lambda_1 | t_k + 0)$. Так как момент τ_k привязан к моменту t_k наступления k-го события, то для простоты обозначим $w(\lambda_1 | t_k + \tau_k) = w(\lambda_1 | \tau_k)$, $\lambda(t) = \lambda(t_k + \tau_k) = \lambda(\tau_k)$, $\tau_k \geq 0$.

Рассмотрим $w(\lambda(\tau_k), \tau_k)$ – распределение вероятностей значений двумерной смешанной случайной величины $(\lambda(\tau_k), \tau_k)$, где $\lambda(\tau_k)$ – значение дискретной случайной величины, $\lambda(\tau_k) = \lambda_i$, $i = 1,2$, τ_k – значение непрерывной случайной величины, $\tau_k \geq 0$. Тогда уравнение $w(\lambda(\tau_k) = \lambda_1, \tau_k) = w(\lambda(\tau_k) = \lambda_2, \tau_k)$ определяет границу τ_k^0 критической области, в которой принимается гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_1$, а отклоняется гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_k) = \lambda_2$ либо наоборот. После преобразования имеем уравнение для τ_k^0:

$$w\left(\lambda_1 \middle| \tau_k\right) = w\left(\lambda_2 \middle| \tau_k\right) \quad \left(w\left(\lambda_1 \middle| \tau_k\right) = 1/2\right), \quad k = 0, 1, \dots .$$

Если $w\left(\lambda_1 \middle| \tau_k\right) \ge w\left(\lambda_2 \middle| \tau_k\right)$, то $w\left(\lambda_1 \middle| \tau_k\right)$ – условная вероятность верного решения: $\hat{\lambda}\left(\tau_k\right) = \lambda_1$ при условии, что решение выносится в момент τ_k, $\tau_k \ge 0$; $w\left(\lambda_2 \middle| \tau_k\right)$ – условная вероятность ошибки: решение выносится в пользу первого состояния, $\hat{\lambda}\left(\tau_k\right) = \lambda_1$, хотя $\lambda\left(\tau_k\right) = \lambda_2$, либо наоборот.

В качестве примера рассмотрен *обобщенный асинхронный* поток.

Лемма 7.1. Граница τ_k^0 критической области для принятия (или отклонения) гипотезы о состоянии процесса $\lambda(t)$ в момент τ_k определяется выражением

$$\tau_k^0 = \frac{1}{a\left(w_2 - w_1\right)} \ln \frac{\left[w_2 - 1/2\right]\left[w_1 - w\left(\lambda_1 \middle| t_k + 0\right)\right]}{\left[w_1 - 1/2\right]\left[w_2 - w\left(\lambda_1 \middle| t_k + 0\right)\right]}, \quad k = 0, 1, \dots , \qquad (7.2.1)$$

$$a = \lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 \ne 0, \quad w\left(\lambda_1 \mid t_0 + 0\right) = \pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$w\left(\lambda_1 \mid t_k + 0\right) = \frac{q\alpha_2 + \left(\lambda_1 - q\alpha_2\right) w\left(\lambda_1 \mid t_k - 0\right)}{\lambda_2 + q\alpha_2 + \left(\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2\right) w\left(\lambda_1 \mid t_k - 0\right)}, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

$$w_{1,2} = \frac{\left(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + (1 - 2q)\alpha_2\right) \mp \sqrt{\left(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2\right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1 - p)(1 - q)}}{2\left(\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2\right)},$$

где $0 \le w_1 < 1$, $w_2 \ge 1$ при $a > 0$; $0 < w_1 \le 1$, $w_2 \le 0$ при $a < 0$; $w\left(\lambda_1 \middle| t_k - 0\right)$ имеет вид, приведенный в (3.6.1).

В (7.2.1) p (q) – вероятность инициирования дополнительного события во втором (в первом) состоянии в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из первого (второго) состояния во второе (в первое).

Обозначим $P_0\left(w\left(\lambda_1 \middle| t_k + 0\right), \tau_k\right)$ – условная вероятность ошибки оценивания состояния процесса в момент времени τ_k.

Теорема 7.1. Условная вероятность ошибки оценивания в зависимости от соотношения величин w_1 и $w\left(\lambda_1 \middle| t_k + 0\right)$ определяется следующим образом:

1) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)=1-w\left(\lambda_1|\tau_k\right),\quad \tau_k\geq 0\,,$ (7.2.3)

если $1/2\leq w_1<w\left(\lambda_1|t_k+0\right)$ либо $1/2<w_1\leq w\left(\lambda_1|t_k+0\right)$ и τ_k^0 не существует;

2) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)$ имеет вид (7.2.3), $1/2<w\left(\lambda_1|t_k+0\right)<w_1$, $\tau_k^0<0$;

3) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)=\begin{cases}w\left(\lambda_1|\tau_k\right), & 0\leq\tau_k<\tau_k^0,\\ 1-w\left(\lambda_1|\tau_k\right), & \tau_k\geq\tau_k^0,\end{cases}$

если $w\left(\lambda_1|t_k+0\right)\leq 1/2<w_1$ и $\tau_k^0\geq 0$;

4) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)=w\left(\lambda_1|\tau_k\right),\quad \tau_k\geq 0\,,$ (7.2.5)

если $w_1=1/2$, $w_1>w\left(\lambda_1|t_k+0\right)$ и τ_k^0 не существует;

5) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)$ имеет вид (7.2.5), если $1/2\geq w_1>w\left(\lambda_1|t_k+0\right)$ либо $1/2>w_1\geq w\left(\lambda_1|t_k+0\right)$ и τ_k^0 не существует;

6) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)$ имеет вид (7.2.5), $1/2>w\left(\lambda_1|t_k+0\right)>w_1$, $\tau_k^0<0$;

7) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)=\begin{cases}1-w\left(\lambda_1|\tau_k\right), & 0\leq\tau_k<\tau_k^0,\\ w\left(\lambda_1|\tau_k\right), & \tau_k\geq\tau_k^0,\end{cases}$

если $w\left(\lambda_1|t_k+0\right)\geq 1/2>w_1$ и $\tau_k^0\geq 0$;

8) $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)=1/2$, если $w_1=w\left(\lambda_1|\tau_k+0\right)=1/2$ и τ_k^0 не существует; здесь $P_0\left(w\left(\lambda_1|t_k+0\right),\tau_k\right)$ есть безусловная вероятность ошибки.

Для *обобщенного асинхронного* потока событий в общем случае и для отдельных частных случаев с использованием результатов теоремы 7.1 сформулирован алгоритм расчета условной вероятности ошибки.

Для случаев, когда *обобщенный асинхронный* поток становится *рекуррентным*, находятся выражения безусловной вероятности ошибки.

В частности, если $\lambda_1\lambda_2=pq\alpha_1\alpha_2$, $a=\left(1/\lambda_1\right)\left(\lambda_1-q\alpha_2\right)\left(\lambda_1+p\alpha_1\right)$, $\lambda_1\neq q\alpha_2$, $0<p\leq 1$, $0<q\leq 1$, то поток становится рекуррентным. Формула пересчета в (7.2.1) приобретает вид

$$w\left(\lambda_1|t_k+0\right)=\pi_1(0)=\lambda_1/\left(\lambda_1+p\alpha_1\right),\quad k=1,2,\ldots\,. \qquad (7.4.1)$$

Из (7.4.1) следует независимость $w\left(\lambda_1 \middle| t_k+0\right)$ от предыстории. Тогда для расчета вероятности $w\left(\lambda_1 \middle| \tau_k\right)=w\left(\lambda_1 \middle| \tau\right)$, $k=1, 2, \ldots$, справедлива формула

$$w\left(\lambda_1 \middle| \tau\right)=\frac{w_1\left[w_2-\pi_1(0)\right]-w_2\left[w_1-\pi_1(0)\right]e^{-a\left(w_2-w_1\right)\tau}}{w_2-\pi_1(0)-\left[w_1-\pi_1(0)\right]e^{-a\left(w_2-w_1\right)\tau}}, \quad \tau \geq 0, \qquad (7.4.2)$$

где w_1, w_2 определены в (7.2.1).

Безусловная вероятность ошибки P_0 находится путем интегрирования по τ распределения вероятностей $w\left(\lambda(\tau)=\lambda_1,\tau\right)=w(\tau)w\left(\lambda(\tau)=\lambda_1 \middle| \tau\right)$ значений двумерной смешанной случайной величины. Плотность вероятности $w(\tau)$ значений длительности интервала, в который попала точка t вынесения решения, имеет вид

$$w(\tau)=A_1\tau e^{-z_1\tau}+A_2\tau e^{-z_2\tau}, \ \tau \geq 0, \ A_1=\frac{z_1^2 z_2\left(z_2-\lambda_1-\lambda_2\right)}{c\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}, A_2=\frac{z_1 z_2^2\left(\lambda_1+\lambda_2-z_1\right)}{c\left(\alpha_1+\alpha_2\right)},$$

$$c=\sqrt{\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}, \qquad (7.4.6)$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2\right)\mp\sqrt{\left(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right].$$

С учетом (7.4.2) и (7.4.6), например, для случая 1) теоремы 7.1 получаем явный вид безусловной вероятности ошибки P_0:

$$P_0=1-\int_0^\infty w(\tau)w\left(\lambda_1 \middle| \tau\right)d\tau=$$

$$=1-D_1\int_0^\infty \frac{\tau e^{-z_1\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau-D_2\int_0^\infty \frac{\tau e^{-z_2\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau+b_1A_2\int_0^\infty \frac{\tau e^{-(c+z_2)\tau}}{1-b_2e^{-c\tau}}d\tau, \qquad (7.4.7)$$

$$D_1=w_1A_1, \ D_2=w_1A_2-b_1A_1, \ b_1=w_2\left(w_1-\pi_1(0)\right)/\left(w_2-\pi_1(0)\right),$$
$$b_2=\left(w_1-\pi_1(0)\right)/\left(w_2-\pi_1(0)\right).$$

Интегралы в формулах (7.4.7) вычисляются только численно.

С использованием имитационной модели *обобщенного асинхронного* потока построена траектория условной вероятности ошибки $P_0\left(w\left(\lambda_1 \middle| t_k+0\right), \tau_k\right)$, $k=0,1,\ldots$, приведенная на рисунке 7.1, для $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\alpha_1=0{,}01$, $\alpha_2=0{,}02$, $p=0{,}1$, $q=0{,}9$.

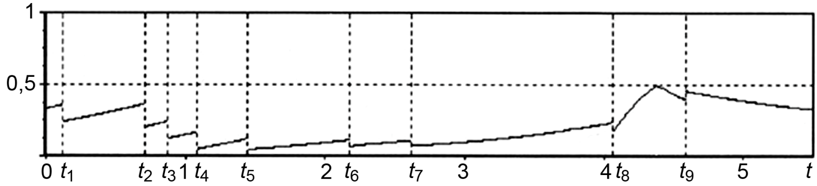

Рисунок 7.1 – Траектория условной вероятности ошибки

В **восьмой главе** решается задача об оценке длительности мертвого времени в дважды стохастических потоках событий, функционирующих в условиях продлевающегося мертвого времени.

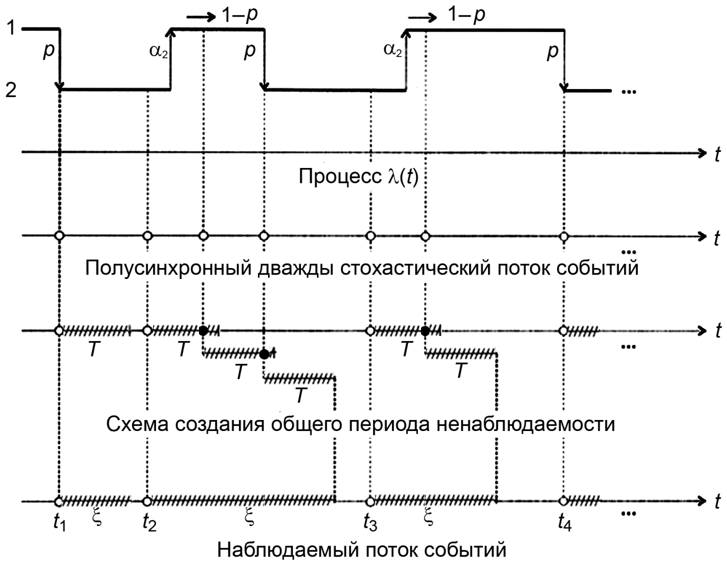

Рисунок 8.2 – Формирование наблюдаемого потока событий

Опишем схему формирования наблюдаемого потока событий. После каждого зарегистрированного события потока наступает период ненаблюдаемости фиксированной длительности T (мертвое время). Хотя в этот период события потока и не наблюдаются, каждое из них вызывает продление периода ненаблюдаемости на ту же величину T, так что наблюдаться будет лишь то событие, которое наступило после окончания последнего периода мертвого времени. В результате формируется общий период ненаблюдаемости потока, являющийся случайной величиной. По окончании общего периода ненаблюдаемости первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. На рисунке 8.2 представлен вариант формирования наблюдаемого потока для исходного *рекуррентного полусинхронного* потока, где $t_1, t_2, \ldots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; ξ – значения длительностей общих периодов ненаблюдаемости; 1 и 2 – состояния процесса $\lambda(t)$; p определена в (2.4.9); α_2 – в описании модулированного МАР-потока.

Для произвольного рекуррентного потока получено преобразование Лапласа плотности вероятности $p(\xi)$ значений длительности общего периода ненаблюдаемости, а также его математическое ожидание. Для *рекуррентных синхронного* и *полусинхронного* потоков получены преобразования Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Для каждого из потоков выписывается уравнение моментов для определения состоятельной оценки длительности мертвого времени T.

Необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $k = \overline{1,n}$, оценить в момент t значение длительности мертвого времени T.

Обозначим $\tilde{p}(\tau)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями исходного рекуррентного потока. В моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_k$, $k = \overline{1,n}$, последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова. Тогда для рекуррентного потока справедлива теорема.

Теорема 8.1. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}}\left[1 - \int_0^T e^{-sx}\tilde{p}(x)\,dx\right]^{-1}. \qquad (8.2.1)$$

В (8.2.1) $\varphi_0(T)=\int\limits_T^\infty \tilde{p}(x)dx$ есть функция Пальма.

Следствие теоремы 8.1. Математическое ожидание ξ определяется в виде

$$M\xi=-g'_\xi(s)|_{s=0}=T+\frac{1}{\varphi_0(T)}\int\limits_0^T x\tilde{p}(x)dx\,. \qquad (8.2.4)$$

В частности, для *рекуррентного полусинхронного* потока (условие рекуррентности: $p=1$) плотность $\tilde{p}(\tau)$ $(\tau=x)$ имеет вид

$$\tilde{p}(x)=\gamma\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}+(1-\gamma)(\alpha_2+\lambda_2)e^{-(\alpha_2+\lambda_2)x},\ \ \gamma=-\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2)^{-1},\ \ x\geq 0\,. (8.4.1)$$

Выполнив подстановку (8.4.1) в (8.2.4), находим математическое ожидание ξ:

$$M\xi=\frac{1}{\varphi_0(T)}\left[\frac{\gamma}{\lambda_1}\left(1-e^{-\lambda_1 T}\right)+\frac{(1-\gamma)}{\alpha_2+\lambda_2}\left(1-e^{-(\alpha_2+\lambda_2)T}\right)\right],$$

$$\varphi_0(T)=\gamma e^{-\lambda_1 T}+(1-\gamma)e^{-(\alpha_2+\lambda_2)T}\,.$$

Рассмотрим интервал времени (t_k,t_{k+1}) длительности $\tau_k=t_{k+1}-t_k$. Для рекуррентного потока длительность этого интервала равна $\tau=\xi+\eta$, где η – длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом t_{k+1}. Тогда $p(\tau)$ запишется в виде

$$p(\tau)=\int\limits_0^\tau p(\xi)p(\eta\,|\,\xi)d\xi=\int\limits_0^\tau p(\xi)p(\tau-\xi\,|\,\xi)d\xi\,,$$

$$p(\tau-\xi\,|\,\xi)=\Gamma(\xi)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-\xi)}+\left[1-\Gamma(\xi)\right](\alpha_2+\lambda_2)e^{-(\alpha_2+\lambda_2)(\tau-\xi)},\quad \tau\geq\xi\,,$$

$$\Gamma(\xi)=-\frac{\alpha_2(\alpha_2+\lambda_2)}{(\alpha_2+\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2-\alpha_2)}\left[1+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\alpha_2+\lambda_2}e^{-(\alpha_2+\lambda_1)\xi}\right];$$

$$p(\xi)=\varphi_0(T)\delta(\xi-T)+\varphi_0(T)\int\limits_0^T\delta(\xi-x_1-T)\tilde{p}(x_1)dx_1+$$

$$+\varphi_0(T)\int\limits_0^T\int\limits_0^T\delta(\xi-x_1-x_2-T)\tilde{p}(x_1)\tilde{p}(x_2)dx_1dx_2+\ldots,$$

где $\delta(.)$ – дельта-функция Дирака; $x_1, x_2, \ldots$ – моменты наступления событий, последовательно порождающие период мертвого времени T.

Теорема 8.3. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном полусинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем имеет вид

$$g_\tau(s) = \frac{\alpha_2+\lambda_2}{\alpha_2+\lambda_2+s}\left[1-\frac{\alpha_2 s}{(\alpha_2+\lambda_1)(\lambda_1+s)}\right]g_\xi(s) - \frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)s g_\xi(\alpha_2+\lambda_1+s)}{(\alpha_2+\lambda_1)(\lambda_1+s)(\alpha_2+\lambda_2+s)}, \quad (8.4.3)$$

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}}\left(1-\frac{\gamma\lambda_1}{\lambda_1+s}\left[1-e^{-(\lambda_1+s)T}\right] - \frac{(1-\gamma)(\alpha_2+\lambda_2)}{\alpha_2+\lambda_2+s}\left[1-e^{-(\alpha_2+\lambda_2+s)T}\right]\right)^{-1}.$$

Оценим для *рекуррентного полусинхронного* потока длительность мертвого времени T методом моментов. Параметры $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_2$ известны. Для оценки длительности мертвого времени T имеем уравнение моментов:

$$M(\tau) = C_1, \; M(\tau) = -g'_\tau(s)\big|_{s=0}, \; C_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k,$$

где $g_\tau(s)$ определена выражением (8.4.3). Выполнив преобразования, получаем уравнение для нахождения оценки длительности мертвого времени:

$$\frac{1-(\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2)\left(\gamma_1 e^{-\lambda_1 T}+\gamma_2 e^{-(\alpha_2+\lambda_2)T}\right)}{(\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2)\left(\gamma e^{-\lambda_1 T}+(1-\gamma)e^{-(\alpha_2+\lambda_2)T}\right)} +$$

$$+a\frac{\gamma e^{-h_1 T}+(1-\gamma)e^{-h_2 T}}{1-[\gamma\lambda_1/h_1]\left(1-e^{-h_1 T}\right)-[(1-\gamma)(\alpha_2+\lambda_2)/h_2]\left(1-e^{-h_2 T}\right)} = C_1 - b,$$

$$a = \frac{\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}, \quad b = \frac{\lambda_1^2+\alpha_2(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_2)}{\lambda_1(\alpha_2+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2)}, \quad (8.4.7)$$

$$\gamma_1 = \gamma/\lambda_1, \; \gamma_2 = \gamma/(\alpha_2+\lambda_2), \; h_1 = 2\lambda_1+\alpha_2, \; h_2 = 2\alpha_2+\lambda_1+\lambda_2,$$

$$\pi_1 = \alpha_2/(\lambda_1 p+\alpha_2)^{-1}, \; \pi_2 = \lambda_1 p/(\lambda_1 p+\alpha_2)^{-1},$$

где γ определена в (8.4.1); $0 < T \le \tau_{\min}$, $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = \overline{1, n}$.

Решение уравнения (8.4.7) возможно только численно. Уравнение (8.4.7) имеет единственное решение. Для установления качества оценки $\hat{T}$ поставлены эксперименты. В таблице 8.5 приведены результаты эксперимента для $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}01$, $p = 1$. Имитировалось $N = 100$ реализаций наблюдаемого потока для каждого значения T = 1; 3; 5; 7. Количество наблюдаемых интервалов τ_k для каждой реализации равнялось $n = 1500$. Вычислялись выборочное среднее $\hat{M}\left(\hat{T}\right)$ и выборочная вариация $\hat{V}$ оценки $\hat{T}$.

Таблица 8.5 – Результаты эксперимента для $n = 1500$

T	1	3	5	7
$\hat{M}\left(\hat{T}\right)$	0,9960	2,9940	4,9970	6,9640
$\hat{V}$	0,0001	0,0003	0,0006	0,0019

Анализ результатов показывает, что имеет место незначительное смещение оценок $\hat{T}$ относительно истинных значений *T*. С увеличением *T* увеличивается потеря событий на общем периоде ненаблюдаемости, что влечет за собой снижение качества оценивания. Последнее демонстрируется поведением $\hat{V}$.

В **заключении** сформулированы результаты диссертационной работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, в том числе:

статьи в российских научных журналах:

1. **Нежельская Л. А.** Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости / Л. А. Нежельская // Вестник Томского государственного университета. – 2000. – № 269. – С. 95–98. – 0,49 п.л.

2. Горцев А. М. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мертвом времени / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 1. – С. 31–41. – 0,89 / 0,45 п.л.

3. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий / А. М. Горцев, А. А. Калягин, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 2 (11). – С. 66–81. – 1,29 / 0,43 п.л.

4. Горцев А. М. О связи МС-потоков и МАР-потоков событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1 (14). – С. 13–21. – 0,73 / 0,37 п.л.

5. Леонова М. А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий / М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 2 (19). – С. 88–101. – 1,12 / 0,56 п.л.

6. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени / А. М. Горцев, М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2012. – № 4 (21). – С. 14–25. – 0,96 / 0,32 п.л.

7. Леонова М. А. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2013. – № 9/2. – С. 220–222. – 0,36 / 0,18 п.л.

8. Леонова М. А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 2 (23). – С. 54–63. – 0,8 / 0,4 п.л.

9. Горцев А. М. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий / А. М. Горцев, М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2013. – № 4 (25). – С. 32–42. – 0,88 / 0,29 п.л.

10. Горцев А. М. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени / А. М. Горцев, А. А. Калягин, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 2 (27). – С. 19–29. – 1,36 / 0,45 п.л.

11. Калягин А. А. Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий / А. А. Калягин, **Л. А. Нежельская** // Из-

вестия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 143–150. – 0,93 / 0,47 п.л.

12. **Нежельская Л. А.** Численные результаты оптимальной оценки состояний модулированного MAP-потока событий / Л. А. Нежельская, Д. В. Березин // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 151–157. – 0,81 / 0,41 п.л.

13. **Нежельская Л. А.** Оптимальная оценка состояний синхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / Л. А. Нежельская, Н. С. Крюкова // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 11/2. – С. 158–163. – 0,7 / 0,35 п.л.

14. Горцев А. М. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке / А. М. Горцев, А. А. Калягин, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (30). – С. 27–37. – 1,38 / 0,46 п.л.

15. **Нежельская Л. А.** Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного MAP-потока событий и условия рекуррентности потока / Л. А. Нежельская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 1 (30). – С. 57–67. – 1,38 п.л.

16. Березин Д. В. Оптимальное оценивание состояний модулированного MAP-потока событий при его неполной наблюдаемости / Д. В. Березин, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 4–13. – DOI 10.17223/19988605/32/1. – 1,25 / 0,63 п.л.

17. Калягин А. А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий / А. А. Калягин, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2015. – № 3 (32). – С. 23–32. – DOI: 10.17223/19988605/32/3. – 1,25 / 0,63 п.л.

18. Березин Д. В. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в модулированном MAP-потоке событий / Д. В. Березин, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 3 (36). – С. 26–34. – DOI: 10.17223/19988605/36/3. – 1,14 / 0,57 п.л.

статьи в зарубежных научных изданиях, индексируемых Web of Science:

19. **Nezhelskaya L.** Optimal state estimation in modulated MAP event flows with unextendable dead time / L. Nezhelskaya // Communications in Computer and

Information Science. – 2014. – Vol. 487. – P. 342–350. – DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_39. – 0,6 п.л.

20. **Nezhel'skaya L.** Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time / L. Nezhel'skaya // Communications in Computer and Information Science. – 2015. – Vol. 564. – P. 141–151. – DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12. – 0,73 п.л.

статьи в российских научных журналах, переводные версии которых индексируются Web of Science и/или Scopus:

21. Горцев А. М. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская**, Т. И. Шевченко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1993. – Т. 36, № 12. – С. 67–85. – 1,66 / 0,55 п.л.

в переводной версии журнала:

Gortsev A. M. Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya,** T. I. Shevchenko // Russian Physics Journal. – 1993. – Vol. 36, is. 12. – P. 1153–1167. – DOI: 10.1007/BF00559693

22. Горцев А. М. Оценка параметров синхронно-альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Радиотехника. – 1995. – № 7–8. – С. 6–10. – 0,57 / 0,28 п.л.

в переводной версии журнала:

Gortsev A. M. Estimation of the parameters of a synchro-alternating Poisson event flow by the method of moment / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya** // Radiotekhnika. – 1995. – Vol. 40, is. 7–8. – P. 6–10.

в зарубежном научном журнале:

Gortsev A. M. Estimate of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya** // Telecommunications and radio engineering. – 1996. – Vol. 50, is. 1. – P. 56–63.

23. Горцев А. М. Оценивание периода мёртвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Измерительная техника. – 2003. – № 6. – С. 7–13. – 0,79 / 0,4 п.л.

в переводной версии журнала:

Gortsev A. M. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya** // Measurement techniques. – 2003. – Vol. 46, is. 6. – P. 536–545. – DOI: 10.1023/A:1025499509015

24. Горцев А. М. Оценивание длительности «мёртвого» времени и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий /

А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Радиотехника. – 2004. – № 10. – С. 8–16. – 1,02 / 0,51 п.л.

в переводной версии журнала:

Gortsev A. M. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic event flow / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya** // Radiotekhnika. – 2004. – Vol. 10. – P. 8–16.

25. Бушланов И. В. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий / И. В. Бушланов, А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 76–93. – 1,26 / 0,42 п.л.

в переводной версии журнала:

Bushlanov I. V. Estimating parameters of the synchronous twofold-stochastic flow of event / I. V. Bushlanov, A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya** // Automation and remote control. – 2008. – Vol. 69, is. 9. – P. 1517–1533. – DOI: 10.1134/S0005117908090075

26. Горцев А. М. Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Дискретная математика. – 2011. – Т. 23, № 2. – С. 59–65. – 0,49 / 0,25 п.л.

в переводной версии журнала:

Gortsev A. M. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhelskaya** // Discrete Mathematics and Applications. – 2011. – V. 21, is. 3. – P. 283–290. – DOI: 10.1515/DMA.2011.017

27. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний MAP-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская**, А. А. Соловьев // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 8. – С. 49–63. – 1,05 / 0,35 п.л.

в переводной версии журнала:

Gortsev A. M. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time / A. M. Gortsev, **L. A. Nezhel'skaya**, A. A. Solov'ev // Automation and remote control. – 2012. – Vol. 73, is. 8. – P. 1316–1326. – DOI: 10.1134/S000511791208005X

28. **Нежельская Л. А.** Условия рекуррентности потока физических событий при непродлевающемся мертвом времени / Л. А. Нежельская // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 12. – С. 168–175. – 0,7 п.л.

в переводной версии журнала:

Nezhel'skaya L. A. Conditions for Recurrence of a Flow of Physical Events with Unextendable Dead Time Period / L. A. Nezhel'skaya // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 58, is 12. – P. 1859–1867.

29. **Нежельская Л. А.** Оценивание длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий методом максимального

правдоподобия / Л. А. Нежельская // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2016. – Т. 59, № 5. – С. 43–53. – 0,96 п.л.

в переводной версии журнала:

Nezhel'skaya L. A. Estimation of the Unextendable Dead Time Period in a Flow of Physical Events by the Method of Maximum Likelihood / L. A. Nezhel'-skaya // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 59, no. 5. – P. 651–662.

Публикации в других научных изданиях:

30. **Нежельская Л. А.** Рекуррентные формулы для апостериорных вероятностей при оценке состояний синхронного МС-потока событий / Л. А. Нежельская // Распределённые микропроцессорные управляющие системы и локальные вычислительные сети: материалы всесоюзной научно-технической конференции. Томск, июнь 1991 г. – Томск, 1991. – С. 181–182. – 0,13 п.л.

31. Горцев А. М. Оценка параметров синхронного МС-потока событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Сети связи и сети ЭВМ. Анализ и применение : тезисы докладов восьмой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Брест, февраль 1992 г. – Минск, 1992. – С. 33. – 0,06 / 0,03 п.л.

32. **Нежельская Л. А.** Моделирование биотехнологических процессов дважды стохастическими потоками с инициативными событиями / Л. А. Нежельская // Биомод-92 : тезисы докладов Международной конференции по проблемам моделирования в бионике. Санкт-Петербург, 21–26 июня 1992 г. – М., 1992. – С. 85–86. – 0,13 п.л.

33. Горцев А. М. Оценка параметров синхронно-альтернирующего пуассоновского потока событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Судовые энергетические установки и перспективы их развития : тезисы докладов международной научной конференции. Одесса, 14–15 сентября 1994 г. – Одесса, 1994. – С. 24–27. – 0,27 / 0,14 п.л.

34. **Нежельская Л. А.** Алгоритм оценивания состояний синхронного МС-потока событий / Л. А. Нежельская // Исследование сетей связи и компьютерных сетей методами теории массового обслуживания : тезисы докладов Одиннадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск, февраль 1995 г. – Минск, 1995. – С. 93–94. – 0,12 п.л.

35. **Нежельская Л. А.** Оптимальный алгоритм оценки состояний синхронного дважды стохастического потока событий / Л. А. Нежельская // Всесибирские чтения по математике и механике : тезисы докладов международной конференции. Томск, 17–20 июня 1997 г. – Томск, 1997. – Т. 1 : Математика. – С. 136. – 0,06 п.л.

36. **Нежельская Л. А.** Оптимальная оценка состояний синхронного МС-потока событий / Л. А. Нежельская // Всесибирские чтения по математике и

механике : избранные доклады международной конференции. Томск, 17–20 июня 1997 г. – Томск, 1997. – Т. 1 : Математика. – С. 186–191. – 0,37 п.л.

37. **Нежельская Л. А.** Алгоритм оценивания состояния полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени / Л. А. Нежельская // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети : материалы Четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания (BWWQT-98). Минск, 27–29 января 1998 г. – Минск, 1998. – С. 18–21. – 0,46 п.л.

38. Горцев А. М. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2002. – № 1 (I). – С. 18–23. – 0,7 / 0,35 п.л.

39. Горцев А. М. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2002. – № 1 (I). – С. 24–29. – 0,7 / 0,35 п.л.

40. Горцев А. М. Оценивание длительности мёртвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2003. – № 6. – С. 232–239. – 0,93 / 0,47 п.л.

41. Василевская Т. П. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо непроявлением событий / Т. П. Василевская, А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2004. – № 9 (II). – С. 129–138. – 0,62 / 0,21 п.л.

42. Горцев А. М. Синхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мертвом времени / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : сборник научных статей Международной конференции, посвященной 70-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева. Минск, 21–25 февраля 2005 г. – Минск, 2005. – С. 60–69. – 1,17 / 0,59 п.л.

43. Горцев А. М. О рекуррентности дважды стохастических потоков событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2005. – № 14. – С. 258–266. – 1,08 / 0,54 п.л.

44. Горцев А. М. Оценивание параметров асинхронного потока с инициированием лишних событий методом моментов / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Вестник Томского государственного университета. Приложение. – 2006. – № 18. – С. 267–273. – 0,81 / 0,41 п.л.

45. Горцев А. Полусинхронный дважды стохастический поток при продлевающемся мертвом времени / А. Горцев, **Л. Нежельская** // Массовое обслуживание : потоки, системы, сети : материалы Международной научной конференции «Математические методы повышения эффективности инфор-

мационно-телекоммуникационных сетей». Гродно, 29 января – 01 февраля 2007 г. – Минск, 2007. – Вып. 19. – С. 68–78. – 1,28 / 0,64 п.л.

46. Леонова М. А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишнего события / М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Седьмой Российской конференции с международным участием. Томск, 02–05 сентября 2008 г. – Томск, 2008. – С. 83. – 0,12 / 0,06 п.л.

47. Горцев А. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока с инициированием лишних событий / А. Горцев, М. Леонова, **Л. Нежельская** // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы Международной научной конференции «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей». Минск, 26–29 января 2009 г. – Минск, 2009. – Вып. 20. – С. 90–96. – 0,81 / 0,27 п.л.

48. Леонова М. А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного потока в условиях его неполной наблюдаемости / М. А. Леонова, **Л. А. Нежельская** // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сборник научных статей (материалы Международной конференции, посвященной 75-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева). Минск, 22–25 февраля 2010 г. – Минск, 2010. – Вып. 3. – С. 201–206. – 0,67 / 0,34 п.л.

49. Горцев А. М. Оптимальная оценка состояний обобщенного синхронного потока / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская,** А. А. Соловьев // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : тезисы докладов Восьмой Российской конференции с международным участием. Томск, 05–08 октября 2010 г. – Томск, 2010. – С. 31. – 0,12 / 0,04 п.л.

50. Калягин А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока при непродлевающемся мертвом времени / А. Калягин, **Л. Нежельская** // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы Международной научной конференции «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей». Минск, 31 января – 03 февраля 2011 г. – Минск, 2011. – Вып. 21. – С. 96–101. – 0,68 / 0,34 п.л.

51. Голофастова М. Н. Апостериорные вероятности состояний модулированного синхронного потока событий / М. Н. Голофастова, **Л. А. Нежельская** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Девятой Российской конференции с международным участием. Катунь, 05–08 июня 2012 г. – Томск, 2012. – С. 83. – 0,12 / 0,06 п.л.

52. Горцев А. М. О суперпозиции MAP-потоков событий / А. М. Горцев, **Л. А. Нежельская** // Новые информационные технологии в исследовании слож-

ных структур: материалы Девятой Российской конференции с международным участием. Катунь, 05–08 июня 2012 г. – Томск, 2012. – С. 85. – 0,12 / 0,06 п.л.

53. **Нежельская Л. А.** Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями MAP-потока при непродлевающемся мертвом времени / Л. А. Нежельская, А. А. Соловьев // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Девятой Российской конференции с международным участием. Катунь, 05–08 июня 2012 г. – Томск, 2012. – С. 96. – 0,12 / 0,06 п.л.

54. Горцев А. Условия рекуррентности обобщенного асинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени / А. Горцев, М. Леонова, **Л. Нежельская** // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети : материалы Международной научной конференции «Современные вероятностные методы анализа, проектирования и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей». Минск, 28–31 января 2013 г. – Минск, 2013. – Вып. 22. – С. 32–38. – 0,42 / 0,14 п.л.

55. **Нежельская Л. А.** Апостериорные вероятности состояний модулированного MAP-потока событий / Л. А. Нежельская // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой Российской конференции с международным участием. Катунь, 09–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 95–96. – 0,23 п.л.

56. **Нежельская Л. А.** Оценка длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий / Л. А. Нежельская, А. А. Калягин // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Десятой Российской конференции с международным участием. Катунь, 09–11 июня 2014 г. – Томск, 2014. – С. 96–97. – 0,23 / 0,12 п.л.

57. **Нежельская Л. А.** Оптимальная оценка состояний модулированного MAP-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / Л. А. Нежельская // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014) : материалы XIII Международной научно-практической конференции им. А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 20–22 ноября 2014 г. – Томск, 2014. – Ч. 2. – С. 193–198. – 0,38 п.л.

58. **Нежельская Л. А.** Плотность вероятностей длительности интервала модулированного MAP-потока событий / Л. А. Нежельская // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева. Минск, 23–26 февраля 2015 г. – Минск, 2015. – С. 230–235. – 0,7 п.л.

59. Березин Д. В. Численные результаты при оптимальной оценке состояний модулированного MAP-потока событий в условиях его частичной наблюдаемости / Д. В. Березин, **Л. А. Нежельская** // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2015. –

Т. 297 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы III Всероссийской молодёжной научной конференции. Томск, 22–23 мая 2015 г. – С. 93–99. – 0,44 / 0,22 п.л.

60. Крюкова Н. С. Численные результаты оптимального оценивания состояний модулированного синхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / Н. С. Крюкова, **Л. А. Нежельская** // Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2015. – Т. 297: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы III Всероссийской молодёжной научной конференции. Томск, 22–23 мая 2015 г. – С. 115–119. – 0,31 / 0,16 п.л.

61. **Нежельская Л.А.** Оценка параметров MAP-потока событий методом моментов / Л. А. Нежельская, А. И. Ненова // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2015. – Т. 297 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы III Всероссийской молодёжной научной конференции. Томск, 22–23 мая 2015 г. – С. 123–129. – 0,44 / 0,22 п.л.

62. **Нежельская Л. А.** Условия рекуррентности модулированного MAP-потока событий при его неполной наблюдаемости / Л. А. Нежельская // Распределённые компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015): материалы Восемнадцатой международной научной конференции. Москва, 19–22 октября 2015 г. – Москва, 2015. – С. 571–578. – 0,65 п.л.

63. **Нежельская Л. А.** Плотность вероятностей длительности интервала модулированного MAP-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / Л. А. Нежельская // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) : материалы XIV Международной конференции им. А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г. – Томск, 2015. – Ч. 1. – С. 60–67. – 0,5 п.л.

64. Березин Д. В. Имитационная модель модулированного MAP-потока событий в условиях непродлевающегося равномерно распределенного мертвого времени / Д. В. Березин, **Л. А. Нежельская** // Современные тенденции развития науки и производства : сборник материалов III Международной научно-практической конференции. Кемерово, 21–22 января 2016 г. – Кемерово, 2016. – С. 272–275. – 0,25 / 0,13 п.л.

65. **Нежельская Л. А.** Имитационная модель полусинхронного потока второго порядка / Л. А. Нежельская, Д. А. Тумашкина // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2016. – Т. 299 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Международной моло-

дёжной научной конференции. Томск, 20–21 мая 2016 г. – С. 109–114. – 0,37 / 0,19 п.л.

66. **Нежельская Л.А.** Имитационное моделирование обобщенного синхронного потока второго порядка / Л. А. Нежельская, Е. Ф. Сидорова // Труды / Томский государственный университет. Серия физико-математическая. – Томск, 2016. – Т. 299 : Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Международной молодёжной научной конференции. Томск, 20–21 мая 2016 г. – С. 104–109. – 0,37 / 0,19 п.л.

67. Березин Д. В. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в модулированном MAP-потоке событий методом моментов / Д. В. Березин, **Л. А. Нежельская** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Одиннадцатой международной конференции. Екатеринбург, 06–10 июня 2016 г. – Томск, 2016. – С. 89–90. – 0,24 / 0,12 п.л.

68. Крюкова Н. С. Оценка длительности непродлевающегося мертвого времени в синхронном потоке событий второго порядка методом моментов / Н. С. Крюкова, **Л. А. Нежельская** // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы Одиннадцатой международной конференции. Екатеринбург, 06–10 июня 2016 г. – Томск, 2016. – С. 90–91. – 0,24 / 0,12 п.л.

69. **Нежельская Л. А.** Оценка параметров модулированного MAP-потока событий методом моментов / Л. А. Нежельская, Н. М. Туманов // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы Одиннадцатой международной конференции. Екатеринбург, 06–10 июня 2016 г. – Томск, 2016. – С. 91–92. – 0,24 / 0,12 п.л.

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати Издательского Дома
Томского государственного университета
Заказ № 2327 от «19» января 2017 г.
Тираж 120 экз. Печ. л. 2.0
г. Томск, Московский тр., 8 тел. 53-15-28