ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Г.Г. ПЕСТОВ

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Томск
2016

УДК 517(07)
ББК 22.161я7-2
П286

Пестов Г.Г.
П286 Лекции по математическому анализу. – Томск : Издательский Дом ТГУ, 2016. – 184 с.

В данном издании публикуется краткий конспект лекций замечательного педагога и лектора – профессора кафедры математического анализа Германа Гавриловича Пестова (29.09.1932-18.08.2015), набранный им в последние годы жизни. В лекциях затрагиваются темы трёх семестров двухгодичного курса математического анализа, читавшегося Г.Г. Пестовым на ММФ ТГУ с 1977 по 2015 год. В частности, рассматривается теория меры и интеграла Лебега, которую именно Г.Г. Пестов начал читать на МехМате ТГУ. Издание предназначено для преподавателей, ведущих курс математического анализа и для всех интересующихся методикой преподавания математического анализа студентам физико-математических специальностей.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент С.А. Копанев

УДК 517(07)
ББК 22.161я7-2

Оглавление

Об авторе

Пестов Герман Гаврилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ММФ ТГУ почти 40 лет читал двухгодичный курс математического анализа студентам механико-математического факультета ТГУ.

Книга, которую вы держите в руках, представляет собой краткий конспект лекций, который Герман Гаврилович записал в последние годы жизни. Его лекциям присущи ясность изложения самых трудных вопросов математики, при этом, он умел вовлекать слушателей в активные размышления над математическими проблемами. Его отличала отзывчивость, умение найти индивидуальный подход к каждому человеку.

Пестов Г.Г. родился 29 сентября 1932 г. в городе Кемерово. Воспитывала его одна мать. Герман Гаврилович рассказывал, что в трудные времена его детства ему повезло в том, что на предприятии, где работала его мама, была прекрасная библиотека, в которой можно было найти ответы на многочисленные вопросы пытливого и любознательного ума. В 1950 г. он закончил с серебряной медалью среднюю школу в городе Барнауле, в этом же году поступил в ТГУ.

Окончив ММФ в 1955 г., в том же году он поступил в аспирантуру. По окончании аспирантуры работал в ТПИ ассистентом, затем старшим преподавателем и доцентом. В 1966 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1968 перешёл на работу в ТГУ, где был заведующим кафедрой математического анализа ММФ ТГУ с 1969 по 1982 год.

Герман Гаврилович – ветеран труда России (с 1984 г.), лауреат премии Томской области в сфере образования и науки (1997 г.), член Американского Математического Общества (с 1992 г.), референт Mathematical Reviews, референт Zentralblatt fur Mathem., имеет более 100 научных и учебно-методических публикаций, долгие годы был председателем методической комиссии ММФ, членом ГАК ММФ ТГУ. Его научные интересы были чрезвычайно широки. В 2004 году им была защищена докторская диссертация «К теории упорядоченных полей и групп».

Под руководством Пестова Г.Г. восемь его учеников успешно защитили кандидатские диссертации. Его дипломники и аспиранты вовлекались в тему своей работы не только консультациями и индивидуальными лекциями, но и участием в семинарах, часть которых, Герман Гаврилович проводил дома, подкармливая голодных студентов тарелкой супа, а то и пирожками, которые он собственноручно испек. Многие годы он проводил кружок со студентами, занятия на котором запоминались на всю жизнь. Семинар под руководством Пестова Г.Г. «Упорядоченные алгебраические системы» действовал в течение 30 лет и продолжает работать при содействии его учеников.

Все искренне уважали Германа Гавриловича за эрудицию, способность тактично помочь в трудной ситуации, за доброжелательность, скромность, умение создать творческую обстановку в руководимом им коллективе.

Имея прекрасный слух, Герман Гаврилович играл на 7 струнной гитаре, пел песни Булата Окуджавы, сочинял свои, самостоятельно научился хорошо играть на фортепиано. Его песни часто звучали в годы расцвета мехматовского КВНа, в котором активно участвовали преподаватели, звучат и сейчас на мехматовских встречах.

Как-то на международной конференции в одном европейском университете, коллеги поинтересовались, какой интеграл даётся у нас на Мехмате – Римана или Лебега? «Конечно интеграл Лебега» – сказал наш человек, учившийся лет 20 назад у Пестова Г.Г., который еще в те времена читал интеграл Лебега. Герман Гаврилович всегда стоял на рубеже науки, был в курсе важнейших достижений и не только в своей области, всегда щедро делился с другими своими знаниями.

В 2012 г. международным биографическим центром в Кембридже Пестов Г.Г. был избран одним из ведущих учёных мира.

Коллеги, ученики.

Введение

Математическая индукция

Что такое математика? Существует множество определений математики. Одно из них: «Математика – это наука о бесконечном» (Давид Гильберт). Математика и философия – единственные науки, изучающие бесконечность.

Рассмотрим задачу отыскания суммы n первых нечетных чисел. Нечётное число с номером n равно $2n - 1$.

Номер n	1	2	3	4
n - тое нечетное число	1	3	5	7
Сумма n нечётных чисел	1	4	9	16

Возникает гипотеза: *сумма n первых нечетных натуральных чисел равна n^2*. Каким образом доказать эту гипотезу? Мы можем продолжить нашу таблицу еще дальше, но все равно мы убедимся в истинности данной гипотезы лишь для конечного множества натуральных чисел, тогда как это множество бесконечно.

Возникла задача доказательства нашей гипотезы для всех натуральных n, то есть для бесконечного множества натуральных чисел.

За многие тысячелетия своего существования математика выработала мощные методы работы с бесконечными множествами.

Одним из орудий для изучения бесконечности служит *математическая индукция.* По-видимому, метод математической индукции впервые сформулировал *Блез Паскаль* (1623 - 1662) – замечательный французский ученый XVII века. Сформулируем этот метод в виде теоремы.

Теорема (метод математической индукции).

Пусть $P(n)$ есть некоторое утверждение, определенное при всех натуральных n и при каждом n принимающее значения «истина» или «ложь». Пусть, далее, выполнены два условия:
1) $P(1)$ верно (База индукции),
2) Для каждого n из того, что верно $P(n)$, следует, что верно и $P(n+1)$. (Шаг индукции). (Иначе: $\forall n \in \mathbb{N} \;\; P(n) \Rightarrow P(n+1)$).
Тогда утверждение $P(n)$ верно для всех натуральных n.

Доказательство. Мы будем использовать следующее фундаментальное свойство натуральных чисел: **каждое непустое множество**

натуральных чисел содержит наименьшее число.

Предположим, что в условиях теоремы существуют такие натуральные числа n, для которых утверждение $P(n)$ неверно. Обозначим наименьшее из таких чисел через n_0. Итак, $P(n_0)$ – ложно. По условию теоремы, $P(1)$ истинно. Значит, $n_0 > 1$, $n_0 - 1 > 0$. Поскольку $n_0 - 1 < n_0$, то $P(n_0 - 1)$ истинно. Но, по условию теоремы, из истинности $P(n_0 - 1)$ следует истинность $P(n_0)$. Значит, $P(n_0)$ – истинно. Итак, предположение, что существуют такие натуральные n, для которых утверждение $P(n)$ неверно, ведет к противоречию. Поэтому $P(n)$ истинно для всех натуральных n. Теорема доказана.

Пример. Докажем с помощью математической индукции, что сумма n первых нечетных чисел равна n^2.

Обозначим утверждение: «Сумма n первых нечетных чисел равна n^2» – через $P(n)$.

1) База индукции. При $n = 1$ наше утверждение принимает вид: $1 = 1$. Следовательно, база индукции верна.

2) Пусть для натурального n утверждение $P(n)$ верно. Это значит, что имеет место равенство: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Убедимся, что истинно $P(n + 1)$. В самом деле, прибавим к обеим частям последнего равенства $(n + 1)$ - е нечетное число, т.е., $(2n + 1)$.

Получим: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$, откуда: $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Итак, из $P(n)$ следует $P(n+1)$. Шаг индукции доказан. Теперь, по принципу математической индукции, $P(n)$ доказано для всех натуральных n.

Упражнение.

1. Доказать, что количество диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

2. Доказать, пользуясь методом математической индукции, что сумма кубов натуральных чисел, не превосходящих натурального числа n, равна $(\frac{n(n+1)}{2})^2$. Иными словами: сумма кубов натуральных чисел, не превосходящих натурального числа n, равна квадрату суммы этих натуральных чисел.

Глава 1. Элементы теории множеств

Математика состоит из многих разделов, таких как аналитическая геометрия, математический анализ, алгебра, дифференциальная геометрия и так далее. Но все эти разделы математики построены *на теории множеств*, которая служит фундаментом современной математики.

Понятие множества. Термин *множество* (который мы уже использовали в разделе математическая индукция) в математике означает совокупность, собрание, коллекцию некоторых предметов. Видимо, не существует более простого понятия, опираясь на которое, можно было бы сформулировать определение множества. Поясним понятие множества на примерах.

1) Множество всех натуральных чисел. Это множество обозначается через $\mathbb{N}$. Это измененное N из латинского алфавита (первая буква слова *натуральный*). Таким образом, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Здесь n обозначает, как говорят, *общий член* множества натуральных чисел. Многоточие $\ldots$ читается «и так далее». Все натуральные числа являются *элементами* множества $\mathbb{N}$. Запись $n \in \mathbb{N}$ означает, что число n есть элемент множества N; говорят также, что число *n принадлежит* множеству N.

2) Множество всех целых чисел: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$. Это обозначение происходит от немецкого *Zahlen* – «числа». Таким образом, запись: $n \in \mathbb{Z}$ – означает, что n есть целое число. Говорят, что множество $\mathbb{Z}$ *содержит* все целые числа и не содержит никаких других элементов. Каждое целое число *принадлежит* множеству $\mathbb{Z}$. Высказывание: «число 0 принадлежит множеству $\mathbb{Z}$» записывается так: $0 \in \mathbb{Z}$. Высказывание: «число 1 принадлежит $\mathbb{N}$» записывается: $1 \in \mathbb{N}$, и так далее.

3) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

4) Для построения теории множеств оказалось необходимым ввести так называемое *пустое множество.* Пустое множество, по определению, не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается с помощью перечеркнутого символа нуля: $\emptyset = \{x | \, x \neq x\}$. Использование пустого множества позволяет упростить многие формулы теории множеств.

Историческая справка. Основной вклад в создание теории множеств внес немецкий математик Георг Кантор (1845 - 1918).

п.1. Действия над множествами

Определение. Пусть A и B – множества. *Объединением* этих множеств называется множество, содержащее все элементы множества A, все элементы множества B и не содержащее никаких других элементов. Объединение множеств A и B обозначается через $A \cup B$.

Пример. Пусть $A = \{a, d, e, f\}$, $B = \{a, c, d\}$.

Тогда $A \cup B = \{a, c, d, e, f\}$.

Определение. Пусть $A_1, \ldots, A_n$– множества. *Объединением* этих множеств называется множество, содержащее все элементы каждого из множеств $A_1, \ldots, A_n$, и не содержащее никаких других элементов. Обозначение: $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, или: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Определение. Пусть $A_1, \ldots, A_n$– множества. *Пересечением* этих множеств называется множество, содержащее все элементы, принадлежащие одновременно каждому из множеств $A_1, \ldots, A_n$, и не содержащее никаких других элементов.

Обозначение: $A_1 \cap \ldots \cap A_n$, или: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Пример. Пусть $A = \{a, d, e, f\}$, $B = \{a, c, d\}$. Тогда $A \cap B = \{a, d\}$.

Определение. *Разностью* множеств A и B называется множество, которое содержит все те элементы множества A, которые не принадлежат множеству B, и не содержит никаких других элементов. Разность множеств A и B обозначается через $A \setminus B$.

Пример. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ есть множество всех целых отрицательных чисел и нуль. С другой стороны, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$.

Определение. Пусть $A \subset U$. Тогда разность $U \setminus A$ называется *дополнением множества A до множества U.*

Если множество U фиксировано, а все другие множества, встречающиеся в данной задаче, являются подмножествами множества U, то дополнение множества A до U называют, для краткости, просто *дополнением множества* A и обозначают A^c. Само множество U в таком случае называют *универсальным множеством.*

Определение. Множества A и B называются равными тогда и только когда, когда они содержат одни и те же элементы. Запишем это определение в виде формулы: $(A = B) \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Определение. Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называется *подмножеством* множества B. Говорят также, что множество A *входит* во множество B, и множество B *включает* множество A. Обозначение: $A \subset B$, также: $B \supset A$. Множество B называется *надмножеством* множества A.

Пример. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ есть надмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. В свою очередь, множество $\mathbb{N}$ есть подмножество множества $\mathbb{Z}$. Множество $\mathbb{Z}$ включает множество $\mathbb{N}$. Множество $\mathbb{N}$ входит во множество $\mathbb{Z}$.

Из определения подмножества следует, что каждое множество A включает самого себя, то есть, $A \subset A, A \supset A$. Пустое множество есть подмножество каждого множества A. Иначе, $\emptyset \subset A$.

Пустое множество и множество A называются *несобственными* подмножествами множества A. Все остальные подмножества множества A называются его *собственными* подмножествами.

п.2. Способы задания множеств

1) Конечное множество можно задать, просто перечислив все его элементы.

2) Если же множество бесконечно, то его можно задать, указав *характеристическое свойство* его элементов, то есть такое свойство, которым обладают все элементы данного множества, и не обладают никакие элементы, не принадлежащие этому множеству.

Пример. Множество всех простых чисел P. Характеристическое свойство этого множества состоит в том, что каждый элемент $x \in P$, делится нацело только на себя и на единицу и 1 не принадлежит P.

Теорема де Моргана. *Пусть множества $A_1, \ldots, A_n$ являются подмножествами универсального множества . Тогда имеют место формулы:*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c, \ \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i)^c.$$

Доказательство. Докажем первую формулу. $x \in \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)^c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] x \notin A_i \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] x \in {A_i}^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c.$$

Таким образом: $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$.

Отсюда $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$, что и требовалось.

Глава 2. Вещественные числа

В школьном курсе математики вы познакомились с конечными и бесконечными десятичными дробями и действиями над ними: сложением, вычитанием, умножением и делением.

Отношение равенства во множестве десятичных дробей

Введем во множестве десятичных дробей отношение равенства.
1) Каждая десятичная дробь равна самой себе.
2) Две десятичные дроби:
$\alpha = \pm m_1 \dots m_k, n_1 \dots n_l$, и
$\beta = \pm m_1 \dots m_k, n_1 \dots (n_l - 1)\,(9)$
(где m_i, n_j цифры, $n_l \geq 1$, и (9) обозначает 9 в периоде) равны.

Таким образом, каждая конечная десятичная дробь равна некоторой бесконечной десятичной дроби.

Каждая обыкновенная дробь может быть записана в виде десятичной дроби, конечной или бесконечной.

Поле вещественных чисел

Множество всевозможных десятичных дробей с таким отношением равенства назовем *множеством вещественных чисел.* Две равные десятичные дроби являются различными представлениями одного и того же вещественного числа. Множество вещественных чисел обозначается через $\mathbb{R}$. Во множестве вещественных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления. Перечислим свойства этих операций.

Коммутативность
(1) $x + y = y + x$, $\;(1')\;$ $xy = yx$,
Ассоциативность
(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\;(2')\;$ $x(yz) = (xy)z$,
Существование нейтрального элемента
(3) $x + 0 = x$, $\quad(3')\;$ $x1 = 1x$,
(4) *Существование противоположного элемента* $-x \;:\; x + (-x) = 0$,
$(4')$ *Существование обратного элемента* x^{-1} *для* $x \neq 0 \;:\; x(x^{-1}) = 1$,

(5) *Дистрибутивный закон* $x(y+z) = xz + xy$.

Определение. Пусть на множестве P заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие условиям $(1)-(4), (1')-(4'), (5)$. Тогда множество P называется *полем.*

Пример. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ вместе с операциями сложения и умножения является полем.

Поле вещественных чисел составляет фундамент классической математики.

Определение. Число, равное отношению двух целых чисел, называется *рациональным числом.*

Пример. Множество всех рациональных чисел с естественными операциями сложения и умножения образует поле.

Будем называть это поле *полем рациональных чисел* и обозначать через $\mathbb{Q}$.

Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является *подполем* поля вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Теорема. *Не равное нулю вещественное число является рациональным тогда и только тогда, когда оно представимо периодической десятичной дробью.*

Порядок в поле вещественных чисел

Пусть $a = m_1 \dots m_k, n_1 \dots n_j \dots$, где m_i и все n_j есть цифры (т.е., символы $0, 1, 2, \dots, 9$). Тогда $a \geq 0$, по определению.

Пусть $a = -m_1 \dots m_k, n_1 \dots n_j \dots$, где m_i, n_j– цифры. Тогда $a \leq 0$, по определению.

Пусть a, b– вещественные числа. Если $a - b \leq 0\,(a - b \geq 0)$, то, по определению, $a \leq b\,(a \geq b)$.

Теперь на множестве вещественных чисел определено *отношение порядка* $\leq$.

Отметим свойства отношения порядка.

1. Рефлексивность: $x \leq x$.
2. Антисимметричность: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.
3. Транзитивность: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Согласованность порядка в $\mathbb{R}$ с алгебраическими операциями

Следующие два свойства выражают *согласованность порядка в $\mathbb{R}$ с алгебраическими операциями.*
1) Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$. Тогда $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$.
2) Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$. Тогда $x \geq y \Rightarrow xz \geq yz$.

Определение. Поле, в котором задан порядок, согласованный с алгебраическими операциями, называется *упорядоченным полем.*

Таким образом, поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ и поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ являются упорядоченными полями.

Отрезки вещественной оси

п.1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Множество всех чисел, расположенных между a и b, включая и числа a и b, называется *сегментом* или *замкнутым отрезком* с концами a и b. Это множество обозначается $[a, b]$. Короче: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b.\}$

п.2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Множество всех чисел, расположенных между a и b, исключая числа a и b, называется *интервалом* или *открытым отрезком* с концами a и b. Это множество обозначается (a, b). Короче: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b.\}$

п.3. Каждое из множеств: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ и $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ – называется *полуоткрытым отрезком.*

п.4. Наконец, рассмотрим неограниченные отрезки прямой:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}, (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}, (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

О множестве рациональных чисел

Лемма. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Для каждого положительного ε существуют рациональные $b_1 < a, b_2 > a$ такие что $|b_i - a| < \varepsilon$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. a) Примем, в условиях леммы, что $a > 0$. Пусть $a = m, n_1 \dots n_k \dots$. Выберем $l \in \mathbb{N}$ такое, что $10^{-l} < \varepsilon$. Обозначим: $a_{l+1} = m, n_1 \dots n_{l+1}$. Число a_{l+1} - рациональное. Оценим разность $a - a_{l+1}$. Имеем: $0 < a - a_{l+1} = 0, 0 \dots 0 n_{l+2} n_{l+3} \dots \leq 10^{-(l+1)} < 10^{-l}$. Итак, для $a > 0$ по заданному $\varepsilon > 0$ нашлось такое рациональное $b_1 = a_{l+1}$, что $b_1 < a, a - b_1 < \varepsilon$.
b) По доказанному в пункте a), найдётся рациональное $b_2 < a + \frac{\varepsilon}{2}$ такое, что $0 < a + \frac{\varepsilon}{2} - b_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда: $a < b_2, 0 < b_2 - a < a + \frac{\varepsilon}{2} - a = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Итак, существует рациональное b_2 такое что $a < b_2, 0 < b_2 - a < \varepsilon$. Лемма доказана.

Теорема. *Для каждой пары действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, существует рациональное число c, такое что $a < c < b$.*

Это свойство множества рациональных чисел называется *плотностью* множества рациональных чисел во множестве $\mathbb{R}$.

Сечения в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$

Определение. *Сечением* в $\mathbb{Q}$ называется пара непустых множеств (A, B), удовлетворяющая условиям:
1) $A \cup B = \mathbb{Q}$,
2) Если $a \in A, b \in B$, то $a < b$.
Иначе: *сечением* в $\mathbb{Q}$ называется разбиение множества $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества A, B, такие что каждый элемент из A строго меньше каждого элемента из множества B.

Аналогично определяется сечение в $\mathbb{R}$.

Определение. *Сечением* в $\mathbb{R}$ называется пара непустых множеств (A, B), удовлетворяющая условиям:
1) $A \cup B = \mathbb{R}$,
2) Если $a \in A, b \in B$, то $a < b$.

Пример 1. Положим: $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq 1\}$, $B_1 = \{x \in \mathbb{Q} | x > 1\}$. Очевидно, (A_1, B_1) есть сечение в $\mathbb{Q}$.

Определение. Говорят, что элемент $c \in \mathbb{Q}$ *производит* сечение (A, B) в $\mathbb{Q}$, если $\forall x \in \mathbb{Q}(x < c \Rightarrow x \in A)$ и $\forall x \in \mathbb{Q}(x > c \Rightarrow x \in B)$.

Замечание. Легко видеть, что $c \in \mathbb{Q}$ производит сечение (A, B) в $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $c = \max A$, или $c = \min B$.

Таким образом, $x = 1$ производит сечение (A_1, B_1) в поле $\mathbb{Q}$.

Пример 2. Положим: $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{Q} | x > \sqrt{2}\}$. Никакое рациональное число не производит в $\mathbb{Q}$ сечения (A_2, B_2). (В самом деле, каждое рациональное число принадлежит либо A_2, либо B_2, и ни одно из них не является ни наибольшим в A_2, ни наименьшим в B_2.)

Итак, *в поле рациональных чисел существуют сечения, которые не производятся никаким элементом этого поля.*

Аналогично дается определение сечения в $\mathbb{R}$.

Лемма. Пусть (A, B) есть сечение в $\mathbb{R}$. Если $x_1 \in A, x_2 \leq x_1$, то $x_2 \in A$. Аналогично, если $x_2 \in B, x_2 \geq x_1$, то $x_2 \in B$.

Доказательство. Пусть $x_1 \in A, x_2 \leq x_1$. Если бы $x_2 \in B$, то элемент x_2 из B был бы меньше элемента x_1 из A, что противоречит определению сечения.

Теорема Дедекинда. *Каждое сечение в поле вещественных чисел производится некоторым вещественным числом.*

Комментарий. Это свойство поля вещественных чисел называют *полнотой* поля $\mathbb{R}$. Как мы видели, поле рациональных чисел не является полным. Именно это заставило математиков перейти от поля рациональных чисел к полю вещественных чисел.

Доказательство теоремы Дедекинда. План доказательства.
1. Дано сечение (A, B). Исходя из этого сечения, строим последовательность приближений $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$.
2. По этой последовательности строим некоторое число α.
3. Доказываем, что так построенное число α производит сечение (A, B).

Перейдем теперь к реализации этого плана. 1) Итак, пусть (A, B) есть сечение в $\mathbb{R}$. Строим последовательность приближений

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots).$$

Обозначим наибольшее из целых чисел, принадлежащих множеству A, через m. В силу выбора числа m, имеем: $m \in A, (m+1) \in B$. Для определенности будем считать, что $m \geq 0$.
Обозначим: $\alpha_0 = m$. Теперь:

$$\alpha_0 \in A, (\alpha_0 + 1) \in B.$$

2) Разобьем отрезок $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ на десять равных частей точками: $m, m + \frac{1}{10}, \ldots, m + 1$.
Обозначим наибольшее из чисел $m, m + \frac{1}{10}, \ldots, m + 1$ принадлежащее множеству A, через m, n_1. Положим $\alpha_1 = m, n_1$. Имеем:

$$\alpha_1 \in A, (\alpha_1 + \frac{1}{10}) \in B.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \ldots,$$

удовлетворяющих условиям:

$$\alpha_k \in A, (\alpha_k + \frac{1}{10^k}) \in B, k \in \mathbb{N}.$$

3) Зададим теперь число α :

$$\alpha = m, n_1 n_2 \dots n_k \dots .$$

Как связаны числа α и α_k ? По определению, $\alpha_k \leq \alpha$.
Значит, $\alpha_k + \frac{1}{10^k} \leq \alpha + \frac{1}{10^k}$.
Следовательно, для каждого k натурального, $\alpha + \frac{1}{10^k} \in B$.
Очевидно, что $0 \leq \alpha - \alpha_k \leq \frac{1}{10^k}$, откуда:

$$\alpha - \frac{1}{10^k} \leq \alpha_k.$$

Но $\alpha_k \in A$. Следовательно, $\alpha - \frac{1}{10^k} \in A$. Итак, для каждого натурального k имеем:

$$\alpha - \frac{1}{10^k} \in A, \alpha + \frac{1}{10^k} \in B.$$

4) Убедимся теперь, что α производит сечение (A, B).
Пусть $x < \alpha$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{10^k} < \alpha - x$.
Тогда $x < \alpha - \frac{1}{10^k}$. Но $(\alpha - \frac{1}{10^k}) \in A$. Значит, $x \in A$.
Итак, $(x < \alpha) \Rightarrow (x \in A)$. Пусть теперь $y > \alpha$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{10^k} < y - \alpha$.
Тогда $y > \alpha + \frac{1}{10^k}$. Но $(\alpha + \frac{1}{10^k}) \in B$. Значит, $y \in B$.
Итак, число α производит сечение (A, B). Теорема доказана.

Глава 3. Отображения (функции)

Определение. Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B.\}$ Будем называть пару $(x, y) \in A \times B$ *точкой с координатами* x и y.

Пример 1. Плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Аналогично, трехмерное пространство
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

Пример 2. $[1, 2] \times (-\infty, 0]$ неограниченная вертикальная полоска.

Определение. Говорят, что задано отображение(функция) из множества A во множество B, если
1) задано множество A, называемое *областью определения отображения,*
2) задано множество B, называемое *областью значений* отображения,
3) задан некоторый метод, позволяющий для каждого $a \in A$ находить единственное $b \in B$.

Это значение $b \in B$, соответствующее $a \in A$, называется *значением* данного отображения при $x = a$ или *значением данного отображения в точке* a.

Отображение обычно обозначается латинскими буквами: $f, g, \ldots$ или греческими: $\phi, \psi, \ldots$

Если отображение обозначено через f, то значение отображения в точке $x = a$ обозначается $f(a)$.

Область определения отображения f обозначается $dom(f)$.

Введем две переменные: x и y. Переменная x может принимать любое значение из области определения A функции f. Переменная x называется *независимой* переменной.

Равенство: $y = f(x)$ сопоставляет каждому значению независимой переменной x некоторое значение переменной y. Переменная y называется *зависимой* переменной (y «зависит» от x.)

Выражение: $f : A \to B-$ означает: «f есть отображение A в B.»

Так же читается выражение $A \xrightarrow{f} B$.

Определение. Множество $\{f(x)|x \in A\}$ называется *множеством значений функции* f.

Заметим, что, в общем случае, *множество значений* функции не совпадает с *областью* значений функции.

Способы задания функций.

1. *Аналитический способ.* Пусть задана область определения функции A, область значений B и выражение зависимой переменной через независимую вида: $y = f(x)$, где $f(x)$ есть некоторая формула, определенная для всех $x \in A$ и принимающая значения в B.

Множество всех тех x, для которых имеет смысл выражение $f(x)$, называется *естественной областью определения* $f(x)$. Аналитический способ удобен экономичностью записи. Однако, у него ограниченная сфера применения (аналитические и кусочно-аналитические функции).

2. *Графический способ.*

Определение.

Пусть $f : A \to B$. Множество $G = \{(x, f(x))|x \in A\}$ назовем *графиком отображения* f. Если заданы множества A и B, а также график G отображения f, то говорят, что функция f задана *графически.*

Практически график функции задается в виде линии на плоскости в декартовой системе координат. Графический способ удобен своей наглядностью и возможностью увидеть поведение функции во всей области определения. Его недостатком является невысокая точность построения графика. Этот способ задания функций является единственно возможным в ряде случаев (кардиограммы, сейсмограммы).

3. *Алгоритмический* способ.

Говорят, что функция f задана *алгоритмически,* если задан способ вычислений, позволяющий по заданному значению аргумента в конечное число шагов получить значение функции. Алгоритмический способ вычисления функции реализован в виде встроенных программ вычисления значений функций в компьютерах.

4. *Табличный способ.*

В прошлом очень распространенный способ (обширные таблицы логарифмов и т.д.). С развитием математического анализа появляются новые способы задания функций. Со многими способами мы еще познакомимся в нашем курсе лекций.

Образы и прообразы множества при заданном отображении

Определение. Пусть $f : A \to B$, $E \subset A$. Множество

$f(E) = \{f(x)|x \in E\}$ назовем *образом* множества E при отображении f.

Определение. Образ области определения функции называется *множеством значений* этой функции. Таким образом, множество значений функции $f : A \to B$ есть множество $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$.

Определение. Пусть $f : A \to B$, $D \subset B$. Множество $f^{-1}(D) = \{x|f(x) \in D\}$ назовем *прообразом* множества D при отображении f. Таким образом, $x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow f(x) \in D$.

Задача 1. Пусть $f : A \to B$, $E \subset A$. Как связаны множества: E и $f^{-1}(f(E))$?

Задача 2. Пусть $f : A \to B$, $D \subset B$. Как связаны множества: D и $f(f^{-1}(D))$?

Теорема *Образ объединения множеств равен объединению образов.*

Доказательство. В самом деле,

$$f(A \cup B) = \{f(x)|x \in A \cup B\} = \{f(x)|x \in A\} \cup \{f(x)|x \in B\} = f(A) \cup f(B).$$

В общем случае, образ пересечения множеств не равен пересечению образов множеств.

Пример.

Пусть $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Обозначим: $A = [-1, 0], B = [0, 1]$. Имеем: $f(A) = [0, 1], f(B) = [0, 1], f(A) \cap f(B) = [0, 1]$. Между тем: $f(A \cap B) = \{0\}$.

Семейство множеств

Пусть T – непустое множество. Множество $\{A_t|t \in T\}$, где A_t есть множество при каждом $t \in T$, называется *семейством множеств, занумерованных элементами множества* T. Другое обозначение семейства множеств: $\{A_t\}_{t \in T}$.

Определение. Объединением семейства множеств $\{A_t|t \in T\}$ называется множество, которое содержит все элементы каждого из множеств этого семейства и не содержит никаких других элементов. Объединение семейства множеств $\{A_t|t \in T\}$ обозначается $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$.

Определение. Пересечением семейства множеств $\{A_t|t \in T\}$ называется множество, которое содержит все элементы, принадлежащие одновременно каждому из множеств этого семейства, и не содержит никаких других элементов. Пересечение семейства множеств $\{A_t|t \in T\}$ обозначается $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$.

Свойства операции взятия прообраза

Теорема. *Прообраз объединения множеств равен объединению прообразов этих множеств. Прообраз пересечения множеств равен пересечению прообразов. Прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Таким образом, при переходе к прообразам множеств при заданном отображении сохраняются все теоретико-множественные операции.*

Доказательство.
1) $x \in f^{-1}(E_1 \cup E_2) \Leftrightarrow f(x) \in (E_1 \cup E_2) \Leftrightarrow f(x) \in E_1 \vee f(x) \in E_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(E_1) \vee x \in f^{-1}(E_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$.
Итак: $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$.
Доказательство остальных пунктов производятся аналогично.

При работе с прообразами полезна

Лемма. Пусть $f : A \to B, E \subset B$. Тогда $D \subset f^{-1}(E) \Leftrightarrow f(D) \subset E$.

Доказательство. $D \subset f^{-1}(E) \Leftrightarrow \forall x(x \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(E))$.

Отсюда $D \subset f^{-1}(E) \Leftrightarrow \forall x(x \in D \Rightarrow f(x) \in E)$,

Значит, $D \subset f^{-1}(E) \Leftrightarrow f(D) \subset E)$, что и требовалось.

Некоторые классы отображений. Инъекция, сюръекция, биекция

Определение. Отображение $f : A \to B$ называется *инъекцией,* если различным элементам множества A соответствуют различные значения функции f. Иначе: для любых двух $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Определение. Отображение $f : A \to B$ называется *сюръекцией,* если для каждого $y \in B$ существует $x \in A$, такой что $y = f(x)$.

Сюръекция множества A на множество B называется также *отображением A на B.*

Иначе: Отображение $f : A \to B$ называется *сюръекцией,* если $f(A) = B$.

Определение. Отображение $f : A \to B$ называется *биекцией,* если f есть инъекция и сюръекция одновременно.

Иначе: Отображение $f : A \to B$ называется *биекцией,* если для каждого $y \in B$ существует единственное $x \in A$, такое, что $y = f(x)$. Сюръекция A на B называется также *взаимно-однозначным отображением A на B.*

Замечание. Существуют такие отображения, которые не являются ни инъекцией, ни сюръекцией, ни биекцией.

*Примеры.*1)$f(x) = x^2, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}-$ не инъекция и не сюръекция.
2)$f(x) = x^2, f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)-$ не инъекция, но уже сюръекция.
3)$f(x) = x^2, f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)-$ инъекция и сюръекция (т.е. биекция).

Границы числовых множеств

Определение. Пусть X есть числовое множество, число M таково, что $\forall x \in X(x \leq M)$. Тогда число M называется *верхней границей* множества X. Аналогично определяется *нижняя граница* числового множества.

Лемма. Если M есть верхняя граница множества X, то каждое число, которое больше M, также есть верхняя граница X.

Доказательство очевидно.

Определение. Если существует верхняя граница числового множества, то это множество называется *ограниченным сверху.* Аналогично определяется множество, ограниченнное снизу. Числовое множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным* множеством.

Супремум и инфимум

Определение. Если существует наименьшая верхняя граница числового множества X, то она называется *супремумом* множества X и обозначается $\sup X$. Точно так же, если существует наибольшая нижняя граница числового множества X, то она называется *инфимумом* множества X и обозначается $\inf X$.

Когда существуют $\sup X$ и $\inf X$?

Теорема Больцано. *Для того, чтобы существовал супремум непустого числового множества, необходимо и достаточно, чтобы это множество было ограничено сверху.*

Для того, чтобы существовал инфимум непустого числового множества, необходимо и достаточно, чтобы это множество было ограничено снизу.

Доказательство. a) Необходимость очевидна.

b) Достаточность.1) Пусть $X \neq \emptyset$ ограничено сверху. Это значит, что существует верхняя граница X. Обозначим множество верхних границ X через B, положим: $A = \mathbb{R} \setminus B$.

2) По построению, $A \cup B = \mathbb{R}$. Пусть $a \in A, b \in B$. Так как $a \notin B$, то

a не является верхней границей X. Поэтому найдется такое $\xi \in X$, что $a < \xi$. Но $\xi \leq b$. Отсюда: $a < b$. Итак, (A, B) есть сечение в $\mathbb{R}$. По теореме Дедекинда, это сечение производится некоторым вещественным числом. Обозначим это число через α.

3) Убедимся, что $\alpha = \sup X$. Прежде всего, $\alpha \in B$. Если бы $\alpha \notin B$, то нашелся бы $x_0 \in X$, такой что $\alpha < x_0$. Пусть b_1– произвольное число между α и x_0. Поскольку $b_1 > \alpha$, то $b_1 \in B$, значит, b_1 есть верхняя граница X. Это противоречит тому, что $b_1 < x_0$.

Итак,$\alpha \in B$. Поскольку α производит сечение (A, B), то каждое число, меньше, чем α, принадлежит A. Значит, $\alpha = \min B$. Следовательно, $\alpha = \sup X$.

Лемма. Пусть X– числовое множество, $\alpha = \sup X$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x \in X$, такой что $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

Доказательство. Пусть, в условиях леммы, на промежутке $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$ нет точек X. Поскольку α – верхняя граница X, то на промежутке (α, ∞) также нет точек X. Итак, на промежутке $(\alpha - \varepsilon, \infty)$ нет элементов множества X, и, значит, $X \subset (-\infty, \alpha - \varepsilon]$. Но тогда число $\alpha - \varepsilon$ есть верхняя граница S – противоречие с тем, что α есть наименьшая верхняя граница X.

Супремум функции

Определение. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда f называется *вещественной* или *действительной* функцией.

Определение. Пусть f – вещественная функция, определенная на множестве E. Тогда супремум множества значений функции f называется *супремумом функции* f и обозначается через $\sup\limits_E f(x)$. Итак,

$$\sup_E f(x) = \sup\{f(x) | x \in E\}.$$

Задача. Пусть $f(x), g(x)$ - вещественные функции с общей областью определения E. Как связаны между собой величины:

$$\sup_E f(x),\ \sup_E g(x),\ \sup_E (f(x) + g(x))?$$

Решение. Обозначим

$$a = \sup_E f(x), b = \sup_E g(x).$$

Имеем $f(x) \le a, g(x) \le b, (f(x) + g(x)) \le (a + b)$.

Итак, $(a + b)$ есть верхняя граница функции $(f(x) + g(x))$.

Значит, $\sup\limits_E (f(x) + g(x)) \le (a + b)$.

Отсюда $\sup\limits_E (f(x) + g(x)) \le \sup\limits_E f(x) + \sup\limits_E g(x)$.

Упражнение. Докажите: $\inf\limits_E (f(x) + g(x)) \ge \inf\limits_E f(x) + \inf\limits_E g(x)$.

Глава 4. Открытые и замкнутые множества на прямой и на плоскости

Определение. ε-окрестностью точки (x_0, y_0) координатной плоскости называется множество точек

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\}.$$

Определение. ε-окрестностью точки x_0 прямой $\mathbb{R}$ называется множество точек

$$\{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Основные понятия, относящиеся ко множествам на плоскости и на прямой, совпадают. Изображение множеств на плоскости более наглядно, поэтому мы будем рассматривать множества как на прямой, так и на плоскости. Обозначим ε-окрестность точки a через $K_\varepsilon(a)$, от немецкого слова *Kugel* – шар. Другое обозначение: $B_\varepsilon(a)$, от английского *Ball*.

Определение. Точка множества называется *внутренней,* если некоторая ε-окрестность этой точки входит в данное множество.

Определение. Пусть E – множество в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{R}^2$. Множество всех его внутрених точек называется *внутреннностью* множества E.

Определение. Множество на плоскости (и на прямой) называется *открытым,* если каждая точка этого множества – внутренняя.

Пример (a, b), $K_1((0, 0))$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{R}^2$.

Теорема. *Объединение семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Доказательство. Пусть $\{G_t\}_{t \in T}$ – семейство открытых множеств. Обозначим: $G = \bigcup_{t \in T} G_t$. Пусть $a \in G$. Тогда для некоторого t_0 имеем: $a \in G_{t_0}$. Так как множество G_{t_0} открытое, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что ε-окрестность точки a, входит в $G_{t_0} : K_\varepsilon(a) \subset G_{t_0}$.

Тогда $K_\varepsilon(a) \subset G$, то есть, a есть внутренняя точка множества G. Итак, объединение G семейства открытых множеств есть множество открытое.

Вопрос: Всегда ли пересечение семейства открытых множеств открыто?

Пример. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$. Итак, пересечение семейства открытых множеств может не быть открытым множеством.

Теорема. *Пересечение конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Доказательство. Пусть дано конечное семейство открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$. Обозначим: $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Убедимся, что все точки множества G – внутренние. Пусть $a \in G$. Тогда $a \in G_i, 1 \le i \le n$. Поскольку все G_i – открытые, то для каждого i найдётся такое $\varepsilon_i > 0$, что $K_{\varepsilon_i}(a) \subset G_i$. Обозначим: $\varepsilon = \min \varepsilon_i$, где минимум берется по всем i. Очевидно, что $K_\varepsilon(a) \subset G_i$ для всех i. Следовательно, $K_\varepsilon(a) \subset G$, значит, a – внутренняя точка множества G, что и требовалось.

Определение. Точка x_0 называется *граничной* точкой множества A, если каждая ε-окрестность точки x_0 содержит как точки, принадлежащие A, так и точки, не принадлежащие A. Множество всех граничных точек A называется *границей* A. Мы будем обозначать границу A через $\mathrm{Fr}(A)$.

Задача. Доказать, что множество A и его дополнение A^c имеют одну и ту же границу.

Определение. Точка x_0 называется *предельной* точкой множества A, если каждая ε-окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек из A.

Определение. Точка $x_0 \in A$ называется *изолированной,* если существует такая окрестность точки x_0, в которой нет других точек множества A, кроме самой точки x_0.

Лемма. Каждая точка множества $A \subset \mathbb{R}$ (и $A \subset \mathbb{R}^2$) является либо предельной, либо изолированной.

Определение. Множество F называется *замкнутым,* если это множество содержит все свои предельные точки.

Пример. Сегмент $[a, b]$ замкнут в $\mathbb{R}$; Круг вместе с границей замкнут в $\mathbb{R}^2$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ (или $A \subset \mathbb{R}^2$.) Договоримся называть дополнение A^c

множества A до всего пространства $\mathbb{R}$ (или до $\mathbb{R}^2$) просто *дополнением множества* A.

Теорема. *Множество $F \subset \mathbb{R}$ (или $F \subset \mathbb{R}^2$) замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение F^c открыто.*

Доказательство. 1) Пусть F замкнуто. Обозначим: $G = F^c$. Убедимся, что G открыто. Пусть $x_0 \in G$. Покажем, что x_0 есть внутренняя точка G. Имеем: $x_0 \notin F$, следовательно, x_0 не является предельной точкой F. Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность точки x_0 содержит лишь конечное множество $a_1, \ldots, a_n$ точек из F.

Обозначим через ε_1 наименьшее из расстояний между x_0 и a_i. Тогда окрестность $K_{\varepsilon_1}(x_0)$ не содержит точек из F. Следовательно, все точки этой окрестности принадлежат множеству G, то есть, $K_{\varepsilon_1}(x_0) \subset G$, и x_0 есть внутренняя точка G, что и требовалось доказать.

2)Пусть G открыто; покажем, что $F = G^c$ замкнуто. Пусть x_0 есть предельная точка множества F. Требуется доказать, что $x_0 \in F$. Пусть $\varepsilon > 0$. Окрестность $K_\varepsilon(x_0)$ содержит бесконечно много точек из F. Значит, эта окрестность не входит во множество G. Итак, никакая ε-окрестность точки x_0 не входит во множество G.
Отсюда: x_0 не является внутренней точкой множества G.
Значит, $x_0 \notin G$. Поэтому: $x_0 \in F$, что и требовалось доказать.

Теоремы о замкнутых множествах

Так как каждое замкнутое множество является дополнением открытого множества до всего пространства, то свойства замкнутых множеств выводятся из свойств открытых множеств с помощью теоремы де Моргана.

Теорема. *Пересечение семейства замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Доказательство. Пусть $\{F_t\}_{t \in T}$ есть семейство замкнутых множеств. Рассмотрим дополнение пересечения F этого семейства:

$$F^c = (\bigcap_{t \in T} F_t)^c = \bigcup_{t \in T} (F_t)^c.$$

Так как все множества $(F_t)^c$ открыты, то их объединение открыто, следовательно, F^c открыто. Отсюда: F замкнуто – что и требовалось.

Теорема. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Доказательство – аналогично, переходя к дополнению объединения, и пользуясь теоремой де Моргана.

Определение. Пусть A – множество в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{R}^2$, A' – множество всех его предельных точек. Тогда множество $A \cup A'$ называется *замыканием* множества A. Замыкание множества A будем обозначать через $\overline{A}$.

Пример. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{K_r(a)}$ есть круг с границей.

Лемма. Если $A \subset B$, то $A' \subset B'$.

Доказательство. Пусть a есть предельная точка множества A. Тогда каждая окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества A. Но $A \subset B$. Значит, каждая окрестность точки a содержит бесконечно много точек множества B. Поэтому $a \in B'$.

Лемма. Каждая предельная точка замыкания множества есть предельная точка самого множества.

Доказательство. От противного: пусть x_0 является предельной точкой множества $\overline{A}$, но не является предельной точкой множества A. Так как x_0 не предельная точка A, то найдется такая окрестность $K_\varepsilon(x_0)$, в которой содержится лишь конечное множество $a_1, \ldots, a_n$ точек из A. Обозначим через ε_1 наименьшее из расстояний между x_0 и a_i, $i = \overline{1, n}$. В окрестности $K_{\varepsilon_1}(x_0)$ либо вовсе нет точек из A, либо есть единственная точка из A – если $x_0 \in A$. И в том, и в другом случае, в $K_{\varepsilon_1}(x_0)$ нет предельных точек множества A, то есть нет точек из A'. Вспомним: $\overline{A} = A \cup A'$. Если точка x_0 не принадлежит A, то в $K_{\varepsilon_1}(x_0)$ нет точек из $\overline{A}$. Если $x_0 \in A$, то в этой окрестности имеется единственная точка из $\overline{A}$. В обоих случаях x_0 не является предельной точкой множества $\overline{A}$, что противоречит условию леммы. Итак, предположение о том, что x_0 не является предельной точкой множества A – неверно. Значит, x_0 есть предельная точка A, что и требовалось доказать.

Свойства замыкания множества

1) $\overline{A} \supset A$.

2) Если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$. Назовем это свойство *монотонностью* замыкания. Это свойство очевидным образом вытекает из определения замыкания.

3) Замыкание замкнутого множества совпадает с этим множеством. Это непосредственно следует из определения замыкания.

4) Замыкание множества замкнуто.

Доказательство. Пусть a есть предельная точка множества $\overline{A}$. Докажем,что $a \in \overline{A}$. Как показано выше, каждая предельная точка замыкания $\overline{A}$ есть предельная точка самого множества A. Значит, a есть предельная точка множества A. Отсюда: $a \in A', a \in \overline{A}$, что и требовалось.

5) Замыкание объединения конечного семейства множеств равно объединению замыканий этих множеств: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доказательство. Очевидно: $A \cup B \supset A, A \cup B \supset B$. Отсюда, в силу монотонности замыкания, $\overline{A \cup B} \supset \overline{A}, \overline{A \cup B} \supset \overline{B}$.

Значит, $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$.

С другой стороны, $A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$, поэтому: $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Пользуясь монотонностью замыкания, берем замыкание от обеих частей этого включения: $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Но множество $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто, поэтому его замыкание совпадает с этим множеством.

Отсюда: $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Итак:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Свойство доказано.

6) Замыкание замыкания множества равно замыканию этого множества. В самом деле, множество $\overline{A}$ замкнуто. Поэтому его замыкание совпадает с ним самим: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Глава 5. Последовательности вещественных чисел

Вещественная функция, заданная на множестве натуральных чисел, называется *числовой последовательностью.* Значения последовательности обозначаются некоторой буквой с натуральными индексами: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$. Сокращенное обозначение последовательности: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Еще короче запись: (a_n). Значения аргумента записываются в виде индекса, a_n называется *общим членом* последовательности.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности a_n, если для каждого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого номера n_0, принадлежат ε-окрестности точки a.

Так как a_n принадлежит ε-окрестности точки x_0, если и только если $\rho(a_n, x_0) := |a_n - x_0| < \varepsilon$, то можно сказать и так:

Определение. Число a называется *пределом* последовательности a_n, если для каждого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n_0, выполнено неравенство: $\rho(a_n, x_0) < \varepsilon$.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности a_n, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Полезен такой наглядный образ. Представим, что элементы последовательности – это мошки. Если накрыть предел последовательности сколь угодно малым сачком, почти все мошки, за исключением конечного их числа, окажутся внутри сачка.

Если существует предел последовательности, то последовательность называется *сходящейся;* если же предела не существует, то последовательность называется *расходящейся.*

Лемма. Последовательность может иметь не более одного предела.

Доказательство. От противного: Предположим, что (a_n) имеет два предела: a и $b, a < b$. Обозначим: $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Тогда окрестности $K_\varepsilon(a)$ и $K_\varepsilon(b)$ не пересекаются. Так как a есть предел последовательности a_n, то существует такое n_0, что при $n \geq n_0$ имеем: $a_n \in K_\varepsilon(a)$. Точно так же найдется такое n_1 что при $n \geq n_1$ имеем: $a_n \in K_\varepsilon(b)$. Теперь при $n > \max\{n_0, n_1\}$ имеем: $a_n \in K_\varepsilon(b) \cap K_\varepsilon(a) = \emptyset$ – противоречие.

Лемма (о вложенных промежутках). Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ есть последовательность вложенных сегментов, таких что $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$. Тогда существует единственная точка c, которая принадлежит всем сегментам $[a_n, b_n]$ одновременно.

Доказательство. 1) Существование. Обозначим $A = \{a_n\}$. Множество A ограничено сверху каждым из чисел b_k. По теореме Больцано существует $\alpha = \sup A$. Так как $\alpha = \sup A$ есть верхняя граница A, то для всех n натуральных $a_n \leq \alpha$. С другой стороны, каждое b_n есть верхняя граница A, а α наименьшая из верхних границ A, поэтому $\alpha \leq b_n$. Итак, для всех натуральных n выполнены неравенства: $a_n \leq \alpha \leq b_n$. Это и означает, что $\alpha \in [a_n, b_n]$ для всех натуральных n.
2) Единственность. Предположим, что существует еще число $\beta, \beta > \alpha$, принадлежащее всем сегментам $[a_n, b_n]$. Теперь $0 < \beta - \alpha \leq b_n - a_n$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| \neq 0$, что противоречит условию теоремы.

Замечание. Лемма о вложенных промежутках следует из теоремы Больцано о супремуме.

Теорема (Больцано о предельной точке множества.) *Бесконечное ограниченное числовое множество имеет хотя бы одну предельную* *точку.*

Комментарий. Эта предельная точка может и не принадлежать числовому множеству.

Доказательство. 1) Пусть A есть бесконечное ограниченное числовое множество. Так как A ограничено, найдется такой сегмент $[a_1, b_1]$, что $A \subset [a_1, b_1]$. Обозначим: $c = \frac{a_1+b_1}{2}$. Имеем: $[a_1, b_1] = [a_1, c] \cup [c, b_1]$. Если $[a_1, c]$ содержит бесконечно много точек множества A, то обозначим этот сегмент $[a_2, b_2]$. Если же $[a_1, c]$ содержит лишь конечное число точек из A, то сегмент $[c, b_1]$ содержит бесконечно много точек из A. В этом случае обозначим этот сегмент $[a_2, b_2]$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных сегментов: $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$. Длина $[a_n, b_n]$ равна $\frac{b_1-a_1}{2^n}$. Длина сегмента при $n \to \infty$ стремится к 0.
2) По лемме о вложенных промежутках существует единственная точка x_0, принадлежащая всем сегментам $[a_n, b_n]$. Убедимся, что x_0 есть предельная точка множества A. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 натуральное так, чтобы $\frac{b_1-a_1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Тогда и для всех натуральных $n \geq n_0$ выполняется неравенство: $\frac{b_1-a_1}{2^n} < \varepsilon$. Следовательно, при $n \geq n_0$ сегмент $[a_n, b_n] \subset K_\varepsilon(x_0)$. Значит, произвольная окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек из A. Это и означает, что x_0 есть предельная точка множества A.

Комментарий. Использованный в доказательстве метод математики в шутку называют «Метод ловли льва в пустыне». Роль льва играет предельная точка множества, которую надо «поймать».

Определение. Пусть (a_n) есть последовательность. Пусть (n_k) – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, \ldots, a_{n_k} \ldots)$ называется *подпоследовательностью* последовательности (a_n).

Пример.

$(\frac{1}{n^2}), (\frac{1}{2n+1})$– подпоследовательности последовательности $(\frac{1}{n})$.

Лемма. Пусть a_{n_k} есть подпоследовательность последовательности a_n. Тогда для каждого натурального k имеем: $k \leq n_k$.

Замечание. По каждой последовательности (a_n) можно построить множество $A = \{a_n\}$.

Например, если $a_n = (-1)^n$, то $\{a_n\} = \{-1, +1\}$.

Теорема. (Больцано-Вейерштрасса о подпоследовательности).
Каждая ограниченная числовая последовательность имеет сходящу-

юся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть (a_n) бесконечная ограниченная последовательность чисел. Рассмотрим числовое множество $A = \{a_n\}$. Возможны 2 случая: 1) A конечно, 2) A бесконечно. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) A конечно. Так как последовательность (a_n) бесконечна, то это означает, что существует бесконечно много равных членов последовательности: $a = a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_k} = \ldots$. Тогда подпоследовательность (a_{i_k}) имеет предел a.

2) A бесконечно. Воспользуемся теоремой Больцано о предельной точке множества. Так как A ограничено и бесконечно, то существует предельная точка x_0 множества A. Выберем подпоследовательность, которая сходится к x_0. В окрестности $K_1(x_0)$ выберем произвольный член последовательности a_{i_1}. Таким образом, $\rho(a_{i_1}, x_0) < 1$. В окрестности $K_{\frac{1}{2}}(x_0)$ выберем a_{i_2} такое, что $i_2 > i_1$ – это возможно сделать, так как в данной окрестности содержится бесконечно много членов последовательности. Имеем: $\rho(a_{i_1}, x_0) < \frac{1}{2}$. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность a_{i_k} такую, что $\rho(a_{i_k}, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$. Итак, подпоследовательность (a_{i_k}) сходится к x_0. Теорема доказана.

Определение. Числовая последовательность a_n называется *фундаментальной,* или *последовательностью Коши,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует n_0 натуральное, такое что $m, n \geq n_0 \Rightarrow \rho(a_m, a_n) < \varepsilon$.

Теорема. *Каждая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое натуральное n_0, что при $n \geq n_0$ имеем: $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Пусть $m, n > n_0$. Тогда $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, и $|a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Воспользуемся тем, что модуль суммы не больше суммы модулей:

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |(a_m - a)| + |(a - a_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что из $m, n \geq n_0$ следует, что $\rho(a_m, a_n) < \varepsilon$. Это и означает, что последовательность (a_n) фундаментальна.

Теорема. *Каждая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность (a_n) фундаментальна. Положим: $\varepsilon = 1$. Найдётся n_0 натуральное такое, что $m, n \geq n_0 \Rightarrow \rho(a_m, a_n) < 1$. Внутри окрестности $K_1(a_{n_0})$ лежат все члены последовательности, начиная с a_{n_0}. Вне этой окрестности могут быть лишь члены $a_1, \ldots, a_{n_0-1}$. Обозначим

$$r = \max\{1, \rho(a_{n_0}, a_1), \ldots, \rho(a_{n_0}, a_{n_0-1})\}.$$

Теперь все члены последовательности попадают в окрестность $K_r(a_{n_0})$. Значит, эта последовательность ограничена.

Теорема. *Если фундаментальная последовательность включает сходящуюся подпоследовательность, то и сама последовательность сходится к тому же пределу, что и эта подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность (a_n) фундаментальна, и подпоследовательность (a_{n_k}) сходится: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Зададим $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности (a_n), найдется n_0, такое что при $m, n \geq n_0$ имеет место неравенство:

$$\rho(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

В силу сходимости подпоследовательности, найдется такое k_0, что при $k \geq k_0$ имеем:

$$\rho(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Обозначим: $n_1 = \max\{n_0, k_0\}$. Пусть теперь $n, k \geq n_1$. Тогда и $n_k \geq n_1$. Из $(*)$ следует:$\rho(a_n, a_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Из $(**)$ следует: $\rho(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Из последних двух неравенств заключаем: $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Теорема доказана.

Теорема. (Критерий Коши сходимости числовой последовательности). *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть последовательность (a_n) сходится. Тогда она фундаментальна.
2) Достаточность. Пусть (a_n) фундаментальна. Тогда она ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса найдется сходящаяся подпоследовательность: (a_{n_k}). По только что доказанной теореме, последовательность (a_n) сходится.

Монотонные последовательности

Определение. Последовательность (a_n) называется *возрастающей (строго возрастающей),* если для каждого натурального n выполняется неравенство: $a_{n+1} \geq a_n((a_{n+1} > a_n)$. Аналогично определяется убывающая (строго убывающая) последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными.*

Определение. Последовательность (a_n) называется ограниченной, если существует такое число M, что для всех n натуральных $|a_n| \leq M$.

Теорема. *Монотонная числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

*Доказательство.*1) *Необходимость.* Пусть последовательность a_n сходится. Но каждая сходящаяся последовательность ограничена.
2) *Достаточность.* Пусть последовательность (a_n) монотонна и ограничена. Предположим, для определенности, что она монотонно возрастает, и $a_n \leq M$ для всех натуральных n. Обозначим: $A = \{a_n\}$. По теореме Больцано, существует $\alpha = \sup A$. Покажем, что данная последовательность сходится к α. Пусть $\varepsilon > 0$. В отрезке $(\alpha - \varepsilon, \alpha]$ найдется a_{n_0}, иначе число $(\alpha - \varepsilon)$ было бы верхней границей множества A, что невозможно, так как $(\alpha - \varepsilon) < \alpha = \sup A$. Итак, $a_{n_0} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha]$, откуда: $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq \alpha$. При $n \geq n_0$, в силу монотонного возрастания последовательности, $a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер n_0, что при $n \geq n_0$ имеем: $a_n \in K_\varepsilon(\alpha)$. Итак, последовательность a_n сходится.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность (a_n) называется бесконечно малой последовательностью, если $\lim\limits_{\to\infty} a_n = 0$. Общий член бесконечно малой последовательности будем называть бесконечно малой величиной, или просто *бесконечно малой.*

Теорема. *Сумма конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть a_n, b_n – бесконечно малые. Покажем, что их сумма есть бесконечно малая. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдутся n_1, n_2, такие что

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, n \geq n_1 \Rightarrow |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим: $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. При $n \geq n_0$ имеем:

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, $(a_n + b_n)$ есть бесконечно малая.

Теорема. *1) Произведение бесконечно малой на ограниченную величину есть величина бесконечно малая.*
2) Произведение конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Пусть α_n – бесконечно малая, β_n – ограничена, $|\beta_n| < M$ для всех n натуральных. По заданному $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что $n \geq n_0$ влечет $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, откуда $|\alpha_n \beta_n| < \varepsilon$. Следовательно, $\alpha_n \beta_n$ – бесконечно малая.

Определение. Последовательность (a_n) называется бесконечно большой, если для каждого числа M найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $n \geq n_0 \to |a_n| > M$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Определение. Если для каждого числа $M > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $n \geq n_0 \to a_n > M$, то говорят,что последовательность (a_n) стремится к плюс бесконечности, и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Определение. Если для каждого числа $M < 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $n \geq n_0 \to M > a_n$, то говорят,что последовательность (a_n) стремится к минус бесконечности, и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Предостережение: *бесконечно большая последовательность расходится!*

Общий член бесконечно большой последовательности будем называть *бесконечно большой величиной.*

Операции над последовательностями

Теорема. *Для того, чтобы числовая последовательность a_n сходилась к a, необходимо и достаточно, чтобы $a_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.*

Доказательство. По определению предела последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ означает $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$. Это, в свою очередь, равносильно равенству: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$, то есть, равносильно утверждению, что $(a_n - a)$ есть бесконечно малая. Обозначим: $a_n - a = \alpha_n$. Отсюда: $a_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$,
3) если еще $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. Ограничимся доказательством пункта 2).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $a_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $b_n = b + \beta_n$, где α_n, β_n есть бесконечно малые. Отсюда: $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n b + \alpha_n\beta_n + a\beta_n$.

Величина $\gamma_n = \alpha_n b + \alpha_n \beta_n + a\beta_n$ есть бесконечно малая. Следовательно, $a_n b_n = ab + \gamma_n$, где γ_n – бесконечно малая.

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$, что и требовалось.

Теорема. *Если бесконечно малая* (a_n) *начиная с некоторого номера не равна нулю, то последовательность* $(\frac{1}{a_n})$ *определена (начиная с некоторого номера) и является бесконечно большой.*

Предельный переход в неравенствах.

Теорема. *Пусть при всех натуральных* n *выполнены неравенства:* $a_n \leq b_n$ *и последовательности:* $(a_n), (b_n)$ *– сходятся. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала некоторую последовательность (d_n), $d_n \geq 0$ при всех n натуральных. Докажем, что $d \geq 0$, где $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$. Пусть, напротив, $d < 0$. Рассмотрим окрестность точки d радиусом $|d|$, то есть $(2d, 0)$. По определению предела, найдётся такое n_0, что $d_n \in (2d, 0)$ при $n \geq n_0$. Но по условию теоремы все $d_n \geq 0$ – противоречие. Следовательно, $d \geq 0$.
2) По условию теоремы, $b_n - a_n \geq 0$. По только что доказанному, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geq 0$. Отсюда: $b - a \geq 0$, далее, $b \geq a$, что и требовалось.

Теорема. *Пусть при всех натуральных* n *выполнены неравенства:* $a_n < b_n$ *и последовательности:* $(a_n), (b_n)$ *– сходятся. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Таким образом, при переходе к пределу строгое неравенство, в общем случае, переходит в нестрогое.

Лемма «о двух милиционерах». *Пусть при всех натуральных n выполняются неравенства: $a_n \le b_n \le c_n$. Если последовательности $(a_n), (c_n)$ сходятся, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то последовательность (b_n) также сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению предела, найдутся такие n_1, n_2, что $n \ge n_1 \Rightarrow a_n \in K_\varepsilon(a), n \ge n_2 \Rightarrow c_n \in K_\varepsilon(a)$. Обозначим: $n_0 = \max\{n_1, n_2.\}$ При $n \ge n_0$ имеем: $a_n \in K_\varepsilon(a), c_n \in K_\varepsilon(a)$. Так как, по условию леммы, b_n расположено между a_n и b_n, то $b_n \in K_\varepsilon(a)$. Следовательно, последовательность b_n имеет пределом число a.

Первый замечательный предел

Лемма 1. Пусть α_n есть бесконечно малая. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\alpha_n = 0$.

Лемма 2. Пусть α_n есть бесконечно малая. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\alpha_n = 1$.

Доказательство. Известно,что $1 - \cos\alpha_n = 2sin^2(\frac{\alpha_n}{2})$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $1 - \lim\limits_{n\to\infty} \cos\alpha_n = 0$.

Теорема. (Первый замечательный предел.)
Пусть α_n ***есть бесконечно малая****, и α_n не обращается в нуль. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = 1.$$

Доказательство. Функция $\sin x$ – нечетная, поэтому: $\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = \frac{\sin|\alpha_n|}{|\alpha_n|}$. Очевидно, что $|\alpha_n|$ сходится к 0. Обозначим: $|\alpha_n| = \beta_n$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\beta_n}{\beta_n} = 1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то найдется такое n_1 натуральное, что при $n \ge n_1$ имеем: $\beta_n < \frac{\pi}{2}$. Дальше всюду будем считать, что $n \ge n_1$, и, следовательно, $\beta_n < \frac{\pi}{2}$.

В тригонометрическом круге с центром O обозначим горизонтальный радиус через OA, радиус, наклоненный под углом β_n, – через OB_n. Линию тангенсов, соответствующую углу β_n, обозначим через AC_n. Треугольник Δ_{OAB_n} входит в круговой сектор S_{OAB_n}, этот сектор, в свою очередь, входит в треугольник Δ_{OAC_n}. Вычисляя площади этих фигур, получаем неравенство: $\frac{\sin\beta_n}{2} \le \frac{\beta_n}{2} \le \frac{\operatorname{tg}\beta_n}{2}$. Отсюда: $1 \le \frac{\beta_n}{\sin\beta_n} \le \frac{1}{\cos\beta_n}$, $1 \ge \frac{\sin\beta_n}{\beta_n} \ge \cos\beta_n$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ получим по лемме о двух милиционерах: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\beta_n}{\beta_n} = 1$, что и требовалось.

Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность с общим членом :

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Основание степени здесь с ростом n убывает, хотя и остается больше единицы, а показатель возрастает. Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида 1^∞

Теорема. *Последовательность* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

Доказательство. 1)Докажем сначала, что эта последовательность монотонно возрастает. Воспользуемся формулой бинома Ньютона.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}.$$

Каждое из первых двух слагаемых равно 1. Выпишем их сумму отдельно и преобразуем остальные слагаемые:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Запишем такое же выражение для a_{n+1}.

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Чтобы удобнее сравнивать выражения для a_n и для a_{n+1}, запишем отдельно последнее слагаемое в выражении для a_{n+1}.

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Сравним последнее выражение с выражением для a_n :

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\dots(1-\frac{n}{n+1})$$

Видим, что каждое слагаемое под знаком суммы в выражении для a_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для a_n. Кроме того, прибавилось еще одно положительное слагаемое. Значит, при $n > 2$ справедливо неравенство: $a_n < a_{n+1}$. Итак, данная последовательность строго возрастает, начиная с третьего члена.

2) Докажем, что последовательность ограничена. Имеем:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Заменяя все множители в скобках единицей, получим неравенство:

$$a_n \le 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}.$$

При $k \ge 2$ имеем: $k! \ge 2^{k-1}$. Поэтому:

$$a_n \le 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3.$$

Итак, $a_n < 3$.

По теореме о монотонной последовательности, (a_n) – сходится.

Предел этой последовательности называется «числом e». Итак:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Буква e здесь первая буква латинского слова «экспонента», впервые в этом смысле её стал использовать Леонард Эйлер (1707 - 1783).

Глава 6. Предел вещественной функции вещественного аргумента

Предел функции по Гейне

Определение. Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Если для каждой последовательности (x_n) точек из A, такой что $x_n \neq x_0\,(n \in \mathbb{N})$ из того, что (x_n) сходится к x_0, следует, что последовательность $(f(x_n))$ сходится к a, то говорят, что предел $f(x)$ при $x \to x_0$ равен a. Это определение *предела функции по Гейне.*

Предел функции по Гейне будем обозначать через $(H)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Предел функции по Коши

Дадим три эквивалентные формулировки определения предела функции по Коши.

Определение. $1'$(в терминах «$\varepsilon - \delta$»).
Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для каждого $x \in A, x \neq x_0$ имеем: $\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), a) < \varepsilon$.

Определение. Множество $K^*_\varepsilon(x_0) = K_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}$ называется *проколотой $\varepsilon-$окрестностью* точки x_0.

Определение .$1''$(через проколотые окрестности).
Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Тогда число a называется *пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$*, если для каждого ε найдется $\delta > 0$, такое что для каждого
$x \in K^*_\delta(x_0) \cap A$, имеем $f(x) \in K_\varepsilon(a)$.

Определение.$1'''$(через образы окрестностей).
Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Тогда число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что $f\left(K^*_\delta \cap A\right) \subset K_\varepsilon(a)$.

Докажите самостоятельно эквивалентность определений $1', 1'', 1'''$.

Предел функции по Коши будем обозначать через $(C)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Таким образом, существует два различных определения предела функции: определение предела функции по Коши и по Гейне.

Теорема. Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Тогда, если существует один из двух пределов:

$$(C) \lim_{x \to x_0} f(x), (H) \lim_{x \to x_0} f(x),$$

то существует и второй, и эти пределы равны.

Доказательство. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$, x_0 есть предельная точка множества A.

1) Пусть $(H) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Покажем, что тогда существует и предел $(C) \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, равный a, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(f\left(K^*_\delta(x_0) \cap A \right) \subset K_\varepsilon(a) \right)$$

Доказываем от противного, тогда:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \left(f\left(K^*_\delta(x_0) \cap A \right) \not\subset K_\varepsilon(a) \right).$$

Согласно этой формуле, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $\delta > 0$ разность $f\left(K^*_\delta(x_0) \cap A \right) \backslash K_\varepsilon(a))$ – не пустое множество.

Иначе, для каждого $\delta > 0$ существует такое $x_\delta \in K^*_\delta(x_0) \cap A$, что $f(x_\delta) \notin K_{\varepsilon_0}(a)$. Положим: $\delta = 1$.

По предыдущему, найдется такое $x_1 \in K^*_\delta(x_0)$, что $f(x_1) \notin K_{\varepsilon_0}(a)$, точно так же, найдется такой $x_2 \in K^*_{\frac{1}{2}}(x_0)$, что $f(x_2) \notin K_{\varepsilon_0}(a)$, и т.д., найдется такой $x_n \in K^*_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap A$, что $f(x_n) \notin K_{\varepsilon_0}(a)$, и т.д., Мы получили последовательность $(x_n), x_n \neq x_0$, сходящуюся к x_0, такую что $f(x_n)$ не сходится к a. Это противоречит тому, что предел $f(x)$ по Гейне при $x_n \to x_0$ равен a. Итак, доказано, что если $(H) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, то $(C) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

2) Пусть теперь $(C) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Покажем, что тогда и $(H) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Пусть $x_n \to x_0, x_n \neq x_0, \varepsilon > 0$. По определению предела функции по Коши, найдется такое $\delta > 0$, что $\left(f\left(K^*_\delta(x_0) \cap A \right) \right) \subset K_\varepsilon(a)$. Так как $x_n \to x_0$, то найдется такое n_0 натуральное, что из $n \geq n_0$ следует: $x_n \in K^*_\delta(x_0) \cap A$. Но тогда $n \geq n_0$ влечет $f(x_n) \in K_\varepsilon(a)$. Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, для которого $n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in K_\varepsilon(a)$. Но это означает, что $f(x_n) \to a$. Итак, из того, что $x_n \to x_0, x_n \neq x_0$, следует: $f(x_n) \to a$. Значит, $(H) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, что и требовалось.

Поэтому нет необходимости каждый раз указывать, какой предел функции имеется в виду – предел по Гейне, или предел по Коши. Мы будем писать просто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Первый замечательный предел (случай непрерывного аргумента)

Различные определения предела функции доставляют различные способы вычисления предела. Иногда предпочтительнее пользоваться определением предела функции по Гейне, иногда – по Коши.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Воспользуемся определением предела функции по Гейне.

Пусть (x_n) сходится к 0, $x_0 \neq 0$. Мы уже знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Предел композиции функций

Определение. Пусть $A, B, C \subset \mathbb{R}$, пусть $f : A \to B, \varphi : B \to C$. *Композицией функций* f и φ называется функция, которая отображает каждый $x \in A$ в $\varphi(f(x))$. Мы будем обозначать композицию через $\varphi(f)$. Синоним термина *композиция функций* есть *сложная функция.*

Теорема(о пределе композиции).

Пусть $A, B, C \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B, \varphi : B \to C$. *Пусть* x_0 *есть предельная точка множества* A, y_0 *есть предельная точка множества* B. Если (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$, и (2) $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = z_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = z_0$.

Замечание. Эта теорема позволяет производить замену переменной при вычислении пределов.

Пример. Вычислить: $\lim\limits_{t\to 1} \frac{\sin(1-t^2)}{1-t^2}$. Делаем замену переменной: $x = 1 - t^2$. При $t \to 1$ имеем: $x \to 0$; $x \neq 0$, если $t \neq 1$. По теореме о пределе композиции: $\lim\limits_{t\to 1} \frac{\sin(1-t^2)}{1-t^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство теоремы о пределе композиции.

Пусть, в условиях теоремы, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, то, в силу определения предела по Гейне, последовательность (y_n), где $y_n = f(x_n)$, сходится к y_0. При этом, $y_n \neq y_0$, для всех n натуральных. В силу (2) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = z_0.$$

Иначе:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(f(x_n)) = z_0.$$

Это означает, согласно определению предела по Гейне, что

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(f(x)) = z_0,$$

что и требовалось доказать.

Свойства предела функции

Определение. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$.

Справедливы теоремы о пределе функции, аналогичные теоремам о пределе последовательности.

Теорема. Для того, чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство: $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$.

Теорема. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$. *Тогда*

$$1) \lim_{x\to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = a + b,$$

$$2) \lim_{x\to x_0} (f(x)\varphi(x)) = ab.$$

Если еще $b \neq 0$, *то*

$$3) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство проделать, воспользовавшись определением предела функции по Гейне.

Непрерывность функции

Определение. Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть точка множества A. Если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что $f(K_\delta(x_0) \cap A) \subset K_\varepsilon(f(x_0))$, то говорят, что *функция f непрерывна* в точке x_0. Функцию, непрерывную в каждой точке своей области определения будем называть *непрерывной.*

Впредь вместо $f(K_\delta(x_0) \cap A)$ будем писать просто $f(K_\delta(x_0))$.

Непрерывность функции в изолированной точке

Лемма. В изолированной точке области определения функция непрерывна.

Доказательство. Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть изолированная точка множества A, и задано число $\varepsilon > 0$. Так как x_0 есть изолированная точка множества A, то найдется $\delta > 0$, такое что в $K_\delta(x_0)$ нет других точек из множества A, кроме x_0.

Образ этой $\delta-$ окрестности точки x_0 при отображении f есть $\{f(x_0)\}$. Поэтому: $f\left(K_\delta(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(f(x_0)$. Итак, f непрерывно в x_0, что и требовалось.

Непрерывность функции в предельной точке

Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Так как $f(x_0) \in K_\varepsilon(f(x_0))$, то для каждого $\varepsilon > 0$ включение:

$$f\left(K_\delta(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(f(x_0))$$

верно тогда и только тогда, когда

$$f\left(K^*_\delta(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(f(x_0)).$$

Итак: $f(x)$ непрерывно в x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 f\left(K_\delta(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(f(x_0)).$$

Последнее равносильно соотношению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 f\left(K^*_\delta(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(f(x_0)).$$

По определению предела, это равносильно равенству:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Пусть x_0 есть предельная точка множества A. Тогда для непрерывности f в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение равенства:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то последнее равенство можно переписать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Таким образом, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то знак функции f перестановочен со знаком предельного перехода $\lim\limits_{x\to x_0}$.

Непрерывность логарифмической функции

Теорема. *Логарифмическая функция непрерывна.*

Доказательство. п.1. Выберем за основание логарифмов $a > 1$. Докажем сначала, что

$$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0.$$

Воспользуемся определением предела функции по Коши. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = 1 - a^{-\varepsilon}$. Имеем $a^{\varepsilon}\delta = a^{\varepsilon} - 1$. Так как $a^{\varepsilon} > 1$, то

$$a^{\varepsilon} - 1 \geq (1 - a^{-\varepsilon}) \qquad (*)$$

Пусть $x \in K_{\delta}$, отсюда $1 - \delta < x < 1 + \delta, -\delta < x - 1 < \delta$. Откуда $a^{-\varepsilon} < x < 1 + 1 - a^{-\varepsilon}$. В силу $(*)$ получим $a^{-\varepsilon} < x < a^{\varepsilon}$. Логарифмируя, находим $\log_a x \in K_{\varepsilon}(0)$. Итак: $x \in K_{\delta}(1) \Rightarrow \log_a x \in K_{\varepsilon}(0)$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 1} \log_a x = 0$.

2. Пусть $x_0 > 0$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to x_0} (\log_a x - \log_a x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \log_a \frac{x}{x_0} = 0$, что и требовалось.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$

Сравнение бесконечно малых

Определение. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые при $x \to x_0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ есть бесконечно малая *более высокого порядка,* чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$.

Пример. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то $(\alpha(x))^2$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

Эквивалентные бесконечно малые

Определение. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые при $x \to x_0$, и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *эквивалентны* и пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$ следовательно,

$$\ln(1+x) \sim x.$$

Лемма. *Отношение* $\sim$ *есть отношение эквивалентности, то есть, является рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением.*

Теорема. *Бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *эквивалентны при* $x \to x_0$ *тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\alpha(x)$ $(\beta(x))$*при* $x \to x_0$.

Доказательство. В самом деле,

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1) \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)} = 0).$$

Теорема. *Пусть* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ *и* $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ *при* $x \to x_0$. *Тогда, если существует* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, *и эти пределы равны.*

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. Из этого равенства следует утверждение теоремы.

Следствие. При вычислении пределов вида

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)}{\beta_1(x)\dots\beta_m(x)},$$

где все α_i и β_j – бесконечно малые при $x \to x_0$, можно заменять каждый из множителей α_i, β_j на величину, эквивалентную этому множителю, не меняя величины предела.

Благодаря этой теореме, особую ценность приобретают таблицы эквивалентных бесконечно малых.

Определение. Если существует такое $\varepsilon > 0$ и такие положительные числа r_1, r_2, что

$$r_1 \le \left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| \le r_2,$$

то говорят, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости при $x \to x_0$.. Такие бесконечно малые называют бесконечно малыми одного порядка.

Пример. Пусть $\alpha(x) = (2 + \cos x)x, \beta(x) = \sin 2x$. Можно показать, что это – бесконечно малые одного порядка при $x \to 0$.

Второй замечательный предел для непрерывного аргумента

Ранее мы доказали, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и назвали этот предел числом e. Общий член последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ есть степень, основание которой равно 1 плюс бесконечно малая $\frac{1}{n}$, а показатель есть величина, обратная этой бесконечно малой. Оказывается, что справедлива

Теорема. *Степень, основание которой равно сумме единицы и бесконечно малой, а показатель есть величина, обратная этой бесконечно малой, имеет пределом число e.*

Итак, теорема утверждает ,что

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (*)$$

Комментарий. Обратим внимание, что число e уже определено ранее, поэтому формула (*) есть теорема, а не определение!

Доказательство. п.1. Пусть (n_k) есть последовательность натуральных чисел, стремящаяся к бесконечности. Докажем, что

$$\lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} (1 + \frac{1}{n_k})^{n_k} = e. \qquad (**)$$

Выберем $\varepsilon > 0$.

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$, то существует n_0, такое что $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in K_\varepsilon(e)$. Так как $n_k \to +\infty$, то $\exists k_0 (k \geq k_0 \Rightarrow n_k > n_0)$. Имеем: $k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_0 \to b_k = a_{n_k} \in K_\varepsilon(e)$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ нашлось такое n_0 натуральное, что $k \geq n_0 \Rightarrow b_k \in K_\varepsilon(e)$. Это и означает, что $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = e$, что и требовалось.

п.2. Докажем теперь, что $\lim\limits_{x\to+0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. Воспользуемся определением предела по Гейне.

Пусть числовая последовательность $(x_n) \to 0, x_n > 0$. Построим по этой последовательности некоторую последовательность натуральных чисел. Положим: $n_k = [\frac{1}{x_k}]$. Теперь имеют место неравенства:

$$n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1, \frac{1}{n_k + 1} < x_k \le \frac{1}{n_k},$$

$$1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + x_k \le 1 + \frac{1}{n_k}$$

Запишем неравенства для $(1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \le (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Преобразуем теперь левую и правую части этого неравенства так, чтобы воспользоваться формулой (**).

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{-1} \le (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \le \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим:

$$e \le \lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} \le e.$$

Итак,

$$\lim_{k \to \infty} (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

п.3. Докажем, что $L = \lim\limits_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. Сделаем замену переменной в этом выражении. Положим: $x = -t, t = -x, t \to +0$. Имеем:

$$L = \lim_{t \to +0} (1 - t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \to +0} \left(\frac{1}{1 - t}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Выделим в основании степени единицу:

$$L = \lim_{t \to +0} \left(1 + \frac{t}{1 - t}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Еще раз сделаем замену переменной: $\tau = \frac{t}{1-t}, \tau \to +0, \frac{1}{t} = \frac{1}{\tau} + 1,$

$$L = \lim_{\tau \to +0} (1+\tau)^{\frac{1}{\tau}+1} = \lim_{\tau \to +0} (1+\tau)^{\frac{1}{\tau}} (1+\tau) = e.$$

Итак, равенство (*) доказано. Значит, $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Мы уже знаем,что при $x \to 0$ имеют место эквивалентности: $x \sim \sin x \sim \ln(1+x)$.

Продолжим эту таблицу. Мы знаем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Сделаем замену в этом равенстве: $t = \ln(1+x), x = e^t - 1.$

Имеем:$1 = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$. Итак: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Значит: $(e^x - 1) \sim x$ при $x \to 0$.

Вычислим предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{sint} = 1$, где $x = \sin t$, $t = \arcsin x, x \to 0$, когда $t \to 0, x \neq 0$ при $t \neq 0$.

Значит, $x \sim \arcsin x$ при $x \to 0$.

Докажите: $x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x$ при $x \to 0$.

Итак,

при $x \to 0$
$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim (e^x - 1).$

Пример. Вычислить:$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{2x} = 3/2.$

Действия над непрерывными функциями

Теорема. *Пусть функции f, φ – вещественные непрерывные функции, заданные на множестве $A \subset \mathbb{R}$. Тогда 1) сумма и произведение этих функций непрерывны,*
2) если еще $\varphi(x) \neq 0, x \in A$, то и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывно.

Доказательство. Пусть $x_0 \in A$. a) Если x_0 изолированная точка множества A, то все функции, определенные на A, непрерывны в x_0.
b) Пусть x_0 есть предельная точка A, пусть последовательность (x_n) точек из A сходится к x_0, и $x_n \neq x_0$.
Имеем:

$$\underline{\lim_{n \to +\infty} (f(x_n) + \varphi(x_n))} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) + \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = \underline{f(x_0) + \varphi(x_0)}.$$

Из подчеркнутого видим, что сумма $f+\varphi$ непрерывна в точке x_0. Аналогично доказывается непрерывность произведения и частного.

Композиция непрерывных функций

Теорема. *Пусть* $f : A \to B, \varphi : B \to C$. *Если функции* f *и* φ *непрерывны, то функция* $\varphi(f) : A \to C$ *непрерывна.*

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0, x_0 \in A$.Обозначим: $f(x_0) = y_0, \varphi(y_0) = z_0$. Так как φ непрерывна в точке y_0, то найдется такое $\gamma > 0$, что
$\varphi(K_\gamma(y_0)) \subset K_\varepsilon(z_0)$. В силу непрерывности f, найдется такая окрестность $K_\delta(x_0)$, что что $f(K_\delta(x_0)) \subset K_\gamma(y_0)$. Теперь:
$\varphi(f(K_\delta(x_0))) \subset \varphi(K_\gamma(y_0)) \subset K_\varepsilon(z_0)$. Итак, по данному $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что $\varphi(f(K_\delta(x_0))) \subset K_\varepsilon(z_0)$. Это и означает,что композиция функций $\varphi(f) : A \to C$ непрерывна.

Первая теорема Вейерштрасса. *Непрерывная вещественная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве* $P \subset \mathbb{R}$ *ограничена.*

Доказательство. От противного. Пусть $f : P \to \mathbb{R}$ есть непрерывная функция, P – замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$, однако, f неограничена. Следовательно, найдется такое $x_1 \in P$, что $|f(x_1)| > 1$, найдется такое $x_2 \in P$, что $|f(x_2)| > 2$, и т.д., найдется $x_n \in P$, такое что $|f(x_n)| > n$, и т.д. Последовательность (x_n) ограничена. По теореме Больцано, существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}. Обозначим: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. В силу непрерывности $f(x)$, имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)|$. С другой стороны, из неравенства: $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$. Это противоречие доказывает, что предположение о неограниченности f неверно. Следовательно, f ограничена.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Пусть непрерывная вещественная функция* f *задана на замкнутом ограниченном множестве* $P \subset \mathbb{R}$. *Тогда* f *принимает на множестве* P *своё наибольшее значение и своё наименьшее значение.*

*Доказательство.*1) По первой теореме Вейерштрасса, функция f ограничена, то есть, ограничено числовое множество $f(P)$. По теореме Больцано, существует $\inf f(P) \doteq m$. В промежутке $[m, m+1)$ выберем число $y_1 \in f(P)$. Такое число существует, иначе $m+1$ было бы нижней границей $f(P)$. Найдётся такое $x_1 \in P$, что $f(x_1) = y_1$. Аналогично, в $[m, m+\frac{1}{2})$ найдется $y_2 \in f(P), y_2 = f(x_2)$.

В $[m, m+\frac{1}{n})$ найдется $y_n \in f(P), y_n = f(x_n)$. Получим последовательность $(x_n), x_n \in P$, такую что $|f(x_n)-m| < \frac{1}{n}$. Значит, $f(x_n) \to m$.

2) Последовательность (x_n) ограничена. По теореме Больцано- Вейерштрасса, найдется сходящаяся подпоследовательность (x_{n_k}). Обозначим: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n_k} = x_0$. Подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и сама последовательность. Поэтому: $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = m$. Итак, нашлась в P точка x_0, где функция принимает наименьшее значение на P, что и требовалось.

Теорема Коши о промежуточных значениях. *Пусть вещественная функция f определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Если $f(a)f(b) < 0$, то существует такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.*

Доказательство. Будем доказывать методом деления отрезка пополам. Пусть, для определенности, $f(a) < 0, f(b) > 0$.

Обозначим: $[a_0, b_0] = [a, b]$. Обозначим: $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Рассмотрим знак величины $s_0 = f(c_0)$. Если $s_0 = 0$, то теорема доказана. Если $s_0 > 0$, то обозначим: $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$. Если, наконец, $s_0 < 0$, то обозначим: $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$.

Продолжая этот процесс, либо получим для некоторого $n \in \mathbb{N}$, что $f(c_n) = 0$, тогда теорема доказана. Если же такого n не существует, то получим бесконечную последовательность вложенных сегментов

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \ldots,$$

длина которых стремится к нулю при $n \to \infty$. По построению, для всех натуральных n имеем: $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$. Обозначим точку, принадлежащую всем этим сегментам, через c.

Очевидно: $c = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах $f(a_n) < 0$, и $f(b_n) > 0$, получим:

$f(c) \le 0, f(c) \ge 0$. Отсюда: $f(c) = 0$, что и требовалось.

Образ отрезка при непрерывном отображении

Лемма. *Каждый отрезок A вещественной оси можно представить как объединение возрастающей последовательности сегментов. Наоборот, объединение возрастающей последовательности сегментов есть отрезок вещественной оси(конечный или бесконечный).*

Доказательство.1) Пусть $A = (a, b]$. Построим монотонно убывающую последовательность a_n, сходящуюся к a, например, такую: $a_1 = \frac{a+b}{2}, a_2 = \frac{a+a_1}{2}, a_3 = \frac{a+a_2}{2} \ldots$. Тогда: $(a, b] = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b]$.

2) Пусть дана возрастающая последовательность сегментов:

$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \ldots \subset [a_n, b_n] \subset \ldots$.

Обозначим: $a = \inf\limits_n a_n, b = \sup\limits_n b_n$.

Легко видеть, что $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \supset (a, b)$. В зависимости от того, принадлежат ли точки a и b объединению сегментов B, B равно одному из отрезков: $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$.

Теорема. *Пусть f – непрерывная вещественная функция, определенная на $A \subset \mathbb{R}$. Тогда образ отрезка A при отображении f также есть отрезок.*

Доказательство. 1) Пусть, сначала, $A = [a, b]$. По второй теореме Вейерштрасса, существуют $x_1, x_2 \in [a, b]$, такие что

$f(x_1) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x), f(x_2) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Покажем, что $f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$.

В самом деле, если $f(x_1) \leq \gamma \leq f(x_2)$, то, по теореме Коши о промежуточных значениях, существует $x \in [a, b]$, такой что $f(x) = \gamma$. Значит, $[f(x_1), f(x_2)] \subset f([a, b])$.

С другой стороны, $\forall x \in [a, b]\ f(x) \in [f(x_1), f(x_2)]$.

Значит, $[f(x_1), f(x_2)] \supset f([a, b])$. Итак, $[f(x_1), f(x_2)] = f([a, b])$.

2) Пусть теперь A – произвольный отрезок вещественной оси. По лемме представим этот отрезок как объединение возрастающей последовательности сегментов: $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Так как образ объединения множеств равен объединению образов, то $f(A) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f([a_n, b_n])$. Итак, $f(A)$ равно объединению возрастающей последовательности сегментов, значит, $f(A)$ есть отрезок.

Обратная функция

Определение. Пусть $f : A \to B$, f есть биекция A на B. Отображение $\varphi : B \to A$, называется *обратным отображением* по отношению к f, если $\forall x \in A \forall y \in B (y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y))$.

Обратное отображение для f будем обозначать f^{-1}.

Предостережение: Обратное отображение определено лишь для биекции!

Теорема. Непрерывность обратной функции. *Пусть функция f есть вещественная функция, строго монотонная и непрерывная на отрезке A. Тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке $B = f(A)$.*

Доказательство.

a) f^{-1} строго монотонна. В самом деле, пусть $y_1 < y_2$. Если бы, вопреки утверждению теоремы, $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$, то $y_1 = f(x_1) \geq y_2 = f(x_2)$, что неверно.

b) Убедимся, что f^{-1} непрерывна. Пусть $y_0 \in B, f^{-1}(y_0) = x_0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $E = A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ есть пересечение двух отрезков, следовательно, также отрезок, содержащий точку x_0. Образ $f(E)$ этого отрезка также есть отрезок, содержащий точку y_0. Обозначим: $\delta = \sup\limits_{y \in f(E)} \rho(y_0, y)$. Теперь имеем:

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap B = (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(E).$$

Поэтому: $f^{-1}\left((y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap B\right) =$

$$= f^{-1}\left((y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(E)\right) \subset f^{-1} f(E) = E \subset K_\varepsilon(x_0).$$

Откуда: $f^{-1}\left((y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap B\right) \subset E$. Итак, по заданному $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что $f^{-1}\left(K_\delta(y_0)) \cap B\right) \subset K_\varepsilon(x_0)$. Это и означает, что функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0.

О графиках прямой и обратной функции

Пусть $f : A \to B, f^{-1} : B \to A$ – прямая и обратная функции.

Рассмотрим их графики G_1, G_2, заданные уравнениями:

$$y = f(x), y = f^{-1}(x).$$

Имеем: $(x_1, y_1) \in G_1 \Leftrightarrow y_1 = f(x_1) \Leftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) \Leftrightarrow (y_1, x_1) \in G_2$.
Итак: $(x_1, y_1) \in G_1 \Leftrightarrow (y_1, x_1) \in G_2$.

Это означает, что графики прямой и обратной функции симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.

Односторонние пределы

Определение. (По Гейне) Пусть f есть вещественная функция, заданная на множестве $A \subset \mathbb{R}$. Число a называется *пределом функции f при x стремящемся к x_0 слева,* или *левосторонним пределом* $f(x)$ при $x \to x_0$, если для каждой последовательности x_n, сходящейся к x_0, где все $x_n < x_0$, имеем: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = a$.

Обозначения: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), f(x_0 - 0), \lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} f(x)$.

Аналогично определяется предел $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 справа.

Обозначения: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x), f(x_0 + 0), \lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x)$.

Определение.(По Коши) Пусть $f(x)$ есть вещественная функция, заданная на множестве $A \subset \mathbb{R}$. Число a называется *пределом функции f при x стремящемся к x_0 слева,* или *левосторонним пределом* $f(x)$ при $x \to x_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $f\left((x_0 - \delta, x_0) \cap A\right) \subset K_\varepsilon(a)$.

Аналогично определяется предел $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 справа.

Определения одностороннего предела по Гейне и по Коши эквивалентны.

Теорема. *Пусть f – вещественная функция, определенная на $A \subset \mathbb{R}$, и для некоторого $\varepsilon > 0$ проколотая ε - окрестность точки x_0 входит в A. Иначе: $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \subset A$. Тогда для того, чтобы существовал $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, необходимо и достаточно выполнение трех условий:*
1) Существует левосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$,
2) Существует правосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$,
3) Оба односторонних предела равны a.

Доказательство. a) Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. В силу определения предела по Коши, найдется такое $\delta > 0$, что $f\left(K^*_\delta(x_0) \cap A\right) \subset K_\varepsilon(a)$.

Так как $(x_0 - \delta, x_0) \subset K^*_\delta(x_0)$, то $f\left((x_0 - \delta, x_0) \cap A\right) \subset K_\varepsilon(a)$.

Значит, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$.

Аналогично, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$.

b) Достаточность. Пусть условия (1-3) выполнены. Воспользуемся определениями предела и одностороннего предела по Коши.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$, то найдется такое $\delta_1 > 0$, что $f\left((x_0 - \delta_1, x_0)\right) \subset K_\varepsilon(a)$.

Аналогично, так как $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что $f\left((x_0, x_0 + \delta_2)\right) \subset K_\varepsilon(a)$. Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Имеем: $f\left((x_0-\delta, x_0)\right) \subset K_\varepsilon(a)$, $f\left((x_0, x_0+\delta)\right) \subset K_\varepsilon(a)$. Отсюда: $f\left(K_\delta^*(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(a)$, Итак, для всех $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что $f\left(K_\delta^*(x_0)\right) \subset K_\varepsilon(a)$. Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть f - вещественная функция, определенная на отрезке $A \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in A, x_0$ есть внутренняя точка множества A. Тогда для того, чтобы f была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно выполнение трех условий:*
1) Существует левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$,
2) Существует правосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,
3) Оба односторонних предела равны $f(x_0)$.

Это – очевидное следствие из предыдущей теоремы и из теоремы об условии непрерывности функции в предельной точке области определения.

Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

Определение. Пусть функция $f(x)$ – вещественная функция, определенная на множестве $A \subset \mathbb{R}$. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ проколотая ε-окрестность точки x_0 входит в A. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если:

1) функция не определена в точке x_0, или

2) Функция определена в точке x_0, но не является непрерывной в точке x_0.

Определение. Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$. Если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода;* если же хотя бы один из односторонних пределов не существует, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода.* Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется *устранимой точкой разрыва.* Название объясняется тем, что, если положить $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, то так полученная функция непрерывна в точке x_0.

Примеры. 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Точка $x = 0$ есть точка устранимая точка разрыва.
2) $\phi(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Здесь $x = 0$ неустранимая точка разрыва 1-го рода.
3) $\psi(x) = \frac{1}{x-1}$. Здесь $x = 1$ есть точка разрыва 2-го рода.

При построении графика функции необходимо показать все точки разрыва.

Степенная функция с рациональным показателем

п.1. Пусть $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Функция x^n непрерывна, как произведение непрерывных функций: $x^n = x \cdots x$.

Существует ли обратная функция? Рассмотрим отдельно два случая: $n-$нечетное, и $n-$четное.

a) $n-$нечетное. Тогда $f : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$, при этом, f есть непрерывная биекция. По теореме об обратной функции, $f^{-1}(t)$ определена, строго монотонна и непрерывна,

$$f^{-1} : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty).$$

Обозначим $f^{-1}(t) := t^{\frac{1}{n}}$. Обозначим: $\left(t^{\frac{1}{n}}\right)^m = t^{\frac{m}{n}}$. Функция $t^{\frac{m}{n}}$ определена, строго монотонна и непрерывна на всей вещественной оси.

b) $n-$четное. Тогда на промежутке $[0, +\infty)$ функция f строго возрастает и непрерывна, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. По теореме об обратной функции, $f^{-1}(t)$ определена, строго монотонна и непрерывна,

$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty).$$

Обозначим: $\left(t^{\frac{1}{n}}\right)^m = t^{\frac{m}{n}}$. Функция $t^{\frac{m}{n}}$ определена, строго монотонна и непрерывна на $[0, +\infty)$.

Степенная функция x^r определена и непрерывна для всех $x \geq 0$ при каждом рациональном r.

п.2. *Свойства степенной функции.*

1) $x^0 = 1$,
2) $x^p x^q = x^{p+q}$, $p, q \in \mathbb{Q}$.
3) $(x^p)^q = x^{pq}$.
4) x^p строго возрастает при $p > 0$, строго убывает при $p < 0$.

Показательная функция

Построим показательную функцию и докажем некоторые ее свойства, включая непрерывность.

п.1. Пусть, для определенности, $a > 1$. Для любого рационального r величина a^r определена. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Пусть (r_n) – возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x. Положим: $a^x \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.

Проверим *корректность* определения a^x. Пусть (r'_n) и (r''_n) две возрастающих последовательности рациональных чисел, сходящиеся к x. Убедимся, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$. Расположим все члены обеих последовательностей в порядке (нестрого) возрастания. Получим возрастающую последовательность (r_n), сходящуюся к x. Последовательности (r'_n) и (r''_n) есть ее подпоследовательности. Последовательность (a^{r_n}) сходится, как ограниченная монотонная последовательность, $(a^{r'_n})$ и $(a^{r''_n})$ есть ее подпоследовательности. Поэтому: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r''_n}$. Это и означает корректность определения a^x.

Свойства показательной функции.

п.1 Пусть $t_k \to 0, t_k > 0$. Обозначим: $a^{t_k} - 1 = h_k, \left[\frac{1}{t_k}\right] = n_k$. Очевидно: $h_k > 0$.

Имеем: $a = (1+h_k)^{\frac{1}{t_k}} > (1+h_k)^{n_k} \Rightarrow a \geq (1 + h_k n_k) \Rightarrow \frac{a-1}{n_k} \geq h_k$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим: $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$.

Значит: $\lim\limits_{t\to+0} a^t = 1$. Заменой переменной $\tau = -t$ получим отсюда: $\lim\limits_{t\to-0} a^t = 1$. Итак, $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$.

п.2 $a > 1, x > 0 \Rightarrow a^x > 1$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}, (x_n)$ - возрастающая последовательность рациональных чисел, такая что $x_n \to x, x_n > 0$. По свойству степени с рациональным показателем: a^{x_n} монотонно возрастает. Значит, $a^{x_n} \geq a^{x_1} > 1, a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \geq a^{x_1} > 1$. Откуда: $a^x > 1$.

п.3. *Основное функциональное уравнение для показательной функции.* Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть $x_n \to x, y_n \to y$. Тогда $(x_n + y_n) \to (x+y)$. По свойству степени с рациональным показателем:

$$a^{x_n + y_n} = a^{x_n} a^{y_n}.$$

Перейдем к пределу при $n \to +\infty$. Получим:

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

п.4. *Монотонность показательной функции.* a^x монотонно возрастает. В самом деле, $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1$. Отсюда: $a^{x_2} > a^{x_1}$.

п.5. *Непрерывность показательной функции.* Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Докажем, что a^x непрерывна в точке x_0. Обозначим: $x - x_0 \overset{def}{=} \Delta x$.

Величину Δx назовем приращением аргумента. Имеем: $x = x_0 + \Delta x$. Требуется доказать:

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0},$$

или:

$$\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1,$$

или, что то же:

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1.$$

Это равносильно ранее доказанному равенству : $\lim\limits_{t\to 0} a^t = 1$. Итак показательная функция непрерывна.

Логарифмическая функция

Обозначим: $f(x) = a^x$. Функция f строго монотонна и непрерывна, $f : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$. Поэтому и обратная функция $f^{-1} : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ строго монотонна и непрерывна. Обозначим: $f^{-1}(x) = \log_a x$. Итак, $\log_a x$ есть строго возрастающая и непрерывная функция на $(0, +\infty)$, с со множеством значений $(-\infty, +\infty)$.

Тригонометрические функции

п.1. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна. В самом деле,

$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2sin\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x+\Delta x}{2}$.

$|\sin(\Delta x)| = |2sin\frac{\Delta x}{2} \cos \frac{\Delta x}{2}| \leq |\Delta x|$.

Отсюда: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta \sin x = 0$.

Следовательно, $\sin x$ есть непрерывная функция.

п.2. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Видим, что $\cos x$ есть непрерывная функция, как композиция непрерывных функций.

п.3. $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ непрерывные, как частные непрерывных функций.

Обратные тригонометрические функции

п.1. Функция $f(x) = \sin x$ не монотонна на $(-\infty, +\infty)$. Поэтому не существует функции, обратной к $\sin x$. На сегменте $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ эта функция строго монотонна. Обозначим через $\phi(x)$ сужение $\sin x$ на этот сегмент. Функция $\phi(x)$ строго возрастает и непрерывна,

$$\phi : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, +1]$$

Поэтому обратная функция также строго возрастает и непрерывна. Обозначим обратную функцию через $\arcsin x$. Итак, $\arcsin x$ определен, строго возрастает и непрерывен на $[-1, +1]$, и множество его значений есть $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

п.2. Совершенно аналогично определяется $\operatorname{arctg} x$. На интервале $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ эта функция строго возрастает. Обозначим через $\psi(x)$ сужение $\operatorname{tg} x$ на этот интервал. Функция $\psi(x)$ строго возрастает и непрерывна,

$$\psi : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty).$$

Поэтому обратная функция также строго возрастает и непрерывна. Обозначим обратную функцию через $\operatorname{arctg} x$. Итак, $\operatorname{arctg} x$ определен, строго возрастает и непрерывен на $(-\infty, +\infty)$, и множество его значений есть $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$.

Степенная функция с произвольным вещественным показателем

Выражение a^b теперь определено для всех $a > 0$ и для всех b. Это дает возможность определить степенную функцию x^b, заданную на $(0, +\infty)$ при произвольном вещественном показателе b. Но можно задать ее и непосредственно через логарифмическую и показательную функции:

$$x^b = e^{b \ln x}.$$

Элементарные функции

Определение. 1) Назовем *основными элементарными функциями* следующие функции: показательную функцию a^x, степенную функцию x^a, логарифмическую функцию $\ln x$, тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

2) Назовем *элементарной функцией* каждую функцию, которая выражается через основные элементарные функции с помощью композиции функций и операций сложения, умножения и деления.

Примеры. 1) $\frac{a_0 x^n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_k}$. 2) $\sqrt{\ln \operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \pi)}$.

Теорема. *Каждая элементарная функция непрерывна.*

Доказательство. Каждая элементарная функция, по определению, получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа шагов по применению операций сложения, умножения, деления и композиции функций(число действий конечно).

Сумма, произведение, частное непрерывных функций, есть непрерывная функция, также и композиция непрерывных функций есть функция непрерывная. Поэтому на каждом шагу в этом построении мы получаем непрерывные функции.

Равномерная непрерывность

Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, f непрерывна.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in A$ выберем $\delta(x) > 0$ так, чтобы $f\left(K_{\delta(x)}(x)\right) \subset K_\varepsilon(f(x))$.

Найдется ли δ, подходящее для всех x?

Определение. Пусть $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. Говорят, что f *равномерно непрерывна,* если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x_1, x_2 \in A\ (\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \varepsilon).$$

Лемма. *Каждая равномерно непрерывная функция непрерывна.*

Это следует непосредственно из определения равномерной непрерывности.

Теорема Кантора. *Непрерывная вещественная функция f, заданная на замкнутом ограниченном множестве $F \subset \mathbb{R}$, равномерно непрерывна.*

Доказательство. От противного: пусть, в условиях теоремы, f не является равномерно непрерывной. Тогда:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x_1, x_2 \in A\ (\rho(x_1, x_2) < \delta \wedge \rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \geq \varepsilon).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ удовлетворяет последнему соотношению.
Положим $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Для каждого δ_n выберем $a_n, b_n \in A$ такие, что

$$\rho(a_n, b_n) < \frac{1}{n} \wedge \rho\left(f(a_n), f(b_n)\right) \geq \varepsilon.$$

Или: $\rho(a_n, b_n) \to 0 \wedge \rho\left(f(a_n), f(b_n)\right) \geq \varepsilon$. Последовательность (a_n) ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность a_{n_k}. Пусть $a_{n_k} \to a$.
Мы получили последовательность пар (a_{n_k}, b_{n_k}), такую что

$$\rho(a_{n_k}, b_{n_k}) \to 0 \wedge \rho\left(f(a_{n_k}), f(b_{n_k})\right) \geq \varepsilon.$$

Из того, что $a_{n_k} \to a, \rho\left(a_{n_k}, b_{n_k}\right) \to 0$, следует, что $b_{n_k} \to a$.
Перейдя в неравенстве: $\rho\left(f(a_{n_k}), f(b_{n_k})\right) \geq \varepsilon$ к пределу при $k \to \infty$, получим: $\rho\left(f(a), f(a)\right) \geq \varepsilon$ Это противоречие доказывает теорему.

Глава 7. Дифференциальное исчисление вещественных функций вещественного аргумента

Задача о линейной аппроксимации функций

Пусть f – вещественная функция, заданная на отрезке G, и x_0 – внутренняя точка G.

Задача: найти такую линейную функцию $y = ax + b$, которая наилучшим образом приближает (аппроксимирует) функцию $f(x)$ вблизи точки x_0.

Начнём с примера.

Пусть $f(x) = x^2$. Вычислим приращение функции, соответствующее изменению значения аргумента от x_0 до $x_0 + \Delta x$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Приращение функции $\Delta f(x_0)$ состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое, $2x_0\Delta x$, пропорционально приращению аргумента Δx.

Второе – есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Далее мы увидим, что такая структура приращения функции не случайна.

Дифференциал функции

п.1. **Определение.** Пусть f – вещественная функция, заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}$, и x_0 – внутренняя точка G. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если имеет место равенство:

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где $A \in \mathbb{R}$, $\alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Линейная функция $\Delta x \to A\Delta x$ называется *дифференциалом функции* $f(x)$ и обозначается $df(x_0)$. Таким образом, $df(x_0) = A\Delta x$. Обратим внимание, что аргумент Δx в обозначении дифференциала не указан, но подразумевается. В тех случаях, когда требуется явно указать его, будем писать: $d_{\Delta x} f(x_0)$ или $df(x_0, \Delta x)$. Таким образом, можно сказать, что функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение функции в этой точке равно некоторой линейной функции от приращения аргумента плюс бесконечно малая более высокого порядка, чем приращение аргумента.

п.2. Введем обозначение: $\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \beta(\Delta x)$. Функция $\beta(t)$ есть бесконечно малая при $t \to 0$. Доопределим β, положив $\beta(0) = 0$. Теперь $\beta(t)$ непрерывна в точке $t = 0$. Таким образом, $\Delta f(x_0) = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x$, где $\beta(\Delta x)$ есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

п.3. Пусть G есть открытое множество в $\mathbb{R}$, и функция $f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке $x \in G$. Тогда f называется *дифференцируемой.* Теперь A, α и β зависят от x:

$$\Delta f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x),$$

$$\Delta f(x) = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x,$$

$$df(x) = A(x)\Delta x.$$

Пример.

Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Откуда $df(x_0) = 2x\Delta x$.

Дифференциал и производная

п.1. **Определение.** Пусть f – вещественная функция, заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}$, и x_0 – внутренняя точка G.

Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

то этот предел называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения производной весьма многочисленны:

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx}, \frac{df}{dx}(x_0), Df(x_0).$$

Каждое из этих обозначений имеет свои преимущества и недостатки, об этом поговорим позднее.

п.2. **Теорема.** *Пусть f – вещественная функция, заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}$, и x_0 – внутренняя точка G. Тогда функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$.*

Доказательство.

$$(f'(x_0) = A,\ A \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \beta(\Delta x)\right) \Leftrightarrow (\Delta f(x_0) = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ ($f(x)$ дифференцируема в точке x_0).

п.3. **Замечание**. Таким образом, коэффициент A в определении дифференцируемости функции равен производной $f'(x_0)$.

Теперь можно переписать формулы, относящиеся к дифференциалу функции:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x),$$

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x,$$

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Пример. Пусть $f(x) = x$. Тогда $\Delta f(x) = \Delta x$. Таким образом, здесь $df(x) = \Delta x$. С другой стороны, $df(x) = dx$. Поэтому: $dx = \Delta x$.

Итак, *дифференциал независимой переменной равен ее приращению.*

Поскольку приращение независимой переменной равно ее дифференциалу, то выражение для дифференциала функции принимает вид:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

п.4. Отсюда получаем выражение для производной:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Геометрический смысл производной и дифференциала

п.1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на (a, b),

$x_0 \in (a, b)$. Обозначим кривую $y = f(x)$ через Γ, точку (x_0, y_0) – через M_0, текущую точку (x, y) кривой Γ – через M.

Определение. Прямую l_0, проходящую через точку $M_0 \in \Gamma$, называют *касательной к кривой* Γ, если при $M \to M_0$ угол между прямой l_0, и секущей M_0M стремится к 0.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Для того, чтобы существовала касательная к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x_0)$ была дифференцируема при $x = x_0$, и $f'(x_0) = k$.*

Доказательство. Пусть l_0 – прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), с угловым коэффициентом k. Обозначим угол ее наклона к оси Ox через ψ. Имеем: $k = \operatorname{tg}\psi$. Угол наклона секущей l, проведенной через $(x_0, y_0), (x, y)$ обозначим φ. Обозначим: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Имеем:

l_0 есть касательная с угловым коэффициентом $k \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0}(\varphi - \psi) = 0$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \psi \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k \Leftrightarrow f'(x_0) = k.$

Итак, величина $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику $y = f(x)$, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$ Поэтому уравнение касательной имеет вид:

$$Y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Здесь $(x, f(x))$ – координаты точки графика, (x, Y) – координаты точки касательной.

п.2. Уравнение касательной можно переписать так:

$$\Delta Y = f'(x_0)\Delta x.$$

Отсюда:

$$df(x_0) = \Delta Y.$$

Итак: Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику этой функции.

Дифференцируемость и непрерывность

Теорема. *Пусть $f : G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}$, x_0 есть внутренняя точка G. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f(x)$ непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x).$$

Отсюда:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. Таким образом, из дифференцируемости функции следует ее непрерывность. Обратное неверно: непрерывность не влечет дифференцируемости! Пример:$f(x) = |x|$.

Односторонние производные

Пусть вещественная функция $f(x)$ определена на отрезке A, $[x_0, x_0{+}\Delta x) \subset A$. Если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется *правосторонней производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается: $f'_-(x_0)$.

Аналогично определяется *левосторонняя* производная. Ее обозначение: $f'_+(x_0)$.

Пример. $f(x) = |x|$. В точке $x_0 = 0$ f не дифференцируема, $f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1$.

Техника вычисления производных

Производная показательной функции

Пусть $a > 1, f(x) = a^x$. Найдем $f'(x) = (a^x)'$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x}.$$

Сделаем замену переменной: $t = \Delta x \ln a, \Delta x = \frac{t}{\ln a}, t \to 0$. Теперь:

$$(a^x)' = a^x \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \ln a = a^x \ln a.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В частности, при $a = e$:

$$(e^x)' = e^x.$$

Производные тригонометрических функций

1) Найдем производную $\sin x$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}.$$

Заменим синус бесконечно малого аргумента его аргументом.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2 \frac{\Delta x}{2} cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x.$$

Окончательно:
$$(\sin x)' = \cos x.$$

2) Аналогично находим:
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Дифференцирование суммы, произведения и частного

п.1. Пусть $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции.
$$(au(x) + bv(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(au(x) + bv(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b\Delta v(x)}{\Delta x} = au'(x) + bv'(x).$$

Значит:
$$(au(x) + bv(x))' = au'(x) + bv'(x)$$

Итак, *производная линейной комбинации двух функций равна линейной комбинации производных этих функций с теми же коэффициентами.*

п.2. Найдем производную произведения функций. Сначала несколько простых выкладок: $\Delta u(x) = u(x + \Delta x) - u(x)$. Отсюда:
$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u(x).$$

Аналогично:
$$v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v(x).$$

Обозначим для краткости: $u(x) = u, v(x) = v, \Delta u(x) = \Delta u$, $\Delta v(x) = \Delta v, u'(x) = u', v'(x) = v'$. Далее будем пользоваться этими обозначениями.
$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u\, v + v\Delta u}{\Delta x} = u'v + v'u.$$

Итак:
$$(uv)' = u'v + uv'.$$

п.3. Найдем производную частного.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u\, v - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} \Delta x = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Окончательно,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Производная обратной функции

Пусть $f : A \to B$ есть строго монотонное непрерывное отображение отрезка A на отрезок B. Тогда существует и непрерывна обратная функция $f^{-1} : B \to A$ Пусть f дифференцируема в точке $x_0 \in A$ и $f'(x_0) \neq 0$. Убедимся, что обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и найдем её производную $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$.
Имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Обозначим $y_0 = f(x_0)$. В силу строгой монотонности f, f^{-1}, из $y \to y_0$ следует: $f^{-1}(y) \to x_0$, и $y \neq y_0 \Rightarrow f^{-1}(y) \neq x_0$. Сделаем замену: $x = f^{-1}(y)$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$.

Окончательно: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, где $y_0 = f(x_0)$.

Производная логарифмической функции

Для краткости будем обозначать прямую функцию через $y(x)$, а обратную – через $x(y)$. Итак:

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y,\ y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Производные обратных тригонометрических функций

$y = \arcsin x$. Заметим, что $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\cos y \geq 0$. Далее: $y = \arcsin x \Rightarrow x = siny$, $y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin y)^2}}$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично получим:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y,\ y'(x) = \tfrac{1}{x'(y)} = \cos^2 y = \tfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогично получим:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная степенной функции

$$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

Дифференцирование композиции функций

Задача. *Пусть $u: A \to B, v: B \to C$, где A и B – открытые множества в $\mathbb{R}$, и функции u, v – дифференцируемы. Выяснить, дифференцируема ли композиция функций $v(u)$,и если да, то выразить производную композиции через производные функций v и u.*

Решение. Запишем приращение композиции так, чтобы убедиться в дифференцируемости композиции и вычислить ее производную. $\Delta v(u(x)) = v(u(x+\Delta x)) - v(u(x)),\ \Delta u(x) = u(x+\Delta x) - u(x)$. Обозначим, аналогично предыдущему: $u(x) = u, \Delta u(x) = \Delta u$.

Тогда $u(x+\Delta x) = u + \Delta u$.

Аналогично, $v(u(x)) = v(u), \Delta v(u(x)) = v(u+\Delta u) - v(u)$. Поэтому:

$$\Delta v(u) = v(u+\Delta u) - v(u) = v'(u)\Delta u + \beta_1(\Delta u)\times\Delta u =$$

$$= v'(u)u'\Delta x + \beta_1(\Delta u)\times\Delta u.$$

Обозначим: $\beta_1(\Delta u)\times\Delta u = \alpha$, α есть функция от Δx. В самом деле, если задано Δx, то задано и $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$. Но тогда задано и β_1, значит, задано и α. Убедимся, что α при $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

$$l = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\beta_1(\Delta u)\times\Delta u}{\Delta x}.$$

Отсюда:
$$l = \lim_{\Delta x \to 0} \beta_1(\Delta u) \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0 \times u' = 0.$$
Теперь имеем: $\Delta v(u) = v'(u)u'\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, более высокого порядка, чем Δx. Это значит, что композиция $v(u)$ дифференцируема.

Инвариантность формы первого дифференциала

В условиях предыдущей задачи имеем: $dv(t) = v'(t)dt \qquad (*)$
$(v(u(x)))' = v'(u(x))u'(x)$.

Домножив почленно последнее равенство на dx, получим:
$(v(u(x)))'dx = v'(u(x))u'(x)dx$ или $d(v(u(x))) = v'(u(x))du(x)$ $(**)$

Таким образом, если в формулу $(*)$ для первого дифференциала подставить вместо независимой переменной t дифференцируемую функцию $u(x)$, то получим снова верную формулу $(*)$. Это свойство формулы $(*)$ называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Гиперболические функции

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{ch^2 x}, \ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{ch^2 x}$$

Основные правила дифференцирования

1. $(au(x) + bv(x))' = au'(x) + bv'(x)$

Итак, *производная линейной комбинации двух функций равна линейной комбинации производных эти функций с теми же коэффициентами.*

2. $(uv)' = u'v + uv'$.
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
4. $\left(v(u(x))\right)' = v'(u(x))u'(x)$.
5. $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x^0)}$, где $y_0 = f(x_0)$.

Основные теоремы дифференциального исчисления. Точки экстремума

Определение. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 есть внутренняя точка A. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in K_\varepsilon(x_0)$, то x_0 называется точкой *локального максимума* функции $f(x)$.

Если $f(x_0) > f(x)$ для всех $x \in K_\varepsilon(x_0)$, то x_0 называется точкой *строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Слово *локальный* при этом часто опускают и говорят просто о точке максимума или строгого максимума.

Если $f(x_0) > f(x)$ для всех x из области определения f, то x_0 называется точкой *глобального максимума* f.

Аналогично определяются точки минимума – локального и глобального.

Точки локального минимума и локального максимума называются *точками экстремума.*

Теорема Ферма. *Пусть f – вещественная функция, определенная и дифференцируемая на отрезке A, x_0 есть внутренняя точка A. Если x_0 есть точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.*

Комментарий. Это *необходимое условие экстремума.* Заметим, что оно не является достаточным. Например, $f(x) = x^3$ строго монотонно возрастает на всей вещественной оси, значит, не имеет точек экстремума. Между тем, $f'(0) = 0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 есть точка локального максимума f. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $K_\varepsilon(x_0) \subset A$, и $f(x) \leq f(x_0)$ для всех $x \in K_\varepsilon(x_0)$. По определению односторонних производных: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$. Итак, $f'_-(x_0) \geq 0$. Аналогично: $f'_+(x_0) \leq 0$.

Так как $f(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то $f(x_0) = 0$, что и требовалось.

Теорема Ролля. *Пусть вещественная функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b).*
Если $f(a) = f(b)$, то существует $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса существуют $x_1, x_2 \in [a, b]$, в которых функция принимает наименьшее и наибольшее значения.
Для всех $x \in [a, b]$ имеем: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
1) Если $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$. Значит, $f'(x) = 0$ всюду на (a, b), и в качестве ξ можно взять любую точку этого интервала.
2) Пусть теперь $f(x_1) < f(x_2)$. Обе точки x_1, x_2 не могут быть граничными точками сегмента $[a, b]$, так как в граничных точках значения функции совпадают, между тем $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, одна из точек x_1, x_2 – внутренняя точка минимума или максимума. Пусть, например, $x_1 \in (a, b)$ есть точка экстремума. По теореме Ферма, $f'(x_1) = 0$. Обозначим: $\xi = x_1$, тогда $f'(\xi) = 0,\ \xi \in (a, b)$.

Теорема Лагранжа. *Пусть вещественная функция f определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b). Тогда существует такое $\xi \in (a, b)$, что*

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. $\qquad (*)$

Доказательство.

a) Если $f(b) = f(a)$, то $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда найдется такое ξ, что $f'(\xi) = 0$, и формула $(*)$ выполнена.

b) Пусть теперь $f(b) \neq f(a)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(a, f(a)), (b, f(b))$:

$$Y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

$$Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

Составим вспомогательную функцию:

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

$\psi(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема на (a, b),

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

По теореме Ролля существует $\xi \in (a, b)$, такое что $\psi'(\xi) = 0$.

Тогда $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, откуда $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$, что и требовалось.

Замечания. 1) Теорема Лагранжа носит еще названия: теорема о конечных приращениях, основная теорема дифференциального исчисления, формула конечных приращений, теорема о среднем в дифференциальном исчислении. Такое обилие названий говорит о ее широком и разнообразном применении.

2) Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа.

Величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды графика с концами $(a, f(a)), (b, f(b))$. Равенство $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ говорит о том, что на графике $y = f(x)$ существует точка $(\xi, f(\xi))$, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы графика.

Теорема Коши. *Пусть вещественные функции* f *и* g *определены и непрерывны на сегменте* $[a,b]$ *и дифференцируемы в интервале* (a,b). *Пусть еще* $g'(x) \neq 0$ *при всех* $x \in [a,b]$. *Тогда существует такое* $\xi \in (a,b)$, *что*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Доказательство. 1) Убедимся сначала, что $g(b)-g(a) \neq 0$. Если бы $g(b)-g(a)=0$, то, по теореме Ролля, нашлась бы такая точка $\xi \in (a,b)$, что $g'(\xi)=0$ – что противоречит условию теоремы.
2) Построим вспомогательную функцию, по аналогии с той, которую мы строили в доказательстве теоремы Лагранжа, но вместо x подставим $g(x)$, вместо a подставим $f(a)$, вместо b подставим $f(b)$:

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Поэтому найдется такое $\xi \in (a,b)$, что $\psi'(\xi)=0$.

Откуда: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Что и требовалось.

Физический смысл производной

Исходная функция	Обозначение	Производная	Физический смысл
Длина пути	$S(t)$	$v = \frac{dS}{dt}$	Скорость
Скорость	$v(t)$	$w = \frac{dv}{dt}$	Ускорение
Заряд	$q(t)$	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$	Сила тока
Масса стержня	$m(x)$	$\rho(x) = \frac{dm(x)}{dx}$	Линейная плотность

Производные высших порядков

Определение.

Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на $(a,b), x_0 \in (a,b)$. Если существует производная от функции $f'(x)$ при $x = x_0$, то она называется *производной второго порядка* от $f(x)$ в точке $x = x_0$, или *второй производной* от $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Вторая производная обозначается через

$$f''(x),\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ (\frac{d}{dx})^2 f(x),\ D^2 f(x).$$

Аналогично определяются производные старших порядков. Обозначения производной n-го порядка:

$$f^{(n)}(x),\ \frac{d^n f(x)}{dx^n},\ (\frac{d}{dx})^n f(x),\ D^n f(x).$$

Примеры. 1) $\frac{d^n a^x}{dx^n} = a^x \ln^n a$, 2) $\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin(x + \frac{\pi}{2} n)$.

Формула Лейбница

Пусть u, v определены и n раз дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}$.
Тогда

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Эта формула очевидна при $n = 1$ и доказывается по индукции с использованием свойств биномиальных коэффициентов.

Параметрическое задание функций

Определение.

Пусть $f : X \to Y$. Говорят, что функция f задана параметрически, если на непустом множестве T заданы функции $x(t), y(t)$ такие, что

1) отображение $t \to x(t)$ есть биекция T на X,
2) для каждого $t \in T$ выполнено равенство $f\left(x(t)\right) = y(t)$.

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$. Функцию f можно задать параметрически:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & \cos(t) \\ y & = & \sin(t) \end{array}\right\} t \in [-1, 1].$$

Дифференцирование параметрически заданной функции

Теорема. Пусть вещественные функции $x(t) : (a, b) \to X$, $y(t) : (a, b) \to Y$ дифференцируемы, и $x'(t) > 0$ на (a, b). Тогда система

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right\} t \in (a, b)$$

задаёт параметрически дифференцируемую функцию, которую обозначим $f(x)$,$f(x) : X \to Y$ и

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{dx(t)}{dy(t)},$$

где $x = x(t)$.

Доказательство. Так как $x'(t) > 0$, то отображение $t \to x(t)$ есть биекция (a, b) на X. Поэтому существует непрерывное обратное отображение. Обозначим его через $t(x)$. Полагаем $f(x) = y(t(x))$ для всех $x \in X$. Итак, система задаёт функцию $f(x)$ параметрически. Для всех

$x_1, x_2 \in X$ существуют такие $t_1, t_2 \in (a, b)$, что $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$. Имеем

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x(t_2)) - f(x(t_1))}{x(t_2) - x(t_1)} =$$

$$= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y(t_2) - y(t_1)}{x(t_2) - x(t_1)} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta y(t_1)}{\Delta x(t_1)}.$$

Так как функции $x(t), y(t)$ дифференцируемы, то

$$f'(x_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{y'(t_1)(t_2 - t_1) + \beta_2(t_2 - t_1)(t_2 - t_1)}{x'(t_1)(t_2 - t_1) + \beta_1(t_2 - t_1)(t_2 - t_1)},$$

где $\beta_i(t_2 - t_1)$ есть бесконечно малые при $t_2 \to t_1$.
Из последнего равенства находим

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{dy(t)}{dx(t)},$$

Что и требовалось.

Теорема. Правило Лопиталя (частный случай).

Пусть функции f, φ определены и дифференцируемы на интервале (a, b), где $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Если $\varphi'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = 0$, $\exists \lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то существует и $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l$.

Доказательство. Докажем для случая $b \in \mathbb{R}$. В условиях теоремы доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, положив равными нулю их значения в точке $x = b$. Пусть $x \in (a, b)$. Теперь эта пара функций удовлетворяет условиям теоремы Коши на $[x, b]$: они непрерывны на сегменте $[x, b]$, дифференцируемы на интервале (x, b) и не обращаются в нуль одновременно. По теореме Коши существует такое $\xi(x) \in (x, b)$ что $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. Следовательно, $x \to b$ влечёт $\xi \to b$. Поэтому $\lim\limits_{x \to b} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Тогда $\lim\limits_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, что и требовалось.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$.

Пример. $l = \lim\limits_{x \to 0} (cosx)^{\frac{1}{x^2}}$, $\ln l = \ln \lim\limits_{x \to 0} (cosx)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(cosx)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln cosx}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-sinx}{2x \cos x} = -\frac{1}{2}$, $l = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Формула Тейлора. Задача об аппроксимации функции многочленами.

1. Аппроксимация дифференцируемой функции многочленом первой степени.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \beta_1(x)(x - x_0). \qquad (*)$$

Вопрос: Если существует $f''(x_0)$, то нельзя ли аппроксимировать $f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом второй степени?

2. Если $f(x)$ дифференцируема дважды, то, выражая $\beta_1(x)$ из $(*)$, получим:

$$\beta_1'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x) - \beta_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}.$$

Получили неопределенность вида $(\frac{0}{0}.)$ Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим:

$$\beta_1'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

По определению дифференцируемой функции, отсюда находим:

$$\beta_1(x) = \beta_1(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + \beta_2(x)(x - x_0).$$

Подставляя это выражение в $(*)$, получим аппроксимацию $f(x)$ многочленом второй степени:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \beta_2(x)(x - x_0)^2.$$

Индукцией по k доказываем формулу Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \beta_n(x)(x - x_0)^n.$$

Глава 8. Исследование функций и построение графиков

Признаки возрастания и убывания дифференцируемой функции

Теорема. *Пусть $f(x)$ – вещественная функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемая на интервале (a, b). Для того, чтобы $f(x)$ монотонно возрастала, необходимо и достаточно, чтобы на интервале (a, b) выполнялось неравенство $f'(x) \geq 0$.*

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть $f(x)$ возрастает на интервале (a, b). Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$, откуда $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$.
2) Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a, b), и $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует такое $\xi \in (x_1, x_2)$, что $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$, что и требовалось.

Признак равенства функции константе на отрезке
Пусть $f(x)$ – вещественная функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемая на интервале $A = (a, b)$. Тогда $f(x)$ тождественно равно константе, если и только если $f'(x) = 0$ всюду на (a, b).

Критерий строгой монотонности функции

Лемма. *Функция строго монотонна на отрезке, когда она монотонна и не равна константе ни на каком отрезке.*

Следствие. *Пусть вещественная функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$, и дифференцируемая на интервале (a, b). Для строгой монотонности f необходимо и достаточно выполнение условий:*
1) $\forall x \in A f'(x) \geq 0$, или $\forall x \in A f'(x) \leq 0$.
2) $f'(x)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком отрезке, входящем в A.

Доказательство. a) Необходимость – очевидна.
b) Достаточность. Если выполнено 1), то функция $f(x)$ возрастает или убывает. Пусть $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Если бы $f(x_1) = f(x_2)$, то для всех $x \in [x_1, x_2]$ выполнялись бы неравенства $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, откуда $f(x) = f(x_1)$, то есть $f(x)$,принимало бы постоянное значение на всем промежутке $[x_1, x_2]$. Но тогда производная $f'(x)$ равнялась бы нулю на отрезке $[x_1, x_2]$, что противоречит условию 2).

Достаточные признаки экстремума через первую производную. Всюду здесь под экстремумом понимается локальный экстремум, если не оговорено противное.

Теорема. *Пусть вещественная функция определена и дифференцируема в проколотой окрестности $K^*{}_\varepsilon(x_0)$. Пусть всюду на множестве $(x_0-\varepsilon, x_0)$ выполнено неравенство $f'(x) \geq 0$, и ни на каком интервале $(x_1, x_0), (x_1, x_0) \subset K^*{}_\varepsilon(x_0)$, производная $f'(x)$ не обращается тождественно в нуль. Пусть, точно так же, всюду на множестве $(x_0, x_0+\varepsilon)$ выполнено неравенство $f'(x) < 0$, и ни на каком интервале $(x_0, x_2), (x_0, x_2) \subset K^*{}_\varepsilon(x_0)$, производная $f'(x)$ не обращается тождественно в нуль. Тогда x_0 есть точка строгого максимума функции $f(x)$.*

Следствие. *Пусть вещественная функция определена и дифференцируема в проколотой окрестности $K_\varepsilon(x_0)$. Если всюду на множестве $(x_0-\varepsilon, x_0)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$, а всюду на множестве $(x_0, x_0+\varepsilon)$ выполнено неравенство $f'(x) < 0$, то x_0 есть точка строгого максимума функции $f(x)$.*

Признак экстремума для n раз дифференцируемой функции

Теорема. *Пусть вещественная функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, и пусть*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}x_0 = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда 1) если n - чётное, то x_0 есть точка строгого экстремума функции $f(x)$, a) при $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 есть точка строгого максимума, b) при $f^{(n)}(x_0) > 0$ – точка строгого минимума,
2) если n - нечётное, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство. Пусть выполнено 1). Тогда справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots +$$
$$+f^{(n-1)}(x_0)((n-1)!)(x-x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+\beta(x-x_0)(x-x_0)^n.$$

Отсюда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \beta_n(x-x_0)(x-x_0)^n,$$

$$\Delta f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \beta_n(x - x_0)(x - x_0)^n,$$

$$\Delta f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \beta_n(x - x_0)\right)(x - x_0)^n.$$

Так как $\beta_n(x - x_0)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что при $x \in K_\varepsilon(x_0)$ выполнено

$$|\beta_n(x - x_0)| < \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}.$$

Следовательно, в окрестности $K_\varepsilon(x_0)$ знак суммы

$$\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \beta_n(x - x_0)\right)$$

совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$.

1) Если n – чётное, то $(x - x_0)^n \geq 0$. Поэтому знак приращения функции $\Delta f(x_0)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$.

a) Если теперь $f^{(n)}(x_0) > 0$, то приращение функции $\Delta f(x_0) > 0$ для всех $x \in K_\varepsilon(x_0), x \neq x_0$. Значит, x_0 есть точка строгого минимума.

b) Аналогично, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 есть точка строгого максимума.

2) Пусть n – нечётное. Тогда $(x-x_0)^n > 0$ при $x > x_0$, $(x-x_0)^n < 0$ при $x < x_0$. Следовательно, знак приращения функции $\Delta f(x_0)$ при $x < x_0$ противоположен знаку приращения функции при $x > x_0$. Как легко видеть, в этом случае x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Следствие. *Если функция дважды дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ ($f''(x) > 0$), то точка x_0 есть точка строгого максимума (строгого минимума) функции.*

Выпуклость и вогнутость

Уравнение отрезка прямой, соединяющего точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ в параметрической форме: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = t$, откуда:

$$\left.\begin{array}{lcl} x & = & tx_1 + (1-t)x_2 \\ y & = & ty_1 + (1-t)y_2 \end{array}\right\} t \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Определение. Непрерывная вещественная функция $f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) на сегменте $[a, b]$, если на любом промежутке $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ график функции располагается выше (ниже) соответствующей хорды, то есть:

$$\forall x_1, x_2,\ a \leq x_1 < x_2 \leq b, 0 < t < 1,$$

выполнено неравенство:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , и $f'(x)$ строго возрастает (строго убывает). Тогда функция $f(x)$ строго вогнута(выпукла).*

Доказательство. Пусть $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $0 \leq t \leq 1$. Обозначим, для краткости, $\xi = (1-t)x_1 + tx_2$. Легко видеть, что $x_1 < \xi < x_2$. Рассмотрим разность

$$\Delta = f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2) =$$

$$= (1-t)\left(f(\xi) - f(x_1)\right) + t\left(f(\xi) - f(x_2)\right).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\Delta = (1-t)(f'(\xi_1)(\xi - x_1) + tf'(\xi_2)(\xi - x_2) =$$

$$= (1-t)t(f'(\xi_1)(x_2 - x_1) - t(1-t)f'(\xi_2)(x_2 - x_1).$$

Итак,

$$\Delta = (1-t)t(x_2 - x_1)(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)).$$

Так как $\xi_1 < \xi_2$, то

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2).$$

Отсюда:

$$\Delta < 0,$$

то есть $f(x)$ строго вогнута, что и требовалось.

Признак выпуклости и вогнутости через вторую производную

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дважды дифференцируема на интервале (a, b) , и $f''(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ строго вогнута.*

Доказательство. В условиях теоремы производная $f'(x)$ на интервале (a, b) строго возрастает. Следовательно, функция $f(x)$ строго вогнута.

Точки перегиба. Достаточные условия точки перегиба

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b), Пусть $x_0 \in (a, b)$. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ функция $y = f(x)$ выпуклая (вогнутая) а при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ функция вогнутая (выпуклая), то $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема. *Пусть вещественная функция $f(x)$определена и дифференцируема на интервале (a, b), и $x_0 \in (a, b)$. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено $f''(x) > 0$ на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, и на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ выполнено $f''(x) < 0$, то x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$.*

Асимптоты графика функции

Определение. *Прямая l называется асимптотой графика $f(x)$ при $x \to a$, если*
1)$\rho((0, 0), (x, f(x))) \to \infty$, при $x \to a$,
2) Расстояние от точки графика $(x, f(x))$ до прямой l стремится к нулю при $x \to a$.

1) Разыскание асимптоты в случае конечного a. По определению асимптоты:

$$\lim_{x \to a} \rho\left((0, 0), (x, f(x))\right) \to \infty.$$

Отсюда

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \infty,$$

значит, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Асимптота в этом случае вертикальная, и её уравнение есть

$$x = a.$$

2) Случай: $a = +\infty$, уравнение асимптоты: $y = kx + b$.

Найдём коэффициенты k, b асимптоты.

Обозначим угол наклона асимптоты к оси ординат через α. Обозначим через $A = (x, f(x))$ текущую точку графика $y = f(x)$, через

B точку $(x, kx+b)$ на асимптоте, наконец, через C обозначим основание перпендикуляра,опущенного из A на асимптоту. Из треугольника A, B, C заключаем $AB\cos\alpha = AC$, то есть $AB = \cos(\alpha)^{-1}AC$. По определению асимптоты, $AC \to 0$ при $x \to +\infty$, значит, $AB \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0$, $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$.

Получили формулы для параметров асимптоты.

Схема исследования функции $f(x)$ и построения графика

1. Находим и строим на оси абсцисс область определения функции $f(x)$. Исследуем функцию на периодичность, чётность, нечётность. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

2. Находим точки разрыва (односторонние пределы). Находим и строим вертикальные асимптоты. Находим наклонные асимптоты. Схематически намечаем характер приближения графика к асимптотам.

3. Находим $f'(x)$, исследуем область определения производной. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Находим точки экстремума.

4. Исследование поведения функции по второй производной. Ищем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.

5. Наносим полученные данные на координатную плоскость и строим схему графика. Уточняем детали графика и завершаем график.

Глава 9. Неопределенный интеграл

Определение. Первообразной для $f(x)$ на (a, b) называется дифференцируемая функция $F(x)$, для которой в каждой точке (a, b) выполняется: $F'(x) = f(x)$.

Примеры, приводящие к понятию первообразной. Вспомним таблицу "Физический смысл производной".

Исходная функция	Обозначение	Производная	Физический смысл
Длина пути	$S(t)$	$v = \frac{dS}{dt}$	Скорость
Скорость	$v(t)$	$w = \frac{dv}{dt}$	Ускорение
Заряд	q(t)	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$	Сила тока
Масса стержня	m(x)	$\rho(x) = \frac{dm(x)}{dx}$	Линейная плотность

Видим, что путь $S(t)$ есть первообразная для скорости $v(t)$. Скорость $v(t)$, в свою очередь, есть первообразная для ускорения $a(t)$. Величина $q(t)$ заряда на обкладке конденсатора есть первообразная для силы тока $i(t)$.

Физический смысл первообразной

Исходная функция	Обозначение	Первообразная	Физический смысл
Скорость	$v(t)$	$S(t)$	Длина пути
Ускорение	$a(t)$	$v(t)$	Скорость
Сила тока	$i(t)$	$q(t)$	Заряд на обкладке
Линейная плотность	$\rho(x)$	$m(x)$	Масса стержня

Вопросы:
1). Для каких функций существуют первообразные?
2). Как связаны различные первообразные одной функции?
3). Если существует первообразная элементарной функции, то всегда ли она сама элементарна? Если она элементарна, то как ее найти?

Определение. Пусть $f(x)$ есть вещественная функция, определенная на отрезке A, и $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на A. Тогда множество $\{F(x)+C : C \in \mathbb{R}\}$ всех первообразных для $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

$f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $x-$ *переменной интегрирования.*

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x)+C : C \in \mathbb{R}\}$.
Исторически сложилась более короткая запись: $\int f(x)dx = F(x)+C$. Здесь C называется *неопределенной постоянной.*

Свойства неопределенного интеграла
1)$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2)$d\int f(x)dx = f(x)dx$ – дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.
3)$\int f'(x)dx = f(x)+C$ – по определению интеграла.

4) $\int df(x) = f(x) + C$.
5) Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.
6) Линейность: $\int (\alpha f(x) + \beta\varphi(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int \varphi(x)dx$ – неопределённый интеграл от линейной комбинации функций равен линейной комбинации неопределённых интегралов от этих функций с теми же коэффициентами.

Таблица неопределённых интегралов

$\int dx = x + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a \neq 1, a > 0)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \operatorname{tg} x dx = -ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a > 0)$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\rvert + C$	

Производная неопределенного интеграла равна подинтегральной функции. Это свойство удобно использовать для проверки правильности интегрирования.

Например,

$(\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$, отсюда: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C$.

Пример 1. Известно, что $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$. Отсюда, по свойству 5, получим:

$$\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}dx = a \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \Longrightarrow \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Пример 2. Аналогично, исходя из известного интеграла:
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, получим: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

Методы интегрирования

1). **Непосредственное интегрирование**

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда, по свойству неопределённого интеграла:

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Пусть $u(t)$ - дифференцируемая функция, множество значений которой входит в область определения $F(x)$. По свойству инвариантности дифференциала: $dF(u) = f(u)du$. Отсюда: $\int f(u)du = F(u) + C$.

Пример: мы знаем, что $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$.

Отсюда: $\int \frac{d\sin t}{\sin t} = \ln|\sin t| + +C$, $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$. Аналогично: $\int \operatorname{tg} t dt = -\ln|\cos t| dt + C$.

2). **Подстановка или замена переменной**

Рассмотрим вычисление интеграла с помощью замены переменной.

Пусть требуется вычислить $I = \int f(x)dx$, но первообразная $F(x)$ для $f(x)$ неизвестна. Пусть $x = u(t)$ дифференцируема, строго монотонна, определена на отрезке A, и множество ее значений входит в область определения функции $f(x)$. По теореме об обратной функции, существует функция, обратная к $u(t)$, обозначим ее через $t(x)$. Заметим: $u(t(x)) = x$. Отсюда $(u(t(x)))' = 1$. Значит, $u'(t)t'(x) = 1$. Заменим в $\int f(x)dx$ всюду x на $u(t)$, то есть, сделаем подстановку $x = u(t)$. Получим интеграл $\int f(u(t))u'(t)dt$. Предположим, что удалось вычислить этот интеграл в элементарных функциях.

$$\int f(u(t))u'(t)dt = \Phi(t) + C.$$

Отсюда

$$(\Phi(t))' = f(u(t))u'(t)$$

Вернемся теперь к переменной x, то есть, сделаем замену: $t = t(x)$. Получим выражение $\Phi(t(x)) + c$. Убедимся, что $\Phi(t(x))$ есть первообразная для $f(x)$.

Имеем: $(\Phi(t(x))'_x = \Phi'(t)t'(x) = f(u(t(x)))u'(t)t'(x) = f(x)$. Итак, $I = \int f(x)dx = \Phi(t(x)) + C$.

Итак, если интеграл, полученный подстановкой $x = u(t)$ из интеграла $\int f(x)dx$ выражается в элементарных функциях, то и сам этот интеграл берётся в элементарных функциях.

Пример. $I = \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}$.

Делаем замену переменной: $t = e^x, x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$.

$I = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$.

Возвращаемся к старой переменной:$I = \frac{-1}{1+e^x} + C$.

3). **Интегрирование по частям**

Теорема. Пусть u, v – дифференцируемые функции, заданные на отрезке A. Тогда, если существует один из интегралов: $\int udv, \int vdu$, то существует и второй и имеет место равенство:

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть существует $\int udv = \int u(x)v'(x)dx$, то есть существует первообразная $\Phi(x)$ для функции $u(x)v'(x)$. Обозначим $F(x) = u(x)v(x) - \Phi(x)$. Теперь

$$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - \Phi'(x) = u'(x)v(x), F'(x) = v(x)u'(x).$$

Таким образом, существует первообразная для $v(x)u'(x)$, следовательно, существует $\int vdu$. Справедливость равенства $(*)$ проверяется дифференцированием.

Важнейшие случаи применения формулы интегрирования по частям:

а). $\int x^n e^x dx$. Полагаем: $u = x^n, dv = e^x dx$.

b). $\int x^n \operatorname{arctg}(x)dx$. Полагаем: $u = arctgx$.
c). Циклический или круговой интеграл: $I = \int e^{ax} sinbxdx$. Два раза интегрируем по частям, оба раза полагая $u = e^{ax}$. Получаем уравнение для I, из которого и находим значение I.

Интегрирование рациональных дробей

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$.
2. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{(-n+1)a} \frac{1}{(ax+b)^{(n-1)}} + C$.
3. $I = \int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$. Выделяем полный квадрат в знаменателе: $x^2+px+q = (x+p/2)^2 + (q-(\frac{p}{2})^2)$. Делаем замену переменной: $t = x+p/2, dt = dx, x = t-p/2$.

Имеем: $I = \int \frac{a(t-p/2)+b}{t^2+(q-(\frac{p}{2})^2)} dx$. Обозначим: $q-(\frac{p}{2})^2 = \gamma^2, b-\frac{ap}{2} = \beta$.

Теперь $I = a\int \frac{tdt}{t^2+\gamma^2} dt + \beta \int \frac{dt}{t^2+\gamma^2} = \frac{a}{2} \ln(t^2+\gamma^2) + \frac{\beta}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{t}{\gamma} + C$.

Осталось вернуться к старой переменной x.

4. Интеграл четвёртого типа. $I = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} dx$, где $n > 1$.

Первые этапы те же, что и в предыдущем пункте: выделение полного квадрата в знаменателе и замена переменной. Получим:

$$I = a\int \frac{tdt}{(t^2+\gamma^2)^n} dt + \beta \int \frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^n} =$$

$$= \frac{a}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+\gamma^2)^{(n-1)}} + \beta \int \frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^n}.$$

дело свелось к вычислению интеграла: $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^n} dt$. Получим рекуррентную формулу для этого интеграла Имеем: $I_n = \frac{1}{\gamma^2} \int \frac{t^2+\gamma^2-t^2}{(t^2+\gamma^2)^n} dt = \frac{1}{\gamma^2} I_{n-1} - \frac{1}{\gamma^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+\gamma^2)^n}$.

К последнему интегралу применяем формулу интегрирования по частям. Полагаем: $u = t, du = dt, dv = \frac{tdt}{(t^2+\gamma^2)^n}, v = \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+\gamma^2)^{(n-1)}}$.

Отсюда: $\int \frac{t^2 dt}{(t^2+\gamma^2)^n} = t \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+\gamma^2)^{(n-1)}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$.

Таким образом, мы получаем рекуррентную формулу – выражение I_n через I_{n-1}. Поскольку I_1– табличный интеграл, то I_n выражается в элементарных функциях.

Пример. $I = \int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} dx$.

Выделяем полный квадрат в знаменателе: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$.

Делаем замену переменной: $t = x+1, dt = dx, x = t-1$.

Имеем: $I = \int \frac{(t-1)}{(t^2+1)^2} dt$. Теперь $I = \int \frac{t}{(t^2+1)^2} dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} dt -$
$- \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} - \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} -$
$- \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ Дело свелось к вычислению интеграла: $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$. Обозна-

чим $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$. Получим рекуррентную формулу. $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$ $= \int \frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2} dt = \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt$. Применим формулу интегрирования по частям. Положим: $u = t, du = dt$, $dv = -\frac{tdt}{(t^2+1)^2} dt$, $v = \frac{1/2}{t^2+1}$. Итак, $I = \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} - \int \frac{1/2}{t^2+1} dt$.

Теорема. Каждую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших.

Интегрирование тригонометрических функций

1). Универсальная подстановка. В интеграле $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$ сделаем *универсальную подстановку:*

$$t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dt = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Откуда: $I = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2dt}{1+t^2}$. Таким образом, подынтегральное выражение приняло форму рациональной дроби, *интеграл рационализирован.*

Пример: $\int \frac{dt}{\sin t} = \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$.

2). Интегралы вида: $\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx$ рационализируются подстановкой $t = \sin x$.

3). Интегралы $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ рационализируются подстановкой:

$$t = \operatorname{tg} x.$$

4). Интегралы от произведения тригонометрических функций. $\int \sin ax \sin bx dx = \int \frac{1}{2}(\cos{(a-b)x} - \cos{(a+b)x}) dx$.

5). Интегралы вида: $\int \cos^{2n} x \sin^{2k} x dx$. Понижаем степени тригонометрических функций, пользуясь формулами двойного угла.

6). Различные искусственные приемы. Пример:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

Интегрирование иррациональностей

1). Вычисление интегралов вида:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}\right) dx,$$

$$m_1, .., m_k \in \mathbb{Q}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, c^2 + d^2 \neq 0.$$

Интеграл рационализируется подстановкой: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^M$, где M есть наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m_1, \ldots, m_k$.

2). Дифференциальный бином.

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p dx,$$

где показатели m, n, p – рациональные числа со знаменателями M, N, P – соответственно. Такое подинтегральное выражение называется дифференциальным биномом.

a) Показатель p – целый. Тогда, в соответствии с предыдущим пунктом, интеграл рационализируется подстановкой $x = t^{HOK(M,N)}$, где M, N – знаменатели чисел m, n.

b) Пусть теперь p – дробное. Сделаем подстановку:
$t = x^n, x = t^{\frac{1}{n}}, dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt.$
Получим:

$$I = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (at + b)^p dx.$$

Если показатель $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то замена: $at + b = z^P$ (где P - знаменатель рациональной дроби p) рационализирует последний интеграл. Тогда исходный интеграл рационализируется подстановкой: $ax^n + b = z^P$.

c) Пусть число $\frac{m+1}{n}$ – не целое число. Преобразуем выражение следующим образом:

$$I = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{at+b}{t} \right)^p dt.$$

Если число $\frac{m+1}{n} + p$ – целое, то последний интеграл рационализируется подстановкой: $\frac{at+b}{t} = z^P$. Следовательно, исходный интеграл рационализируется подстановкой: $\frac{az^n+b}{x^n} = z^P$.

Заключительные замечания. Примеры интегралов от элементарных функций, не выражающихся в элементарных функциях:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{sinx}{x} dx.$$

Глава 10. $\mathbb{R}^n$ и метрические пространства

Стандартная метрика в $\mathbb{R}^n$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n, x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Назовем *стандартным расстоянием(метрикой)* между x и y величину

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \xi_i)^2}.$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ это обычное расстояние на плоскости и в трехмерном пространстве.

Свойства стандартной метрики в $\mathbb{R}^n$

Теорема. Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ – кортежи вещественных чисел. Тогда имеет место *неравенство Коши-Буняковского*:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2} \geq \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right|.$$

Доказательство. В условиях теоремы введем обозначения:
$A = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {a_i}^2}, B = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {b_i}^2}$. Очевидно, что $(\frac{b_i}{B} \pm \frac{a_i}{A})^2 \geq 0$, откуда

$$\frac{{b_i}^2}{B^2} \pm 2\frac{a_i b_i}{AB} + \frac{{a_i}^2}{A^2} \geq 0.$$

Просуммируем полученные неравенства по i от 1 до n. Получим:

$$\frac{B^2}{B^2} \pm 2\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{AB} + \frac{A^2}{A^2} \geq 0.$$

Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2} \geq \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right|,$$

что и требовалось.

Теорема. Стандартная метрика удовлетворяет неравенству треугольника.

Доказательство. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Имеем

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \xi_i)^2}, \rho(y,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i - \eta_i)^2}, \rho(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i - \xi_i)^2},$$

Введем обозначения: $p = \rho(x,y), a_i = \eta_i - \xi_i$, $q = \rho(y,z), b_i = \zeta_i - \eta_i$, $r = \rho(x,z), c_i = \zeta_i - \xi_i$. Требуется доказать:

$$p + q \geq r \tag{1}$$

где

$$p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}, q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2}, r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2}.$$

Так как p, q, r неотрицательны, то неравенство (1) эквивалентно неравенству $(p+q)^2 \geq r^2$, то есть, неравенству

$$p^2 + 2pq + q^2 \geq r^2. \tag{2}$$

По определению r имеем

$$r^2 = p^2 + q^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{3}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2 \sum_{i=1}^{n}{b_i}^2},$$

откуда

$$2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \leq 2pq. \tag{4}$$

Из неравенств (3), (4) заключаем $r^2 \le p^2 + q^2 + 2pq$, что эквивалентно неравенству (2). Теорема доказана.

Теорема. Стандартная метрика $\rho(x, y)$ в $\mathbb{R}^n$ обладает свойствами: для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ выполняется
1) $\rho(x, y) \ge 0, (\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность),
3) $\rho(x, y) + \rho(y, x) \ge \rho(x, z)$ (неравенство треугольника).

Определение метрического пространства

Пусть X есть непустое множество, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$. Пусть функция $\rho(x, y)$ удовлетворяет условиям:
1) $\rho(x, y) \ge 0, (\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность),
3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \ge \rho(x, z)$ (неравенство треугольника),
тогда функция $\rho(x, y)$ называется *метрикой, заданной на* X, а пара (X, ρ) – *метрическим пространством.*

Примеры.
1) $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой, $\rho(x, y) = |y - x|$.
2) $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_i |\xi_i - \eta_i|,$$

где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$.
3)$C[a, b]$– пространство вещественных непрерывных на $[a, b]$ функций. Метрика задается так:

$$\rho(f, \varphi) = \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - f(x)|.$$

Убедимся, что ρ – метрика. Первые два свойства из определения метрики выполняются очевидным образом.
Пусть $f, \varphi, \psi \in C[a, b]$. Тогда:

$$\rho(f, \varphi) + \rho(\varphi, \psi) = \sup |f(x) - \varphi(x)| + \sup |\varphi(x) - \psi(x)| \ge \sup |f(x) - \psi(x)|.$$

Итак: $\rho(f, \varphi) + \rho(\varphi, \psi) \ge \rho(f, \psi)$.

Окрестности в метрическом пространстве

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение. Шаровой окрестностью точки $x_0 \in X$ радиуса ε(или ε-окрестностью точки x_0) называется множество

$$K_\varepsilon(x_0) = \{x \in X |\ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Определение. Точка $x_0 \in E \subset X$ называется *внутренней точкой* множества E если существует $K_\varepsilon(x_0)$ которая целиком входит во множество E.

Определение. Пусть $E \subset X$. Множество всех внутренних точек множества E называется *внутренностью* множества E.

Определение. Множество называется *открытым*, если каждая точка этого множества – внутренняя.

Теорема. *Объединение семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Пересечение семейства открытых множеств может не быть открытым множеством.

Теорема. *Пересечение конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.*

Определение. Точка x_0 называется *граничной* точкой множества A, если каждая ε-окрестность точки x_0 содержит как точки, принадлежащие A, так и точки, не принадлежащие A.

Множество всех граничных точек A называется *границей* A. Мы будем обозначать границу A через $Fr(A)$.

Определение. Точка x_0 называется *предельной* точкой множества A, если каждая ε-окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек из A.

Определение. Точка $x_0 \in A$ называется *изолированной,* если существует такая окрестность точки x_0, в которой нет других точек множества A, кроме самой точки x_0.

Определение. Множество F называется *замкнутым,* если это множество содержит все свои предельные точки.

Теорема. *Множество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение F^c открыто.*

Так как каждое замкнутое множество является дополнением открытого множества до всего пространства, то свойства замкнутых множеств выводятся из свойств открытых множеств с помощью теоремы де Моргана.

Теорема. *Пересечение семейства замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Теорема. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Определение. Пусть A – множество в X, A' – множество всех его предельных точек. Тогда множество $A \cup A'$ называется *замыканием* множества A.

Замыкание множества A будем обозначать через $\overline{A}$.

Лемма. Если $A \subset B$, то $A' \subset B'$.

Лемма. Каждая предельная точка замыкания множества есть предельная точка самого множества.

Примеры открытых множеств:
1) Открытый шар,
2) $X \setminus \{x\}$,
3) Само метрическое пространство,
4) Произвольное объединение открытых шаров.

Свойства замыкания:
(1) $\bar{A} \supset A$,
(2) Если F – замкнуто, то $\bar{F} = F$,
(3)$\bar{A}$– замкнуто,
(4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(5) $A \supset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$,
(6) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Подпространства метрического пространства

Пусть (X, ρ) есть метрическое пространство, $Y \subset X$.

Метрическое пространство (Y, ρ) назовем *подпространством* пространства X. Заметим, что здесь для краткости вместо $\rho|_Y$ написано просто ρ.

Лемма. *Пусть*(Y, ρ) *есть подпространство метрического пространства* (X, ρ), *и пусть* $\varepsilon > 0$. *Пусть* $x \in Y$. *Обозначим* ε*-окрестность точки* x *в пространстве* X *через* $K_\varepsilon(x)$, *а* ε*-окрестность в пространстве* Y *– через* $B_\varepsilon(x)$. *Тогда*

$$\forall \varepsilon \forall x \in Y \left(B_\varepsilon(x) = K_\varepsilon(x) \cap Y \right).$$

Пример подпространств: пусть $X = \mathbb{R}^2$ – плоскость со стандартной метрикой, $Y = \{(x, y) \in X | x \geq 0\}$ – полуплоскость, Y–прямая $l \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема. *Пусть* Y *есть подпространство* X.
1)Если множество G *открыто в* X, *то множество* $G_1 = G \cap Y$ *открыто в* Y.
2) Каждое множество G_1, *открытое в* Y, *равно пересечению некоторого множества* G, *открытого в* X, *с пространством* Y.

Доказательство. 1) Пусть G открыто в X. Обозначим: $G_1 = G \cap Y$. Если $a \in G_1$, то $a \in G$. Значит, найдется $\varepsilon > 0$, такой, что $K_\varepsilon(a) \subset G$. Отсюда: $(K_\varepsilon(a) \cap Y) \subset (G \cap Y)$, $B_\varepsilon(a) \subset G_1$, следовательно, G_1 открыто в Y.

2) Пусть G_1 открыто в Y, где Y есть подпространство X. Для каждой точки $x \in G_1$ выберем такое $\varepsilon(x)$, что $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset G_1$. Обозначим, для краткости, эту окрестность $B_{\varepsilon(x)}(x)$ через $B(x)$, а шаровую окрестность с тем же центром x и того же радиуса $\varepsilon(x)$ в пространстве X обозначим через $K(x)$.

Итак, для каждого $x \in G_1$ мы выбрали такую окрестность $B(x)$ точки x, что $B(x) \subset G_1$. Заметим, что $Y \cap K(x) = B(x)$. Имеем:

$$G_1 = \bigcup_{x \in G_1} B(x).$$

Заменим в этом выражении каждую окрестность $B(x)$ на $K(x)$. Получим множество

$$G = \bigcup_{x \in G_1} K(x).$$

G открыто в X как объединение множеств, открытых в X.

В то же время: $G \cap Y = \bigcup\limits_{x \in G_1} (Y \cap K(x))$ откуда:

$G \cap Y = \bigcup\limits_{x \in G_1} B(x) = G_1$, что и требовалось.

Теорема. *Множество $F \subset Y$ замкнуто (открыто) в Y тогда и только тогда, когда существует замкнутое (открытое) в X множество $F_1 \subset Y$, такое что $F = F_1 \cap Y$.*

Предел последовательности в метрическом пространстве

Определение. *Элемент a метрического пространства (X, ρ) называется пределом последовательности (a_n), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n > n_0 \Rightarrow \rho(a_n, a) < \varepsilon).$$

Так же как для $\mathbb{R}$ доказывается, что последовательность в метрическом пространстве может иметь не более одного предела и каждая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве ограничена.

Полуоткрытый, открытый, замкнутый брусы в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\Delta, \overset{o}{\Delta}, \overline{\Delta}$ соответственно.

Лемма (о вложенных брусах). *Пусть* $\overline{\Delta}_1, \ldots, \overline{\Delta}_n, \ldots$ *есть последовательность замкнутых брусов в* $\mathbb{R}^n$, *таких что* $d(\overline{\Delta}_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует единственная точка* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *принадлежащая всем этим замкнутым брусам.*

Доказательство – проектированием на оси координат.

Так же как для $\mathbb{R}^n$ доказываются: Теорема Больцано о предельной точке множества в $\mathbb{R}^n$, Теорема Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности в $\mathbb{R}^n$, Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Семейство множеств $\{A_t\}_{t\in T}$, называется *покрытием* множества B, если $B \subset \bigcup\limits_{t\in T} A_t$. Покрытия будем обозначать греческими буквами: Γ, Γ_1 и т.д.

Определение. Пусть $\Gamma = \{A_t\}_{t\in T}$ есть покрытие множества B, пусть $T_1 \subset T$. Если семейство множеств $\{A_t\}_{t\in T_1}$ также является покрытием множества B, то это семейство называется *подпокрытием* покрытия Γ. Покрытие называется *открытым,* если все множества, принадлежащие покрытию, открыты. Покрытие называется *конечным,* если оно состоит из конечного множества множеств.

Лемма Гейне-Бореля в $\mathbb{R}^n$. *Из каждого открытого покрытия замкнутого ограниченного множества в* $\mathbb{R}^n$ *можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. От противного.

1). Пусть $\Gamma = \{G_t\}_{t\in T}$, есть открытое покрытие замкнутого ограниченного множества F. Так как множество F ограничено, то его можно заключить в некоторый шар K, который можно заключить в брус Δ_1.

2) Делим Δ_1 на 2^n равных полуоткрытых брусов. Выберем из этих брусов такой, который содержит такую часть множества F, для которой не существует конечного подпокрытия. Обозначим его через Δ_2. Заметим, что в этом случае $|F \cap \Delta_2| = \infty$. Продолжая этот процесс, получим последовательность брусов: $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, такую что $F \cap \Delta_n$ не допускает конечного подпокрытия, $|F \cap \Delta_n| = \infty$, и $d(\Delta_n) \to 0$.

3) Переходя к замыканиям, получим последовательность вложенных замкнутых брусов: $\{\overline{\Delta}_n\}_{n\in N}$. По лемме о вложенных брусах суще-

ствует точка x_0, принадлежащая всем этим замкнутым брусам. Это точка есть предельная точка множества F, значит, она принадлежит F.

4) Значит, точка x_0 принадлежит некоторому G_{t_0}. Следовательно, существует такое ε, что $K_\varepsilon(x_0) \subset G_t$. Выберем $k \in N$ настолько большим, чтобы $d(\overline{\Delta}_k) < \varepsilon$. Но теперь уже одно множество G_t образует конечное подпокрытие той части множества F, которая расположена в $\overline{\Delta}_k$, что противоречит построению брусов.

Компактные множества в метрическом пространстве

Свойство замкнутого ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$ о котором говорится в лемме Гейне-Бореля, оказалось настолько важным, что оно получило особое название – компактность.

Определение. Множество в метрическом пространстве называется *компактным,* если в каждом открытом покрытии этого множества существует конечное подпокрытие.

Теорема. Каждое компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Доказательство. Пусть F компактно в $(X, \rho), x_0 \in F$.

a) Докажем, что F ограничено. Семейство открытых кругов

$\Gamma = \{K_r(x_0)\}_{r \in R}$ есть открытое покрытие F. Существует конечное подпокрытие $\Gamma_1 = \{K_{r_1}(x_0) \ldots K_{r_n}(x_0)\}, r_1 \leq \ldots \leq r_n$.

Теперь: $F \subset K_{r_n}(x_0)$.

b) Убедимся, что F замкнуто. От противного: предположим, что существует предельная точка x_0 множества F, не принадлежащая F. Рассмотрим открытое покрытие множества F: $\Gamma = \{\left(\overline{K}_r(x_0)\right)^c | r > 0\}$. В силу компактности F, существует конечное подпокрытие

$\Gamma_1 = \{\left(\overline{K}_{r_i}(x_0)\right)^c | 1 \leq i \leq m\}$, где $r_1 \leq \ldots \leq r_m$.

Теперь $F \subset \left(\overline{K}_{r_1}(x_0)\right)^c\}$. Следовательно, в круге $\overline{K}_{r_1}(x_0)$ нет точек множества F, что противоречит определению предельной точки. Итак, F замкнуто.

Теорема. *(Критерий компактности множества в $\mathbb{R}^n$). Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Это следствие из предыдущих теорем.

Теорема. *Если множество F в метрическом пространстве компактно, то каждая бесконечная последовательность в F включает сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть множество F компактно, и (a_n) есть бесконечная последовательность в F.

1) Докажем, что существует такая точка $x_0 \in F$, что каждая окрестность этой точки содержит бесконечно много членов последовательности (a_n). От противного: предположим, что каждая точка x метрического пространства X имеет окрестность $K(x)$, в которой содержится лишь конечное число членов данной последовательности. Из открытого покрытия $\{K(x)|x \in X\}$ множества F выберем конечное подпокрытие $\{K(x_i)|1 \leq i \leq m\}$. Теперь объединение всех множеств этого покрытия , с одной стороны, включает F, а с другой – содержит лишь конечное число членов данной последовательности – противоречие.

2) Итак, существует $x_0 \in X$ такое, что каждая окрестность этой точки содержит бесконечно много членов последовательности (a_n). Выберем в каждой окрестности $K_{\frac{1}{n}}(x_0)$ по одному члену a_{n_k}, так, что $n_1 < \ldots < n_m \ldots$. Подпоследовательность (a_{n_k}) сходится к x_0.

Теорема. *Подмножество компактного множества компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.*

Доказательство. a) Необходимость – очевидна.

b) Достаточность. Пусть K – компактное множество, $F \subset K$, F – замкнуто. Пусть $\Gamma = \{G_t\}_{t \in T}$ – открытое покрытие множества F. Построим открытое покрытие множества K. Добавим к открытому покрытию множества F еще множество F^c. Итак, положим: $\Gamma_1 = \Gamma \bigcup \{F^c\}$. Из Γ_1 можно извлечь конечное подпокрытие множества $K: \{G_{t_1}, \ldots, G_{t_k}, F^c\}$. Множество F^c может и не входить в подпокрытие. Поскольку $F \subset K$, то это же семейство есть и покрытие множества F. Так как F^c не имеет общих точек с F, то F^c из покрытия множества F можно удалить. Теперь имеем: $\{G_{t_1}, \ldots, G_{t_k}\}$ есть конечное подпокрытие множества F. Итак, множество F компактно.

Глава 11. Ряды в пространстве $\mathbb{R}^n$

Определение. Числовым рядом называется последовательность чисел, соединенных знаком сложения '+'.

Если задана числовая последовательность (a_n), то соответствующий ряд записывается так: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ или, в сокращенной форме, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Сумма n первых членов ряда $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ называется его *n-ой частичной суммой.*

Суммой ряда называется предел последовательности частичных сумм, если он существует. В этом случае говорят, что ряд сходится.

Остатком ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется ряд $R_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

Пример. Геометрическая прогрессия $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Теорема.*(Необходимый признак сходимости.) Для сходимости числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ необходимо, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. В самом деле, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Убедимся, что стремление общего члена ряда к нулю недостаточно для сходимости ряда. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n1=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который называется *гармоническим* рядом. Гармонический ряд удовлетворяет необходимому условию сходимости, но расходится. Будем оценивать частичные суммы гармонического ряда снизу. Заметим, что последовательность частичных сумм гармонического ряда строго монотонно возрастает. Имеем

$S_{2^n} = 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}) \geq$
$\geq 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^n}) + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$.
Итак, $S_{2^n} \geq (1 + \frac{n}{2})$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$.

Поскольку последовательность частичных сумм монотонно возрастает, то и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Следовательно, гармонический ряд расходится.

Теорема. *Знакоположительный ряд сходится тогда и только тогда, когда множество его частичных сумм ограничено.*

Теорема. *Пусть* $a_n \le b_n, n \in N$. *Тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. *Из расходимости ряда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

Теорема. *Обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *сходится при* $s > 1$ *и расходится при* $s \le 1$.

Доказательство.

п.1. Пусть $s < 1$. Тогда $n^s < n, \frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ также расходится.

п.2. Пусть $s > 1$.

$$S_{2^n-1} = 1 + (\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}) + (\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}) + \ldots (\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1}) \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{2^{(s-1)}} + \frac{1}{2^{2(s-1)}} + \ldots + \frac{1}{2^{n(s-1)}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} = M.$$

Итак, при всех натуральных n выполнено неравенство $S_{2^n-1} < M$. Следовательно, монотонно возрастающая подпоследовательность (S_{2^n-1}) сходится. Поскольку последовательность (S_n) также монотонно возрастает, то из сходимости ее подпоследовательности следует сходимость и самой последовательности (S_n).

Теорема. *Пусть* $0 < r_1 \le \frac{a_n}{b_n} \le r_2$ *при всех* $n \ge n_0$. *Тогда ряды:* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *и* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *– сходятся или расходятся одновременно.*

Лемма. *Если существует такое* n_0, *что при всех* $n > n_0$ *имеет место равенство:* $a_n = b_n$, *то ряды:* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *и* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

В самом деле, при $k > n_0$ имеем: $\sum\limits_{n=1}^{k} b_n - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = \sum\limits_{n=1}^{n_0} (b_n - a_n) = C$. Поэтому признаки сравнения можно переформулировать, например так: *Если существует такое* n_0, *что при всех* $n > n_0$ *имеет место неравенство:* $a_n \ge b_n$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

Теорема. *Пусть* $a_n, b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = l$. *Если* $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, *то ряды:* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (1) *и* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ (2) *– сходятся и расходятся одновременно; Если* $l = 0$, *то из сходимости (1) следует сходимость (2); Если* $l = \infty$, *то из сходимости (2) следует сходимость (1).*

Признак Даламбера в непредельной форме. *Пусть дан числовой знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. *Если существует* $n_0 \in \mathbb{N}$, *такое что при* $n > n_0$ *имеет место неравенство:* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, *где* $0 \leq q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *сходится. Если же для всех* $n \geq n_0$ *имеет место неравенство* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *то этот ряд расходится.*

Признак Даламбера в предельной форме. *Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Тогда при* $l < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *сходится, а при* $l > 1$ *– расходится.*

Комментарий. Из равенства $l = 1$ не следует никакого заключения о сходимости ряда. В самом деле, это равенство имеет место и для сходящегося обобщенного гармонического ряда с показателем $s > 1$, и для расходящегося обобщенного гармонического ряда с показателем $s < 1$.

Признак Коши в непредельной форме. *Пусть дан числовой знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. *Если для всех* $n \geq n_0$ *имеет место неравенство:* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, *где* $n_0 \in \mathbb{N}, q < 1$, *то числовой ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *сходится. Если же для всех* $n \geq n_0$ *имеет место неравенство* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *то этот ряд расходится.*

Признак Коши в предельной форме. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, *то при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *сходится, а при* $q > 1$ *ряд расходится.*

Теорема.(Критерий Коши сходимости произвольного числового ряда). *Для сходимости числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ $(*)$ *необходимо и достаточно выполнение условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}(m, n \in \mathbb{N}, n \geq m \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| < \varepsilon).$$

Доказательство. Обозначим последовательность частичных сумм

ряда $(*)$ через (S_n). Имеем цепочку эквивалентностей:
(Ряд $(*)$ сходится)$\Leftrightarrow$(Последовательность (S_n)сходится) $\Leftrightarrow$ (S_n) удовлетворяет критерию Коши, то есть,

$$\forall\varepsilon > 0\exists n_0 \in \mathbb{N}(m, n \in \mathbb{N}, n > m \geq n_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon).$$

Распишем разность $(S_n - S_m) : S_n - S_m = \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i$. Таким образом, ряд $(*)$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\exists n_0 \in \mathbb{N}(m, n \in \mathbb{N}, n > m \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i\right| < \varepsilon)$. Окончательно: ряд $(*)$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0\exists n_0 \in \mathbb{N}(m, n \in \mathbb{N}, n \geq m \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| < \varepsilon).$$

Теорема доказана.

Критерий Коши применим ко всем числовым рядам.

Условно и абсолютно сходящиеся ряды

Теорема. Дан ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i$ $(*)$. Если сходится ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ то ряд $(*)$ сходится.

Доказательство. Пусть, в условиях теоремы, $\varepsilon > 0$. Так как ряд $(*)$ сходится, то, по критерию Коши найдется такое n_0, что из $n > m \geq n_0$ следует: $\sum\limits_{i=m+1}^{n} |a_i| < \varepsilon$. Так как модуль суммы не больше суммы модулей, то и $|\sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i| < \varepsilon$. По критерию Коши заключаем, что ряд $(*)$ сходится.

Определение. Говорят, что ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i$ сходится *абсолютно,* если сходится ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$, составленный из модулей членов этого ряда. Если ряд сходится, а ряд , составленный из модулей его членов, расходится, то говорят, что данный ряд сходится *условно.*

Существует глубокое различие между свойствами условно и абсолютно сходящихся рядов.

Теорема.(Признак Лейбница для знакочередующихся числовых рядов.) *Пусть члены числового ряда монотонно убывают по модулю, общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, и знаки членов ряда чередуются. Тогда 1) этот числовой ряд сходится, 2) при замене суммы ряда частичной суммой модуль погрешности не превышает модуля первого из отброшенных членов.*
Доказательство. По условию теоремы, числовой ряд имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} a_i,$$

где все a_n одного знака. Для определенности примем: $a_n \geq 0$.
1) Рассмотрим частичную сумму ряда с нечётным номером:

$$S_{2k-1} = \sum_{i=1}^{2k-1} a_i.$$

Отсюда:

$$S_{2k-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots -(a_{2k-2} - a_{2k-1}).$$

Следовательно, последовательность нечетных сумм монотонно убывает с ростом номера. В то же время:

$$S_{2k-1} = (a_1 - a_2) + \ldots +(a_{2k-3} - a_{2k-2}) + a_{2k-2} \geq 0.$$

Итак, последовательность нечетных сумм монотонна и ограничена снизу, следовательно, сходится. Обозначим ее предел через S.
Найдем предел четных сумм:

$$\lim S_{2k} = \lim_{k \to \infty} (S_{2k-1} + a_{2k}) = S.$$

Итак, сумма ряда равна S.
2) Оценим погрешность при замене суммы ряда его частичной суммой:

$$|S - S_n| = |(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} \ldots|.$$

Откуда:

$$|S - S_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots| = |(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) \ldots|.$$

Выражение под знаком модуля неотрицательно. Поэтому:

$$|S-S_n| = a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-\ldots = a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-\ldots \leq a_{n+1}.$$

Итак:

$$|S-S_n| \leq a_{n+1}.$$

Что и требовалось.

Теорема (Дирихле.) *Пусть числовая последовательность* $(\alpha_i)_{,i\in\mathbb{N}}$ *монотонно сходится к 0 и частичные суммы* B_n *числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_i$ *ограничены в совокупности. Тогда ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\beta_i \tag{5}$$

сходится.

Комментарий. Признак Дирихле, как и признак Лейбница, гарантирует только условную сходимость ряда (5). Наличие или отсутствие абсолютной сходимости у этого ряда требует дополнительной проверки.

Доказательство. Покажем, что ряд из заключения теоремы удовлетворяет критерию Коши, следовательно, сходится. Пусть $|B_n| \leq M$. Положим: $\beta_0 = 0$. По условию теоремы, либо все $\alpha_i \geq 0$ либо все $\alpha_i \leq 0$. Для определенности будем считать, что имеет место первая возможность. Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\alpha_{i+1}B_i-\alpha_iB_{i-1} = \alpha_{i+1}B_i-\alpha_iB_i+\alpha_iB_i-\alpha_iB_{i-1} = (\alpha_{i+1}-\alpha_i)B_i+\alpha_i\beta_i.$$

Отсюда:

$$\alpha_i\beta_i = \alpha_{i+1}B_i-\alpha_iB_{i-1}+(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i.$$

Пусть $n > m-$ произвольные натуральные числа. Просуммируем последнее равенство почленно по i от $m+1$ до n. Имеем:

$$\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i\beta_i = \alpha_{n+1}B_n-\alpha_{m+1}B_m+\sum_{m+1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i.$$

Воспользуемся ограниченностью чисел B_n числом M :

$$|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i\beta_i| \leq |\alpha_{n+1}|M + |\alpha_{m+1}|M + \sum_{m+1}^{n} |\alpha_i - \alpha_{i+1}|M,$$

$$|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i\beta_i| \leq \alpha_{n+1}M + \alpha_{m+1}M + (\alpha_{m+1} - \alpha_{n+1})M,$$

Окончательно:

$$|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i\beta_i| \leq 2|\alpha_{m+1}|M.$$

Выберем теперь n_0 так, чтобы при $m \geq n_0$ выполнялось неравенство: $|\alpha_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда при $n > m \geq n_0$ имеем: $|\sum\limits_{i=m+1}^{n} \alpha_i\beta_i| \leq \varepsilon$. Итак, по критерию Коши, ряд (5) сходится.

Замечание. Отсюда получается оценка погрешности при замене суммы ряда (5) частичной суммой:

$$|S - S_m| \leq 2M|\alpha_{m+1}|.$$

Теорема Абеля. *Пусть числовая последовательность* (α_n) *монотонно сходится, числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i$ *также сходится. Тогда и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\beta_i$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\beta_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i - \alpha)\beta_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha\beta_i$$

Ряды в правой части равенства сходятся.

Упражнение.

1) Сходится ли ряд: $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \ldots$.

2) Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Сравнение свойств абсолютно и условно сходящихся рядов.

Пример. Знакочередующийся гармонический ряд. Ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

по признаку Лейбница, сходится условно (но не абсолютно). Ряд

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}\right) + \ldots$$

получен перестановкой членов этого ряда. Найдём его сумму

$$S_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{2n} + \ldots\right) = \frac{S}{2}.$$

Итак, в результате перестановки членов ряда его сумма уменьшилась вдвое!

Теорема Римана. *Пусть числовой ряд сходится условно. Тогда, каково бы ни было вещественное число, можно так переставить члены данного ряда, что сумма ряда, полученного в результате перестановки, будет равна этому числу.*

Теорема. *Если ряд сходится абсолютно, то при перестановке его членов сумма ряда не меняется.*

Доказательство. 1) Пусть ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i = S$ сходится абсолютно. По условию, сходится еще и ряд из модулей: $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$. Будем обозначать его сумму через S', а частичные суммы – через ${S_k}'$. Пусть $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ есть перестановка натуральных чисел, то есть, биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$.

При перестановке членов ряда a_i получает новый номер $\phi(i)$. Обозначим ряд, полученный в результате перестановки, через $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} b_i$.

Таким образом, $b_{\phi(i)} = a_i$. Убедимся, что ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} b_i$ сходится, и сумма его равна S.

2) Пусть $\varepsilon > 0$. Так как ряд из модулей $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$ сходится, то найдется такое n_1 натуральное, что при $n \geq n_1$ имеем: $|S' - S'_n| \leq \varepsilon$.
Поэтому, при $n \geq n_1$: $\sum\limits_{i\geq n_1} |a_i| < \varepsilon$.
3) Обозначим: $n_0 = \max\{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n_1)\}$ Пусть $m \geq n_0$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = (b_{\phi(1)} + \ldots + b_{\phi(n_1)}) + (b_{j_1} + \ldots + b_{j_{m-n_1}})$$

Но $b_{\phi(i)} = a_i$. Поэтому сумма в первой скобке есть $\sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i$. Слагаемые во второй скобке - также есть члены ряда $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i$, то есть, b_{j_1} есть некоторое a_{i_1}, и т.д., $b_{j_{m-n_1}}$ есть некоторое $a_{i_{m-n_1}}$. Значит, сумма во второй скобке есть $\sum\limits_{k=1}^{m-n_1} a_{i_k}$, где все $i_k > n_1$. Обозначим множество индексов в последней сумме через $I = \{i_1, \ldots, i_{m-n_1}\}$ Итак,

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{n_1} a_i + \sum_{i\in I} a_i.$$

4) Оценим разность $S - \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$. Имеем:

$$\Delta = |S - \sum_{i=1}^{m} b_i| = |\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i - \sum_{i=1}^{n_1} a_i - \sum_{i\in I} a_i.|$$

Отсюда:

$$\Delta = |\sum_{i>n_1, i\notin I} a_i| \leq \sum_{i>n_1, i\notin I} |a_i| \leq \sum_{i>n_1} |a_i| < \varepsilon.$$

Значит, по заданному $\varepsilon > 0$ нашлось такое n_0, что из $m \geq n_0$ следует

$$|S - \sum_{i=1}^{m} b_i| < \varepsilon.$$

Итак, ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} b_i$ имеет ту же сумму S, что и $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i$, что и требовалось.

Следствие. *Сумма знакоположительного числового ряда не меняется при произвольной перестановке его членов.*

Нормированные пространства

Определение. Пусть X есть линейное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\|x\|$, определённая на X, со значениями в $\mathbb{R}$, называется *нормой в* X, если

1. Для всех $x \in X$ норма неотрицательна, и $\|x\| = 0$, если и только если, $x = 0$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Пример 1. $\mathbb{R}, \|x\| = |x|$.

Пример 2. $\mathbb{R}^n, \|x\| = \rho(0, x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {\xi_i}^2}$.

Пример 3. Пространство непрерывных функций $C[a, b]$. Определим норму следующим образом: $\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Определение. Пусть $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ есть последовательность вещественных функций с общей областью определения D, и f – вещественная функция, также заданная на D. Если для каждого $x \in D$ вещественная последовательность $(f_n(x))$ сходится к $f(x)$, то говорят, что функциональная последовательность (f_n) сходится *поточечно (или сходится всюду на* D) к $f(x)$.

Пример.
Пусть $f_n(x) = x^n$, $D = [0; 1]$, тогда $\forall x \in [0, 1]$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Таким образом, последовательность $(f_n(x))$ сходится к $f(x) = 0$ поточечно на D.

Определение. Пусть функциональная последовательность $f_n(x)$ и функция $f(x)$ определены на множестве D. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in D (n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon),$$

то говорят, что последовательность (f_n) *сходится равномерно* к f.

Пример. (x^n) сходится на $[0, 1]$ к функции, тождественно равной нулю поточечно, но не равномерно.

Геометрическая иллюстрация понятия равномерной сходимости функциональной последовательности: ε-полоска.

Лемма. *Из равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$ на множестве D следует поточечная сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ всюду в D.*

Теорема. (Критерий равномерной сходимости последовательности к данной функции). *Последовательность функций $(f_n(x))$, заданная на множестве X, равномерно сходится к $f(x)$, если и только если*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Доказательство. $(f_n \to f)$ равномерно на $X \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n > n_0) \Longrightarrow \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n > n_0) \Longrightarrow \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0)$$

Определение. Говорят, что функциональный ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, если равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Если функциональный ряд мажорируется сходящимся знакоположительным рядом, то этот функциональный ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть для всех $x \in D$ выполнено неравенство:

$$|f_n(x)| \le a_n,$$

где числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ сходится. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Коши найдется n_0, такое что из $n \ge m \ge n_0$ следует $\sum\limits_{i=m}^{n} a_n \le \varepsilon$. Отсюда для функционального ряда имеем: $\forall x \in D \sum\limits_{i=m}^{n} |f_n(x)| \le \varepsilon$,

$$\forall x \in D \quad |\sum_{i=m}^{n} f_n(x)| \le \varepsilon,$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$, получим: $\forall x \in D | \sum\limits_{i=m}^{\infty} f_n(x)| \leq \varepsilon$, что и означает равномерную сходимость функционального ряда.

Определение. Пусть $X, Y-$ метрические пространства,

$f : X \to Y, x_0 \in X$. Говорят, что f непрерывна в точке x_0 если для каждой $K_\varepsilon(f(x_0))$ найдётся $K_\delta(x_0)$ такая, что $f(K_\delta(x_0)) \subset K_\varepsilon(f(x_0))$. Если f непрерывна в каждой точке метрического пространства X, то говорят, что f непрерывна на метрическом пространстве X.

Если $Y = \mathbb{R}$, то $f(x) \in K_\varepsilon(f(x_0)) \Leftrightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. *Если последовательность вещественнозначных функций, непрерывных на метрическом пространстве, равномерно сходится, то предельная функция непрерывна.*

Доказательство. Пусть последовательность $(f_n(x))$ сходится равномерно к $f(x)$ на метрическом пространстве X, и все члены последовательности непрерывны. Пусть $x_0 \in X, \varepsilon > 0$. Выберем n_0 так, чтобы из $n \geq n_0$ следовало:

$$\forall x |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как f_{n_0} непрерывна, то найдется $\delta > 0$, такое что $x \in K_\delta(x_0)$, влечет

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь для каждого $x \in K_\delta(x_0)$ при $n \geq n_0$ имеем:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|.$$

Отсюда:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Что и требовалось.

Переводом этого результата на язык рядов служит

Теорема. *Пусть на метрическом пространстве X задан равномерно сходящийся функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, все члены которого непрерывные вещественнозначные функции. Тогда сумма ряда есть непрерывная функция.*

Метрика в нормированном пространстве. Пусть $X-$ нормированное пространство. Положим:$\rho(x,y) = \|y-x\|$. Функция ρ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Кроме того: $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ (инвариантность относительно сдвигов). Теперь на нормированные пространства можно перенести все основные понятия метрических пространств.

Метрические пространства	Нормированные пространства
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n, a) = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \|a - a_n\| = 0$
$K_\varepsilon(a) = \{x \vert \rho(x,a) < \varepsilon\}$	$K_\varepsilon(a) = \{x \vert\ \|x-a\| < \varepsilon\}$
Фундаментальная посл-ть	Фундаментальная посл-ть
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (m, n \geq n_0)$	$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (m, n \geq n_0)$
$\Longrightarrow \rho(a_m, a_m) < \varepsilon$	$\Longrightarrow \|a_m - a_m\| < \varepsilon$

Язык последовательностей и язык рядов в нормированном пространстве

Последовательности	Ряды
$S_n - S_{n-1}$ Предел последовательности $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$	Общий член ряда a_n Сумма ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Фундаментальная последовательность	Ряд, удовлетворяющий критерию Коши
Последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 {\in} \mathbb{N} (m, n > n_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ \vert\vert S_n - S_m \vert\vert < \varepsilon)$	Ряд сходится $\Leftrightarrow$ он удовлетворяет крит. Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 {\in} \mathbb{N} (m, n > n_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ \vert\vert \sum\limits_{i=m}^{n} a_i \vert\vert < \varepsilon)$

Сопоставим определения равномерно сходящихся последовательностей и рядов в нормированном пространстве.

Равномерная сходимость последовательности	Равномерная сходимость ряда
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n > n_0) \Longrightarrow$ $\forall x \in D(f)\ \ \vert\vert S(x) - S_n(x) \vert\vert < \varepsilon$	$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} (n > n_0) \Longrightarrow$ $\forall (x {\in} D(f)\ \ \vert\vert \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \vert\vert < \varepsilon$

Пусть (a_n) есть последовательность элементов нормированного пространства X. Так как в нормированном пространстве X существует метрика, порожденная нормой $\rho(x, y) = \|y - x\|$, то на последовательность (a_n) переносятся все понятия, относящиеся к последовательностям в метрическом пространстве, такие как: предел последовательности, фундаментальная последовательность. Именно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \|(a - a_n)\| \to 0.$$

Последовательность (a_n) называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \in \mathbb{N}(m, n \geq n_0 \Rightarrow \|a_m - a_n\| \leq \varepsilon).$$

Если задан ряд в нормированном пространстве: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, то для него остаются в силе основные определения, относящиеся к сходимости числовых рядов.

Частичная сумма: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, сумма ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, в нормированном пространстве называется *абсолютно сходящимся*, если этот ряд сходится, и сходится ряд, составленный из норм его членов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|a_i\|$.

Банаховы пространства

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится.

Определение. Полное нормированное пространство называется *банаховым.*

Пример. Пространство $\mathbb{R}^n$ – банахово.

Теорема. Сходимость в пространстве $C[a, b]$ есть равномерная сходимость.

Доказательство. Пусть в пространстве $C[a, b] : \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Это означает, что $\|f - f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \to 0.$$

Это и есть необходимое и достаточное условие равномерной сходимости.

Теорема. Пространство $C[a,b]$ полно.

Доказательство. 1) Пусть последовательность (f_n) фундаментальна в $C[a,b]$. Тогда при $x \in [a,b]$ последовательность $|(f_n(x))|$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, поэтому она сходится. Обозначим ее предел через $f(x)$.
2) Убедимся, что последовательность (f_n) сходится к f равномерно. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (f_n) фундаментальна в $C[a,b]$, то найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при $n > n_0$ имеем:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

По определению нормы в $C[a,b]$, получим:

$$\sup_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Значит, при всех $x \in [a,b]$ при $n > n_0$ имеем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Перейдем к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$. Получим:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Итак, последовательность (f_n) сходится к f равномерно.
3) Значит, функция f непрерывна, следовательно, $f \in C[a,b]$. Итак, в $C[a,b]$ каждая фундаментальная последовательность сходится.
Следовательно, имеет место

Теорема. Нормированное пространство $C[a,b]-$ банахово.

Теорема. Ряд в банаховом пространстве сходится тогда и тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (n > m \geq n_0 \Longrightarrow || \sum_{i=m+1}^{n} a_i || < \varepsilon).$$

Доказательство. (Ряд в банаховом пространстве сходится) $\Leftrightarrow$ (последовательность его частичных сумм сходится) $\Leftrightarrow$ (эта последовательность фундаментальна) $\Leftrightarrow$ (ряд удовлетворяет условию Коши.)

Сумма счетного семейства

Пусть

$$\{a_t\}_{t\in T} \tag{6}$$

есть подмножество банахова пространства, заиндексированное элементами из T, где множество T счетно.
Занумеруем элементы множества T натуральными числами:

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{t_n}.$$

Если этот ряд сходится абсолютно, то его сумму S назовем *суммой множества* (6). Обозначение:

$$S = \sum_{t\in T} a_t.$$

Само множество (6) назовем *абсолютно суммируемым.*

Двойные ряды

Пусть в банаховом пространстве дано счетное множество

$$\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}. \tag{7}$$

Когда это множество абсолютно суммируемо, и сумма его равна S, тогда S будем называть *суммой двойного ряда*

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}. \tag{8}$$

Кратные ряды.

Расположим элементы множества (7) в виде бесконечной матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Если все ряды, составленные из элементов строк этой матрицы, сходятся, то просуммируем элементы этой матрицы сначала по строкам, и просуммируем полученные результаты. Если при этом получится некоторый элемент S_1 банахова пространства, то он называется суммой двукратного ряда:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{9}$$

Аналогично определяется и сумма другого двукратного ряда:

$$S_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{10}$$

Теорема. Если двойной ряд (8) сходится абсолютно, то суммы обоих кратных рядов: (9) и (10) равны сумме двойного ряда (8) .

Глава 12. Элементы теории меры

Координатные брусы (полуоткрытые, открытые, замкнутые)

Определение. Полуоткрытым координатным брусом в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек вида

$$\Delta = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | a_i \leq x_i < b_i, i = \overline{1, n}.\}$$

Замкнутый координатный брус обозначим: $\overline{\Delta}$. Открытый координатный брус обозначим: $\overset{o}{\Delta}$.

Обозначим через $\mu(\Delta) = \prod\limits_{i=1}^{n} |b_i - a_i|$.

$\mu(\Delta)$ будем называть длиной отрезка, если $\Delta \subset \mathbb{R}$; площадью координатного бруса(прямоугольника), если $\Delta \subset \mathbb{R}^2$; объёмом координатного бруса, если $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Если $\Delta_0 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$, где Δ_0, Δ_i – координатные (полуоткрытые) брусы, то $\mu(\Delta_0) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i)$.
Доказательство – переходом к шахматному разбиению.

Лемма 1. Если $\Delta_0 \supset \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$, где Δ_0, Δ_i – координатные (полуоткрытые) брусы, то $\mu(\Delta_0) \geq \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i)$.

Лемма 2. Если $\Delta_0 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$, то $\mu(\Delta_0) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i)$.

Доказательство обеих лемм – переходом к шахматному разбиению.

Теорема. (Счетная аддитивность объема на множестве координатных брусов.)

Если

$$\Delta_0 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i, \tag{11}$$

то

$$\mu(\Delta_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Delta_i. \tag{12}$$

Доказательство. 0) По условию теоремы семейство брусов (Δ_i) образует бесконечное покрытие бруса Δ_0. Нельзя ли перейти к конечному подпокрытию, воспользовавшись леммой Гейне-Бореля? К сожалению, брус Δ_0 не является замкнутым, а покрывающие брусы Δ_i не являются открытыми!
1) Обозначим через $\Delta_0(1-\varepsilon)$ брус Δ_0, подвергнутый подобному преобразованию с коэффициентом $1-\varepsilon$ и с центром в центре этого бруса. Обозначим через $\Delta_i(1+\varepsilon)$ брус Δ_i, подвергнутый подобному преобразованию с коэффициентом $1+\varepsilon$ и с центром в центре этого бруса. Имеем:

$$\overline{\Delta_0(1-\varepsilon)} \subset \Delta_0, \ \Delta_i \subset \overset{o}{\Delta_i(1+\varepsilon)} \ .$$

Поэтому

$$\overline{\Delta_0(1-\varepsilon)} \subset \Delta_0 = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{o}{\Delta_i(1+\varepsilon)} \ .$$

По лемме Гейне-Бореля, найдется такое k, что

$$\overline{\Delta_0(1-\varepsilon)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \overset{o}{\Delta_i(1+\varepsilon)} \ .$$

Откуда

$$(\Delta_0(1-\varepsilon)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (\Delta_i(1+\varepsilon)).$$

Поэтому:

$$\mu(\Delta_0(1-\varepsilon)) \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i(1+\varepsilon)).$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, получим:

$$\mu(\Delta_0(1-\varepsilon)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Delta_i(1+\varepsilon)).$$

$$\mu(\Delta_0)(1-\varepsilon)^n \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Delta_i)(1+\varepsilon)^n.$$

Устремляя теперь ε к нулю, получим

$$\mu(\Delta_0) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Delta_i). \tag{13}$$

Докажем теперь нестрогое неравенство противоположного смысла. Из (11) для произвольного натурального k следует:

$$\Delta_0 \supset \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i.$$

Поэтому:

$$\mu(\Delta_0) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu(\Delta_i).$$

Наконец, устремляя k к бесконечности, получим:

$$\mu(\Delta_0) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Delta_i). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует требуемое равенство (12).

Основные брусы. Семейство брусов, вершины которых имеют целочисленные координаты, задаваемых неравенствами

$$\left.\begin{array}{lll} m_1 & \le x_1 & < m_1 + 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ m_n & \le x_n & < m_n + 1 \end{array}\right\}$$

обозначим через D_0. Далее, семейство брусов, задаваемых неравенствами:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{m_1}{2^k} & \le x_1 & < \frac{m_1+1}{2^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{m_n}{2^k} & \le x_n & < \frac{m_n+1}{2^k} \end{array}\right\}$$

обозначим через D_k $, 1 \le k < \infty$.
Наконец, обозначим:

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

Назовем D множеством *основных* брусов.

Свойства основных брусов.

1. Для каждого k натурального имеем: $\bigcup\limits_{\Delta \in D_k} \Delta = \mathbb{R}^n$.

2. Любые два основных бруса либо не пересекаются, либо один из них входит в другой.

3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой основной брус Δ, что $x_0 \in \Delta, d(\Delta) < \varepsilon$.

Теорема. *Пусть множество A равно объединению некоторого множества основных брусов. Тогда из этого множества брусов можно выбрать счётное или конечное подмножество непересекающихся брусов, объединение которых равно A.*

Доказательство. 1) Пусть $A = \bigcup_{t \in T_1} \{\Delta_t\}$. Отношение равенства разбивает множество брусов $\{\Delta_t\}_{t \in T_1}$ на подмножества равных (совпадающих) брусов. Из каждого такого подмножества выберем по одному брусу. Получим множество брусов $\{\Delta_t\}_{t \in T_2}$.
Очевидно, что $A = \bigcup_{t \in T_2} \Delta_t$. Так как в $\mathbb{R}^n$ множество всех основных брусов D счётно, то и множество $\{\Delta_t | t \in T_2\}$ счётно.

2) Брус назовем *максимальным,* если он не входит ни в какой другой брус из этого множества брусов. Рассмотрим теперь множество всех максимальных брусов:

$$A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_i} \ldots.$$

Брусы из этого семейства попарно не пересекаются. В самом деле, все эти брусы по построению различны и максимальны. Если бы два какие-то бруса из этого семейства пересекались, то один брус входил бы в другой, значит, не был бы максимальным.
Далее, если $x_0 \in A$, то существует брус Δ_{t_0}, которому принадлежит x_0. Отсюда следует, что x_0 принадлежит и некоторому максимальному брусу Δ_{t_k}. Значит, объединение брусов $\Delta_{t_1}, \Delta_{t_2}, \ldots, \Delta_{t_i} \ldots$ совпадает с объединением всех брусов $\{\Delta_t \ |t \in T\}$.

Следствие. Каждое множество, которое равно объединению некоторого множества основных брусов, можно представить, как объединение конечного или счётного множества непересекающихся основных брусов.

Пример. Пусть G есть открытое множество в $\mathbb{R}$. Тогда это множество можно представить как объединение счётного семейства непересекающихся брусов.

Мера – определение и примеры

Определение. Пусть S есть некоторое множество множеств, ν – функция, заданная на S, принимающая значения из расширенной прямой $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ и удовлетворяющая условиям:
1) *Счётная аддитивность.* Если множества $A_i \in S (i \in \mathbb{N})$ попарно не пересекаются, и $(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \in S$, то $\nu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu A_i$,

2) $\nu(\emptyset) = 0$.

Функция ν называется *мерой на множестве* S.

Пример 1. Объём μ есть мера на множестве координатных брусов в $\mathbb{R}^n$. Эта мера называется *мерой Лебега.*

Пример 2. Зададим меру на множестве всех подмножеств вещественной оси. Если $A \subset \mathbb{R}$, то полагаем: $\nu(A) = \sum\limits_{n \in A \cap \mathbb{N}} 2^{-n}$.

Задача о продолжении меры

Обозначим через $S(D)$ множество всех тех множеств, которые равны объединению некоторых основных брусов. Каждое множество из $S(D)$ можно представить как объединение непересекающихся основных брусов. Отнесем к $S(D)$ и пустое множество.

Пусть задана мера ν на множестве основных брусов D в $\mathbb{R}^n$. Продолжим меру ν на $S(D)$.

1) Каждое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит $S(D)$. Иначе: каждое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество можно представить как объединение непересекающихся основных брусов.

2) Если $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ принадлежат $S(D)$, то и объединение этих множеств принадлежит $S(D)$. В самом деле, каждое из множеств A_i равно объединению множеств основных брусов. Очевидно, что тогда и $\bigcup\limits_i A_i$ равно объединению некоторого множества основных брусов.

3) Пусть $A_1, A_2 \in S(D)$. Тогда $A_1 \bigcap A_2 \in S(D)$.

В самом деле, $A_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i, A_2 = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j^*$.

Отсюда: $A_1 \bigcap A_2 = \bigcup\limits_{i,j} \Delta_{ij}$, где $\Delta_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j^*$.

Итак, $A_1 \bigcap A_2 \in S(D)$.

Продолжим функцию ν на $S(D)$. Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i$.

Положим:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(\Delta_i). \tag{15}$$

Пустое множество можно рассматривать как объединение пустого множества основных брусов, поэтому $\nu(\emptyset) = 0$. Определение функции ν *корректно,* то есть не зависит от способа разбиения множества A на основные брусы(доказать самостоятельно или на практике).

Убедимся, что ν есть мера на $S(D)$.

1) Очевидно, что ν есть неотрицательная вещественная функция на $S(D)$.

2) Пусть множества $A_1, \dots, A_n, \dots$ принадлежат $S(D)$ и попарно не пересекаются. Докажите счетную аддитивность функции ν.

3) Очевидно, что $\nu(\emptyset) = 0$.

Свойства меры ν на $S(D)$

1) Пусть $\Delta \in D, A \in S(D)$. Тогда $\nu(D) \geq \nu(A \bigcap D)$.

2) Теорема о мере объединения. Пусть $A, B \in S(D)$. Тогда

$$\nu(A \bigcup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \bigcap B). \tag{16}$$

Доказательство. a) Так как $A, B \in S(D)$, то эти множества можно представить как объединение непересекающихся основных брусов:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i,$$

$$B = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j^*.$$

b) Если $\Delta_i = \Delta_j^*$ для некоторых i, j то брус Δ_i в выражении для A заменим множеством брусов со вдвое меньшими сторонами, на которые разбивается брус Δ_i. Такую процедуру проделаем для всех пар совпадающих брусов.

Впредь будем считатаь, что никакой брус из множества $\{\Delta_i\}$ не совпадает ни с каким брусом из множества $\{\Delta_j^*\}$.

c) Разобьем множество $S = \{\Delta_i\} \bigcup \{\Delta_j^*\}$ на два подмножества: S', S''. К S' отнесем те брусы из S, которые входят в какой-нибудь другой брус из S (назовём такие брусы минимальными). К S'' отнесем те брусы, которые не входят ни в какой другой брус из S (назовём такие брусы максимальными.)

Брусы из $\{\Delta_i\}$ (так же, как и из $\{\Delta_j^*\}$ попарно не пересекаются. Имеем:

$$\bigsqcup_{\Delta\in S'} \Delta = A\bigcap B, \tag{17}$$

Аналогично:

$$\bigsqcup_{\Delta\in S''} \Delta = A\bigcup B. \tag{18}$$

Имеем:

$$\nu(A)+\nu(B)=\sum_{\Delta\in S}\nu(\Delta)=\sum_{\Delta\in S'}\nu(\Delta)+\sum_{\Delta\in S''}\nu(\Delta). \tag{19}$$

Теперь из (17), (18), и (19) следует (16).

3) Монотонность меры: Если $A, B \in S(D), A \supset B$, то $\nu(A) \geq \nu(B)$.

Доказательство. Сохраним обозначения из теоремы о мере объединения. A равно объединению множества попарно непересекающихся основных брусов $\{\Delta_i\}_{i\in I}$, B равно объединению множества попарно непересекающихся основных брусов $\{\Delta_j^*\}_{j\in J}$, $S = S' \cup S''$, где S есть множество брусов $\{\Delta_i\} \cup \{\Delta_j^*\}$, S' есть множество минимальных брусов из S, точно так же, S'' есть множество максимальных брусов. Теперь $A = A\cup B$ равно объединению максимальных брусов, $B = A\cap B$ равно объединению минимальных брусов. Имеем

$$\nu(A)=\sum_{\Delta\in S''}\nu(\Delta)\geq\sum_{\Delta\in S''}(\sum_{\Delta^*\in S',\Delta^*\subset\Delta}\nu(\Delta^*))=\sum_{\Delta\in S'}\nu(\Delta)=\nu(B).$$

Значит, $\nu(A) \geq \nu(B)$, что и требовалось.

4) Если $A, A_i \in S(D)$,

$$A\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i,$$

то

$$\nu(A)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}\nu(A_i).$$

Измеримые множества

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым относительно меры* ν, или ν - измеримым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие A, B из $S(D)$, что $A \supset E, B \supset E^c$, и $\nu(A \bigcap B) \leq \varepsilon$. (Такую пару множеств (A, B) будем называть *ε-парой для E.*)

Пример. Каждый брус $\Delta \in D$ измерим.

Лемма. Пусть (A, B) есть ε-пара для E, и множества $A_1, B_1 \in S(D), A_1 \supset E, B_1 \supset E^c$. Тогда $(A \bigcap A_1, B \bigcap B_1)$ также есть ε-пара для E.

Алгебра измеримых множеств

Теорема. *Дополнение измеримого множества измеримо, пересечение и объединение конечного числа измеримых множеств измеримо.*

Доказательство.

а) Если A $\nu-$измеримо, то и дополнение A^c измеримо(так как определение измеримого множества симметрично относительно множеств A и A^c.)

б) Пусть множества E_1, E_2 измеримы, (A_1, B_1) и (A_2, B_2) есть $\varepsilon/2-$пары для этих множеств. Тогда $(A \bigcap A_1, B \bigcup B_1)$ есть ε-пара для $E_1 \bigcap E_2$. В самом деле, очевидно, что

$A \bigcap A_1 \supset E_1 \bigcap E_2$, $B \bigcup B_1 \supset (E_1)^c \bigcup (E_2)^c = (E_1 \bigcap E_2)^c$.

Итак, $B \bigcup B_1 \supset (E_1 \bigcap E_2)^c$.

Далее, $(A \bigcap A_1) \bigcap (B \bigcup B_1) \subset ((A \bigcap B) \bigcup (A_1 \bigcap B_1))$.

Отсюда: $\nu((A \bigcap A_1) \bigcap (B \bigcup B_1)) \leq \varepsilon$.

Итак, конечное пересечение измеримых множеств измеримо. Так как дополнение измеримых множеств измеримо, то, по теореме де Моргана, конечное объединение измеримых множеств также измеримо.

Определение. Множество множеств, замкнутое относительно операций конечного пересечения и взятия дополнения, называется *алгеброй множеств.*

Итак, имеет место

Теорема. *Множество ν-измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$ есть алгебра множеств.*

Внешняя мера

Определение. *Внешней мерой* в $\mathbb{R}^n$ называется функция ν^*, определенная на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\nu^*(E) = \inf_{A \supset E, A \in S(D)} \nu(A),$$

где A, как обычно, переменная, пробегающая все множества из $S(D)$ в $\mathbb{R}^n$.

Некоторые свойства внешней меры.

1. Для каждого множества E из $S(D)$ внешняя мера $\nu^*(E) = \nu(E)$.

2. Если $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n, E_2 \subset E_1$, то $\nu^*(E_2) \leq \nu^*(E_1)-$ монотонность.

Доказательство. Обозначим

$$C_1 = \{\nu(A) | A \in S(D), A \supset E_1\},$$

$$C_2 = \{\nu(A) | A \in S(D), A \supset E_2\}.$$

Очевидно, что $C_1 \subset C_2$. Отсюда $\inf C_2 \leq \inf C_1$. Это означает, что $\nu^*(E_2) \leq \nu^*(E_1)$, что и требовалось.

3. Если $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, то $\nu^*(A) \leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \nu^*(A_i)-$ полуаддитивность.

4. **Лемма.** Пусть (A, B) есть ε-пара для E. Тогда

$$0 \leq \nu(A) - \nu^*(E) \leq \varepsilon.$$

Доказательство. По определению ε-пары для E, имеем: $B \supset E^c$, $A \supset E$, откуда: $B^c \subset E \subset A$. В силу монотонности внешней меры:

$$\nu^*(B^c) \leq \nu^* E \leq \nu A. \tag{20}$$

$$A = B^c \cup (A \setminus B^c) = B^c \cup (A \cap B), A = B^c \cup (A \cap B),$$

$$\nu A \leq \nu^* B^c + \nu^*(A \cap B),$$

$$0 \leq \nu A - \nu^* B^c \leq \nu^*(A \cap B) \leq \varepsilon.$$

Итак, $0 \leq \nu A - \nu^* B^c \leq \varepsilon$. В силу (20), получим: $0 \leq \nu A - \nu^* E \leq \varepsilon$, что и требовалось.

Лемма. Внешняя мера конечно-аддитивна на множестве всех ν-измеримых множеств.

Доказательство. Пусть E, F ν - измеримы, $E \cap F = \emptyset, \varepsilon > 0$.
Пусть $(A_1, B_1)-$ $\frac{\varepsilon}{4}$ - пара для E, $(A_2, B_2)-$ $\frac{\varepsilon}{4}$ - пара для F.
Тогда $(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$ есть $\frac{\varepsilon}{2}$- пара для $E \cup F$.
Аналогично, $(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$ есть $\frac{\varepsilon}{2}$ - пара для $E \cap F$.
По предыдущей лемме: $\nu^*(E \cup F) = \nu(A_1 \cup A_2) - \gamma, 0 \leq \gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Воспользуемся теоремой о мере объединения множеств из $S(D)$:

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2) - \nu(A_1 \cap A_2).$$

Поскольку $(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$ есть $\frac{\varepsilon}{2}$-пара для $E \cap F$, то

$$\nu(A_1 \cap A_2) = \nu^*(E \cap F) + \delta, 0 \leq \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $(E \cap F) = \emptyset$. Поэтому, $\nu(A_1 \cap A_2) = \delta, 0 \leq \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Поскольку (A_1, B_1) есть $\frac{\varepsilon}{4}$-пара для E, то

$$\nu(A_1) = \nu^*(E) + \alpha, 0 \leq \alpha \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поскольку (A_2, B_2) есть $\frac{\varepsilon}{4}$-пара для F, то

$$\nu(A_2) = \nu^*(F) + \beta, 0 \leq \beta \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Имеем: $\nu^*(E \cap F) = \nu^*(E) + \nu^*(F) + \alpha + \beta - \delta - \gamma = \nu^*(E) + \nu^*(F) + \sigma$.
Но $|\sigma| = | + \alpha + \beta - \delta - \gamma| \leq \varepsilon$.
Поскольку ε произвольно, то

$$\nu^*(E \cap F) = \nu^*(E) + \nu^*(F).$$

Признак измеримости множества

Лемма Валле-Пуссена. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Если для каждого $\varepsilon >0$ существует разбиение множества E на два подмножества $E = E_1 \bigsqcup E_2$, таких, что E_1 измеримо, а $\nu^*(E_2) < \varepsilon$, то множество E является ν-измеримым.*

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и разбиение $E = E_1 \bigsqcup E_2$, такое что E_1 измеримо, и $\nu^*(E_2) < \varepsilon/2$. Пусть A_1, B_1 есть $\varepsilon/2$-пара для E_1. Построим ε-пару для E. В условиях леммы найдется такое множество $A_2 \in S(D)$, что $A_2 \supset E_2, \nu(A_2) < \varepsilon/2$. Положим: $A = A_1 \bigcup A_2, B = B_1$. Теперь (A, B) есть ε-пара для E. Следовательно, E измеримо.

Лемма. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют множества $E_1, H \subset \mathbb{R}^n$, такие, что E_1 измеримо, $\nu^*(H) < \varepsilon$, наконец, $E = E_1 \setminus H$, то множество E является ν-измеримым.
Доказательство – аналогично доказательству леммы Валле-Пуссена (построение ε-пары).

σ-алгебра измеримых множеств

Теорема. *Объединение счетного семейства измеримых множеств есть измеримое множество.*

Доказательство теоремы можно провести в четыре этапа.

1) **Лемма.** Пусть дано счетное семейство ν-измеримых множеств $\{E_i, i \in \mathbb{N},\}$ такое что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu^*(E_i) < +\infty$. Тогда множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ будет ν-измеримо.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся леммой Валле-Пуссена. Найдется такое натуральное n_0, что $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty} \nu^*(E_i) < +\varepsilon$. Множество $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ представим как объединение двух множеств: измеримого множества $E^* = \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} E_i$ и множества $E^{**} = \bigcup\limits_{i=n_0+1}^{\infty} E_i$.
Имеем: $\nu^*(E^{**}) \leq \sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty} \nu^*(E_i)$. Отсюда: $\nu^*(E^{**}) < \varepsilon$. По лемме Валле-Пуссена, множество E измеримо.

2) **Лемма.** Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Если для каждого бруса $\Delta \in D_0$ множество $E \cap \Delta$ ν-измеримо, то E измеримо.
Доказательство. Занумеруем основные брусы из $D_0 = \{\Delta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для каждого натурального j можно построить $\frac{\varepsilon}{2^j}$–пару (A_j^*, B_j^*) для множества $E_j^* = E \bigcap \Delta_j$. Тогда $\nu(A_j^* \cap B_j^*) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}, 1 \leq j$. Теперь легко построить ε-пару для E.

Обозначим $A_j = A_j^* \cap \Delta_j, B_j = B_j^* \cap \Delta_j$. Имеем

$$A_j \supset E_j^*, B_j \supset (E_j^*)^c \cap \Delta_j, \nu(A_j \cap B_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}, 1 \leq j.$$

Положим $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j, B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$.

(A,B) есть ε-пара для E. В самом деле,

$$A \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^* = E, B \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j^*)^c \cap \Delta_j.$$

Убедимся, что $B \supset E^c$. Пусть $a \in E^c$. Найдется такое j, что $a \in \Delta_j$. Тогда $a \in E^c \cap \Delta_j \subset (E_j^*)^c \cap \Delta_j \subset B_j \subset B$. Итак, $E^c \subset B$. Наконец, $\nu(A \cap B) = \nu(\bigcup\limits_{j,k=1}^{\infty} A_j \cap B_k)$. По построению, $A_j \cap B_k = \emptyset$ при $j \neq k$. Поэтому $\nu(A \cap B) = \nu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \cap B_j) \leq \varepsilon$. Итак, E измеримо.

3) **Лемма.** Пусть теперь $\{E_i, i \in \mathbb{N},\}$ есть счётное семейство попарно непересекающихся ν-измеримых множеств в $\mathbb{R}^n$.

Тогда множество $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ измеримо.

Доказательство. Занумеруем натуральными числами брусы из D_0 : $D_0 = \{\Delta_j | j \in \mathbb{N}.\}$ Имеем $E \cap \Delta_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (E_i \cap \Delta_j)$. Для каждого натурального k выполняется $\sum\limits_{i=1}^{k} \nu^*(E_i \cap \Delta_j) \leq \nu^*(\bigcup\limits_{i=1}^{k} (E_i \cap \Delta_j)) \leq \nu^* \Delta_j$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu^*(E_i \cap \Delta_j) \leq \nu^* \Delta_j \leq +\infty$. Ввиду 1) множества $E_j^* = E \cap \Delta_j$ измеримы. Иными словами, для каждого $\Delta \in D_0$ множество $E \cap \Delta$ измеримо. Следовательно, по предыдущей лемме, E измеримо.

4) **Теорема.** Пусть $\{E_i, i \in \mathbb{N},\}$ есть счётное семейство ν-измеримых множеств. Тогда объединение E этого семейства измеримо.

Доказательство. Объединение данного семейства измеримых множеств равно объединению счетного семейства попарно непересекающихся измеримых множеств:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)) \ldots .$$

Следовательно, E измеримо.

Следствие. Пересечение счетного семейства измеримых множеств есть множество измеримое.

Определение. Множество множеств S называется σ-алгеброй, если оно замкнуто относительно операций взятия дополнения и счетного пересечения (и, значит, относительно счетного объединения.)

Теорема. Множество всех ν - измеримых множеств есть σ - алгебра. Будем обозначать ее через Σ_ν.

Продолжение меры на Σ^ν

Теорема. Внешняя мера счетно аддитивна на Σ_ν. Сужение внешней меры ν^* на $S(D)$ есть ν.

Доказательство. Пусть $E_i \in S(i \in \mathbb{N})$ попарно не пересекаются. Обозначим: $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$.

В силу полуаддитивности внешней меры имеем:

$$\nu^* E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu^*(E_i). \tag{21}$$

С другой стороны: $E \supset \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i$. В силу монотонности внешней меры: $\nu^*(E) \geq \nu^* \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i \right)$. Значит, $\nu^* E \geq \sum\limits_{i=1}^{k} \nu^*(E_i)$. Перейдем к пределу при $k \to +\infty$:

$$\nu^* E \geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu^*(E_i). \tag{22}$$

Из (21) и (22) $\nu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu E_i$, что и требовалось. Итак, ν^* есть продолжение меры ν на Σ^ν.

Теорема Каратеодори. Пусть на множестве координатных брусов в $\mathbb{R}^n$ задана мера, принимающая на каждом брусе конечное значение. Тогда существует единственное продолжение меры ν на σ-алгебру ν-измеримых множеств Σ_ν.

Комментарий. В том случае, когда существует единственное продолжение меры ν на Σ_ν, а именно - внешняя мера ν^*, будем вместо ν^* на Σ_ν писать просто ν.

Доказательство. 1) Поскольку внешняя мера ν^* есть продолжение меры ν со множества основных брусов D на сигма-алгебру Σ_ν, то остаётся доказать только единственность продолжения меры.

Доказательство проведём от противного. Итак, пусть в условиях теоремы наряду с внешней мерой ν^* существует другое продолжение меры ν. Обозначим его через ν_1.

Существует такое измеримое множество E, что $\nu^*(E) \neq \nu_1(E)$. Пусть, как ранее, брусы из D_0 занумерованы натуральными числами: $D_0 = \{\Delta_i | i \in \mathbb{N}\}$. Обозначим $E_i = E \cap \Delta_i$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu^*(E_i) \neq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu_1(E_i)$.
Значит, для некоторого натурального k выполнено неравенство:
$\nu^*(E_k) \neq \nu_1(E_k)$. Обозначим, для краткости, E_k через F, а Δ_k – через Δ.
Итак, $\nu^*(F) \neq \nu_1(F), F \in \Sigma_\nu, F \subset \Delta, \Delta \in D_0$. Пусть $A \in S(D), A \supset F$.
Тогда $\nu_1(A) \geq \nu_1(F)$. На $S(D)$ $\nu_1 = \nu$. Поэтому $\nu(A) \geq \nu_1(F)$.
Отсюда $\inf\limits_{A \in S(D), A \supset F} \nu(A) \geq \nu_1(F)$, значит, $\nu^*(F) \geq \nu_1(F)$. Поскольку $\nu^*(F) \neq \nu_1(F)$, то получаем неравенство $\nu^*(F) > \nu_1(F)$. Итак, если измеримое множество F таково, что $\nu^*(F) \neq \nu_1(F)$, то $\nu^*(F) > \nu_1(F)$.
2) Множество $F_1 = \Delta \setminus F$ измеримо.
Так как $\nu^*(F_1) = 1 - \nu^*(F), \nu_1(F_1) = 1 - \nu_1(F)$, то $\nu^*(F_1) < \nu_1(F_1)$. В то же время, в силу 1), $\nu^*(F_1) > \nu_1(F_1)$. Полученное противоречие доказывает единственность. Теорема Каратеодори доказана.

Общая схема продолжения меры в $\mathbb{R}^n$

(1) Пусть на множестве D всех основных брусов в $\mathbb{R}^n$ задана конечная мера ν.
(2) Продолжаем ν на $S(D)$.
Если $A \in S(D)$, то

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i.$$

Имеем: $\nu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(\Delta_i)$.
(3) Вводим определение ν - измеримого множества.
Множество E называется ν - измеримым, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A, B \in S(D)(A \supset E, B \supset E^c, \nu(A \cap B) < \varepsilon).$$

Множество всех ν - измеримых множеств есть σ - алгебра Σ_ν.
Заметим, что $S(D) \subset \Sigma_\nu$. Поэтому все множества из $S(D)$ измеримы.
В частности, ν - измеримы все открытые множества, значит, и все

замкнутые множества.
(4) Вводим внешнюю меру. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Полагаем:

$$\nu^*(E) = \inf_{A \supset E, A \in S(D)} \nu(A).$$

(5) Функция множества ν^* на Σ_ν есть мера, продолжающая меру ν со множества основных брусов D.
Если мера ν на множестве брусов D принимает конечные значения, то это продолжение единственно. Поэтому на множестве Σ_ν вместо ν^* пишем просто ν.

Множества, измеримые по Лебегу

Пусть на множестве брусов в $\mathbb{R}^n$ задана мера Лебега μ ("объем".) Тогда, по предыдущему, получим единственное продолжение меры Лебега μ на Σ_μ. Это продолжение обозначаем через μ. Множества из Σ_μ называются *измеримыми по Лебегу.*

Определение. Мера называется *полной,* если каждое подмножество множества меры нуль измеримо.

Теорема. Продолжение ν^* меры ν на Σ_ν есть полная мера.

Доказательство. Пусть E измеримо, $\nu(E) = 0, E_1 \subset E$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\inf\limits_{A \supset E, A \in S(D)} \nu(A) = 0$, то найдется множество
$A_0 \in S(D), \nu(A_0) < \varepsilon$, и $A_0 \supset E$. Очевидно, что пара множеств $(A_0, \mathbb{R}^n)$ есть ε-пара для E_1.
Лемма доказана.

В частности, мера Лебега на Σ_μ есть полная мера.

Глава 13. Измеримые функции

Определение. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}$. Функция f называется измеримой, если для каждого $a \in \mathbb{R}$ множество*

$$E_a = \{x \in E | a < f(x)\}$$

измеримо по Лебегу.

Лемма 1. *Пусть функция f, заданная на измеримом множестве E измерима, и E_1 есть измеримое подмножество E. Тогда f измерима на E_1.*

Доказательство. В самом деле, очевидно:

$$E_{1a} = E_a \bigcap E_1.$$

Следовательно, множество E_{1a} измеримо.

Лемма 2. *Пусть функция f определена и измерима на каждом из множеств $E_i, i \in \mathbb{N}$, измеримых в $\mathbb{R}^n$. Тогда f измеримо на объединении и пересечении этих множеств.*

Доказательство – аналогично.

Критерий непрерывности отображения

Пусть X есть метрическое пространство, Y – его подпространство. Вспомним теорему: Если множество G открыто в пространстве X, то множество $G_1 = G \cap Y$ открыто в Y. Наоборот: Если множество G_1 открыто в Y, то найдется такое множество G, открытое в X, что $G \cap Y = G_1$.("Для того,чтобы множество было открыто в подпространстве, необходимо и достаточно, чтобы оно было следом некоторого множества, открытого в пространстве.")

Комментарий. До сих пор мы рассматривали признаки непрерывности функции в заданной точке. Таким образом, это были локальные признаки. Нам понадобится следующий **глобальный** критерий непрерывности отображения .

Теорема. *Пусть $X, Y-$ метрические пространства, $f : X \to Y$. Для непрерывности отображения f необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого множества, открытого в Y, был открыт в X. (Аналогично: ...необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого множества, замкнутого в Y, был бы замкнут в X).*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть f непрерывна. Пусть G открыто в Y. Покажем, что $f^{-1}(G)$ открыто в X.

Пусть x_0 – произвольная точка из $f^{-1}(G)$. Обозначим: $y_0 = f(x_0)$. Так как G - открыто, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $K_\varepsilon(y_0) \subset G$.

В силу непрерывности f, существует $\delta > 0$, такой что $f(K_\delta(x_0)) \subset K_\varepsilon(y_0)$. Но это означает,что $K_\delta(x_0) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(y_0))$.

Следовательно, x_0 – внутренняя точка множества $f^{-1}(G)$. Итак, множество $f^{-1}(G)$ открыто в X.

b) Достаточность. Пусть при отображении f прообраз каждого множества, открытого в Y, открыт в X.

Пусть $y_0 \in Y, x_0 \in X, f(x_0) = y_0, \varepsilon > 0$. Множество $K_\varepsilon(y_0)$ открыто в Y. По условию, его прообраз $f^{-1}(K_\varepsilon(y_0))$ открыт в X.

Так как $x_0 \in f^{-1}(K_\varepsilon(y_0))$, то найдется $\delta > 0$, такое что $K_\delta(x_0) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(y_0))$. Отсюда $f(K_\delta(x_0)) \subset K_\varepsilon(y_0)$.

Итак, f – непрерывно.

Другие формы определения измеримой функции

Итак, функция f называется *измеримой,* если для каждого $a \in \mathbb{R}$ множество $E_a = \{x \in E | a < f(x)\}$ измеримо. Это определение можно переписать так: функция f называется *измеримой,* если для каждого $a \in \mathbb{R}$ множество $E_a = f^{-1}(a, +\infty)$ измеримо.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:
(1) Для всех $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(-\infty, a)$ измеримо,
(2) Для всех $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}[a, +\infty)$ измеримо,
(3) Для всех $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(a, +\infty)$ измеримо.
(4) Для всех $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(-\infty, a]$ измеримо,
Доказательство. Условие (1) есть определение измеримой функции. Докажем,что

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

1) $[a, +\infty) = (-\infty, a)^c$. Поэтому (1) $\Rightarrow$ (2);
2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, \infty] = (a, \infty)$. Поэтому (2) $\Rightarrow$ (3).
Аналогично доказываются остальные эквивалентности.

Лемма. *Пусть f – измеримая функция, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Тогда множество $f^{-1}([a, b))$ измеримо.*

Доказательство. Представим промежуток $[a, b)$ как разность двух неограниченных промежутков $[a, b) = [a, +\infty) \setminus (-\infty, a)$.

По свойству прообраза $f^{-1}[a, b) = \left(f^{-1}[a, +\infty)\right) \setminus ((-\infty, a))$. Множество $f^{-1}[a, b)$ измеримо как разность двух измеримых функций.

Измеримость непрерывной функции

Теорема. *Вещественная функция, определенная и непрерывная на измеримом множестве в* $\mathbb{R}^n$, *измерима.*

Доказательство. Пусть f есть непрерывная на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ вещественная функция.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Убедимся, что $f^{-1}(a, +\infty)$ есть измеримое множество. Воспользуемся критерием непрерывности функции.

Множество $(a, +\infty)$ открыто в $\mathbb{R}$, f непрерывна. Поэтому прообраз множества $(a, +\infty)$ открыт в E. Значит, он есть след в E некоторого множества G, открытого в $\mathbb{R}^n$:

$$f^{-1}(a, +\infty) = G \cap E.$$

Это множество измеримо, как пересечение двух измеримых множеств. Следовательно, f измеримо.

Примеры измеримых функций

1) Пусть вещественная функция задана на $E, \nu(E) = 0$. Имеем: $E_a \subset E$. Значит, E_a измеримо при каждом вещественном a. Поэтому, f измерима.

2) Пусть $E \subset \mathbb{R}, f$ – монотонная вещественная функция на E. Докажите, что f измерима.

Измеримость композиции функций

Теорема. *Пусть* F *есть вещественная функция, определенная и непрерывная на открытом множестве* $G \subset \mathbb{R}^n$, *и пусть* $(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ *вещественные функции, определенные и измеримые на множестве* $E \subset \mathbb{R}^k$, *и такие что* $(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \in G$ *для всех* $x \in E$. *Тогда функция* $F((g_1(x), \ldots, g_n(x)))$ *измерима.*

Доказательство. Проведем доказательство для $n = 2$.
Итак, пусть вещественная функция F определена и непрерывна на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, а вещественные функции g_1, g_2 определены и измеримы на множестве $E \subset \mathbb{R}^k$, и $(g_1, g_2) \in G$ при всех x из E. Докажем, что $F(g_1(x), g_2(x))$ есть измеримая функция.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Требуется доказать, что множество
$E_a = \{x \in E | F(g_1(x), g_2(x)) > a\}$ измеримо.

Так как F есть вещественная функция, определенная и непрерывная на открытом множестве G, то прообраз $G_a = F^{-1}(a, +\infty)$ есть открытое в $\mathbb{R}^2$ множество.

Представим G_a как счетное объединение множества полуоткрытых брусов:

$$G_a = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i.$$

Теперь:

$$E_a = \{x \in E | (g_1(x), g_2(x)) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \}.$$

$$E_a = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in E | (g_1(x), g_2(x)) \in \Delta_i \}.$$

Пусть брус $\Delta \subset G$, Δ задан неравенствами:

$$a_1 \leq u < b_1, a_2 \leq v < b_2.$$

Убедимся, что множество $\{x \in E | (g_1(x), g_2(x)) \in \Delta\}$ измеримо.
Имеем: $\{x \in E | (g_1(x), g_2(x)) \in \Delta\} =$

$$= \{x \in E | (a_1 \leq g_1(x) < b_1, a_2 \leq g_1(x) < b_2)\} =$$

$$= \{x \in E | a_1 \leq g_1(x) < b_1, a_2 \leq g_2(x) < b_2\} = g_1^{-1}[a_1, b_1) \cap g_2^{-1}[a_2, b_2).$$

Итак, $\{x \in E | (g_1(x), g_2(x)) \in \Delta\}$ измеримо.

Отсюда,

$$\{x \in E | F(g_1, g_2) > a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in E | (g_1, g_2) \in \Delta_i.\}$$

Следовательно, функция $F(g_1(x), g_2(x))$ измерима, что и требовалось .

Действия над измеримыми функциями

1) *Сумма и произведение двух измеримых функций f и g есть измеримая функция.*
Если еще $g(x) \neq 0$, то частное $\frac{f}{g}$ есть измеримая функция.

В самом деле, пусть g_1, g_2 измеримые функции на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Функция $F(u, v) = u + v$ определена и непрерывна на открытом множестве $\mathbb{R}^2$. Следовательно, функция $F(g_1, g_2)$ измерима, то есть, измерима функция $g_1 + g_2$.

Аналогично доказывается измеримость произведения и частного.

2) Пусть f есть вещественная функция. Определим положительную f_+ и отрицательную f_- части функции f.

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0. \end{cases}$$

Лемма. *Если f измерима, то и $f_+, f_-, |f|$ измеримы.*
Доказательство. При $a > 0$ множество

$$E_a = \{x | f_+(x) < a\} = \{x | f(x) < a\}$$

измеримо, а при $a < 0$ имеем:$E_a = \emptyset$.

Итак, при всех $a \in \mathbb{R}$ Множество E_a измеримо. Значит, f_+ измерима, аналогично доказывается измеримость f_-.

Так как $|f| = f_+ + f_-$, то $|f|$ есть измеримая функция. Очевидно, что

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), |f(x)| = f_+ + f_-.$$

Глава 14. Интеграл Лебега

Теория интеграла Лебега относится к числу высших достижений науки.

Пример. Требуется вычислить массу тела E, если известна плотность $\rho(x)$ в каждой точке тела.

Решение. Пусть плотность заключена между числами r и R

$$r \leq \rho(x) < R.$$

Разобьем промежуток $[r, R]$ на k частей точками

$$a_0 = r < a_1 < \cdots < a_k = R.$$

Положим: $T = \{a_i\}$. Обозначим через E_i ту часть тела E, в которой плотность заключена между a_{i-1} и a_i :

$$E_i = \{x \in E | a_{i-1} \leq \rho(x) < a_i\}.$$

Обозначим массу E_i через $m(E_i)$, а массу тела E – через $m(E)$.

Получим неравенства:

$$a_{i-1}\mu(E_i) \leq m(E_i) \leq a_i\mu(E_i).$$

Просуммировав эти неравенства по всем i, получим:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\mu(E_i) \leq m(E) \leq \sum_{i=1}^{k} a_i\mu(E_i).$$

Обозначим: $\lambda(T) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} (a_i - a_{i-1})$.

Из физических соображений представляется правдоподобным, что при $\lambda(T) \to 0$ суммы в обеих частях последнего неравенства стремятся к $m(E)$.

Определение интеграла Лебега

Пусть вещественная функция f определена, ν-измерима и ограничена на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, и $\nu(E) < \infty$.

Пусть $m \leq f(x) < M$.

Разобьем промежуток $[m, M]$ на k частей точками множества

$$T = \{a_i\} \;\; a_0 = m < a_1 < \ldots < a_k = M.$$

Обозначим через E_i ту часть множества E, в которой значение $f(x)$ заключено между a_{i-1} и a_i :

$$E_i = \{x \in E | a_{i-1} \leq f(x) < a_i\}.$$

Назовем *нижней суммой Лебега* величину:

$$s(T) = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\nu(E_i).$$

Аналогично, определим *верхнюю сумму Лебега:*

$$S(T) = \sum_{i=1}^{k} a_i\nu(E_i).$$

Дадим определение предела сумм Лебега при $\lambda(T) \to 0$.

Определение. Число I называется пределом нижней суммы Лебега $s(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0 (\lambda(T) < \delta \Rightarrow |I - s(T)| < \varepsilon)$.

Будем писать: $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I$.

Число I называется пределом верхней суммы Лебега $S(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0 (\lambda(T) < \delta \Rightarrow |I - S(T)| < \varepsilon)$.

Будем писать: $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I$.

Определение. Если существуют пределы верхней и нижней сумм Лебега при $\lambda(T) \to 0$, и оба предела равны числу I, то число Iназывается интегралом Лебега от f по множеству E по мере ν.

Обозначения интеграла Лебега:

$$\int\limits_E f(x)d\nu(x), \quad \int\limits_E f d\nu.$$

При каких условиях на подынтегральную функцию и на область интегрирования существует интеграл Лебега?

Чтобы ответить на этот вопрос, требуется изучить свойства сумм Лебега.

Свойства верхних и нижних сумм Лебега

1. $s(T) \leq S(T)$.

2. Если T_1 и T_2 - два разбиения промежутка $[m, M)$, такие что $T_1 \subset T_2$, то $s(T_1) \leq s(T_2), S(T_2) \leq S(T_1.)$

Доказательство достаточно провести для случая, когда $T_2 \setminus T_1 = \{a'_i\}, a_{i-1} < a'_i < a_i$.

3. Для любых разбиений T_1, T_2 справедливо неравенство:

$$s(T_1) \leq S(T_2).$$

В самом деле, обозначим: $T = T_1 \bigcup T_2$. Теперь имеем:

$$s(T_1) \leq s(T) \leq S(T) \leq S(T_2).$$

4. Итак, множество нижних сумм $\{s(T)\}$ расположено левее множества верхних сумм $\{S(T)\}$. Поэтому $I_* = \sup\limits_T s(T) \leq \inf\limits_T S(T) = I^*$.

5. $S(T) - s(T) \leq \lambda(T)\nu(E)$.

В самом деле,

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{i-1})\mu(E_i) \leq \lambda(t)\nu(E).$$

Класс функций, интегрируемых по Лебегу

Теорема. *Пусть f есть вещественная, ν-измеримая и ограниченная функция, заданная на измеримом множестве E конечной меры. Тогда функция f интегрируема на множестве E.*

Доказательство. В условиях теоремы выполняется неравенство:

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Отсюда:

$$0 \leq I_* - I^* \leq (S(T) - s(T)) \leq \lambda(T)\nu(E).$$

Устремляя в этом неравенстве λ к нулю, находим, что $I_* = I^* = I$. Итак:

$$s(T) \leq I \leq S(T).$$

Поэтому:

$$|I - s(T)| \leq \lambda(T)\nu(E).$$

Значит, при $\lambda \to 0$ имеем: $|I - s(T)| \to 0$.
Это означает, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I.$$

Такое же соотношение получаем и для $S(T)$:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I.$$

Следовательно, функция f интегрируема на множестве E по мере ν, и

$$\int\limits_E f(x)d\nu(x) = I.$$

Свойства интеграла Лебега.

1.*Если* $a \leq f(x) \leq b$, *то* $a \cdot \nu(E) \leq \int\limits_E f d\nu \leq b \cdot \nu(E)$.

Доказательство. Пусть $a \leq f(x) \leq b, \varepsilon > 0$.

Тогда $a \leq f(x) < b + \varepsilon$. Пусть $T = \{a_0 = a, a_1 = b + \varepsilon\}$ есть разбиение отрезка $[a, b + \varepsilon]$. Теперь вычислим суммы Лебега:

$$s(T) = a_0\nu(E_1) = a\nu(E),$$

аналогично:

$$S(T) = a_1\nu(E_1) = (b + \varepsilon)\nu(E).$$

Но

$$s(T) \leq I \leq S(T).$$

Поэтому:

$$a\nu(E) \leq I \leq (b + \varepsilon)\nu(E).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$a\nu(E) \leq I \leq b\nu(E).$$

2. $\int\limits_E d\nu = \nu(E)$. Положим: $f = 1, a = 1, b = 1$. По предыдущему свойству: $\nu(E) \le I \le \nu(E)$.

3. $f \ge 0 \Rightarrow \int\limits_E d\nu \ge 0-$ очевидно.

4. $\nu E = 0 \Rightarrow \int\limits_E f d\nu = 0$.

Доказательство. В самом деле, если $\nu E = 0$, то $\nu E_i = 0$, значит, $s(T) = S(T) = 0$. Но $s(T) \le I \le S(T)$. Отсюда $I = 0$.

5. *Счетная аддитивность интеграла Лебега.*
Пусть

$$E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

f измерима и ограничена на E, множества E_i измеримы.
Тогда имеет место равенство:

$$\int\limits_E f d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f d\nu,$$

Доказательство. Пусть

$$E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

где все E_i измеримы.

Обозначим через $s_i(T), S_i(T)$ нижнюю и верхнюю суммы Лебега по множеству E_i для функции f. Тогда выполняются равенства:

$$s(T) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T),$$

$$S(T) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(T).$$

Доказательство легко следует из счетной аддитивности меры ν.

Имеем неравенства:

$$s_i(T) \le \int\limits_{E_i} f d\nu \le S_i(T), i \in \mathbb{N}.$$

Суммируя их по всем i, получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T) \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f d\nu \le \sum_{i=1}^{\infty} S_i(T).$$

Откуда:

$$s(T) \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f d\nu \le S(T).$$

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим требуемое равенство.

6. *Линейность интеграла.*

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g) d\nu = \alpha \int\limits_E f d\nu + \beta \int\limits_E g d\nu$$

а)Докажем сначала следующее равенство:

$$\int\limits_E (f+g) d\nu = \int\limits_E f d\nu + \int\limits_E g d\nu.$$

Пусть при всех $x \in E \quad a \le f(x), \quad g(x) < b$. Как обычно, через T обозначим множество точек деления отрезка $[a, b)$.
Обозначим

$$E_i = \{x \in E | a_{i-1} \le f(x) < a_i\}, i = \overline{1, k_1}$$

$$E_j{}^* = \{x \in E | a_{j-1} \le g(x) < a_j\}, j = \overline{1, k_2}$$

Составим нижние суммы Лебега для интегралов от f и g :

$$s(T) = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1} \nu(E_i),$$

$$s^*(T) = \sum_{j=1}^{k} a_{j-1} \ inu(E_j{}^*).$$

Семейство множеств $E_{ij} = E_i \bigcup E_j{}^*$ образует разбиение множества E. На множестве E_{ij} выполняются неравенства:

$$a_{i-1} \le f(x) < a_i, \;\; a_{j-1} \le g(x) < a_j.$$

Отсюда:

$$a_{i-1} + a_{j-1} \le f(x) + g(x) < a_i + a_j.$$

Отсюда по первому свойству интеграла:

$$(a_{i-1} + a_{j-1})\nu(E_{ij}) \le \int\limits_{E_{ij}} (f+g)d\nu \le (a_i + a_j)\nu(E_{ij}).$$

Просуммируем эти неравенства по всем i, j :

$$\sum_{i,j}(a_{i-1} + a_{j-1})\nu(E_{ij}) \le \int\limits_{E} f(x) + g(x)d\nu \le \sum_{i,j}(a_i + a_j)\nu(E_{ij}).$$

Отсюда:

$$s(T) + s^*(T) \le \int\limits_{E} (f+g)d\nu \le S(T) + S^*(T).$$

Переходя к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим требуемое равенство.
b)Равенство:

$$\int\limits_{E} \alpha f(x)d\nu = \alpha \int\limits_{E} f(x)d\nu$$

доказать самостоятельно.

7. *Если* $\nu E > 0,\; f(x) > 0$ *при* $x \in E$, *то* $\int\limits_{E} f(x)d\nu > 0$.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$E_i^* = \{x \in E | \frac{1}{n} \le f(x) < \frac{1}{n-1},\; n \ge 1\}.$$

Они не пересекаются, их объединение равно E. Поэтому:

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu E_i^* = \nu E > 0$. Значит, найдется такое j натуральное, что $\nu E_j > 0$. Имеем неравенства: $\int\limits_{E} f d\nu \ge \int\limits_{E_j} f d\nu > 0$.

8. Интегрирование неравенств.
Если $f(x) \leq g(x)$ при $x \in E$, то $\int\limits_E f d\nu \leq \int\limits_E g d\nu$.

9. Если $f(x) < g(x)$ при $x \in E$, $\nu E > 0$, то $\int\limits_E f d\nu < \int\limits_E g d\nu$.

10. Если $f(x) = g(x)$ почти везде на E, то $\int\limits_E f d\nu = \int\limits_E g d\nu$.

Обозначим через E_1 множество, на котором $f(x) = g(x)$, обозначим $E_2 = E \setminus E_1$. По условию $\nu(E_1) = \mu(E), \mu(E_2) = 0$. Поэтому
$\int\limits_E f d\nu = \int\limits_{E_1} f d\nu + \int\limits_{E_2} f d\nu = \int\limits_{E_1} f d\nu = \int\limits_{E_1} g d\nu = \int\limits_{E_1} g d\nu + \int\limits_{E_2} g d\nu = \int\limits_E g d\nu$.

11. Если $f \geq 0$, и $\int\limits_E f d\nu = 0$, то почти везде $f = 0$.

Доказательство. Обозначим:

$$E_1 = \{x \in E | f(x) = 0\},\ E_2 = \{x \in E | f(x) > 0\}.$$

Если $\nu E_2 > 0$, то $\int\limits_E f d\nu = \int\limits_{E_2} f d\nu$. В силу свойства 8: $\int\limits_{E_2} f d\nu > 0$. Отсюда $\int\limits_E f d\nu > 0$ – противоречие с условием: $\int\limits_E f d\nu = 0$. Следовательно, $\nu E_2 = 0$, то есть, $f = 0$ почти везде.

12. Оценка интеграла. $\left|\int\limits_E f d\nu\right| \leq \int\limits_E |f| d\nu$.

Глава 15. Определенный интеграл

Пусть вещественная функция f определена и измерима по мере Лебега и ограничена на отрезке A. Пусть $a, b \in A$. Обозначим:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int\limits_{[a,b]} f d\mu, & a \le b, \\ -\int\limits_{[b,a]} f d\mu, & a > b. \end{cases} \quad (*)$$

Назовем эту величину $\int\limits_a^b f(x)dx$ *определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b.*

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом, определенный интеграл зависит от *направления* интегрирования по отрезку $[a, b]$, или, как говорят, от *ориентации отрезка.*

2. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования – это непосредственное следствие из определения (*).

3. Пусть f определена на отрезке A, $\ a, b, c \in A$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$ (аддитивность).

Обратим внимание, что на взаимное расположение чисел a, b, c не накладывается никаких ограничений.

4. Если $a \le b, f(x) \le \varphi(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

5. Оценка интеграла $\left|\int\limits_a^b f dx\right| \le \int\limits_a^b |f|dx$.

6. Линейность: $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. **Теорема о среднем в интегральном исчислении.** *Пусть f есть вещественная функция, определенная и непрерывная на отрезке A, и $a, b \in A$. Тогда существует такое ξ, расположенное между a и b, что* $\int\limits_a^b f dx = f(\xi)(b - a)$.

Доказательство. 1). Примем, для определенности, что $a \leq b$. Пусть $f(x_2)$ есть наибольшее значение $f(x)$, а $f(x_1)$ – наименьшее. Имеем: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Отсюда: $f(x_1)(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq f(x_2)(b-a)$.

Функция $g(x) = f(x)(b-a) - \int\limits_a^b f(x)dx$ непрерывна на $[a,b]$,

$g(x_1) \leq 0,\ \ g(x_2) \geq 0$. По теореме Коши существует ξ такое, что $\int\limits_a^b f(x)dx = g(\xi) = f(\xi)(b-a)$.

2). Если $b < a$, то, по предыдущему, найдется ξ такое, что $\int\limits_b^a f(x)dx = f(\xi)(a-b)$, откуда: $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница

До сих пор мы не имели общих теорем о существовании первообразной.

Теорема. *Пусть f непрерывна на отрезке A вещественной оси. Тогда существует первообразная для f на отрезке A.*

Доказательство. Пусть $a \in A$. Обозначим: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Убедимся, что $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$.

$F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$

По теореме о среднем в интегральном исчислении:

$F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$.

Итак, $F'(x) = f(x)$.

Теорема. *Пусть непрерывная вещественная функция f задана на отрезке A, и пусть F есть ее первообразная. Тогда имеет место формула Ньютона-Лейбница* $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. Функция $\phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

есть первообразная для f. Поэтому: $\phi(x) = F(x) + C$.

Отсюда: $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C$.

Подставляя $x = a$, получаем: $C = -F(a)$, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

При $x = b$ получаем $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. *Пусть*

1) функция f определена и непрерывна на отрезке A, $a, b \in A$,

2) функция φ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке, ограниченном числами α и β, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, и $\varphi(t) \in A$, для всех t между α и β.

Тогда имеет место следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим через F первообразную функции f на отрезке A. Функция $F(\varphi(t))$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Поэтому: $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$.

Отсюда: $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx$, что и требуется.

Комментарий. В формуле (23) производится *подстановка* $\varphi(t)$ вместо x. Тем самым, мы *заменяем переменную* x переменной t.

Пример. Вычислить $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$.

Делаем замену: $x = \sin t, dx = \cos t dt$.

При $t = 0$ $x = 0$, при $t = \frac{\pi}{2}$ $x = 1$.

Итак: $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{4}$.

Формула интегрирования по частям

Теорема. *Пусть вещественные функции $u(x), v(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке A.*

Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Пояснения. В этой формуле запись $\int\limits_a^b udv$ означает: $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx$, запись $uv|_a^b$ означает $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Доказательство. В условиях теоремы справедлива формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Подробнее: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$.

Обозначим первообразную для функции $v(x)u'(x)$ через $F(x)$. Получим равенство: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - F(x) + C$.

Значит,

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - F(b) + F(a) = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu,$$

что и требовалось.

Пример. $\int\limits_1^2 x \ln 2x dx$.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть непрерывная неотрицательная вещественная функция f задана на сегменте $[a, b]$. Для $x \in [a, b]$ через $S(a, x)$ обозначим площадь криволинейной трапеции расположенной над сегментом $[a, x]$, ограниченной сверху графиком $y = f(x)$, снизу – осью OX, с боков – вертикальными прямыми.

Убедимся, что функция $S(a, x)$ дифференцируема по x.

По определению производной:

$$\frac{d}{dx}S(a, x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(a, x + \Delta x) - S(a, x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x, x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Обозначим через M, m наибольшее и наименьшее значения $f(t)$ на сегменте $[x, x+\Delta x]$. Тогда: $m \leq f(t) \leq M$ при $x \leq t \leq x + \Delta x$. Поэтому криволинейная трапеция, расположенная над $[x, x+\Delta x]$, включает прямоугольник с основанием Δx и высотой m, и сама входит в прямоугольник с тем же основанием и высотой M. Значит:

$$m\Delta x \leq S(x, x+\Delta x) \leq M\Delta x.$$

Отсюда:

$$m \leq \frac{S(x, x+\Delta x)}{\Delta x} \leq M,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x, x+\Delta x)}{\Delta x} = f(x).$$

Поэтому:

$$\frac{d}{dx} S(a, x) = f(x).$$

Значит, $S(a, x)$ есть первообразная для f. Поэтому:

$$S(a, x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C.$$

Полагая: $x = a$, найдем, что $C = 0$. Поэтому: $S(a, x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Окончательно: $S(a, b) = \int\limits_a^b f(t)dt$.

Итак, в случае $f(x) \geq 0$, $\int\limits_a^b f(t)dt$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $y = f(x)$, снизу – осью абсцисс, с боков – вертикальными прямыми, проходящими через точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$.

Задание: Выяснить геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной функции, меняющей знак на промежутке интегрирования.

Некоторые физические приложения определенного интеграла

$$1.\quad v(t)=\frac{ds(t)}{dt},\ \ s(t_1,t_2)=\int\limits_{t_1}^{t_2}v(t)dt,$$

где $s(t_1,t_2)$ – путь пройденный за время от t_1 до t_2, $v(t)$ – скорость материальной точки.

$$2.\quad a(t)=\frac{dv(t)}{dt},\ \ v(t)=v(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}a(t)dt,$$

где $a(t)$ – ускорение.

$$3.\quad i(t)=\frac{dq(t)}{dt},\ \ q(t)=q(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}i(t)dt,$$

где $i(t)$ – сила тока, идущего по проводнику, $q(t)$ – количество электричества, прошедшего по проводнику за время от t_0 до t.

$$4.\quad \rho(x)=\frac{dm(x)}{dx},\ \ m(x)=m(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}\rho(t)dt,$$

где $m(x)$ – масса части стержня на сегменте $[0,x],\rho(x)$ – линейная плотность стержня.

Глава 16. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.

Задача. Пусть непрерывные вещественные функции f, φ определены на сегменте $[a, b]$ и $f(x) \geq \varphi(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Найти площадь, ограниченную графиками этих функций, осью абсцисс и прямыми $x = a, x = b$.

Решение. Пусть $\min\limits_{x} \varphi(x) = m$.

Сдвинем фигуру вдоль оси Oy на величину $-m$, чтобы она оказалась выше оси абсцисс.

После сдвига фигура ограничена кривыми:

$$y = f(x) - m,\ y = \varphi(x) - m,\ x = a,\ x = b.$$

Площадь фигуры S при сдвиге не изменилась. Очевидно, она равна разности площадей криволинейных трапеций:

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - m)dx - \int\limits_a^b (\varphi(x) - m)dx = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))dx.$$

Итак, искомая площадь

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))dx.$$

Объем тела вращения

Задача. Пусть f есть непрерывная неотрицательная вещественная функция, заданная на сегменте $[a, b]$. Найти объем тела, полученного вращением соответствующей криволинейной трапеции вокруг оси OX.

Решение. Обозначим через $B(x_1, x_2)$ ту часть тела вращения, которая заключена между плоскостями: $x = x_1,\ x = x_2$. Объем ее обозначим через $V(x_1, x_2)$. Найдем производную функции $V(a, x)$ по переменной x.

По определению производной:

$$\frac{d}{dx}V(a,x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(a+\Delta x)-V(a,x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x,x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Обозначим:

$$\max_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)=M,$$

$$\min_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)=m.$$

Тело $B(x,x+\Delta x)$ включает прямой круговой цилиндр с высотой Δx и радиусом основания m, и само входит в цилиндр с той же высотой и радиусом основания M.
Поэтому:

$$\pi m^2\Delta x{\le}V(x,x+\Delta x)\le\pi M^2\Delta x.$$

Деля это равенство почленно на Δx и переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим:

$$\frac{d}{dx}V(a,x)=\pi f^2(x).$$

Интегрируя по x в пределах от a до b, получим: $V(a,b)=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Вычисление площадей фигур в полярных координатах

Пусть плоская фигура ограничена лучами

$$\rho=\varphi_0,\rho=\varphi_1$$

и кривой:

$$\rho=\rho(\varphi).$$

Обозначим часть этой фигуры, заключенную между лучами, составляющими с полярной осью углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$, через $D(\varphi,\varphi+\Delta\varphi)$, а ее площадь – через $S(\varphi,\varphi+\Delta\varphi)$.
Аналогично предыдущему, найдем производную: $\frac{d}{d\varphi}S(\varphi_0,\varphi)=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$.
Отсюда:

$$S(\varphi_0,\varphi_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченную лемнискатой Бернулли:

$$\rho^2 = 2\cos 2\varphi.$$

Решение. Найдём область изменения φ :

$$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \bigcup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}].$$

Находим направления, в которых ρ обращается в нуль:

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{\pi}{4}, \varphi_3 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_4 = \frac{5\pi}{4}.$$

Кривая входит в начало координат, касаясь лучей, идущих в этих направлениях.

Находим площадь, ограниченную лемнискатой:

$$s = 4 \times \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = 2.$$

Длина кривой

Непрерывная кривая

Определение (Жордан, 1882) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - непрерывные функции на $[a.b]$,

$$r(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Таким образом, r есть отображение сегмента $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда говорят, что в $\mathbb{R}^n$ задана *непрерывная кривая.*

Такое задание непрерывной кривой называется *параметрическим* заданием, переменная t называется *параметром.*
Параметрическое задание кривой часто записывается в виде:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 & = & x_1(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & = & x_n(t) \end{array}\right\} t \in [a, b].$$

Однако, оказалось, что непрерывная кривая, удовлетворяющая такому определению, не всегда согласуется с нашим наглядным представлением о кривой. В 1890 году Пеано построил пример непрерывной кривой, которая целиком заполняет некоторый квадрат. Значит, кривая Пеано имеет площадь больше нуля!

Поэтому математики продолжили поиски определения кривой, более соответствующего нашей интуиции.

Гладкая кривая

Пусть кривая задана в параметрической форме:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 & = & x_1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & x_n(t) \end{array}\right\} t \in [a, b].$$

В сокращенном виде уравнение кривой: $r = r(t),\ t \in [a, b]$.

Если все функции $x_i(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i')^2 \neq 0$, то кривая, заданная этими уравнениями, называется *гладкой.*

Если отображение

$$t \to \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, t \in [a, b]$$

есть инъекция, то кривая называется *простой кривой.*

Длина кривой

Пусть кривая l задана уравнениями:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 & = & x_1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & = & x_n(t) \end{array}\right\} t \in [a, b],$$

или сокращенно:

$$r = r(t),\ t \in [a, b].$$

отрезком $l(t_1, t_2)$ *кривой* l назовем часть кривой, отвечающую значениям параметра $t \in [t_1, t_2]$.

Определение. Пусть на множестве всех отрезков $\{l(t_1, t_2)\}$ кривой l задана мера, значение которой на отрезке кривой $l(t_1, t_2)$, будем обозначать через $s(t_1, t_2)$. Мера s называется *длиной на кривой* l, если она удовлетворяет условию:

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_1, t_2)}{\|r(t_2) - r(t_1)\|} = 1.$$

Иначе: Если дуга стягивается в точку, то отношение длины дуги к длине хорды стремится к единице.

Определение. Если на кривой существует длина, то кривая называется *спрямляемой.*

Теорема. *Каждая гладкая кривая в* $\mathbb{R}^n$ *является спрямляемой.*

Доказательство. 1) Пусть гладкая кривая дана в параметрической форме в виде $r = r(t),\ \ t \in [a, b]$. Будем искать производную функции $s(a, t)$.

$$\frac{d}{dt}s(a,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t, t + \Delta t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t, t+\Delta t)}{\rho(r(t), r(t+\Delta t))} \frac{\rho(r(t), r(t+\Delta t))}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho(r(t), r(t+\Delta t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{{\Delta x_1}^2 + \ldots + {\Delta x_n}^2}}{\Delta t} =$$

$$= \sqrt{(x_1')^2 + \ldots + (x_n')^2}.$$

Итак,

$$\frac{d}{dt}s(a,t) = \sqrt{(x_1')^2 + \ldots + (x_n')^2}.$$

Интегрируя в пределах от a до b, находим:

$$s(a,b) = \int\limits_a^b \sqrt{(x_1')^2 + \ldots + (x_n')^2}dt.$$

2) Теперь следует проверить, что величина $s(a, b)$, заданная последней формулой, удовлетворяет определению длины кривой. Проделать это самостоятельно.

Вычисление длины кривой в декартовых координатах
Пусть простая гладкая кривая задана уравнением
$y = y(x), x \in [a, b]$.
Возьмем в качестве параметра переменную x. Получим:

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Вычисление длины кривой в полярных координатах
Пусть кривая задана в полярных координатах:

$$\rho = \rho(\varphi), \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1.$$

Можно записать уравнения кривой в параметрической форме с параметром φ :

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos\varphi \\ y & = & \rho\sin\varphi \end{array}\right\} \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1].$$

Теперь, по формуле длины кривой в параметрическом виде, упрощая подкоренное выражение, получим:

$$s(\varphi_0, \varphi_1) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2} d\varphi.$$

Интеграл Римана

Пусть P – компакт, f – вещественная функция, заданная на компакте P. Рассмотрим конечное разбиение $T = \{P_i\}, 1 \le i \le n$ этого компакта $P = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$, где все P_i – измеримы. Выберем в каждом P_i точку ξ_i. Обозначим $X = \{\xi_i\}_{i=1}^n, \lambda(T) = \max\limits_i \nu(P_i)$. Составим *сумму Римана*

$$\sum(T, X) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\nu(P_i).$$

Если существует $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\nu(P_i)$, то число I называется *интегралом Римана* от функции $f(x)$ по множеству P.

Теорема. Пусть P – компакт в $\mathbb{R}^n$, f – вещественная непрерывная функция, заданная на компакте P. Тогда f интегрируема по Риману и интегралы по Риману и по Лебегу от f по P совпадают.

Доказательство. Множество P компакт, поэтому оно замкнуто, а значит, измеримо. Из ограниченности P следует, что $\nu P < +\infty$.Т.к. f непрерывна и ограничена, то f измерима по Лебегу. Докажем, что предел интегральных сумм Римана равен интегралу Лебега, т.е.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum(T, X) = \int\limits_P f(x)d\nu.$$

Если $\nu(P) = 0$, то оба интеграла равны нулю.

Пусть $\nu(P) \neq 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$, пусть $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\nu(P)}$. Из равномерной непрерывности f следует, что найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\forall x_1, x_2 \in P \rho(x_1, x_2) \leq \delta_1 \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon_1.$$

Рассмотрим разбиение $P = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, где P_i – измеримо,

$$d(P_i) < \delta_1, i = \overline{1, n}.$$

Полагаем $T = \{P_i\}_{i=1}^n$, выберем $\xi_i \in P_i$, пусть $X = \{\xi_i\}_{i=1}^n$.

Составим интегральную сумму Римана.

$$\sum(T, X) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\nu(P_i).$$

Пусть $x \in P_i$, тогда $\rho(x, \xi_i) \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\xi_i)| \leq \varepsilon_1$.

Итак, для каждого $x \in P_i$

$$f(\xi_i) - \varepsilon_1 \leq f(x) \leq f(\xi_i) + \varepsilon_1.$$

Проинтегрируем последние неравенства по Лебегу

$$\int\limits_{P_i} (f(\xi_i) - \varepsilon_1)d\nu \leq \int\limits_{P_i} f(x)d\nu \leq \int\limits_{P_i} (f(\xi_i) + \varepsilon_1)d\nu,$$

$$(f(\xi_i) - \varepsilon_1)\nu(P_i) \leq \int\limits_{P_i} f(x)d\nu \leq (f(\xi_i) + \varepsilon_1)\nu(P_i).$$

Суммируем неравенства по $i = \overline{1, n}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - \varepsilon_1)\nu(P_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{P_i} f(x) d\nu \leq \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + \varepsilon_1) d\nu.$$

$$\sum (T, X) - \varepsilon_1 \nu(P) \leq \int\limits_{P} f(x) d\nu \leq \sum (T, X) + \varepsilon_1 \nu(P).$$

Итак,

$$\forall \varepsilon \exists \delta_1 > 0 \ : \ \lambda(T) \leq \delta_1 \Rightarrow |\sum (T, X) - \int\limits_{P} f(x) d\nu| \leq \varepsilon.$$

Это и означает, что интеграл Лебега является пределом интегральных сумм Римана. Что и требовалось.

Пример функции интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \bigcap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0, 1] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Убедимся, что $f(x)$ не интегрируема по Риману. Пусть T произвольное разбиение $[0, 1]$. Если все $\xi_i \in \mathbb{Q}$, то $\sum (T, X) = 0$. Если все $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то $\sum (T, X) = 1$. Поэтому предела не существует и $f(x)$ не интегрируема по Риману.

Вычислим теперь интеграл Лебега от $f(x)$ по $[0, 1]$.

По критерию интегрируемости, измеримая ограниченная функция на измеримом множестве конечной меры интегрируема по Лебегу.

Рассмотрим множества $P_a = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq a\}$

$$a \leq 0 \Rightarrow P_a = [0, 1]$$

$$1 \geq a > 0 \Rightarrow P_a = [0, 1] \bigcap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$a > 1 \Rightarrow P_a = \emptyset$$

$$a = 1 \Rightarrow P_a = [0, 1] \bigcap \mathbb{Q}$$

Каждое из этих множеств измеримо. Т.к. $[0,1]$ измеримо, то $f(x)$ измерима. Поскольку $f(x)$ ограничена, получаем интегрируемость $f(x)$ по Лебегу.

Вычислим интеграл Лебега

$$\int\limits_{[0,1]} f(x)d\nu = \int\limits_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f(x)d\nu + \int\limits_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f(x)d\nu = 0 + \nu([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = 0 + 1 = 1.$$

Теорема. (Признак интегрируемости функции по Риману.) *Ограниченная вещественная функция, заданная на $[a,b]$, интегрируема по Риману если и только, если множество точек разрыва этой функции имеет меру нуль.*

(без доказательства)

Интегрирование неограниченных функций

Пусть $f(x)$ есть измеримая неотрицательная вещественная функция на измеримом множестве E конечной меры, $\nu(E) < \infty$. *Срезкой функции $f(x)$ на уровне n*, где $n \geq 0$, называется функция

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n \\ n, & f(x) > n. \end{cases}$$

Положим

$$\int\limits_E f d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_E [f(x)]_n d\nu.$$

Если $\int\limits_E f d\nu$ конечен, то функция f называется *суммируемой* по множеству E.

Пусть теперь $f(x)$ измеримая функция на множестве E, принимающая значения разных знаков. Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_E f_+ d\nu$, $\int\limits_E f_- d\nu$ конечен, то полагаем

$$\int\limits_E f d\nu = \int\limits_E f_+ d\nu - \int\limits_E f_- d\nu.$$

Если конечны оба эти интеграла, то функция f называется суммируемой по множеству E по мере ν.

Перечислим свойства суммируемых функций

п.1. Линейность интеграла. Легко доказывается, что постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

Докажем, что $\int\limits_E (f+g)d\nu = \int\limits_E f d\nu + \int\limits_E g d\nu$.

Доказательство. Для срезок функций имеют место неравенства:

$$[f+g]_n \leq [f]_n + [g_n] \leq [f+g]_{2n}.$$

Интегрируя эти неравенства почленно, по свойству интеграла Лебега для ограниченных функций имеем:

$$\int\limits_E [f+g]_n d\nu \leq \int\limits_E [f]_n d\nu + \int\limits_E [g_n] d\nu \leq [f+g]_{2n}.$$

Осталось перейти к пределу при $n \to \infty$.

п.2. Функция суммируема вместе со своим модулем.

п.3. Конечная аддитивность.

п.4. Абсолютная непрерывность интеграла от суммируемой по множеству E функции:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \subset E$ ν-измеримого $(\nu(h) < \delta \Rightarrow \int\limits_h |f| d\nu < \varepsilon)$

a). Абсолютная непрерывность интеграла от неотрицательной суммируемой функции.

b). Абсолютная непрерывность интеграла от произвольной суммируемой функции f по множеству E. Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть f_+, f_-- положительная и отрицательная части функции f. Тогда f_+, f_- суммируемые неотрицательные функции, по a), они абсолютно непрерывны. Существуют такие δ_1, δ_2, что из $h_1, h_2 \subset E, \nu h_1 < \delta_1, \nu h_2 < \delta_2$ следует $\int\limits_{h_1} f_+ d\nu < \frac{\varepsilon}{2}$, $\int\limits_{h_2} f_- d\nu < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Теперь $\nu h < \delta$ влечёт $\int\limits_h f_+ d\nu + \int\limits_h f_- d\nu < \varepsilon$, то есть $\int\limits_h |f| d\nu = \int\limits_h f_+ d\nu + \int\limits_h f_- d\nu < \varepsilon$.

п.5. Счётная аддитивность интеграла.

п.6. Неравенство Буняковского. Пусть f, g суммируемы по E с квадратом. Тогда имеем неравенство

$$\sqrt{\int\limits_E f^2 d\nu \int\limits_E g^2 d\nu} \geq |\int\limits_E f g d\nu|.$$

Доказательство аналогично доказательству неравенства Коши-Буняковского.
а) Пусть суммируемы $f^2(x)$ и $g^2(x)$. Имеем $(f(x) \pm g(x))^2 \geq 0$. Отсюда $|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$. Значит, суммируемо произведение $f(x)g(x)$.

b) Если $\int\limits_E f^2 d\nu = 0$, то $f(x) = 0$ почти везде на E, и неравенство Буняковского тривиально.

c) Пусть $\|f\| = \sqrt{\int\limits_E f^2 d\nu} \neq 0, \|g\| \neq 0$. Имеем

$$\left(\frac{f}{\|f\|} \pm \frac{g}{\|g\|}\right)^2 \geq 0.$$

Раскрывая скобки, интегрируя неравенство почленно, получим искомое неравенство, как для неравенства Коши -Буняковского.

Непрерывные функции на компактном множестве

Для вещественных функций, непрерывных на компактном множестве, справедливы те же теоремы, что для вещественных функций, непрерывных на сегменте.

Первая Теорема Вейерштрасса. Вещественная функция, непрерывная на компакте, ограничена.

Вторая Теорема Вейерштрасса. Вещественная функция, непрерывная на компакте, принимает на компакте наибольшее и наименьшее значения.

Теорема Кантора. Вещественная функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.

Две "новые"теоремы:

Теорема. Образ компакта при непрерывном отображении есть компакт.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$, где X – компакт, f – непрерывно. Пусть $\{G_t | t \in T\}$ – открытое покрытие множества $f(X)$. Тогда $\bigcup\limits_{t \in T} G_t \supset f(X)$. Отсюда $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{t \in T} G_t\right) \supset f^{-1}f(X)$.

Так как $f^{-1}f(X) \supset X$, то $\bigcup\limits_{t \in T} f^{-1}(G_t) \supset X$. Итак, семейство множеств $\{f^{-1}(G_t) | t \in T\}$ есть покрытие множества X. Это покрытие открытое, по критерию непрерывного отображения.

Но X – компакт. Поэтому существует конечное подпокрытие $\{f^{-1}(G_{t_i}) | 1 \leq i \leq k\}$. Поэтому: $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq k} f^{-1}(G_{t_i}) \supset X$.

Берем образы от обеих частей включения:

$$f\left(\bigcup_{1\le i\le k} f^{-1}(G_{t_i})\right) \supset f(X).$$

$$\bigcup_{1\le i\le k} ff^{-1}(G_{t_i}) \supset f(X).$$

Так как $G_{t_i} \supset ff^{-1}(G_{t_i})$, то получим окончательно:

$$\bigcup_{1\le i\le k} G_{t_i} \supset f(X).$$

Значит,$\{G_{t_i} | 1 \le i \le k\}$ есть конечное подпокрытие множества $f(X)$, следовательно, $f(X)$ компактно.

Теорема об обратном отображении. *Если f есть непрерывная биекция компакта X на метрическое пространство Y, то обратное отображение f^{-1} также непрерывно.*

Доказательство. Убедимся, что в условиях теоремы f^{-1} непрерывно. Пусть F – замкнутое подмножество X. Каков прообраз F при отображении f^{-1} ? Это – $f(F)$. Так как X – компакт, то и F – компакт. Следовательно, $f(F)$ есть компакт.

Итак, прообраз замкнутого множества при отображении f^{-1} есть замкнутое множество. Значит, отображение f^{-1} непрерывно.

Глава 17 . Функциональные ряды и последовательности

Сходимость почти везде

Определение. Пусть последовательность вещественных функций (f_n) и функция f заданы на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что последовательность (f_n) сходится почти везде к f, если существует такое измеримое множество $E_1 \subset E$, что $\nu(E \setminus E_1) = 0$ и последовательность на E_1 сходится поточечно к f.

Пример. Последовательность $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$, сходится почти везде к функции $f(x) = 0$.

Сходимость по мере

Определение. Пусть последовательность вещественных функций (f_n) и вещественная функция f заданы на измеримом множестве E. Говорят, что последовательность (f_n) *сходится по мере к* f, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \nu\{x \in E| \, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

Тот факт, что последовательность (f_n) сходится по мере ν к f, обозначается так:

$$f_n \xrightarrow{\nu} f.$$

Геометрическая иллюстрация сходимости по мере: мера множества тех x, для которых график $y = f_n(x)$ выходит за пределы ε-полосы графика предельной функции $y = f(x)$, стремится к нулю с ростом номера.

Пример. Последовательность $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, сходится по мере Лебега к функции $f(x) = 0$, но равномерной сходимости на $[0,1]$ нет.

Из последнего примера следует, что сходимость по мере не влечет равномерной сходимости.

Лемма. *Если функциональная последовательность сходится равномерно на измеримом множестве, то она сходится по мере.*

Доказательство. Очевидно.

Пример. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n \\ x - n, & x \geq n \end{cases}$$

Эта последовательность сходится всюду на $(-\infty, +\infty)$ к $f(x) = 0$, но не сходится по мере.

Лемма. *Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость, из поточечной сходимости следует сходимость почти везде.*

Доказательство. Очевидно.

Предел монотонной последовательности множеств

Определение. Пределом монотонно убывающей последовательности множеств (E_n) называется пересечение членов этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Пределом монотонно возрастающей последовательности множеств (E_n) называется объединение членов последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Теорема. Если последовательность измеримых множеств (E_n) монотонно возрастает, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \nu(E_n) = \nu(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = \nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n)$.

Доказательство.

Обозначим: $E_0 = \emptyset$. Тогда $\nu(E) = \nu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \setminus E_{n-1})$.

Отсюда:

$\nu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(E_n \setminus E_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \nu(E_n \setminus E_{n-1}) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \nu E_n$, то есть $\nu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu E_n$.

Теорема. Если последовательность измеримых множеств (E_n) монотонно убывает, и $\nu(E_1) < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \nu E_n = \nu(\lim E_n) = \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n).$$

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств

$$(E_n^c) = (E_1 \setminus E_n).$$

Поскольку все множества, упоминаемые в этой теореме, входят в E_1, то множество E_1 здесь выступает в качестве универсального множества.

$\nu(E_1) - \nu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^c\right)$. По предыдущей теореме,

$\lim\limits_{n\to\infty} \nu\left(E_n^c\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu(E_1) - \nu(E_n)$.

Отсюда $\nu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu E_n$.

Теорема. Пусть E - измеримое множество, f_n сходится к f почти везде на E, f_n, f – ν-измеримы, $\nu(E) < \infty$. Тогда (f_n) сходится к f по мере ν.

*Доказательство.*1) Так как последовательность сходится почти везде на E, то найдется такое измеримое множество $E_1 \subset E$, что $\nu(E \setminus E_1) = 0$, и на E_1 последовательность сходится поточечно.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим последовательность множеств:

$$A_k = \{x \in E_1 | \forall (n \geq k) |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\}.$$

Последовательность (A_k) монотонно возрастает, $A_k \subset E$.

Убедимся, что $\bigcup\limits_k A_k = E_1$.

В самом деле, пусть $x \in E_1$. Тогда существует такое p, что $n \geq p$ влечет $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Это значит, что $x \in A_p$. Следовательно,

$$x \in \bigcup_k A_k.$$

Итак, $E_1 \subset \bigcup\limits_k A_k$. С другой стороны, по построению, $A_k \subset E_1$.

Поэтому, $\bigcup\limits_k A_k = E_1$.

2) В силу монотонности (A_k), имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \nu A_k = \nu E_1 = \nu E.$$

Отсюда: $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(E_1 \setminus A_k) = 0$.

3) Обозначим $B_k = \{x \in E_1 ||f(x) - f_k(x)| < \varepsilon\}$. Очевидно, что $A_k \subset B_k \subset E_1$.

Поэтому: $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(E_1 \setminus B_k) = 0$.

Но, $E_1 \setminus B_k = \{x \in E_1 ||f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}$.

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \nu\{x \in E_1 ||f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\} = 0$.

Поскольку $\nu(E \setminus E_1) = 0$,

то $\lim\limits_{k\to\infty} \nu\{x \in E| \ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\} = 0$.

Доказано, что последовательность f_n сходится по мере ν к f.

Предельный переход под знаком интеграла

Лемма. *Пусть последовательность* (f_n) *сходится по мере (почти везде) к функции* f *на измеримом множестве* E*. Пусть существует такая суммируемая по* E *функция* $g(x)$ *что, для всех* n *натуральных почти везде* $(|f_n(x)| \le g(x))$*.*
Тогда $|f(x)| \le g(x)$ *почти для всех* $x \in E$*, и функция* $f(x)$ *суммируема.* (без доказательства.)

Теорема.(Лебега.) *Пусть последовательность* (f_n) *вещественных измеримых функций сходится по мере (поточечно) на измеримом множестве* E, $\nu(E) < \infty$, *к функции* f*, и пусть существует суммируемая по* E *функция* $g(x)$*, такая что* $|f_n(x)| \le g(x)$ *для всех натуральных* n*. Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\nu = \int\limits_E f d\nu. \tag{24}$$

Замечание. Если выполнено равенство (24), то говорят, что *возможен предельный переход под знаком интеграла.*
Доказательство.

1) Пусть $\varepsilon > 0$. В условиях теоремы из предыдущей леммы следует $|f(x)| \le g(x)$.

Так как $g(x)$ суммируема, то найдётся такое $\delta > 0$, что из $\nu(H) \le \delta$ вытекает $\left|\int\limits_H g(x) d\nu(x)\right| \le \varepsilon/4$. Докажем равенство (24).

Так как f_n сходится по мере ν к f, то найдется такое n_0, что при $n \ge n_0$ имеем:

$$\nu\left(\{x \in E |\ |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2\nu(E)}\}\right) < \delta.$$

Обозначим

$$E_{1n} = \{x \in E |\ |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2\nu(E)}\}$$

.

$$E_{2n} = E \setminus E_{1n}.$$

Имеем:

$$n \ge n_0 \Rightarrow \nu(E_{1n}) < \delta.$$

На E_2 выполнено неравенство: $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2\nu(E)}$.

2) Пусть $n\geq n_0$. Оценим разность интегралов:

$$\Delta=|\int\limits_E f(x)d\nu(x)-\int\limits_E f_n(x)d\nu(x)|\leq$$

$$\leq\int\limits_E|f(x)-f_n(x)|d\nu(x).$$

Отсюда:

$$\Delta\leq\int\limits_{E_1}|f(x)-f_n(x)|d\nu(x)+\int\limits_{E_2}|f(x)-f_n(x)|d\nu(x). \qquad (25)$$

Оценим оба интеграла в правой части неравенства. При $n\geq n_0$ имеем $\nu(E_1)\leq\delta$. Поэтому

$$\int\limits_{E_1}|f(x)-f_n(x)|d\nu(x)\leq\int\limits_{E_1}|f(x)|d\nu(x)+\int\limits_{E_1}|f_n(x)|d\nu(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\int\limits_{E_2}|f(x)-f_n(x)|d\nu(x)<\frac{\varepsilon}{2\nu E}\times\nu E_2$$

Так как $\nu(E_2)\leq\nu(E)$, то

$$\int\limits_{E_2}|f(x)-f_n(x)|d\nu(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, при $n\geq n_0$ имеет место неравенство:

$$|\int\limits_E(f(x)-f_n(x)d\nu(x)|\leq\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Интегрирование функциональных рядов

Теорема. *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_n(x)$ *задан на измеримом множестве* E, *и все члены ряда есть измеримые функции. Если ряд сходится по мере к функции* $S(x)$, *то эта функция измерима.*

Теорема. Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{26}$$

задан на измеримом множестве E, и все члены ряда есть суммируемые по E функции. Если

1) ряд (26) сходится по мере (почти везде)к функции $S(x)$,

2) существует такая суммируемая по E функция $g(x)$, что все частичные суммы ряда (26) по модулю не больше $g(x)$, то имеет место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x) d\nu(x) = \int\limits_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) d\nu(x). \tag{27}$$

Доказательство. Это – следствие из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В самом деле, если ряд (26) сходится по мере к $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_n(x)$, то это на языке последовательностей означает, что последовательность частичных сумм ряда $(S_n(x))$ сходится по мере к $S(x)$. Теперь, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E S_n(x) d\nu(x) = \int\limits_E S(x) d\nu(x). \tag{28}$$

Но

$$\int\limits_E S_n d\nu = \int\limits_E \sum_{n=1}^{n} u_n d\nu \tag{29}$$

Поэтому равенство (28) можно переписать так:

$$\int\limits_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n d\nu. \tag{30}$$

Определение. Если имеет место равенство (30), то говорят, что ряд (26) *можно интегрировать почленно.*

Теорема. Пусть последовательность (f_n) непрерывных вещественных функций сходится равномерно к функции f на компакте $P \subset \mathbb{R}^n$, таком что $\mu(P) < +\infty$. Тогда имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_F f_n d\mu = \int\limits_F f d\mu.$$

Доказательство.

1) В нормированном пространстве $C(P)$ сходимость последовательности есть равномерная сходимость. Поэтому в $C(P)$ последовательность f_n сходится, следовательно, ограничена. Иначе говоря, существует такое число $M > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем:$\|f_n\| \leq M$. По определению нормы в $C(P)$, это означает, что $\sup\limits_{x\in P} |f_n(x)| \leq M$. Значит, при всех $x \in P$ выполнено неравенство: $|f(x)| \leq M$. Итак, функции последовательности f_n ограничены в совокупности.

2) Множество P замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$. Поэтому оно измеримо и, по условию, $\mu P < \infty$.

3) Функции $f_n(x), f(x)$ непрерывны на измеримом множестве, следовательно, они измеримы.

Условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла выполнены.

Дифференцирование рядов и последовательностей

Определение. Пусть на отрезке A задан вещественный сходящийся функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),$$

все члены которого есть дифференцируемые функции. Если имеет место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)',$$

то говорят, что данный фунциональный ряд *можно дифференцировать почленно.*

Теорема. Пусть фукциональный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_n(x) \tag{31}$$

задан на отрезке A. Если

1) Ряд (31) сходится при $x = x_0 \in A$,

2) Все члены этого ряда есть вещественные непрерывно дифференцируемые функции,

3) Ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {u_n}'(x)$ сходится равномерно на A, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится всюду на A, и его можно дифференцировать почленно.

Доказательство. Обозначим:

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} {u_n}'(x).$$

Так как ряд из ${u_n}'(x)$ сходится равномерно, и все члены ряда непрерывны, то и сумма $S_1(x)$ непрерывна на A. Пусть $x \in A$.

Так как ряд из производных удовлетворяет условиям теоремы о почленном интегрировании ряда, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} S_1(x)dx = S(x)$. Отсюда следует, что ряд $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится всюду на отрезке A. Убедимся, что его можно дифференцировать почленно.

Во-первых, $S(x)$ непрерывно дифференцируема. Далее,

$$S'(x) = S_1(x,)$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} {u_n}'(x).$$

Значит, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} {u_n}'(x)$, что и требовалось.

Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

где a_n – константы, так называемые *коэффициенты* степенного ряда.

Областью определения степенного ряда может быть вещественная прямая (тогда, разумеется, и коэффициенты ряда вещественные) или комплексная плоскость. В последнем случае переменная ряда обычно обозначается через z :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Первые вопросы относительно степенного ряда:
1) Какова область сходимости степенного ряда?
2) Каков характер сходимости степенного ряда? Можно ли почленно дифференцировать и интегрировать степенной ряд?

Теорема. (Абеля.) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, сходится в точке z_0. Тогда:
1) степенной ряд равномерно сходится в каждом круге с центром a, и радиусом меньшим, чем $|z_0 - a|$ (говорят, что степенной ряд *равномерно сходится внутри круга* $K_{|z_0-a|}(a)$).
2) степенной ряд абсолютно сходится в круге $K_{|z_0-a|}(a)$.

Доказательство. 1) Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ сходится, то общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(z_0-a)^n = 0$. Следовательно, последовательность $(a_n(z_0-a)^n)$ ограничена: $[|(a_n(z_0-a)^n| \le M$, где M – некоторое положительное число.

Пусть число $\rho > 0, \rho < |z_0 - a|$.

Для каждого $z \in K_\rho(a)$ выполнено неравенство:

$$|z-a| \le \rho < |z_0 - a|.$$

Поэтому:

$$|a_n(z-a)^n| = |a_n(z_0-a)^n| \frac{|(z-a)^n|}{|(z_0-a)^n|} \le M \left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right).$$

Обозначим : $q = \frac{\rho}{|z_0-a|}$.

Имеем: $0 \le q < 1, |a_n(z-a)^n| < Mq^n$ для всех натуральных n.

Итак, степенной ряд в круге $K_\rho(a)$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией и, следовательно, сходится равномерно.

2) Второе утверждение теоремы легко следует из доказанного.

Область сходимости степенного ряда

Теорема. *Для каждого степенного ряда*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

имеет место одна из трех возможностей:
1) Ряд сходится в единственной точке $z = a$,
2) Ряд сходится во всей комплексной плоскости,
3) Существует такое число $\rho > 0$, что в открытом круге $K_\rho(a)$ ряд абсолютно сходится и всюду вне замыкания $\overline{K_\rho(a)}$ расходится.

*Доказательство.*1) Если степенной ряд сходится только в точке $z = a$, то теорема доказана.

2) Обозначим через D область сходимости степенного ряда. Пусть $D \neq \{a\}$, $\exists z \in D, z \neq a$. Тогда, по теореме Абеля,

$$K_{|z-a|}(a) \subset D.$$

Рассмотрим объединение всех таких кругов:

$$\bigcup_{z\in D} K_{|z-a|}(a).$$

Если это объединение есть вся комплексная плоскость, то и $D = \mathbb{C}$, в этом случае теорема доказана.

3) Если же это объединение есть круг:

$$K_\rho(a) = \bigcup_{z\in D} K_{|z-a|}(a),$$

то этот круг $K_\rho(a)$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. Исследуем связь круга сходимости с областью сходимости степенного ряда.

Из построения круга сходимости следует, что он входит в область сходимости.

Пусть $z_1 \in D$. Тогда $z_1 \in \overline{K_{|z_1-a|}(a)}$. Тем более, $z_1 \in \overline{K_\rho(a)}$. Значит, $D \subset \overline{K_\rho(a)}$. Окончательно: $K_\rho(a) \subset D \subset \overline{K_\rho(a)}$, что и требовалось.

Последнее соотношение представляет собой характеристическое свойство круга сходимости.

Из него следует, что всюду вне замыкания круга сходимости степенной ряд расходится. Поскольку в самом круге сходимости степенной ряд сходится, то круг сходимости удовлетворяет пункту 3) из заключения теоремы.

Можно принять такое определение круга сходимости степенного ряда:

Определение. Круг $K_\rho(a)$ называется *кругом сходимости* ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

если выполнено включение:

$$K_\rho(a) \subset D \subset \overline{K_\rho(a)}.$$

Можно также принять следующее эквивалентное определение:

Определение. Круг $K_\rho(a)$ называется *кругом сходимости* ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

если в открытом круге $K_\rho(a)$ ряд абсолютно сходится и всюду вне замыкания этого круга расходится.

Радиус ρ круга сходимости называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Следствие. *Область сходимости степенного ряда равна объединению круга сходимости с некоторым подмножеством его граничных точек.*

Вычисление радиуса сходимости степенного ряда

Теорема. *Пусть существует* $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Тогда радиус сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *равен* l^{-1}.

Доказательство.

По условию, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = l|z-a|$.

Если $l|z-a| < 1$, то, по признаку Коши, ряд из модулей $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a^n(z-a)^n|$ сходится.

Аналогично, если $l|z-a|>1$, то ряд из модулей расходится.

Итак, в круге $|z-a|<l^{-1}$ степенной ряд сходится абсолютно.

Если же $|z-a|>l^{-1}$, то ряд из модулей расходится. Из теоремы Абеля следует, что и сам ряд расходится.

Отсюда следует, что круг $|z-a|<l^{-1}$ есть круг сходимости. Значит, радиус сходимости равен l^{-1}.

Рассмотрим примеры поведения степенного ряда на границе круга сходимости:

$$1)\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Здесь радиус сходимости равен 1, круг сходимости есть $K_1(0)$. Так как на границе круга сходимости $|z|=1$, то во всех граничных точках ряд расходится.

Итак, $D=K_1(0)$.

$$2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Здесь область сходимости совпадает с замыканием круга сходимости.

$$3)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

В некоторых граничных точках ряд сходится
$(z=-1)$, в других – расходится $(z=1)$.

Теорема. *Пусть круг сходимости степенного ряда есть $K_\rho(a)$. Если $0<r<\rho$, то в круге $\overline{K_r(a)}$ степенной ряд мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, следовательно, сходится равномерно.*

Формальное интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Лемма. *Степенные ряды:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(z-a)^n \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n (z-a)^{n-1} \qquad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n+1} (z-a)^{n+1} \qquad (3)$$

имеют общий круг сходимости.

Предостережение: *области сходимости* этих рядов могут не совпадать!

Доказательство. Обозначим радиус сходимости первого ряда через ρ, второго – через r. Области сходимости обозначим через D_1, D_2.

1) Пусть $z_1 \in K_\rho(a), z_1 \neq a$. Тогда первый ряд при $z = z_1$ мажорируется некоторой сходящейся геометрической прогрессией:

$$|a^n (z_1 - a)^n| < Mq_n, 0 \leq q < 1.$$

Отсюда:

$$|na^n (z_1 - a)^n| < Mnq_n, 0 \leq q < 1,$$

$$|na^n (z_1 - a)^{n-1}| < \frac{M}{z_1 - a} nq_n, 0 \leq q < 1,$$

Итак, второй степенной ряд в точке $z = z_1$ мажорируется числовым рядом

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{M}{z_1 - a} nq_n, 0 \leq q < 1.$$

Этот ряд сходится (по признаку Даламбера). Значит, второй степенной ряд абсолютно сходится в точке $z = z_1$, следовательно, $z_1 \in D_2 \subset \overline{K_r(a)}$.

Итак,

$$K_\rho(a) \subset \overline{K_r(a)}.$$

Отсюда: $\rho \leq r$.

Совершенно аналогично доказывается, что

$$K_\rho(a) \supset \overline{K_r(a)},$$

то есть $\rho \geq r$. Значит, круги сходимости рядов (1)и(2) совпадают.

2) Пусть $z_2 \in K_r(a)$. Тогда сходится ряд:

$$\sum_{i=0}^{\infty} n|a_n(z_2-a)^{n-1}|.$$

Значит, сходится и ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} n|a_n(z_2-a)^{n}|.$$

Так как

$$|a_n(z-a)^n| \leq n|a^n(z-a)^n|,$$

то, по признаку сравнения, первый ряд сходится при $z = z_2$.
Значит,

$$K_r(a) \subset \overline{K_\rho(a)}.$$

Отсюда: $\rho \geq r$. Значит, $\rho = r$. Итак, *при формальном дифференцировании степенного ряда радиус сходимости и круг сходимости ряда не меняются.*

3) Первый ряд получается из третьего формальным дифференцированием. Поэтому радиусы сходимости этих рядов совпадают.

Степенные ряды на вещественной прямой

Пусть

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

есть степенной ряд, у которого коэффициенты a_n – действительные числа, и область определения есть вещественная прямая.

Обозначим радиус сходимости этого ряда через ρ. Круг сходимости этого ряда на вещественной прямой есть интервал $(a-\rho, a+\rho)$. Область сходимости есть один из четырех отрезков:

$$(a-\rho, a+\rho), [a-\rho, a+\rho), (a-\rho, a+\rho], [a-\rho, a+\rho].$$

Теорема. *Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри области сходимости.*

Доказательство. 1) Если $x_0, x_1 \in (a-\rho, a+\rho)$, то степнной ряд можно почленно интегрировать в пределах от x_0 до x_1.

В самом деле, пусть $x_0 \le x_1$. Тогда, по теореме Абеля, степенной ряд сходится равномерно на компакте $[x_0, x_1]$, следовательно, его можно интегрировать почленно.

2) Докажем, что степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри круга сходимости.Пусть x_1 есть внутренняя точка области сходимости D степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \tag{32}$$

то есть x_1 принадлежит кругу сходимости этого степенного ряда:

$$(a - \rho < x_1 < a + \rho).$$

По лемме, круг сходимости степенного ряда является и кругом сходимости ряда из производных

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1}. \tag{33}$$

Выберем r так, чтобы

$$x_1 \in [a-r, a+r] \subset (a-\rho, a+\rho).$$

На отрезке $[a-r, a+r]$ оба ряда сходятся равномерно, следовательно, ряд (32) можно почленно дифференцировать.

Пример. Найти сумму ряда:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Рассмотрим ряд

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}. \tag{34}$$

Этот ряд – геометрическая прогрессия, сходящаяся на $(-1, 1)$. Оценим модуль его частичной суммы на отрезке $(-1+\varepsilon, 1]$.

$$|S_{1n}| = \left| \frac{1 - (-1)^n x^n}{1+x} \right| \le \frac{2}{\varepsilon}.$$

Итак, частичные суммы ряда (34) ограничены в совокупности на отрезке $(-1+\varepsilon, 1]$. На этом отрезке ряд сходится почти везде.

Значит, его можно интегрировать почленно:

$$\int\limits_0^t S_1(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}.$$

Далее,

$$S_1(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Откуда интегрированием получаем:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Это равенство справедливо на $(-1+\varepsilon, 1]$ при любом $0 < \varepsilon < 1$. Значит, оно верно и на $(-1, +1]$.

В частности, при $x = 1$ имеем:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Формула Тейлора и ряд Тейлора

Вспомним, при каких условиях на f мы получили формулу Тейлора.

Теорема. Пусть $f(x)$ – вещественная функция, заданная на отрезке A и n раз дифференцируемая во внутренней точке x_0 этого отрезка. Тогда имеет место равенство:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \beta_n(x)(x-x_0)^n,$$

где $\beta_n(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$.

Существенный недостаток этой теоремы – отсутствие оценки погрешности формулы Тейлора, то есть величины остаточного члена $\beta_n(x)(x-x_0)^n$.

Исправим этот недостаток и получим точное выражение для величины остаточного члена формулы Тейлора.

Впредь будем обозначать остаточный член формулы Тейлора через $r_n(x)$. Итак, формула Тейлора принимает вид:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + r_n(x).$$

Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора

Задача. Пусть $f(x)$ – вещественная функция, заданная и $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая на отрезке A. Пусть x_0 внутренняя точка A. Вычислить остаточный член формулы Тейлора.

Решение. 1). Ранее мы получили формулу Тейлора из формулы для приращения дифференцируемой функции. Теперь 'вырастим' формулу Тейлора из интегральной формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x) - f(x_0).$$

Отсюда

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

2). Применяем к последнему интегралу формулу интегрирования по частям.

$$\left| \begin{array}{lllllll} u & = & f'(t) & du & = & f''(t)dt \\ dv & = & dt & v & = & t-x \end{array} \right|$$

Имеем:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt.$$

Таким образом,

$$r_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt.$$

3). Продолжаем и далее применять к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям.

$$\left| \begin{array}{lllllll} u & = & f''(t) & & du & = & f'''(t)dt \\ dv & = & (x-t)dt & & v & = & -\frac{(x-t)^2}{2} \end{array} \right|$$

Имеем: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$
$+ \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t)dt.$

4). По индукции получим:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \qquad (35)$$

Таким образом,

$$r_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Это *остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.*

Вторая теорема о среднем в интегральном исчислении

Теорема. *Пусть на отрезке A заданы вещественные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, $a, b \in A$. Пусть f суммируема по A и не меняет знака(т.е., либо $f(x) \geq 0$ всюду на A, либо $f(x) \leq 0$ всюду на A), а функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда найдется такое ξ между a и b, что*

$$\int\limits_{a}^{b} f(t)\varphi(t)dt = \varphi(\xi) \int\limits_{a}^{b} f(t)dt. \qquad (36)$$

Доказательство. Пусть, в условиях теоремы, $f(x)$ всюду неотрицательна на $[a, b]$. Так как $\varphi(x)$ непрерывна на компакте (сегменте) B, ограниченном числами a и b, то она принимает там в некоторых точках x_0, x_1 наибольшее и наименьшее значения:

$$\min_{x \in B} \varphi(x) = \varphi(x_0), \max_{x \in B} \varphi(x) = \varphi(x_1).$$

Тогда:

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_1), \varphi(x_0)f(x) \leq \varphi(x)f(x) \leq \varphi(x_1)f(x).$$

Интегрируем неравенства почленно:

$$\varphi(x_0)\int\limits_a^b f(t)dt \leq \int\limits_a^b \varphi(t)f(t)dt \leq \varphi(x_1)\int\limits_a^b f(t)dt.$$

Определим функцию

$$\psi(x) = \varphi(x)\int\limits_a^b f(t)dt - \int\limits_a^b \varphi(t)f(t)dt.$$

Эта функция непрерывна на B, $\psi(x_0) \leq 0, \psi(x_1) \geq 0$. Поэтому найдется $\xi \in [a,b]$, такое, что $\psi(\xi) = 0$, что и требовалось.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

Интегральная форма остаточного члена служит источником многочисленных формул для вычисления остаточного члена.

Применим вторую теорему о среднем. Представим подынтегральное выражение в $r_n(x)$ в виде произведения непрерывной функции $f^{(n+1)}(x)$ и непрерывной на сегменте $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), значит, измеримой, и ограниченной на этом сегменте функции $\frac{(x-t)^n}{n!}$, которая не меняет знака. По второй теореме о среднем в интегральном исчислении найдется такое ξ между x_0 и x, что

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Такая форма $r_n(x)$ называется формой Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Остаточный член в форме Лагранжа удобен для запоминания, так как похож на слагаемое в формуле Тейлора.

Ряд Тейлора

Определение. Пусть f есть вещественная, бесконечно дифференцируемая функция, определенная на отрезке A. Тогда степенной ряд:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

называется *рядом Тейлора функции* f.

О представимости функции своим рядом Тейлора

Вопрос: при каких условиях на f ряд Тейлора функции f сходится к этой функции?

Лемма. *Сумма ряда Тейлора функции f в точке x равна $f(x)$, если, и только если, остаточный член формулы Тейлора в этой точке стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательство. Имеем:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + r_n(x).$$

Отсюда:

$$f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i = r_n(x),$$

Итак,

$$f(x) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i = 0,$$

если, и только если,

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0,$$

что и требовалось.

Теорема. Пусть вещественная бесконечно дифференцируемая функция задана на отрезке A. Если производные всех порядков функции f ограничены на отрезке A в совокупности, то ряд Тейлора функции f всюду на A сходится к f.

Доказательство. Пусть число $M > 0$ таково, что для всех n натуральных и для всех $x \in A$ выполняется неравенство:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Имеем
$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$
Учитывая неравенства для производных, получим
$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$
Предел в правой части неравенства равен нулю. В самом деле, ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$
сходится (в этом можно убедиться, например, по признаку Даламбера).
Значит,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} = 0.$$
Отсюда
$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x)| = 0.$$
Значит, ряд Тейлора функции f в каждой точке $x \in A$ сходится к $f(x)$. Теорема доказана.

Подчеркнем, что эта теорема дает лишь *достаточные* условия для того, чтобы ряд Тейлора данной функции поточечно сходился к этой функции.

Замечание 1. Эти условия не являются необходимыми.

Достаточно, например, потребовать, чтобы существовало такое $a > 0$, что для всех натуральных n и для всех $x \in A$ выполняется неравенство
$$|f^{(n)}(x)| \le a^n.$$

Замечание 2. Пусть, в условиях теоремы, известно значение функции f только на промежутке $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$. Тогда единственным образом восстанавливаются значения функции $f(x)$ на всем промежутке A. В самом деле, зная значения функции на промежутке $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, можно вычислить значения всех производных $f^{(n)}(x_0)$, а затем вычислить сумму ряда Тейлора в точке x. Эта сумма и равна значению функции $f(x)$.

Ряд Тейлора для некоторых элементарных функций

Определение. Ряд Тейлора, в котором $x_0 = 0$, называется *рядом Маклорена.*

Пример.1). $f(x) = e^x$. Пусть $a \in \mathbb{R}, \ a > 0$. Все производные $f^{(k)}(x)$ ограничены в совокупности на промежутке $[-a, +a]$. Значит, ряд Маклорена для e^x всюду на промежутке $[-a, +a]$ абсолютно сходится к e^x:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Поскольку a - произвольное положительное число, то это равенство имеет место всюду на $\mathbb{R}$.

2). Разложить в ряд по степеням $(x-1)$ функцию

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+3x+2}.$$

Решение. Представим данную дробь в виде суммы простейших.

$$\frac{3x+1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2},$$

$$3x+1 = A(x+2) + B(x+1), A = -2, B = 5,$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+3x+2} = \frac{-2}{x+1} + \frac{5}{x+2} = \frac{-2}{(x-1)+2} + \frac{5}{(x-1)+3}.$$

Далее,

$$f(x) = \frac{-1}{1+(x-1)/2} + \frac{5}{3(1+(x-1)/3)}.$$

Теперь обе дроби можно представить как суммы бесконечных прогрессий.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i}(x-1)^i + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 5}{3^{i+1}}(x-1)^i.$$

Учебное издание

ПЕСТОВ Герман Гаврилович

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Технический редактор –
Н.Ю. Галанова, канд. физ.-мат. наук, доцент

Подписано к печати 15.14.11.2016 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Computer Roman.
Усл. печ. л. 10,6.
Тираж 50 экз. Заказ № 2140

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru