Министерство образования и науки Российской федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Физико-технический факультет

А.Ю. Крайнов

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ К КУРСУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА»

Методическое пособие

Томск
2016

РАССМОТРЕНО И РЕКОМЕНДОВАНО К ПЕЧАТИ Советом физико-технического факультета Томского государственного университета

Протокол № 43 от «29» декабря 2015 г.

Председатель Совета ФТФ Э.Р. Шрагер.

В данном методическом пособии представлены постановки и некоторые комментарии к выполнению лабораторных работ на ЭВМ по курсу «Вычислительные технологии и численные методы решения задач тепло- и массопереноса», читаемому для студентов, обучающихся по магистерской программе «Макрокинетика горения высокоэнергетических материалов» по направлению подготовки 16.04.01- Техническая физика. Даны рекомендации к форме представления отчета по лабораторной работе.

Методические указания разработано при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 10.1329.2014/К.

СОСТАВИТЕЛЬ: *А.Ю. Крайнов*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теплофизика - наука о макропереносах энергии и вещества, сопровождающихся тепловыми эффектами. Изучаемые ею явления связаны со сложными взаимодействиями термодинамических, гидродинамических и электродинамических процессов во всех агрегатных состояниях вещества - твердых телах, жидкостях, газах, плазме [1].

Курс лекций по «Вычислительные технологии и численные методы решения задач тепло- и массопереноса», читается для студентов, обучающихся по магистерской программе «Макрокинетика горения высокоэнергетических материалов» по направлению подготовки 16.04.01- Техническая физика. Задачи для численного решения подобраны таким образом, чтобы подкрепить практической работой разделы, читаемые в курсе лекций. Поэтому лабораторные работы включают задачи по теплопроводности в средах с различными теплофизическими свойствами, при наличии в них источников тепла различной природы, задачи о конвективном теплообмене пластинки в потоке жидкости.

1. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА СЛОЯ ВЕЩЕСТВА

Одномерное распространение тепла в среде с теплоемкостью c, плотностью ρ, коэффициентом теплопроводности λ описывается уравнением

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r,T) r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) \qquad (1.1)$$

Коэффициент теплопроводности λ в общем случае не является константой, а зависит от температуры и свойств среды, в которой осуществляется процесс передачи тепла, и поэтому является функцией r и T. n - соответствует системе координат, в которой записано уравнение: $n = 0$ - декартова система координат, $n = 1$ - цилиндрическая система координат, $n = 2$ - сферическая система координат.

Уравнение (1.1) имеет множество решений. Для получения решения конкретной задачи необходимо поставить условия однозначности, к которым относятся задание теплофизических характеристик объекта ($c, \rho, \lambda(r,T)$), определение его геометрических характеристик, задание начальных условий и условий на границе рассматриваемого объекта. В качестве начального условия задается распределение температуры в рассматриваемой области в некоторый фиксированный момент времени, принимаемый за начальный.

$$T(r,t_0) = T_0(r) \,. \qquad (1.2)$$

Граничные условия разделяют на четыре типа:

Граничное условие первого рода: На границе рассматриваемой области задается значение температуры, возможно, как функции времени

$$T(r_s,t)=T_s(t)\,. \tag{1.3}$$

Граничное условие второго рода: На границе рассматриваемой области задается значение величины теплового потока, возможно, как функции времени

$$-\lambda\frac{\partial T(r_s,t)}{\partial r}=q(t)\,. \tag{1.4}$$

Граничное условие третьего рода: Это граничное условие описывает конвективный теплообмен поверхности тела с окружающей средой. Величина теплового потока на границе зависит от температуры окружающей среды и температуры на границе

$$\lambda\frac{\partial T(r_s,t)}{\partial r}=\alpha(T(r_s,t)-T_1)\,. \tag{1.5}$$

где T_1 - температура окружающей среды, α - коэффициент теплообмена. В общем случае коэффициент теплообмена величина переменная и зависит от условий обтекания границы и характеристик окружающей среды (жидкости).

Граничное условие четвертого рода: Описывает условия на границе контакта двух тел с различными теплофизическими характеристиками. На границе контакта двух тел $r=r_s$ выполняются условия равенства температур и тепловых потоков

$$\lambda_1\frac{\partial T_1(r_s,t)}{\partial r}=\lambda_2\frac{\partial T_2(r_s,t)}{\partial r},\;\; T_1(r_s,t)=T_2(r_s,t)\,. \tag{1.6}$$

При этом уравнение теплопроводности (1.1) записывается для двух тел. Таким образом, математическая постановка задачи об одномерном распространении тепла в сплошной среде состоит из уравнения (1.1), начального условия (1.2) и двух граничных условий в любой комбинации (1.3), (1.4), (1.5). В случае сопряженной задачи (когда рассматривается перенос тепла через два или несколько тел, находящихся в идеальном контакте) математическая постановка состоит из уравнений теплопроводности (1.1) в каждом теле, начальных условий (1.2) и граничных условий (1.6) на границах контакта и двух граничных условий в любой комбинации из (1.3), (1.4), (1.5) на других границах рассматриваемых тел.

Согласно теории размерностей уравнение (1.1) с соответствующими начальными и граничными условиями можно привести к безразмерному виду. При этом, согласно π-теореме, количество переменных и параметров, от которых зависит решение, сократится. Рассмотрим задачу о теплопереносе в твердом теле в случаях: (1) граничных условий первого рода и (2) граничных условий второго рода. В математической постановке задачи содержится четыре переменных с независимыми размерностями: две независимых переменных r, t, одна зависимая переменная T. Решение задачи $T(r,t)$ будет функцией шести переменных и параметров в случае граничных условий первого рода:

$$T(r,t) = f(r,t,\chi,\lambda,\Delta T,\Delta r). \tag{1.7}$$

(где $\chi = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности, ΔT - температурный напор, Δr - толщина слоя) либо функцией семи переменных и параметров в случае наличия граничного условия третьего рода (1.5):

$$T(r,t) = f(r,t,\chi,\lambda,\Delta T,\Delta r,\alpha). \tag{1.8}$$

Размерности переменных и параметров в (1.7) и (1.8) такие:
$[r]=$ м, $[t]=$с, $[\chi]=$ м$^2/c$, $[\lambda]=$ Дж/(сКм), $[\Delta T]=$К, $[\alpha]=$ Дж/(м^{2}Кс). Количество независимых единиц измерения в зависимостях (1.7), (1.8) - четыре: м, с, град, Дж. Остальные - зависимые (производные): $[\chi]=[r]^2/[t]$, $[\alpha]=\text{Дж}/\left([t][\Delta T][r]^2\right)$, $[\lambda]=\text{Дж}/\left([t][\Delta T][r]\right)$. Количество параметров в функциональной связи (1.7) - 6, в связи (1.8) - 7. Согласно π-теореме в этих функциональных связях можно уменьшить количество зависимых переменных и параметров на 4. Действительно, выберем в качестве масштаба длины - Δr, масштаба температуры - ΔT, масштаба времени - t_*, масштаба параметра, содержащего размерность Дж λ - $\lambda_* = \lambda$, тогда функциональные связи (1.7), (1.8) в безразмерном виде запишутся (соответственно):

$$\frac{T(r,t)}{\Delta T} = f\left(\frac{r}{\Delta r},\frac{t}{t_*},\frac{\chi t_*}{(\Delta r)^2},\frac{\lambda}{\lambda},\frac{\Delta T}{\Delta T},\frac{\Delta r}{\Delta r}\right). \tag{1.9}$$

$$\frac{T(r,t)}{\Delta T} = f\left(\frac{r}{\Delta r},\frac{t}{t_*},\frac{\chi t_*}{(\Delta r)^2},\frac{\lambda}{\lambda},\frac{\Delta T}{\Delta T},\frac{\Delta r}{\Delta r},\frac{\alpha\Delta r}{\lambda}\right). \tag{1.10}$$

Если в качестве t_* выбрать $t_* = \frac{(\Delta r)^2}{\lambda}$, то безразмерная температура $\theta = \frac{T}{\Delta T}$ будет функцией только двух безразмерных переменных $\xi = \frac{r}{\Delta r}$, $\tau = \frac{t}{t_*}$ в зависимости (1.9) и в зависимости (1.10) - двух безразмерных переменных $\xi = \frac{r}{\Delta r}$, $\tau = \frac{t}{t_*}$ и одного параметра $Bi = \frac{\alpha \Delta r}{\lambda}$:

$$\theta(\xi, \tau) = f(\xi, \tau). \tag{1.11}$$

$$\theta(\xi, \tau) = f(\xi, \tau, Bi). \tag{1.12}$$

При выборе таких масштабов уравнение теплопроводности в безразмерной форме примет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^n} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\overline{\lambda}(\xi, \theta) \xi^n \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right). \tag{1.13}$$

Начальные условия: $\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi)$.

Граничные условия:

1 рода - $\theta(\xi_0, \tau) = \theta(\tau)$,

2 рода - $\frac{\partial \theta(\xi_0, \tau)}{\partial \xi} = \overline{q}(\tau)$,

3 рода - $\frac{\partial \theta(\xi_0, \tau)}{\partial \xi} = Bi(\theta - \theta_1)$,

4 рода - $\theta_1(\xi_0, \tau) = \theta_2(\xi_0, \tau)$, $\frac{\partial \theta_1(\xi_0, \tau)}{\partial \xi} = \Lambda \frac{\partial \theta_2(\xi_0, \tau)}{\partial \xi}$, $\Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Уравнение (1.13) нелинейное и его аналитическое решение может быть получено только для некоторых специфических зависимостей $\lambda(\xi, \theta)$, либо для осредненного значения $\overline{\lambda} = const$ Для численного решения уравнения (1.13) с соответствующими краевыми условиями могут быть использованы консервативные разностные схемы (явные или неявные) [2, 3], либо метод прямых [4]. Использование неявных разностных схем более предпочтительно, так как для уравнения теплопроводности они являются абсолютно устойчивыми. При аппроксимации уравнения (1.13) по неявной разностной схеме получается система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей для решения которой может быть использован метод прогонки.

Важной характеристикой в задачах теплообмена являются величины тепловых потоков на границах рассматриваемого объекта. Тепловой поток на границе выражается формулой $q_s = -\lambda \dfrac{\partial T(r_s, t)}{\partial x}$, в безразмерной форме $\overline{q}_s = -\dfrac{\partial \theta(\xi_s, \tau)}{\partial \xi}$.

Задача. Решить задачу о распространении тепла по слою при заданных условиях теплообмена на его границах до установления стационарного распределения температуры. Исследовать процесс установления величин тепловых потоков на границах слоя $q_s = -\lambda \dfrac{\partial T(r_s, t)}{\partial x}$ и величины отношения теплового потока q_s к тепловому напору $K = \dfrac{q_s}{T_{\max} - T_{\min}}$. Сравнить стационарный профиль температуры в слое с аналитическим решением стационарной задачи (для такого сравнения в случае зависимости $\lambda = \lambda(r, T)$ в численных расчетах принять $\lambda = const$). Задачу решать в безразмерных переменных и параметрах.

В отчете представить:

1. Физическую постановку задачи.
2. Математическую постановку задачи.
3. Численный метод и алгоритм решения задачи.
4. Результаты тестирования программы расчетов.
5. Результаты расчетов в виде графиков, таблиц и т.д. и их анализ.

Варианты условий однозначности для уравнения (1.1):

1. Плоская пластинка.

$0 \le r \le l,\ n = 0,\ \lambda = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ T(0,t) = T_1,\ T(l,t) = T_0.$$

2. Двухслойная плоская пластинка.

$0 \le r \le l_1 + l_2,\ n = 0,\ \lambda_1 = const,\ \lambda_2 = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ T(0,t) = T_1,\ T(l_1 + l_2, t) = T_0,$$

$$T(l_1^-, t) = T(l_1^+, t),\ \lambda_1 \frac{\partial T(l_1^-, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T(l_1^+, t)}{\partial r}.$$

3.Плоская пластинка.
$0 \le r \le l,\ n = 0,\ \lambda(r) = \lambda_0(1 + \alpha r),$

$T(r,0) = T_0,\ T(0,t) = T_1,\ T(l,t) = T_0.$

4. Двухслойный шаровой слой.
$r_0 \le r \le r_2,\ r_0 < r_1 < r_2,\ n = 2,\ \lambda_1 = const,\ \lambda_2 = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ T(r_2,t) = T_0,\ -\lambda_1 \frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r} = q,$$

$$T(r_1^-,t) = T(r_1^+,t), \lambda_1 \frac{\partial T(r_1^-,t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T(r_1^+,t)}{\partial r}.$$

5. Цилиндрический слой.

$$r_0 \le r \le r_1, \quad n = 1, \quad \lambda(T) = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$T(r,0) = T_0,\ \ T(r_1,t) = T_1, \quad T(r_0,t) = T_0.$$

6. Плоская пластинка.
$0 \le r \le l,\ n = 0,\ \lambda = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_1),\ T(l,t) = T_0.$$

7. Цилиндрический слой.
$r_0 \le r \le r_1,\ n = 1,\ \lambda = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_1),\ T(r_1,t) = T_0.$$

8. Шаровой слой.
$r_0 \le r \le r_1,\ n = 2,\ \lambda(r) = \lambda_0(1 + \alpha(r - r_0)),$

$$T(r,0) = T_0,\ T(r_0,t) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = q.$$

9. Плоская пластинка.

$$0 \le r \le l, \quad n = 0, \quad \lambda(T) = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$T(r,0) = T_0, \quad T(0,t) = T_0, \quad -\lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_1).$$

10. Шаровой слой.

$$r_0 \le r \le r_1,\ n = 2,\ \lambda(r) = \lambda_0(1 + \alpha \frac{r}{r_0}),$$

$$T(r,0) = T_0,\ T(r_0,t) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = q.$$

11. Цилиндрический слой.

$$r_0 \le r \le r_1,\ n = 1,\ \lambda(r) = \lambda_0(1 + \alpha \frac{r}{r_0}),\ T(r,0) = T_0,$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r} = \alpha_1(T - T_1), -\lambda \frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = \alpha_2(T - T_0).$$

12. Двухслойная пластинка.

$$0 \le r \le l_1 + l_2, \quad n = 0, \quad \lambda_1 = const, \quad \lambda_2(T) = \lambda_{20} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$T(r,0) = T_0, \quad T(0,t) = T_1, \quad T(l_1 + l_2, t) = T_0,$$

$$T(l_1^-, t) = T(l_1^+, t), \qquad \lambda_1 \frac{\partial T(l_1^-, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T(l_1^+, t)}{\partial r}.$$

13. Шаровой слой.

$$r_0 \le r \le r_1,\ n = 2,\ \lambda = const,$$

$$T(r,0) = T_0,\ T(r_0,t) = T_1,\ \lambda \frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_1).$$

14. Плоская пластинка.

$$0 \le r \le l, \quad n = 0, \quad \lambda(T,r) = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + \alpha \frac{r}{l}),$$

$$T(r,0) = T_0, \quad T(0,t) = T_1, \quad T(l,t) = T_0.$$

15. Цилиндрический слой.

$r_0 \le r \le r_1,\ n = 1,\ \lambda = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_0),\ \frac{\partial T(r_1,t)}{\partial r} = q.$$

16. Шаровой слой.

$r_0 \le r \le r_1,\ n = 2,\ \lambda = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_1),\ T(r_1,t) = T_0.$$

17. Двухслойный цилиндрический слой.

$r_0 \le r \le r_2,\ r_0 < r_1 < r_2,\ n = 1,\ \lambda_1 = const,\ \lambda_2 = const,$

$$T(r,0) = T_0,\ T(r_0,t) = T_1,\ -\lambda_2 \frac{\partial T(r_2,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_0),$$

$$T(r_1^-,t) = T(r_1^+,t),\ \lambda_1 \frac{\partial T(r_1^-,t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T(r_1^+,t)}{\partial r}.$$

18. Плоская пластинка.

$$0 \le r \le l,\quad n = 0,\ \lambda(T,r) = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \alpha \frac{r}{l}\right),$$

$$T(r,0) = T_0,\ T(0,t) = T_1, -\lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_0).$$

19. Двухслойный шаровой слой.

$$r_0 \le r \le r_2,\ r_0 < r_1 < r_2,\ n = 2,\ \lambda_1(T) = \lambda_{10} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}},\ \lambda_2 = const,$$

$$T(r,0) = T_0,\ \lambda_1 \frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r} = q,\ -\lambda_2 \frac{\partial T(r_2,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_0),$$

$$T(r_1^-,t) = T(r_1^+,t),\ \lambda_1 \frac{\partial T(r_1^-,t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T(r_1^+,t)}{\partial r}.$$

20. Плоская пластинка.

$$0 \le r \le l,\ n = 0,\ \lambda(T) = \lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$T(r,0) = T_0,\ \lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_1),\ \lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial r} = q.$$

2. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА СЛОЯ ВЕЩЕСТВА ПРИ НАЛИЧИИ В НЕМ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Выделение тепла в слое может происходить за счет тепловыделения от химических реакций, поглощения излучения, если вещество слоя является полупрозрачным и на него падает внешний поток излучения, за счет прохождения электрического тока и т.д. Источник может быть локализован в некоторой области слоя. Наличие источников тепла в слое будет влиять на его теплопередачу и значения величин тепловых потоков на границах слоя.

Источник тепла q характеризуется интенсивностью выделения тепла и в общем случае будет функцией координаты и температуры $q = q(r,T)$. Уравнение теплопроводности с учетом источников тепла запишется в виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r,T) r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q(r,T). \qquad (2.1)$$

Для решения конкретной задачи о прогреве слоя при наличии в нем источников тепла необходимо дополнить уравнение (2.1) условиями однозначности - задать теплофизические характеристики слоя (c, ρ, λ), характеристики источника тепла $q = q(r,T)$, геометрические характеристики слоя, начальные и граничные условия. Уравнение (2.1) может быть решено аналитически только в некоторых частных случаях зависимостей $\lambda = \lambda(r,T)$, $q = q(r,T)$; в общем случае это уравнение аналитического решения не имеет.

Задача. Решить задачу о распространении тепла по слою при наличии в нем источников тепла. В области параметров задачи, обеспечивающих существование стационарного решения исследовать процесс установления стационарного распределения температуры, тепловых потоков на границах слоя $q_s = -\lambda \dfrac{\partial T(r_s,t)}{\partial x}$ и величины отношения теплового потока на границе к тепловому напору $K = \dfrac{q_s}{T_{\max} - T_{\min}}$. Сравнить стационарный профиль температуры в слое с аналитическим решением стационарной задачи (для этого принять в численных и аналитических расчетах $\lambda = const,\ q = const$). Задачу решать в безразмерных переменных и параметрах.

В отчете представить:

1. Физическую постановку задачи.
2. Математическую постановку задачи.
3. Численный метод и алгоритм решения задачи.
4. Результаты тестирования программы расчетов.
5. Результаты расчетов в виде графиков, таблиц и т.д. и их анализ.

Варианты условий однозначности для уравнения (2.1) взять из лабораторной работы 1, характеристики источников заданы ниже.

1. $q(T) = AT$
2. $q_1(T) = AT^2,\ \ q_2(r) = \dfrac{B}{r}$
3. $q(T) = B + AT$
4. $q_1(T) = AT,\ \ q_2(r) = -AT$
5. $q(r,T) = A\ln\left(T/T_0\right)$
6. $q(r,T) = Ae^{B\frac{T_0}{T}}$
7. $q(r,T) = Ae^{B\frac{T_0}{T}}r$
8. $q(r,T) = A\sin(Br)$
9. $q(T) = AT^2 + BT + C$
10. $q(r,T) = Ae^{\frac{r}{r_0}}$
11. $q(r,T) = A\dfrac{r}{r_0}e^{-B\frac{T_0}{T}}$
12. $q_1 = -B,\ q_2 = -B$
13. $q(r,T) = B\dfrac{\ln\left(T/T_0\right)}{T^2}r$
14. $q(T) = AT^{\nu}$
15. $q(r,T) = A\sin\left(2\dfrac{r - r_0}{r_0 - r_0}\pi\right)$
16. $q(T) = B + AT^3\dfrac{1}{r}$
17. $q_1(T) = AT,\ \ q_2(r) = Br$
18. $q(r,T) = Ae^{BT}$

19 $q(r,T) = A\cos(Br)$

20 $q(T) = Ar + B$

3. РЕГУЛЯРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛООБМЕНА

Для безграничной пластинки толщины 2δ при охлаждении ее в среде с постоянной температурой T_l и постоянным коэффициентом теплоотдачи α на ее поверхности математическая постановка задачи имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (3.1)$$

$$T(x,0) = T_0(x); \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, -\lambda \frac{\partial T(\delta,t)}{\partial x} = \alpha(T(\delta,t) - T_l).$$

Решение этой задачи можно получить методом разделения переменных, либо методом преобразования Лапласа, и имеет вид:

$$\theta = \frac{T(x,t)}{T_0^{\max} - T_l} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n \frac{a\tau}{\delta^2}}. \qquad (3.2)$$

Как видно, решение получается в виде бесконечного ряда, где $\cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right)$ - собственные функции (они зависят только от координаты), μ_n - собственные числа, A_n - постоянные коэффициенты, имеющие свое значение для каждого члена ряда, и находятся из начального условия задачи. Комплекс $\mu_n \frac{a}{\delta^2}$ достаточно быстро возрастающий с номером n $(n = 1,2,3,\ldots,\infty)$, поэтому члены ряда (3.2) являются убывающими, и для достаточно больших τ они быстро убывают с возрастанием n. Начиная с некоторого значения τ, $\tau > \tau_*$ температурное поле внутри тела с хорошей точностью описывается первым членом ряда (3.2). К моменту времени τ_* начальные условия "забываются" и процесс теплопроводности полностью определяется условиями охлаждения на границе тела и среды, физическими свойствами тела, его геометрической формой и размерами.

$$\theta = A_1 U_1 e^{-m_1\tau}, U_1 = \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right), m_1 = \mu_1 \frac{a}{\delta^2}. \qquad (3.3)$$

Если прологарифмировать выражение (3.3), то

$$\ln\theta = -m_1\tau + C(x). \qquad (3.4)$$

Из этого выражения видно, что натуральный логарифм избыточной температуры для всех точек тела изменяется во времени по линейному закону и при стремлении $\tau \to \infty$ все точки тела примут температуру окружающей среды. Такая стадия охлаждения (наступающая с момента времени τ_*) называется *регулярным режимом* и зависимость между θ и τ описывается уравнением (3.3).

Если продифференцировать уравнение (3.4) по τ, то получим:

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = -m_1 = const\ .$$

В левой части полученного соотношения стоит выражение для относительной скорости изменения температуры, и оно не зависит ни от координат, ни от времени. Величина m_1 называется темпом охлаждения и характеризует относительную скорость изменения температуры в теле и зависит только от физических свойств тела, процесса охлаждения на его поверхности, размеров и формы тела.

Регулярный режим теплообмена используется для экспериментального определения физических параметров тела, таких, как коэффициент температуропроводности, коэффициент теплопроводности (см. [5]). Однако для этих исследований важно знать время наступления регулярного режима теплообмена. Это время можно определить либо аналитически, либо численно, решая задачу (3.1) и анализируя величину $m_1 = \left|\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right|$ в различных точках рассматриваемого тела.

Задача. Определить время установления регулярного режима охлаждения тела τ_* и его зависимость от определяющих параметров задачи. Задачу решать в безразмерных переменных и параметрах.

В отчете представить:
1. Физическую постановку задачи.
2. Математическую постановку задачи.
3. Численный метод и алгоритм решения задачи.
4. Результаты тестирования программы расчетов.
5. Результаты расчетов в виде графиков, таблиц и т.д. и их анализ.

1. Охлаждение плоской пластины толщины 2δ.

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ ,$$

$$T(x,0) = T_0(x);\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0,\ -\lambda\frac{\partial T(\delta,t)}{\partial x} = \alpha(T(\delta,t) - T_l)\ .$$

2. Охлаждение цилиндрического стержня радиуса r_0.

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$T(r,0)=T_0(r);\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial r}=0,-\lambda\frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r}=\alpha(T(r_0,t)-T_l).$$

3. Охлаждение шара радиуса r_0.

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$T(r,0)=T_0(r);\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial r}=0,-\lambda\frac{\partial T(r_0,t)}{\partial r}=\alpha(T(r_0,t)-T_l).$$

4. Охлаждение бесконечного стержня прямоугольного сечения со сторонами $2\delta_1$, $2\delta_2$.

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right),$$

$$T(x,y,0)=T_0(x,y),\ \frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x}=\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial T(\delta_1,y,t)}{\partial x}=\alpha(T(\delta_1,y,t)-T_l),-\lambda\frac{\partial T(x,\delta_2,t)}{\partial y}=\alpha(T(x,\delta_2,t)-T_l).$$

5. Охлаждение цилиндрического стержня длины 2δ и радиуса r_0.

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right),$$

$$T(x,r,0)=T_0(x,r),\ \frac{\partial T(0,r,t)}{\partial x}=\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial r}=0,$$

$$-\lambda\frac{\partial T(\delta,r,t)}{\partial x}=\alpha(T(\delta,r,t)-T_l),-\lambda\frac{\partial T(x,r_0,t)}{\partial r}=\alpha(T(x,r_0,t)-T_l).$$

4. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Теплоотдача пластины в потоке жидкости определяется на основе системы уравнений неразрывности, движения и теплопроводности, записанных в приближении пограничного слоя [5]. Эти уравнения для вязкой несжимаемой жидкости имеют вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,,$$

Граничные условия:

при $y=0,\quad T(x,0)=T_s(x),\ u(x,0)=v(x,0)=0\,,$

при $y=\delta,\quad T(x,\delta)=T_\infty,\ u(x,\delta)=u_\infty,\ v(x,\delta)=0\,,$ (4.2)

при $x=0,\quad T(0,y)=T_\infty,\ u(0,y)=u_\infty,\ v(0,y)=0\,.$

Здесь $x,\, y$ - продольная и поперечная координаты, $u,\, v$ - продольная и поперечная скорость жидкости, T - температура, ν - коэффициент кинематической вязкости, a - коэффициент температуропроводности. Индексы s - параметры на стенке, ∞ - значения параметров течения на границе пограничного слоя.

Параметры ν и a могут быть функциями температуры. Для большинства жидкостей коэффициент вязкости уменьшается с возрастанием температуры, а коэффициент температуропроводности растет.

Решением системы уравнений (4.1) с краевыми условиями (4.2) являются функции $u(x,y),\, v(x,y),\, T(x,y)$ - стационарные поля скоростей и температуры. Получив эти решения можно найти потоки тепла на границе жидкость-пластинка $q=-\lambda\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}$ и зависимость коэффициента теплоотдачи от координаты и свойств омывающего потока

$$\alpha(x)=\left|\frac{\lambda\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}}{T_s(x)-T_\infty}\right|.$$

Система уравнений (4.1)-(4.2) может быть записана в безразмерных переменных и параметрах. В качестве безразмерных переменных и параметров обычно выбирают следующие:

$$\xi = \frac{x}{L},\ \eta = \frac{y\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}}{L},\ u' = \frac{u}{u_\infty},\ v' = \frac{v\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}}{u_\infty},$$

$$T' = \frac{T}{T_\infty},\ \nu' = \frac{\nu}{\nu_\infty},\ \mathrm{Re}_\infty = \frac{u_\infty L}{\nu_\infty},\ \mathrm{Pr} = \frac{\nu_\infty}{a_\infty}.$$

Тогда система уравнений (4.1)-(4.2) примет вид (значек $'$ опускаем):

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\nu(T)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$u\frac{\partial T}{\partial \xi} + v\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial \eta}\right), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0,$$

при $\eta = 0,\ T(\xi,0) = T_s(\xi),\ u(\xi,0) = v(\xi,0) = 0$

при $\eta = \delta,\ T(\xi,\delta) = 1,\ u(\xi,\delta) = 1,\ v(\xi,\delta) = 0$ (4.4)

при $\xi = 0,\ T(0,\eta) = 1, u(0,\eta) = 1,\ v(0,\eta) = 0$.

Потоки тепла на границе и значения коэффициента теплоотдачи в безразмерной форме примут вид:

$$Nu(\xi) = \frac{\alpha(\xi)L}{\lambda} = \left|\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}\ \frac{\dfrac{\partial T}{\partial \eta}}{(T_s(\xi) - 1)}\right|. \tag{4.5}$$

Система уравнений (4.3)-(4.4) может быть решена численно с использованием разностных схем, используемых для интегрирования систем уравнений типа уравнений пограничного слоя [2,3]. Здесь представляется разностная схема для решения уравнений (4.3)-(4.4), изложенная в [2].

Запишем разностную схему для уравнений (4.1)-(4.2). В соответствии с этой схемой на плоскости $\left(x, y\right)$ вводится прямоугольная сетка $x = x_0 + n\Delta x$, $y = m\Delta y$, где $n, m = 1,2,3,\ldots$ и "полуцелую" сетку

$$x = x_0 + n\Delta x,\ y = (m + \frac{1}{2})\Delta y,$$

$$x = x_0 + (n + \frac{1}{2})\Delta x,\ y = m\Delta y.$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнений запишется в виде:

$$u_m^{n+\frac{1}{2}} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + v_m^{n+\frac{1}{2}} \frac{s(u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}) + (1-s)(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y^2}\left((1-s)((u_{m+1}^n - u_m^n) + s(u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}))\nu_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \tag{4.6}$$

$$\left. -(1-s)((u_m^n - u_{m-1}^n) + s(u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}))\nu_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_m^{n+\frac{1}{2}} \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta x} + v_m^{n+\frac{1}{2}} \frac{s(T_{m+1}^{n+1} - T_{m-1}^{n+1}) + (1-s)(T_{m+1}^n - T_{m-1}^n)}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\Delta y^2}\left((1-s)((T_{m+1}^n - T_m^n) + s(T_{m+1}^{n+1} - T_m^{n+1}))a_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \tag{4.7}$$

$$\left. -(1-s)((T_m^n - T_{m-1}^n) + s(T_m^{n+1} - T_{m-1}^{n+1}))a_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Здесь выражения для переменных на полуцелых слоях зависят от искомых функций на $n+1$-ом временном слое и выражаются в виде:

$$u_m^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_m^{n+1} + u_m^n),\quad v_m^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_m^{n+1} + v_m^n)$$

$$\nu_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\nu_m^n + \nu_{m+1}^n + \nu_m^{n+1} + \nu_{m+1}^{n+1}). \tag{4.8}$$

$$a_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(a_m^n + a_{m+1}^n + a_m^{n+1} + a_{m+1}^{n+1}).$$

Параметр усреднения s может быть различен для каждого уравнения и для выполнения условия устойчивости схемы должен принимать значения в интервале $\frac{1}{2} \le s \le 1$.

Уравнения (4.6) и (4.7) могут быть приведены к виду:

$$A_m f_{m-1}^{n+1} + B_m f_m^{n+1} + C_m f_{m+1}^{n+1} = F_m \tag{4.9}$$

Здесь для уравнения (4.6) $f \equiv u$, для уравнения (4.7) - $f \equiv T$. Соотношение (4.9) представляет собой систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которая может быть решена методом прогонки. Совместно с конечно-разностной аппроксимацией граничных условий она определяет значения f_m на слое с номером $n+1$, если известны значения f_m на предыдущем слое. Начальные прогоночные коэффициенты находятся из конечно-разностной аппроксимации граничных условий при $y = 0$, а используя граничные условия на внешней границе пограничного слоя можно найти f_M^{n+1} - значения неизвестных u и T на внешней границе. Однако при увеличении x толщина пограничного слоя увеличивается, поэтому следует после вычисления f_{M-1}^{n+1}, где M - верхняя граница расчетной области, проверить условие гладкого сопряжения

$$\left| f_{M-1}^{n+1} - f_M^{n+1} \right| < \varepsilon , \tag{4.10}$$

где ε - малые положительные числа, которые могут быть выбраны своими для каждого из уравнений (4.6), (4.7). В случае невыполнения условия (4.10) хотя бы для одного из уравнений (4.6), (4.7) на $n+1$ слое добавляется одна или несколько точек с шагом Δy, а при вычислении прогоночных коэффициентов в этих точках используются предельные значения функций f.

Поперечная составляющая скорости v определяется из уравнения неразрывности, которое аппроксимируется разностным уравнением.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta x} + \frac{(u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\Delta x} \right) = -\frac{(v_{m+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_m^{n+\frac{1}{2}})}{\Delta y} \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) разрешается относительно $v_{m+1}^{n+\frac{1}{2}}$, значение $v_0^{n+\frac{1}{2}}$ находится из нижнего граничного условия (при отсутствии вдува) $v_0^{n+\frac{1}{2}} = 0$.

Коэффициенты A_m, B_m, C_m, F_m в (4.9) выражаются через искомые функции в точках сетки на полуцелом слое (через значения $u_m^{n+\frac{1}{2}}, v_m^{n+\frac{1}{2}}$ в соответствии с уравнениями (4.6), (4.7)). При решении системы уравнений (4.6), (4.7) для нахождения значений u в точках целой сетки на $n+1$-ом слое коэффициенты B_m и F_m зависят от искомой функции u на том же слое (см. (4.8)). Поэтому для решения такой задачи применяются итерации. В первом приближении в качестве значений на $n+1$-ом слое берутся значения искомой функции на n-ом слое (в формулах (4.8) значение $u_m^{n+\frac{1}{2}}$ подсчитывается с использованием u_m^n, а $v_m^{n+\frac{1}{2}}$ полагается равным $v_m^{n-\frac{1}{2}}$). На первой итерации находится значение M (номер шага в направлении y, при котором выполняется условие гладкого сопряжения на внешней границе) и оно не меняется на последующих итерациях. На второй и последующих итерациях получают прогоночные коэффициенты, вычисляемые с использованием значений $u_m^{n+\frac{1}{2}}$ и $v_m^{n+\frac{1}{2}}$ при вычислении которых используются значения u_m^{n+1} и $v_m^{n+\frac{1}{2}}$, полученные в предыдущей итерации. Итерации продолжаются до тех пор, пока невязка (отличие в значениях переменных, полученных с двух последующих итераций) не станет меньше заданного малого положительного числа ε^*.

Аналогично проводятся расчеты при ν и a зависящих от температуры: на первой итерации их значения в точках "полуцелой" сетки $\nu_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, a_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ определяются из известных значений температуры на n-ом слое, затем, на последующих итерациях для вычисления $\nu_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ и $a_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ (по формулам (4.8)) используются значения температуры, полученные в предыдущей итерации. Итерации проводятся до тех пор, пока невязка в значениях искомых переменных на $n+1$-ом слое не станет меньше некоторого заданного малого положительного числа ε^{**}.

Задача. Исследовать теплоотдачу при вынужденном продольном омывании плоской поверхности потоком несжимаемой жидкости. Построить профили скоростей $u(x_i, y)$, $v(x_i, y)$ и температуры $T(x_i, y)$ в сечениях x_1, x_2, x_3. Построить зависимости толщины гидродинамического δ и теплового k пограничных слоев от продольной координаты $x(\delta(x), k(x))$. Построить зависимость величины теплового потока и числа Нуссельта Nu от продольной координаты пластинки x. Исследовать зависимости $\delta(x), k(x), Nu(x)$ от параметров задачи. Задачу решать в безразмерных переменных и параметрах.

В отчете представить:

1. Физическую постановку задачи.
2. Математическую постановку задачи.
3. Численный метод и алгоритм решения задачи.
4. Результаты тестирования программы расчетов.
5. Результаты расчетов в виде графиков, таблиц и т.д. и их анализ.

Варианты условий однозначности для системы уравнений (4.1).

1. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = T_s$,
2. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = ae^{-bx} + c$,
3. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = \nu_\infty \left(\dfrac{T_\infty}{T}\right), T(x) = T_s$,
4. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = const, T(x) = T_\infty \left(2 + \sin\left(\dfrac{\pi x}{b}\right)\right)$,
5. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = \nu_\infty \left(1 + \dfrac{T_\infty}{T}\right), T(x) = T_s$,
6. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = T_\infty (1 + ax)$,
7. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = T_\infty \left(2 + \cos\left(\dfrac{\pi x}{b}\right)\right)$,
8. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = \begin{cases} T_\infty & x < l \\ 2T_\infty & x \ge l \end{cases}$,
9. $\lambda = \lambda_\infty \left(T/T_\infty\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = const, T(x) = T_\infty \left(e^{-bx} + 1\right)$,
10. $\lambda = const, \nu = \nu_\infty \left(T_\infty/T\right)^{\frac{1}{2}}, T(x) = T_s$,
11. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = const, T(x) = T_\infty \left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi x}{b}\right)\right)$,

12. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = \nu_\infty \left(\dfrac{T_\infty}{T}\right)^{\eta}, T(x) = T_\infty \left(arctg(x) + \pi\right),$

13. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = \nu_\infty \left(\dfrac{T_\infty}{T}\right), T(x) = \begin{cases} T_\infty(1+bx) & x < l \\ T_\infty(1+bl) & x \geq l \end{cases},$

14. $\lambda = const, \nu = \nu_\infty \left(T_\infty / T\right), T(x) = T_\infty \left(1 - e^{-bx}\right),$

15. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = T_\infty (1 + a \ln x)$

16. $\lambda = const, \nu = const, T(x) = T_\infty \left(1/(x+1)\right),$

17. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = \nu_\infty \left(\dfrac{T_\infty}{T}\right), T(x) = T_\infty \left(1 + \dfrac{1}{\ln(b(x+1))}\right),$

18. $\lambda = const, \nu = \nu_\infty \left(T_\infty / T\right), T(x) = \dfrac{T_\infty}{\ln(x+1)+1},$

19. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = const, T(x) = \dfrac{T_\infty}{(x+1)^2} + T_s,$

20. $\lambda = \lambda_\infty \left(\dfrac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \nu = const, T(x) = T_\infty \left(1 + e^{-\frac{b}{x+1}}\right).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Кутателадзе С.С.* Анализ подобия в теплофизике. Новосибирск: Наука. 1982. 280 с.

2 *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. 416 с.

3 *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- массообмена. - М.: Наука. 1984. - 288 с.

4 *Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. М.: Мир. 1990. 728 с.

5 *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия. 1975. 488 с.

Учебное издание

Алексей Юрьевич Крайнов

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ К КУРСУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА»

Методическое пособие

Опубликовано в авторской редакции

Издательство "STT"
Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15^{Б}–1
Тел.: (3822) 421-455
E-mail: stt@sttonline.com

Усл. печ. л. 1,31. Уч.-изд. л. 0,5.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Подписано к печати 30.05.2016 г. Формат 60x84/$_{16}$
Тираж 100 экз. Заказ № 87.