Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1963

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1963

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Ответственный редактор проф. А. И. Данилов
Редактор тома проф. П. П. Куфарев

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ СОВЕТ

Проф. А. И. Данилов (председатель, ректор университета), проф. В. А. Пегель (зам. председателя), доц. Ю. В. Чистяков (зам. председателя), доц. Р. Н. Щербаков (ученый секретарь), директор издательства М. С. Змазнев, проф. Б. Г. Иоганзен, проф. В. Д. Кузнецов (академик АН СССР), проф. В. Н. Кессених, проф. П. П. Куфарев, проф. И. М. Разгон, проф. К. В. Савицкий, проф. М. В. Тронов, проф. В. А. Хахлов, проф. К. П. Ярошевский, доц. А. Р. Ананьев, доц. З. Я. Бояршинова, доц. М. А. Кривов, доц. А. А. Любавин, доц. Г. И. Назаров, ст. н. с. Н. В. Прикладов, доц. А. С. Самарин, доц. В. В. Серебренников, директор Научной библиотеки М. Р. Филимонов, доц. В. С. Флёров, секретарь парткома Д. В. Коломин.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ОБ ИЗУЧЕНИИ НАУЧНОГО НАСЛЕДСТВА И АРХИВА Ф. Э. МОЛИНА

Н. Н. КРУЛИКОВСКИЙ

Научное наследство и деятельность выдающегося математика, одного из зачинателей современных алгебраических исследований, Федора Эдуардовича Молина (1861—1941) до сего времени почти не изучались. Краткие биографические сведения содержатся только в некрологе, опубликованном в Томске, во 2 изд. БСЭ и в статье проф. Г. Ряго „Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета" (Тарту, 1955). Некоторые сведения о жизни и работах Ф. Э. Молина есть в кандидатской диссертации Галченковой „Алгебра в русских университетах в XVIII—XIX вв." Начатое в Томске доц. Н. Ф. Кануновым изучение алгебраических работ Ф. Э. Молина не было завершено. Результаты проводимого К. Ф. Агаповой изучения педагогической деятельности Ф. Э. Молина в Томске еще не опубликованы.

Научная деятельность Ф. Э. Молина разделяется на два периода: Дерптский (1880—1900), в который были выполнены и опубликованы первые научные работы по астрономии и теории эллиптических функций и основные работы по теории гиперкомплексных числовых систем и теории представления групп, и Томский (1901—1941), связанный с педагогической деятельностью в Томском технологическом институте, на Сибирских высших женских курсах и в Томском университете, когда продолжались исследования по теории гиперкомплексных числовых систем и представлению групп, а кроме того, проводились исследования по теории гипергеометрических функций, алгебраической геометрии и некоторым другим вопросам. Исследования, выполненные Ф. Э. Молиным в последние годы его жизни, не оформлены в виде статей и не опубликованы.

Автором настоящего сообщения собраны и переведены на русский язык все опубликованные математические работы Ф. Э. Молина.

Первые две работы посвящены вычислению орбиты кометы 1880 III. В университете Ф. Э. Молин числился студентом астрономии и работал под руководством профессора прикладной математики А. Линдштедта. Линдштедт отмечал у Ф. Э. Молина „совершенно необыкновенную научную одаренность".

Следующие две работы относятся к теории эллиптических функций и явились результатом двухлетних занятий Молина в Лейпцигском семинаре Ф. Клейна. Во второй из этих работ, представляющей магистерскую диссертацию Ф. Э. Молина, рассматривается теория линейных преобразований эллиптических функций на основе теории

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Вейерштрасса. В работе рассматриваются корни восьмой и 24-й степени из единицы, встречающиеся в уравнениях преобразований.

Основной работой Ф. Э. Молина является его докторская диссертация „О системах высших комплексных чисел" (1892). Этой работой положено начало общей теории систем гиперкомплексных чисел, развившейся в современную теорию ассоциативных алгебр. Работа сразу получила высокую оценку в математическом мире, в частности со стороны известных математиков Э. Студи, Г. Фробениуса и С. Ли. По выражению Ф. Шура „названная диссертация существенно повлияла на исследования над общими комплексными числами", а Ф. Э. Молин „составил себе почетное имя в научном мире".

В следующем цикле из трех работ теория высших комплексных чисел применяется к некоторым вопросам теории представлений дискретных групп в виде линейных групп подстановок.

К томскому периоду жизни Ф. Э. Молина, кроме многочисленных литографированных курсов лекций по дифференциальному и интегральному исчислению, относятся четыре научные публикации. В работе „О некоторых трансцендентных уравнениях" (1930) рассматривается пример уравнения, решением которого является некоторое алгебраическое число, но сопряженное с ним алгебраическое не является решением этого уравнения. В заметке 1933 г. решается предложенная Л. Чакаловым (София) задача о разрешимости в радикалах одного уравнения, связанного с корнями третьей степени из единицы.

В одной работе, изданной в 1935 г. в г. Томске, изучаются системы высших комплексных чисел с одной главной единицей, которым изоморфны любые системы комплексных чисел. В работе содержатся начала систематики числовых систем с одной главной единицей и изучаются их структурные свойства. Последняя публикация Ф. Э. Молина посвящена одному преобразованию гипергеометрического ряда, позволяющему получить аналитическое продолжение функции.

Автором настоящего сообщения начато изучение научного архива Ф. Э. Молина, находящегося у его дочери в г. Томске. Материалы архива позволяют проследить работу Ф. Э. Молина над опубликованными статьями. Значительная часть материалов архива относится к вопросам, не явившимся предметом публикаций. Среди рукописных материалов следует выделить заметки по следующим вопросам:

а) работы по представлению групп, в которых автор намеревался определить различные линейные группы с линейной группой параметров, для которой данная группа Галуа является подгруппой с дискретными значениями параметров; задачу, поставленную в этих работах, сам автор формулирует следующим образом: „По данной группе Галуа неприводимого уравнения найти все решения по однородной группе преобразований, эквивалентной группе Галуа и ее фактор-группе";

б) заметки об интерпретации геометрии Лобачевского, в которых доказывается, что достаточно элементарных методов, чтобы получить известное отображение пространства Лобачевского на внутренность шара евклидова пространства;

в) заметки по изучению кривых рода $p = 1$, линий третьего порядка и их точек перегиба, преобразований Кремоны и др.;

г) почти законченная рукопись по теории гипергеометрических функций;

д) очень большое число листов с вычислениями, по-видимому, относящихся к теории чисел.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В архиве имеются многочисленные материалы для характеристики педагогической деятельности Ф. Э. Молина: программы прочитанных курсов и проведенных семинаров, материалы лекций и т. п.

В архиве сохранились некоторые материалы, позволяющие установить научные связи Ф. Э. Молина с рядом выдающихся математиков конца XIX и начала XX в.: значительное число авторских оттисков работ В. Г. Алексеева, П. Боля, Н. В. Бугаева, А. Гурвица, М. Дена, Ф. Клейна, А. Кнезера, Кронекера, Л. К. Лахтина, Г. Минковского, Морера, П. А. Некрасова, Г. Пика, Э. Студи, Г. Фробениуса, Ф. Шура, Ф. Энгеля и других; на некоторых оттисках имеются авторские надписи; среди писем к Ф. Э. Молину, имеющих научный характер, обнаружены письма: В. Виртингера, А. Гурвица, Ф. Клейна, А. Кнезера, Г. Пика, М. Тихомандрицкого, Л. Струве, Г. Фробениуса, Ф. Шура. В письмах Г. Фробениуса, Ф. Шура и А. Гурвица дается высокая оценка научным трудам Ф. Э. Молина. В письме М. Тихомандрицкого также отмечаются научные заслуги Ф. Э. Молина.

Для изучения жизни и деятельности Ф. Э. Молина несомненную ценность представляют сохранившиеся биографические и мемориальные материалы: дипломы, сообщения об избрании его членом научных обществ (в частности, сообщение об избрании 15. IX. 1892 г. действительным членом Московского математического общества), официальная и частная переписка, различные материалы, характеризующие пребывание Ф. Э. Молина в научных командировках в Лейпциге (1883—1885), Москве (1892) и Риме (1899—1900), материалы, связанные с чтением лекций на курсах учителей в г. Уфе в 1914 г.

Среди этих материалов можно отметить заметки, относящиеся к работе Ф. Э. Молина в Лейпцигском семинаре Ф. Клейна по теории эллиптических функций, и заметки по истории математики, сделанные в Риме.

В целях дальнейшего изучения научного наследства Ф. Э. Молина было бы целесообразным издание сборника его работ с сопроводительными статьями, дающими оценку его творчества.

Издание сборника явилось бы достойным памятником выдающемуся ученому в связи с исполнившимся в 1961 г. столетием со дня его рождения и двадцатилетием со дня смерти.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

К ТЕОРИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МЕРЫ В БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ И К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ K-ПРОСТРАНСТВЕ

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ

В работе [1] нами построена теория меры на классах абстрактных множеств со значениями в булевой алгебре; в ней показано, каким образом понятия и теоремы общей теории меры могут быть перенесены на рассматриваемый нами случай абстрактных значений меры. В предлагаемой работе, которая является продолжением работы [1], ставится задача: показать, каким образом понятия и теоремы обычной теории измеримых функций и теории интеграла могут быть сформулированы для рассматриваемого нами случая, когда в качестве значений интеграла рассматриваются элементы полуупорядоченного K-пространства.

Как и в работе [1], в изложении мы будем следовать тому плану, по которому построена теория меры в книге П. Халмоша [2].

Глава I. Измеримые функции

§ 1. Понятие измеримого пространства и измеримой функции

Множество X, с выделенным в нем σ-кольцом S подмножеств, называется измеримым пространством и обозначается через (X, S), при этом предполагается, что

$$\cup S = X,$$

где $\cup S$ есть объединение всех множеств, входящих в S. Множества из S называются измеримыми.

Если на кольце S измеримого пространства задана мера μ со значениями в булевой алгебре E, то измеримое пространство называется измеримым пространством с мерой и обозначается через (X, S, μ).

Пусть $f(x)$ — действительная функция точки $x \in X$, принимающая конечные или бесконечные значения, (X, S) — измеримое пространство, и пусть

$$N(f) = \{x : f(x) \neq 0\} \quad \text{и} \quad f^{-1}(M) = \{x : f(x) \in M\}.$$

Если множество $N(f) \cap f^{-1}(M)$ измеримо при любом борелевском множестве $M \subset (-\infty, +\infty)$, то функция $f(x)$ называется измеримой.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Мы опускаем формулировки и доказательства хорошо известных свойств измеримых функций, не связанных с понятием меры. Приведем только следующую теорему.

Теорема 1. Функция $f(x)$ измерима тогда и только тогда, когда, какое бы ни было действительное число c, множество

$$N(f) \cap \{x : f(x) < c\}$$

измеримо ([2], стр. 82).

§ 2. Некоторые замечания к дальнейшему

1. В дальнейшем мы будем предполагать, что само пространство X входит в S, то есть, что X является алгеброй и что $\mu(X) = 1$. Заметим, что тогда теорема 1 предыдущего параграфа будет верна в следующей формулировке: функция $f(x)$ измерима тогда и только тогда, когда измеримо множество $\{x : f(x) < c\}$, каково бы ни было действительное число c.

2. Множество E_1 всех значений на S меры μ является счетно-полной подалгеброй алгебры E; счетная полнота означает, что если $e_n \in E_1$, $n = 1, 2, \ldots$, и $e = \sup e_n$ в E, то $e \in E_1$. Это свойство E_1 непосредственно вытекает из определения меры.

3. Известно, что всякая полная алгебра представляет базу некоторого K — пространства Y с единицей и наоборот ([3], стр. 513). В дальнейшем будем предполагать, что алгебра E является базой K — пространства Y счетного типа, то есть, что в Y всякое ограниченное множество различных попарно дизъюнктных элементов не более, чем счетно ([3], стр. 173). Если Y счетного типа, то, очевидно, и его база счетного типа. Если $A = \{y\}$ ограниченное сверху множество элементов пространства Y счетного типа, то существует счетное подмножество $A' \subset A$ такое, что

$$\sup A' = \sup A$$

([3], стр. 171).

4. Можно показать, что при условии существования на алгебре E достаточного множества функций класса Φ, определение которого приведено в [1], § 1 и из того, что E счетного типа, вытекает, что пространство Y является элементарным K — пространством, определение которого дано в [3], стр. 449. Приведем это определение.

Функционал φ, определенный на алгебре E, называется существенно положительным, если $\varphi(e) > 0$ для всякого $e > 0$.

Пространство Y называется элементарным, если на E имеется существенно положительный функционал φ, обладающий свойствами:

а) если e_1 и e_2 дизъюнктны, то $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$,

б) из $e_n \to e$ следует $\varphi(e_n) \to \varphi(e)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться только предположением о существовании указанного существенно положительного функционала на подалгебре E_1. Доказательство сделанного утверждения об элементарности алгебры E мы опускаем, заметим только, что в элементарном K — пространстве для единичных элементов соотношение $e_n \overset{(t)}{\to} 0$ равносильно соотношению $\varphi(e_n) \to 0$.

§ 3. Сходимость почти везде

В этом параграфе и дальше мы будем предполагать заданным измеримое пространство с мерой — (X, S, μ).

Сходимость почти везде последовательности $\{f_n(x)\}$ измеримых

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

функций и равномерная сходимость почти везде относительно меры μ определяются аналогично случаю действительной меры.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}$ почти везде конечных измеримых функций сходится почти равномерно к функции f, если существует такая последовательность измеримых множеств F_i, что

$$\lim_i \mu(CF_i) = 0$$

и на F_i, $i = 1, 2, \ldots$, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно.

Теорема 1. Если указанная в определении последовательность $\{f_n\}$ сходится к f почти равномерно, то она сходится к f почти везде.

Доказательство. Положим,

$$CF = \bigcap_{i=1}^{\infty} CF_i,$$

где F_i — множества, указанные в определении. Очевидно,

$$\mu(CF) = 0$$

и последовательность функций сходится к f в каждой точке $x \in X - CF$.

Теорема 2. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится почти везде, то она сходится и почти равномерно.

Доказательство. Можно считать, что $\{f_n\}$ сходится всюду. Пусть

$$E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\},$$

тогда

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots,$$

и так как $\{f_n\}$ сходится к f на X, то

$$X = \lim_n E_n^m.$$

Из последнего равенства, согласно теореме 5 ([1], § 2, гл. 1), получаем

$$\lim_n \mu(E - E_n^m) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

В силу элементарности пространства Y найдется диагональная последовательность ([3], стр. 450)

$$\{\mu(E - E_n^{k_n})\}, \quad k_1 < k_2 < \ldots$$

такая, что

$$\lim_n \mu\left(E - \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i^{k_i}\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim \mu(E - E_i^{k_i}) = 0.$$

Очевидно, что на множестве

$$F_p = \bigcup_{i=p}^{\infty} E_i^{k_i} \quad p = 1, 2, \ldots,$$

последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно. Теорема доказана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Замечание. Доказанная теорема является аналогом теоремы Д. Ф. Егорова; в ее формулировке все пространство $X \in S$ можно заменить любым множеством $E \in S$.

§ 4. Сходимость по мере

Определение. Последовательность

$$\{f_n\} \tag{1}$$

конечных измеримых функций называется сходящейся по мере к функции f, если

$$\lim_n \mu(\{x : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$; последовательность (1) называется фундаментальной по мере, если

$$\lim \mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

при $n, m \to \infty$.

Теорема 1. Почти равномерная сходимость влечет сходимость по мере.

Доказательство. Пусть последовательность (1) сходится к f почти равномерно. Согласно определению почти равномерной сходимости найдется последовательность $\{F_k\}$ множеств такая, что

$$\lim_k \mu(F_k) = 0$$

и на CF_k последовательность функций (1) сходится равномерно, $k = 1, 2, \ldots$. Так как

$$\{x : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset F_k \text{ для } n \geqslant N(k),$$

то существует

$$\lim_n \mu(\{x : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\} = \lim_k \mu(F_k) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы и теоремы 2 предыдущего параграфа вытекает, что сходимость последовательности функций почти везде влечет сходимость по мере.

Теорема 2. Если последовательность (1) сходится по мере к f, то она является фундаментальной относительно сходимости по мере.

Если, кроме того, $\{f_n\}$ сходится по мере к g, то $f = g$ почти везде.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из соотношения

$$\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |f_m(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

если, кроме условия о сходимости последовательности по мере к f принять во внимание [1], теор. 2, § 2 и [3], теор. 2. 13, гл. 1.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x : |f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

откуда, как и выше,

$$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций, сходящаяся по мере к f, содержит подпоследовательность, сходящуюся к f почти везде.

Доказательство. Возьмем последовательность чисел

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_k > \ldots, \quad \sigma_k \to 0.$$

Пусть

$$e_n^k = \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma_k\}.$$

По предположению

$$\lim_n e_n^k = 0.$$

По теореме о диагональной последовательности существует последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ такая, что

$$\lim_k e_{n_k}^k = 0.$$

Если полагать

$$E_{n_k} = \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \sigma_k\},$$

то, очевидно, последовательность $\{f_n\}$ сходится в каждой точке, за исключением точек множества $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$, мера которого равна нулю. Теорема доказана.

Теорема 4. Если последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна относительно сходимости по мере, то она содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно сходимости почти везде.

Доказательство. Пусть Φ существенно положительный функционал на E. Как указано в параграфе 2, соотношение $\Phi(e_n) \to 0$ равносильно соотношению $e_n \overset{(t)}{\to} 0$. Положим,

$$e_{n,m}^k = \mu\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть n_1 столь велико, что при $n, m \geqslant n_1$

$$\Phi e_{n,m}^1) < \frac{1}{2},$$

$n_2 > n_1$ столь велико, что при $n, m \geqslant n_2$

$$\Phi(e_{n,m}^2) < \frac{1}{2^2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и т. д. Вообще, пусть $n_k > n_{k-1}$ столь велико, что при $n, m \geqslant n_k$

$$\Phi(e^k_{n,m}) < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Если теперь положить,

$$E_k = \left\{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\right\},$$

если $k \leqslant \iota \leqslant j$, то для любого x, не принадлежащего множеству

$$E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots,$$

выполняются неравенства

$$|f_{n_\iota}(x) - f_{n_j}(x)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |f_{n_m}(x) - f_{n_{m+1}}(x)| < \frac{1}{2^{\iota-1}}$$

и

$$\Phi[\mu(E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots)] \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \Phi[\mu(E_m)] < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Так как последовательность $\mu(E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots)$ монотонна, то последнее неравенство равносильно тому, что $\mu(E_k \cup E_{k+1} \cup \ldots) \to 0$. Из сказанного очевидна справедливость теоремы.

Теорема 5. Если последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций фундаментальна по мере, то существует измеримая функция f, к которой последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере. Другими словами: множество измеримых функций полно относительно сходимости по мере.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящаяся почти везде к некоторой измеримой функции f и, следовательно, сходящаяся к f по мере.

Глава II. Интегрирование

§ 1. Интегралы от простых функций

Определение 1. Функция f, заданная на измеримом пространстве (X, S), называется простой, если можно указать конечное число измеримых множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } x \in E_i, \\ 0, & \text{если } x \in \overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n}. \end{cases}$$

Очевидно, всякая простая функция может быть представлена в виде

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i},$$

где χ_{E_i} — характеристическая функция множества E_i.

Определение 2. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

—простая функция, заданная на пространстве с мерой (X, S, μ). Тогда элемент

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \in Y$$

называется интегралом от функции f и обозначается через

$$\int f d\mu.$$

Заметим, что если f—простая функция, E—измеримое множество, то, очевидно, произведение $\chi_E f$ является простой функцией. Полагаем по определению,

$$\int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu.$$

В частности, тогда

$$\int \chi_E d\mu = \int_E d\mu = \mu(E).$$

В дальнейшем в этом параграфе мы будем иметь дело только с простыми функциями. Перечислим ряд простых теорем.

Теорема 1.

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Теорема 2. Если f почти везде неотрицательна, то

$$\int f d\mu \geqslant 0.$$

Теорема 3. Если $f \geqslant g$, то $\int f d\mu \geqslant \int g d\mu$.

Теорема 4.

$$\int |f + g| d\mu \leqslant \int |f| d\mu + \int |g| d\mu.$$

Теорема 5.

$$\left| \int f d\mu \right| \leqslant \int |f| d\mu.$$

Теорема 6. Если $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ для всякого $x \in E$, то

$$\alpha \mu(E) \leqslant \int_E f d\mu \leqslant \beta \mu(E).$$

Определение 3. Неопределенным интегралом от функции f называется функция множества ν со значениями в K-пространстве, заданная на измеримых множествах равенством

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Теорема 7. Если $f \geqslant 0$ почти везде, то ее неопределенный интеграл есть монотонная функция множества.

Доказательство. Если $E \subset F$, то $\chi_E f \leqslant \chi_F f$ и утверждение теоремы есть следствие теоремы 3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 4. Функция множества ν, заданная на измеримых множествах пространства с мерой (X, S, μ), называется абсолютно непрерывной, если из того, что $\mu(E) = 0$, следует $\nu(E) = 0$.

Теорема 8. Неопределенный интеграл представляет собой абсолютно непрерывную функцию.

Доказательство. Если $|f(x)| \leqslant C$, то для любого измеримого множества

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leqslant C\mu(E),$$

после чего справедливость теоремы очевидна.

Теорема 9. Неопределенный интеграл представляет собой счетно-аддитивную функцию множества.

Доказательство. Если f — характеристическая функция измеримого множества E, то счетная аддитивность сводится к счетной аддитивности по мере; но всякая простая функция есть линейная комбинация характеристических функций. Из сказанного вытекает утверждение теоремы.

§ 2. Последовательности интегрируемых простых функций

Элемент

$$\rho(f, g) = \int |f - g| d\mu$$

назовем расстоянием между f и g. Очевидно,

$$\rho(f, f) = 0, \quad \rho(f, g) = \rho(g, f), \quad \rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g).$$

Определение. Последовательность $\{f_n\}$ называется фундаментальной в среднем, если $\rho(f_n, f_m) \to 0$ при $m, n \to \infty$.

Теорема 1. Последовательность $\{f_n\}$, фундаментальная в среднем, является фундаментальной по мере.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и

$$E_{m,n} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Тогда

$$\rho(f_n, f_m) = \int |f_n - f_m| d\mu \geqslant \int_{E_{m,n}} |f_n - f_m| d\mu \geqslant \varepsilon\mu(E_{m,n}).$$

Откуда $\mu(E_{m,n}) \to 0$ при $m, n \to \infty$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы используем то обстоятельство, что в силу предположения о существовании на алгебре E существенно положительного функционала Φ, подалгебру E_1 (гл. 1, § 2, замеч. 2) можно рассматривать как алгебру с мерой $\Phi(e) = \Phi[\mu(E)]$; эта алгебра изоморфна пространству с мерой (X, S, μ), если в последнем в качестве элементов алгебры рассматривать классы множеств, эквивалентных относительно меры μ. Очевидно, что функции $\Phi(e)$, рассматриваемой на подалгебре E_1 соответствует функция $\Phi(E)$ множества, определенная на σ — кольце S измеримых множеств так, что

$$\Phi(e) \equiv \Phi[\mu(E)] \equiv \Phi(E),$$

где $e = \mu(E)$. Очевидно, что $\Phi(e)$ есть мера. Если $f(x)$ — простая функция:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

то интеграл $\int f d\Phi(e)$, или кратко $\int f d\Phi$, определяется равенством

$$\int f d\Phi(e) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi[\mu(E_i)].$$

Очевидно, этот интеграл может рассматриваться так же, как обычный интеграл относительно меры $\Phi(E)$.

Теорема 2. Будем предполагать, что $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant 1$ почти везде при любых n и m. Тогда, если последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций фундаментальна в среднем, то она фундаментальна относительно Φ; наоборот, если она фундаментальна относительно Φ, то

$$\int |f_n - f_m| d\mu \xrightarrow{(t)} 0, \quad n, m \to \infty.$$

Доказательство. Положим,

$$E^{\varepsilon}_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Пусть $\{f_n\}$ фундаментальная в среднем последовательность. Имеем

$$\int (f_n - f_m| d\mu = \int\limits_{X - E^{\varepsilon}_{n,m}} |f_n - f_m| d\mu + \int\limits_{E^{\varepsilon}_{n,m}} |f_n - f_m| d\mu \leqslant \varepsilon\mu(X) + \mu(E^{\varepsilon}_{n,m}). \quad (1)$$

Отсюда

$$\int |f_n - f_m| d\Phi \leqslant \varepsilon \Phi(X) + \Phi[\mu(E^{\varepsilon}_{n,m})]. \quad (2)$$

и, следовательно,

$$\int |f_n - f_m| d\Phi \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ фундаментальна относительно Φ. Тогда

$$\int |f_n - f_m| d\Phi = \int\limits_{X - E^{\varepsilon}_{n,m}} |f_n - f_m| d\Phi + \int\limits_{E^{\varepsilon}_{n,m}} |f_n - f_m| d\Phi \geqslant \Phi[\mu E^{\varepsilon}_{n,m})],$$

откуда

$$\Phi[\mu(E^{\varepsilon}_{n,m})] \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

следовательно, $\mu(E^{\varepsilon}_{n,m}) \xrightarrow{(t)} 0$, после чего из равенства (1) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ видим, что

$$\int |f_n - f_m| d\mu \xrightarrow{(t)} 0,$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Если $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых функций и ν_n — неопределенный интеграл от f_n, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\nu(E) = (t) - \lim_n \nu_n(E)$$

существует для всякого измеримого множества E и функция множества $\nu(E)$ счетно-аддитивна.

Доказательство. Будем рассматривать действительные функции множества

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\nu_n[\Phi(E)] = \int_E f_n d\Phi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где Φ — функция, определение которой дано выше. Согласно предыдущей теореме существует

$$\nu[\Phi(E)] = \lim_{n\to\infty} \nu_n[\Phi(E)];$$

заметим, что сходимость здесь равномерная на кольце $S = \{E\}$ в силу соотношения

$$|\nu_n[\Phi(E)] - \nu_m[\Phi(E)]| \leqslant \int |f_n - f_m| d\Phi.$$

Далее имеем, согласно неравенству (1),

$$|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leqslant \int |f_n - f_m| d\mu \leqslant \varepsilon\mu(X) + \mu(E^{\varepsilon}_{n,m}). \tag{4}$$

Положим, $\mu(E^{\varepsilon}_{n,m}) = e_{n,m}$. Так как $\Phi(e_{n,m}) \to 0$ при $n, m \to \infty$, то найдется последовательность

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_\kappa < \ldots$$

натуральных чисел такая, что

$$\Phi(e_{n_\kappa, m}) < \frac{1}{2^\kappa}$$

при любом $m \geqslant n_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ Очевидно,

$$\Phi[\sup_{i,j\geqslant\kappa}(e_{n_i, n_j})] \leqslant \sum_{i=\kappa}^{\infty} \Phi(e_{n_i, n_j}) < \frac{1}{2^{\kappa-1}}$$

и, следовательно,

$$\lim_{i,j\geqslant\kappa} \sup (e_{n_i, n_j}) = 0,$$

что означает, что существует $\lim_{\kappa} e_{n_\kappa}$ [3], стр. 46). Поэтому, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, из неравенства (1) вытекает, что существует

$$\lim_{i} \nu_{n_i}(E) = \nu(E) \in Y,$$

что доказывает справедливость равенства (3). Наконец, счетная аддитивность $\nu(E)$ вытекает из счетной аддитивности действительной функции $\nu[\Phi(E)]$.

§ 3. Интегрируемые функции

Почти везде конечная измеримая функция f, заданная в пространстве с мерой (X, S, μ), называется интегрируемой, если существует фундаментальная в среднем последовательность интегрируемых простых функций $\{f_n\}$, сходящаяся по мере к f. Интеграл от функции f обозначается через

$$\int f d\mu$$

и определяется равенством

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Интеграл от f по множеству E определяется равенством

$$\int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu,$$

где χ_E — характеристическая функция множества E.

Относительно интегрируемых функций верны теоремы, сформулированные для простых функций, а также другие теоремы о свойствах интегрируемых функций, аналогичные обычным теоремам. Мы не будем приводить формулировки и доказательства этих теорем, заметим только, что эти формулировки и доказательства аналогичны обычным в силу того, что задание меры $\mu(E)$ со значениями в алгебре E при указанных выше предположениях равносильно заданию вещественной меры $\Phi(E) \equiv \Phi[\mu(E)]$.

Отметим еще предложения, связанные с понятием обобщенной меры. Пусть $\bar{E} = \{y\}$ множество всех элементов из Y, представимых в виде $y = e_1 - e_2$, где $e_1 \in E$, $e_2 \in E$. Обобщенной мерой будем называть счетно-аддитивную функцию множества, заданную на измеримом пространстве (X, S) со значениями в $\bar{E}$.

Множество $E \in S$ называется положительным по отношению к μ, если для любого $F \subset E$, $F \in S$ имеет место неравенство $\mu(F) \geqslant 0$. Аналогично определяется отрицательное множество. Имеет место

Теорема 1. Если μ — обобщенная мера, то существуют такие непересекающиеся множества A и B, что A—положительно, B—отрицательно по отношению к μ и

$$A \cup B = X.$$

Доказательство. Пусть

$$e_* = \inf \mu(E),$$

где inf берется по всем отрицательным множествам. Так как алгебра E счетного типа, то найдется счетное множество $\{E_i\}$ такое, что

$$e_* = \inf \mu(E_i).$$

Пусть $B = \cup E_i$. Очевидно, $e_* = \mu(B)$. Покажем, что

$$A = X - B$$

является положительным множеством.

Допустим напротив, что существует множество $F \subset A$, $F \in S$ такое, что $\mu(F) < 0$. Множество F не может быть отрицательным, а так как $\mu(B \cap F) = 0$, то

$$\mu(B \cup F) = e_* + \mu(F) = \inf(e_*, \mu(F)) < e_*,$$

что противоречит определению e_*. Это противоречие доказывает теорему.

Указанное в теореме разложение

$$X = A \cup B$$

называется разложением в смысле Хана; функции μ^+ и μ^-, однозначно определенные на S равенствами

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \text{ и } \mu^-(E) = -\mu(E \cap A),$$

называются соответственно верхней вариацией и нижней вариацией обобщенной меры μ, а функция $|\mu|(E)$, определенная равенством

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E),$$

называется полной вариацией обобщенной меры μ. Легко показать, что μ^+, μ^- и $|\mu|$ являются мерами, причем

$$\mu(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

для любого $E \in S$. Если μ и ν суть обобщенные меры, заданные на S, то будем говорить, что ν абсолютно непрерывна относительно μ и писать $\nu \ll \mu$, если равенство $|\mu|(E) = 0$ влечет $\nu(E) = 0$. Как и в случае обычной меры, условия

а) $\nu \ll \mu$,

б) $\nu^+ \ll \mu$ и $\nu^- \ll \mu$,

в) $|\nu| \ll |\mu|$

эквивалентны между собой. Можно высказать такую теорему.

Теорема. Пусть Φ_1 и Φ_2 существенно положительные функционалы соответственно на подалгебрах E_1 и E_2, индуцированных мерами $|\mu|$ и $|\nu|$ (см. § 2, гл. 1). Тогда условие $\nu \ll \mu$ эквивалентно тому, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если

$$\Phi_1[|\mu|(E)] \equiv \Phi_1(E) < \delta,$$

то

$$\Phi_2[|\nu|(E)] \equiv \Phi_2(E) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\nu \ll \mu$. Предположим вопреки утверждению теоремы, что имеется $\varepsilon > 0$ такое, что для сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется E, для которого $\Phi_1(E) < \delta$, но $\Phi_2(E) \geqslant \varepsilon$. Пусть $\delta_n \to 0$. Тогда для соответствующей последовательности $\{E_n\}$ множеств будем иметь $\lim\limits_n \Phi_1(E_n) = 0$ и, следовательно, для некоторой подпоследовательности $\{E_{n_k}\} \subset \{E_n\}$ $\mu(E_{n_k}) \to 0$, причем $\mu(\overline{\lim} E_{n_k}) = 0$, тогда как

$$\Phi_2[\nu(\lim E_{n_k})] \geqslant \varepsilon,$$

и поэтому $\nu(\lim\limits_k E_{n_k}) > 0$. Справедливость обратного утверждения теоремы очевидна.

Имеет место также теорема Радона-Никодима:

Если обобщенная мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, то существует измеримая функция f такая, что

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Доказательство сводится к доказательству теоремы для случая вещественных мер, так как утверждение теоремы равносильно равенству

$$\Phi_2[\nu(E)] = \int_E f d\Phi_1[\mu(E)].$$

Пусть $\xi \in Y$ — произвольный элемент; его характеристика e_λ^ξ (см. 3, гл. 3, 4.1) есть некоторое разложение единицы пространства. Это разложение индуцирует меру μ, определенную на классе измеримых

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

множеств со значениями в базе E пространства Y (см. 1, § 5). Для рассматриваемого сейчас случая можно показать, как обычно, что всякая непрерывная функция f является измеримой относительно σ — кольца S борелевских множеств на прямой; отсюда следует, что всякая борелевская функция измерима.

Если каждой измеримой суммируемой вещественной функции $f(\lambda)$, рассматриваемой на прямой $[\infty, -\infty)$, сопоставить элемент $f(\xi) \in Y$, определяемый равенством

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\mu,$$

то множество элементов $\{f(\xi)\}$ можно рассматривать как множество элементов, представимых в виде функции от заданного элемента $\xi \in Y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. И. Клементьев, труды Томского гос. ун-та, т. 155, 1961.
2. П. Халмош, Теория меры, Москва, 1953.
3. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва, 1950.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ТЕОРИИ МЕРЫ

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ и Н. Ф. ЖДАНОВА

Можно было бы назвать ряд работ, где имеются указания на возможность применения функционального анализа к теории меры (см., например, [1]). В предлагаемой заметке, которая примыкает к работам одного из ее авторов [2], [3], приводятся некоторые примеры таких применений. Аналогичные задачи рассматриваются в работе [4], где ряд вопросов теории меры трактуется в терминах теории структур. Нам кажется более естественным использовать теорию линейных полуупорядоченных пространств. В терминологии и в обозначениях в теории меры и в теории полуупорядоченных пространств мы будем следовать книгам [1] и [5].

§ 1. Пусть

$$T = \{t\}$$

— произвольное абстрактное множество, элементы которого обозначаются через t и называются точками; множество T будем называть также пространством. Через

$$S = \{E, F, \ldots\}$$

будем обозначать кольцо подмножеств из T, т. е. класс множеств из T, замкнутый относительно операций разности и соединения двух множеств. Если S, кроме того, замкнут относительно счетных соединений, то будем его называть σ — кольцом; в дальнейшем мы будем иметь дело с σ — кольцом.

Пространство T с выделенным в нем σ — кольцом называется измеримым пространством и обозначается через (T, S). Через $\mu, \nu, \ldots$ будем обозначать обобщенные меры, определенные на (T, S), т. е. действительные функции множества неотрицательные, счетно-аддитивные и обращающиеся в нуль на пустом множестве O. Мы будем допускать, что обобщенные меры могут принимать одно из бесконечных значений $-\infty$ или $+\infty$. Неотрицательная обобщенная мера называется просто мерой. Множество E, принадлежащее S, называется множеством обобщенной конечной меры относительно μ, если $|\mu(E)| < \infty$; обобщенная мера μ называется конечной, если каждое множество E имеет конечную обобщенную меру. Если для любого $E \subset S$ найдется последовательность $\{E_n\} \subset S$ такая, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

и $|\mu(E_n)| < \infty$, 1, 2, 3, ...,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

то μ называется σ — конечной. Если $T \in S$ и имеет конечную или σ — — конечную обобщенную меру, то μ называется соответственно вполне конечной или σ — вполне конечной обобщенной мерой. Обобщенная мера называется полной, если, из $E \in S$, $F \subset E$ и $\mu(E) = 0$ следует $F \in S$. Мы будем рассматривать полные обобщенные меры.

§ 2. Пусть

$$Z = \{\mu\}$$

— совокупность всех обобщенных мер на измеримом пространстве (T, S). Если полагать для любого $E \in S$

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) \text{ и } (\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E),$$

где α — вещественное число, то $\mu_1 + \mu_2 \in Z$, $\alpha\mu \in Z$ и, таким образом Z будет линейным множеством. Если μ не является нулевым элементом и $\mu(E) \geqslant 0$ при всяком $E \in S$, т. е. если μ является мерой, то μ будем называть положительным элементом и писать $\mu > 0$. При таком полуупорядочении имеет место.

Теорема 1. Пространство Z является K — пространством [3].

Отсюда ясно, что те или иные свойства пространства Z и его элементов могут быть выражены в терминах теории меры и наоборот. Укажем некоторые примеры.

1. Для каждого элемента $\mu \in Z$ определены его положительная и отрицательная части $\mu_+ \geqslant 0$ и $\mu_- \geqslant 0$ и

$$\mu = \mu_+ - \mu_-, \tag{1}$$

а также определены модуль $|\mu|$ и $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. С точки зрения теории меры элементы μ_-, μ_+ и $|\mu|$ суть соответственно нижняя, верхняя и полная вариация меры μ; а равенство (1) есть разложение Жордана обобщенной меры μ.

2. Будем говорить, что обобщенная мера ν абсолютно непрерывна относительно обобщенной меры μ, если равенство $|\mu|(E) = 0$ всегда влечет $|\nu|(E) = 0$. Легко видеть, что это определение равносильно тому, что подпространство Z_μ пространство Z, порожденное элементом μ, содержит в качестве компоненты подпространство Z_ν, порожденное элементом ν. (Относительно используемых здесь понятий см. [1]).

Действительно, пусть ν абсолютно непрерывна относительно μ. Если бы Z_ν не была компонентой пространства Z_μ, то нашелся бы элемент $\nu' \in Z_\nu$ такой, что $\inf(\nu', \mu) = 0$, и тогда, как можно показать, нашлось бы множество $E \in S$ такое, что $\mu(E) = 0$, $\nu'(E) \neq 0$, следовательно, и $|\nu|(E) \neq 0$, что противоречит условию. Наоборот, если Z_ν — — указанная компонента, то из $|\mu|(E)$ вытекает $|\nu|(E) = 0$, и, следовательно, $|\nu(E)| = 0$ по самому определению компоненты.

3. Обобщенные меры μ и ν называются взаимно сингулярными, если в T существуют непересекающиеся множества A и B такие, что $A \cup B = T$, и какое бы ни было измеримое множество E, множества $A \cap E$ и $B \cap E$ всегда измеримы и.

$$|\mu|(A \cap E) = |\nu|(B \cap E) = 0.$$

Сингулярность обобщенных мер равносильна тому, что μ и ν как элементы полуупорядоченного пространства Z являются дизъюнктными, т. е. $\inf(|\mu|, |\nu|) = 0$

§ 3. Пусть

$$X = \{x\} \equiv \{x(t)\}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

— совокупность всех заданных на T измеримых, относительно пространства (X, S) функций. Будем рассматривать X как линейное множество обычным образом. Будем считать $x > 0$, если $x(t) \geqslant 0$ в каждой точке и если существует измеримое множество e такое, что $x(t) > 0$ при $t \in e$. Тогда X будет K—пространством, причем аксимома V в определении K—пространства выполняется для счетных множеств из X, т. е. для всякой, ограниченной сверху последовательности $\{x_n\} \subset X$ существует $\sup \{x_n\}$ [3].

Пусть $\overline{X} = \{f\}$ — сопряженное к X пространство всех (0) — линейных функционалов, определенных на пространстве X. Имеет место

Теорема 2. Пространство $\overline{X} = \{f\}$ изоморфно пространству $Z = \{\mu\}$, при этом если элементу $\mu \in Z$ соответствует элемент $f \in X$, то при любом $E \in S$.

$$\mu(E) = f(x_E),$$

где X_E — характеристическая функция множества E [3].

§ 4. Из возможных применений указанных результатов к теории меры остановимся на доказательстве следующей теоремы Радона-Никодима.

Теорема 3. Пусть (T, S, μ) пространство с заданной вполне σ—конечной мерой μ. Если σ—конечная обобщенная мера ν, заданная на S, абсолютно непрерывна относительно μ, то на T существует конечная измеримая функция $x(t)$ такая, что

$$\nu(E) = \int_E x(t)\, d\mu$$

для любого измеримого множества E. Такая функция $x(t)$ единственна в том смысле, что если

$$\nu(E) = \int_E y(t)\, d\mu$$

для любого измеримого множества E, то $x(t) = y(t)$ почти всюду относительно меры μ.

Доказательство. Так как по условию T есть соединение счетного числа измеримых множеств, на каждом из которых μ и ν конечны, то, не нарушая общности, можно предполагать, что μ и ν конечны Кроме того, в силу равенства $\nu = \nu_+ - \nu_-$ достаточно доказать теорему в предположении, что μ и ν являются мерами. Пусть теперь Z_μ— —компонента в Z, порожденная элементом μ. Согласно теореме 3 пространство Z_μ изоморфно пространству $\overline{X}_\mu$, сопряженному к пространству X_μ измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (T, S, μ). Так как функционал

$$f_1(x) = \int_T x(t)\, d\mu$$

является существенно положительным на пространстве X_μ, то, как известно ([1], стр. 434), для всякого $f \in \overline{X}_\mu$ найдется суммируемая относительно меры μ функция $y(t)$ такая, что при любом $x \in X_\mu$ будет иметь место равенство

$$f(x) = f_1(xy) = \int_T x(t)\, y(t)\, dt$$

Так как Z_ν является компонентой пространства Z_μ, то $\nu \in Z_\mu$ и, сле-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

довательно, в силу изоморфизма между пространствами Z_μ и $\bar{X}_\mu$ элементу ν соответствует функционал $f \subset \bar{X}_\mu$ и поэтому

$$\nu(E) = f(\chi_E) = \int_T \chi_E(t)\, y(t)\, dt = \int_E y(t)\, d\mu,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва, 1950.
2. З. И. Клементьев, Уч. зап. ТГУ, № 14, 1950.
3. З. И. Клементьев, Уч. зап. ТГУ, № 17, 1950.
4. V. Vikraman, Math. student, 23, № 1—2, 1955.
5. П. Халмош, Теория меры, Москва, 1950.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДЛИНЫ КРИВОЙ В АБСТРАКТНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

З. И. КЛЕМЕНТЬЕВ

В настоящей заметке указывается одно определение кривой и ее длины в абстрактном метрическом пространстве с мерой и показывается эквивалентность этого определения и обычного определения.

Пусть

$$x = A(t) \tag{1}$$

отображение отрезка $[a, b]$ с обычной лебеговой мерой и топологией в метрическое пространство с мерой: (X, S, μ); в терминологии и обозначениях мы следуем здесь монографии [1]. Отображение A будем предполагать измеримым, то есть таким, что прообраз $M = A^{-1}(E)$ любого измеримого множества $E \in S$ является борелевским множеством в $[a, b]$. В качестве меры в X возьмем меру, индуцированную хаусдорфовой внешней мерой:

$$\mu^*(E) = \sup_{\varepsilon>0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\delta(E_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ \delta(E_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots \right\},$$

где $\delta(E)$ означает диаметр множества E.

Два непрерывных отображения

$$x' = A'(t') \text{ и } x'' = A''(t'')$$

вида (1), определенные соответственно на отрезках $[a', b']$ и $[a'', b'']$, называются эквивалентными, если существуют две непрерывные неубывающие функции

$$t' = \varphi'(t) \quad \text{и} \quad t'' = \varphi''(t),$$

определенные на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, такие, что

$$\varphi'(a) = a', \quad \varphi'(b) = b',$$

$$\varphi''(a) = a'', \quad \varphi''(b) = b''$$

и

$$A[\varphi'(t)] = A''[\varphi''(t)]$$

для любого $t \in [a, b]$.

Образ отрезка $[a, b]$ при отображении (1), где A произвольное отображение, принадлежащее классу всех эквивалентных ему отобра-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

жений, будем называть кривой, а за длину кривой будем брать число, конечное или бесконечное,

$$L = \sup \sum \mu(E_j),$$

где $E_j \in S$, $E_j = A(M_j)$, $M_j \subset [a, b]$ образуют конечную систему непересекающихся множеств и sup берется по всевозможным таким конечным системам. Если $L < \infty$, то кривая называется спрямляемой. Обычно за длину кривой в рассматриваемом случае принимается число

$$K = \sup \sum \rho [A(t_{i-1}), A(t_i)],$$

где sup берется по всевозможным конечным системам точек:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

(см., например, [2]) и где $\rho(x, y)$ означает расстояние между точками x и y в пространстве X.

Можно показать, что $K = L$. Проведем соответствующие рассуждения, опуская некоторые подробности и предполагая, что отображение A непрерывно. Пусть F_i — образ отрезка $[t_{i-1}, t_i] \in [a, b]$, то есть

$$F_i = A([t_{i-1}, t_i]).$$

Из определения меры μ в пространстве X и непрерывности отображения A следует, что

$$\mu(F_i) \geqslant \rho [A(t_{i-1}), A(t_i)]$$

и потому, очевидно, $L \geqslant K$. Предположим вопреки утверждению, что $L > K$ и, следовательно, $K < \infty$. Тогда, согласно определению числа L, найдется конечная система множеств $E_j \subset S$, где $E_j = A(M_j)$ и $M_j \subset [a, b]$ попарно не пересекаются, такая, что

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) > K.$$

По свойству меры μ для любого $\beta > 0$ найдется открытое (в относительном пространстве $A([a, b])$) множество $G_j \supset E_j$ такое, что

$$\mu G_j - \mu F_j < \beta.$$

Пусть

$$H_j = A^{-1}(G_j).$$

Заметим, что

$$\mu(A(\bar{H}_j)) = \mu(A(H_j)) = \mu G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу непрерывности отображения A для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma > 0$ такое, что если $\beta - \alpha < \sigma$, то

$$\rho(A(\alpha), A(\beta)) < \varepsilon,$$

поэтому, как нетрудно видеть, найдутся непересекающиеся отрезки $[\alpha_\kappa^j, \beta_\kappa^j] \subset \bar{H}_j$, $\beta_\kappa^j - \alpha_\kappa^j < \sigma$ и такие, что

$$\omega_j(\varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta(E_i) : G_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \ \delta(E_i) < \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\infty} \rho(A(\alpha_\kappa^j), A(\beta_\kappa^j)).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Откуда

$$\mu G_j \equiv \sup_{\varepsilon>0} \omega_j(\varepsilon) \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \rho\,(A(\alpha_\kappa^j),\ A(\beta_\kappa^j)),$$

где $\beta_\kappa^j - \alpha_\kappa^j < \varepsilon$, $\kappa = 1, 2, \ldots$.

Так как

$$\mu(G_j \cap G_s) < 2\beta,\ j \neq s,$$

то отрезки $[\alpha_\kappa^j, \beta_\kappa^j]$ и $[\alpha_\kappa^s, \beta_\kappa^s]$ можно брать не пересекающимися при $j \neq s$, $j, s = 1, 2, \ldots, n$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, и так, что

$$\mu G_j < \sum_{\kappa=1}^{\infty} \rho\,(A(\alpha_\kappa^j),\ A(\beta_\kappa^j)) + \gamma,$$

где γ можно считать малым вместе с β. Учитывая произвольность $\beta > 0$ и аддитивность меры μ, уже нетрудно видеть, что

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) \leqslant K,$$

что противоречит предположению. Таким образом $L = K$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Халмош, Теория меры, Москва, 1953.
2. А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, изд. Московского университета, 1954.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ОГРАНИЧЕНИЯ ДЛЯ ВЗАИМНОГО РОСТА МОДУЛЯ ФУНКЦИИ И МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. В. ЧЕРНИКОВ

Рассмотрим класс S_r функций

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots, \tag{1}$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ и имеющих вещественные коэффициенты $c_2, \dots$.

Имеет место следующая

Теорема. В классе S_r при заданных r, $0 < r < 1$, и $f(r)$ для $f'(r)$ справедливы точные оценки:

$$(1-r^2)\left(\frac{f(r)}{r}\right)^2 \leqslant f'(r) \leqslant \frac{1}{1-r^2}\left(\frac{f(r)}{r}\right)^2 (1-x^2)\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{4x^2}{1-x^2}}, \tag{2}$$

где x, $0 < x < r$, однозначно определяется уравнением

$$\frac{f(r)}{r}(1+x)^2\left(\frac{r}{x}\right)^{\frac{2x}{1+x}} = 1, \text{ если } f(r) \leqslant r,$$

и уравнением

$$\frac{f(r)}{r}(1-x)^2\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{2x}{1-x}} = 1, \text{ если } f(r) \geqslant r.$$

Доказательство. Известно [1], что достаточно доказать теорему для функций $f(z) \in S'_r$, т. е. представимых в виде

$$f(z) = \lim_{t \to \infty} e^t f(z, t), \tag{3}$$

где $f(z, t)$ как функция от z регулярна в $|z| < 1$, $|f(z,t)| < 1$ в $|z| < 1$ и $f(0, t) = 0$, $f'_z(0, t) > 0$, а как функция от t есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\,\frac{1-f^2}{1-2f\cos\Theta + f^2}, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию $f(z, 0) = z$; здесь $\Theta = \Theta(t)$ есть любая вещественная кусочно-непрерывная функция в $0 \leqslant t < \infty$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из уравнения (4), рассматриваемого как тождественное соотношение, в котором под f понимается функция $f=f(r,t)$, следует, что $s=f(r,t)$ есть монотонно убывающая функция от t, причем при изменении t от 0 до ∞ s изменяется от r до 0. Это позволяет и обратно t рассматривать как монотонно убывающую функцию от s, определенную в $0<s\leqslant r$.

Из (4) и (3) получаем:

$$\ln\frac{f(r)}{r}=\int_0^r (H(s)-1)\frac{ds}{s}, \tag{5}$$

где

$$H(s)=\frac{1-2s\cos\Theta+s^2}{1-s^2}. \tag{6}$$

Из (4) посредством дифференцирования по r и последующего деления на f'_r имея в виду (3), (6), находим:

$$\ln\left[(1-r^2)\frac{rf'(r)}{f(r)}\right]=\int_0^r\left(1-\frac{1}{H(s)}\right)\frac{ds}{s}. \tag{7}$$

Функция $H(s)$, кусочно-непрерывная в $0<s\leqslant r$, подчинена в этом промежутке неравенству

$$\frac{1-s}{1+s}\leqslant H(s)\leqslant\frac{1+s}{1-s}. \tag{8}$$

Обратно, каждой такой функции $H(s)$, кусочно-непрерывной в $0<s\leqslant r$, соответствует по (6) и (4), где $f=s$, кусочно-непрерывная в $0\leqslant t<\infty$ функция $\cos\Theta=\cos\Theta(t)$, а следовательно, по (4), где $f=f(z,t)$, и (3), и некоторая функция $f(z)\in S'_r$, для которой имеют место формулы (5) и (7).

В силу формул (5) и (7) и только что сказанного задача об экстремуме $f'(r)$ при заданных r и $f(r)$ сводится к задаче об экстремуме интеграла

$$\int_0^r\left(1-\frac{1}{H(s)}\right)\frac{ds}{s}$$

при заданном (возможном) значении интеграла

$$\int_0^r (H(s)-1)\frac{ds}{s}$$

относительно всех кусочно-непрерывных функций $H(s)$, удовлетворяющих в $0<s\leqslant r$ неравенству (8). Эта задача решена Г. М. Голузиным Им установлены [2] в классе $S\ni S_r$ функций (1), регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, при заданных z, $|z|<1$, и $|f(z)|$ точные оценки для $|f'(z)|$, из которых оценки (2) следуют при $f(z)\in S_r$ и $z=r$, $0<r<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин, К теории однолистных функций, Математ. сб., т. 29, 1, 1951.
2. Г. М. Голузин, Некоторые вопросы теории однолистных функций, Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. XXVII, 1949, 51—56.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О ВКЛЮЧЕНИИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОДНОСТОРОННЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА В ТЕОРИЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Р. М. МАЛАХОВСКАЯ

В работах автора [1], [2], [3] строилось операционное исчисление на основе понятия обобщенной функции. Настоящая заметка посвящена двум вопросам. Во-первых, имеется в виду показать, что указанное нами построение включает операционное исчисление на основе одностороннего преобразования Лапласа и является более широким. В связи с этим, приводится ряд примеров реализации функции от s— оператора дифференцирования. Предлагаемое операционное исчисление следует рассматривать только как схему. Методическая задача построения подробной теории потребовала бы более полного и систематического изложения. Во-вторых, рассматривается вопрос о соотношении между полем операторов Я. Микусинского и рассматриваемым нами кольцом обобщенных функций.

Для удобства чтения перечислим некоторые, употребляемые далее понятия и обозначения; более подробно они изложены в указанных выше работах. В согласии с терминологией в [4] обобщенные функции понимаются как линейные функционалы в основном пространстве $K = \{\varphi\}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ действительной переменной x. Через $K'_+ = \{f, g, \dots\}$ обозначается пространство всех обобщенных функций в K, носители которых расположены на полуоси $[0, \infty)$. Через D'_+ обозначается множество всех обобщенных функций, носитель каждой из которых ограничен слева. Каждое из множеств K'_+ и D'_+ является линейным подпространством пространства K' и кольцом без делителей нуля, если операцию сложения определить как обычное сложение и операцию умножения определить как свертку; дельта-функция $\delta(x)$ играет роль единицы кольца. Обобщенная функция u, удовлетворяющая уравнению

$$f = u * g,$$

где $f \in K'_+$, $g \in K'_+$ обозначается через $\frac{f}{g}$. Свертку $u * g$ будем обозначать также через ug. Легко видеть, что множество всех таких отношений $\frac{f}{g}$ совпадает с D'_+ и что этими отношениями при сложении и умножении (свертке) можно оперировать по обычным правилам алгебры. Обобщенные функции $\frac{f}{g} \in D'_+$ будем называть также опе-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

раторами. Заметим, что обобщенные функции: $\eta(x)$ (функция Хевисайда), $\delta, \delta', \delta'', \ldots$ входят в D'_+. Функции $\eta(x)$ и $\delta'(x)$ будем обозначать также через l и s соответственно и называть операторами интегрирования и дифференцирования. Число a можно рассматривать одновременно и как числовой множитель в пространстве K'_+ и как оператор, определяемый равенством: $a = a\delta$.

§ 1. Операторное преобразование Лапласа для локально суммируемых функций

Приведем предварительно понятие интеграла от операторной функции $f(\lambda)$, то есть от функции, значениями которой являются обобщенные функции. Пусть $f(\lambda)$ определена в области $\lambda \in G$. Интеграл

$$I = \int_G f(\lambda)\, d\lambda$$

понимается как обобщенная функция, значение которой на любой основной функции $\varphi \in K$ определяется равенством:

$$(I, \varphi) = \int_G (f(\lambda), \varphi)\, d\lambda.$$

Пусть теперь $f(\lambda)$ обычная локально суммируемая функция от λ, тождественно равная нулю на $(-\infty, 0)$. Будем рассматривать $f(\lambda)$ как операторную функцию, то есть как обобщенную функцию, значение которой в каждой точке λ определяется равенством:

$$f(\lambda) = \delta f(\lambda).$$

Пусть $\delta(x-\lambda)$ — сдвинутая δ — функция, определение которой дано в [4], стр. 15. Покажем, что

$$\int_0^\lambda \delta(x-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0, \lambda] \\ 0, & \text{если } x \in [0, \lambda], \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\delta(x-\lambda) f(\lambda) = \delta(x-\lambda) * f(\lambda).$$

Имеем:

$$\int_0^\lambda (\delta(x-\lambda) f(\lambda), \varphi)\, d\lambda = \int_0^\lambda f(\lambda) (\delta(x-\lambda), \varphi(x))\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\lambda f(\lambda) \varphi(\lambda)\, d\lambda = (\bar{f}(x), \varphi(x)),$$

что и означает справедливость равенства (1). Из (1) очевидным образом следует, что

$$\int_0^\infty \delta(x-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda \delta(x-\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = f(x). \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Известно [3], что $\delta(x-\lambda)$ является решением дифференциального уравнения в обобщенных функциях:

$$g'(\lambda) = -sg(\lambda)$$

при условии:

$$g(0) = \delta(x) \equiv 1.$$

Чтобы подчеркнуть зависимость этого решения от s, будем обозначать его через $e^{-\lambda s}$. Поэтому равенство (2) можно переписать в виде

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda = f(x). \tag{3}$$

Интеграл в (3) будем называть операторным преобразованием Лапласа функции $f(x)$. Формулу (3) можно интерпретировать как тождественное отображение множества локально суммируемых функций, выраженных в функции от s, на себя. Действительно, например, в простейших случаях имеем:

$$l = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\lambda = \frac{1}{s},$$

$$x_+ = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\lambda d\lambda = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda s} s\lambda d\lambda = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\lambda = \frac{1!}{s^2},$$

$$x_+^2 = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\lambda^2 d\lambda = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-\lambda s} s^2\lambda^2 d\lambda = \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\lambda = \frac{2!}{s^3}.$$

Вообще,

$$x_+^n = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим через $\Lambda = \{f\}$ — множество всех локально суммируемых комплекснозначных функций, каждая из которых равна нулю вне $[0, \infty)$ и для каждой из которых существует обычное преобразование Лапласа:

$$\hat{f}(p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx, \quad p = \sigma + i\tau, \tag{4}$$

($Re\, p = \sigma > a_c$, где a_c — абсцисса абсолютной сходимости интеграла (4)). Пусть $\hat{\Lambda} = \{\hat{f}\}$ — множество всех преобразований Лапласа, $f \in \Lambda$. Через $L = \{f\}$ обозначим множество всех локально суммируемых функций $f(x)$, равных тождественно нулю вне $[0, \infty)$. Так как каждая функция $f \in L$ реализует регулярный функционал в основном пространстве K, то

$$\Lambda \subset L \subset K'_+ \subset D'_+.$$

Между множеством $\hat{\Lambda}$ и множеством операторных преобразований функций из Λ устанавливается взаимнооднозначное соответствие:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\hat{f}(p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx \sim \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda = f(x), \tag{5}$$

что очевидным образом следует из равенства (3) и взаимнооднозначного соответствия между множествами $\hat{\Lambda}$ и Λ. Очевидно также, что установленное соответствие линейно изоморфно, то есть сохраняет операции сложения и умножения на число.

Если в множестве всех операторных преобразований Лапласа в качестве операции умножения рассматривать свертку, а в множестве $\hat{\Lambda}$ — обычное умножение, то при указанном соответствии сохраняется также операция умножения. Действительно, если $\hat{f}(p)$ и $\hat{g}(p)$ суть преобразования Лапласа функций $f(x)$ и $g(x)$, а $F(s)$ и $G(s)$— соответственно их операторные преобразования, то, как известно, произведение $\hat{f}(p)\,\hat{g}(p)$ есть преобразование Лапласа для свертки $f(x) * g(x)$ и в силу равенства (3)

$$F(s)\,G(s) = F(s) * G(s) = f(x) * g(x) \sim \hat{f}(p)\,\hat{g}(p). \tag{6}$$

Заметим, что равенство

$$F(s)\,G(s) = f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt \tag{7}$$

можно считать аналогом теоремы умножения в операционном исчислении на основе преобразования Лапласа. Если умножить сверточно обе части равенства (7) на s, то получим аналог теоремы Дюгамеля:

$$sF(s)\,G(s) = s\int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt.$$

Если $f(x)$ обладает непрерывной производной, то

$$sF(s)\,G(s) = s * f(x) * g(x) = (s * f(x)) * g(x) =$$

$$= f(0)\, g(x) + f'(x) * g(x) = f(0)\, g(x) + \int_0^x f'(t)\, g(x-t)\, dt.$$

Мы ограничиваемся здесь сделанными в этом параграфе замечаниями общего характера о соотношении между частью классического операционного исчисления и операционным исчислением на основе понятия обобщенной функции.

§ 2. Примеры реализации обобщенных функций от s

Для приложений операционного исчисления важно указать достаточно широкий класс обобщенных функций (операторов), выражаемых через оператор s, каждую из которых можно представить в виде обычной функции от x. В этом параграфе указываются примеры такой реализации. Можно было бы показать на основе указанного в предыдущем параграфе соотношения (6), что сохраняются все соответству-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ющие формулы, приводимые в таблицах по операционному исчислению, например, в [5]. Однако с нашей точки зрения, является существенным установление этих формул без использования преобразования Лапласа. Поэтому рассмотрению примеров мы уделяем значительное место, имея в виду прежде всего иллюстрацию способов реализации.

В [1] мы уже приводили примеры реализации некоторых операторов $F(s)$, выраженных через оператор дифференцирования s. Приведем здесь основные из этих формул.

1. $\dfrac{1}{s} = l \equiv \eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

2. $\dfrac{1}{s^k} = \dfrac{x_+^{k-1}}{(k-1)!} = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{cases}$

3. $\dfrac{1}{s+a} = e^{-ax} \in K'_+.$

4. $\dfrac{1}{(s+a)^k} = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-ax} \in K'_+.$

Из формул 1—4 очевидным образом следуют формулы:

5. $\dfrac{Q_m(s)}{P_n(s)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{Q_m(z_k)}{P'_n(z_k)} e^{z_k x}, \quad P'_n(z) = \dfrac{d}{dz} P_n(z),$

где $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ — многочлены степени m и n соответственно, $m < n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — простые корни многочлена $P_n(z)$.

6. $\dfrac{1}{P_n(s)} = \dfrac{x_+^{r_1-1}}{(r_1-1)!} e^{z_1 x} * \dfrac{x_+^{r_2-1}}{(r_2-1)!} e^{z_2 x} * \ldots * \dfrac{x_+^{r_k-1}}{(r_k-1)!} e^{z_k x},$

где $z_1, z_2, \ldots, z_k$ — корни многочлена $P_n(z)$, имеющие кратности $r_1, r_2, \ldots, r_k$ соответственно, $\sum_{i=1}^{n} r_i = n.$

Принципиально все формулы реализации для рациональных выражений $F(s)$, например, в таблицах [5] под номерами 1.1—1.163 могут быть получены из формул 1—6; при этом имеется в виду, что выражение $F(p)$ в [5] должно быть заменено на $\dfrac{F(s)}{s}$. Фактически большинство из указанных формул могут быть получены непосредственно из тех или иных соображений. Покажем, в частности, что если $F(s) = f(x)$, то

$$F(s+a) = e^{-ax} \cdot f(x), \tag{8}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где знак $\cdot$ означает умножение. Так как e^{-ax} — бесконечно дифференцируемая функция, то, как известно, e^{-ax} является мультипликатором в пространстве K, то есть можно определить умножение e^{-ax} на любую обобщенную функцию $f \in K'$ равенством:

$$(e^{-ax} \cdot f, \varphi) = (f, e^{-ax}\varphi(x)).$$

Заметим, что

$$s + a = s \cdot e^{-ax}. \tag{9}$$

Действительно,

$$(s \cdot e^{-ax}, \varphi) = (s, e^{-ax}\varphi(x)) = (\delta'(x), e^{-ax}\varphi(x) =$$

$$= -(\delta(x), -ae^{-ax}\varphi(x) + e^{-ax}\varphi'(x)) = a\varphi(0) - \varphi'(0) =$$

$$= a(\delta(x), \varphi(x)) + (\delta'(x), \varphi(x)) = (s + a, \varphi(x)),$$

что и означает справедливость равенства (9). Таким образом,

$$F(s + a) = F(e^{-ax} \cdot s),$$

откуда заключаем, что если $F(s) = f(x)$, то

$$F(s + a) = e^{-ax} f(x).$$

Например, а) пусть $F(s) = \frac{1}{s}$, то есть $F(s) = l = \eta(x)$. Тогда согласно равенству (8) будем иметь:

$$\frac{1}{s + a} = e^{-ax} \cdot \eta(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geqslant 0 \\ o, & x < 0. \end{cases}$$

б) Пусть $F(s) = \frac{1}{s^2}$, то есть $F(s) = f(x) \equiv x_+$; тогда аналогично случаю а) имеем:

$$\frac{1}{(s + a)^2} = x_+ \cdot e^{-ax} = \begin{cases} xe^{-ax}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Отметим одно свойство мультипликатора e^{-ax}. Как видим из примеров а) и б)

$$(e^{-ax} \cdot l) * (e^{-ax} \cdot l) = e^{-ax}(l * l).$$

Покажем, что вообще, если произвольные обобщенные функции f и g умножаются на e^{-ax}, то их свертка $f * g$ также умножается на e^{-ax}. В самом деле, пусть $\varphi \in K$ — произвольная основная функция, тогда

$$([f(x) \cdot e^{-ax}] * [g(x) \cdot e^{-ax}], \varphi) = (f(x)e^{-ax}, (g(y)e^{-ay}, \varphi(x+y))) =$$

$$= (f(x), (g(y), e^{-a(x+y)}\varphi(x + y))) = (f(x) * g(x), e^{-ax}\varphi(x)) =$$

$$= (e^{-ax} \cdot [f(x) * g(x)], \varphi(x)),$$

то есть

$$(f(x) \cdot e^{-ax}) * (g(x) \cdot e^{-ax}) = e^{-ax} \cdot (f(x) * g(x)),$$

что и утверждалось.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Равенство (8) может быть использовано при выводе формул реализации для иррациональных и других выражений $F(s)$, что будет сделано ниже.

Приведем примеры реализации иррациональных выражений от оператора дифференцирования s. Для вывода многих формул реализации существенным является использование аппарата рядов обобщенных функций, при этом под суммой ряда

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots$$

понимается предел частичных сумм. Прежде всего приходится использовать степенные ряды. Пусть $F(z)$ разлагается в ряд Тейлора. Под обобщенной функцией $F(s)$ будем понимать ряд:

$$\frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \ldots + \frac{a_n}{s^{n+1}} + \ldots,$$

где a_k суть коэффициенты Тейлора функции $F(z)$.

7. $\dfrac{1}{S^\lambda} = l^\lambda = \dfrac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, (см. [4], стр. 66);

в частности,

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = l^{1/2} = \frac{x_+^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{10}$$

8. Пусть $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}}$. Полагаем по определению

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} (2k-1)!!}{s^{2k+1} (2k)!!} \quad ((-1)!! = 0! = 1). \tag{11}$$

Пользуясь равенством примера 2, ряд (11) можем записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} x_+^{2k} (2k-1)!!}{(2k)!\,(2k)!!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{ax}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что ряд (12) сходится в смысле сходимости рядов обобщенных функций к обобщенной функции

$$I_0^+(ax) = \begin{cases} I_0(ax), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где I_0 — функция Бесселя. В самом деле, пусть

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{2k} x_+^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и $\varphi(x) \in K$ — произвольная функция, $\varphi(x) \equiv 0$ вне $[-d, d]$. Рассмотрим выражение:

$$|(I_0^+, \varphi) - (\sigma_n, \varphi)| \leqslant \int_0^\infty |I_0(ax) - \sigma_n(x)|\,|\varphi(x)|\,dx.$$

Очевидно, что для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу финитности функции $\varphi(x)$ найдется такое N, что для всех $n \geqslant N$ будем иметь:

$$\int_0^\infty |I_0(ax) - \sigma_n(x)|\,|\varphi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$I_0^+(ax) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$$

и, следовательно,

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} = \begin{cases} I_0(ax), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

9. Оператор $\dfrac{1}{s(a+\sqrt{s})}$. Умножив сверточно числитель и знаменатель на оператор $\sqrt{s} - a$, получим:

$$\frac{1}{s(a+\sqrt{s})} = \frac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)} - \frac{a}{s(s-a^2)}.$$

Используя формулы реализации из примеров 1, 3, 7, придем к равенству:

$$\frac{1}{s(a+\sqrt{s})} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} * e^{a^2x} - a\eta(x) * e^{a^2x} =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{a^2(x-t)}\,dt - a\int_0^x e^{a^2(x-t)}\,dt$$

или, что то же, к равенству:

$$\frac{1}{s(a+\sqrt{s})} = \frac{1}{a}\left(1 - e^{a^2x}\,\mathrm{erfc}\,(a\sqrt{x})\right),$$

где

$$\mathrm{erfc}\,(a\sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{x}}^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

10. Оператор $\dfrac{1}{\sqrt{a+s}}$. Для получения реализации этого оператора воспользуемся равенством (8) и реализацией оператора примера 7. Будем иметь:

$$\frac{1}{\sqrt{s+a}} = e^{-ax} \cdot \frac{x_+^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

11. Оператор $\frac{1}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+a)}$. Из примеров 7 и 9 имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+a)} = s * \frac{1}{\sqrt{s}} * \frac{1}{s(\sqrt{s}+a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} *$$

$$* \frac{s}{a}\left(1 - e^{a^2 x}\operatorname{erfc}(a\sqrt{x})\right) = e^{a^2 x}\operatorname{erfc}(a\sqrt{x}).$$

12. Оператор $\frac{1}{s+b+a\sqrt{s+b}}$. Легко видеть, что для получения реализации этого оператора равенство (8) следует применить к функционалу, рассмотренному в предыдущем примере, тогда получим:

$$\frac{1}{s+b+a\sqrt{s+b}} = e^{(a^2-b)x}\operatorname{erfc}(a\sqrt{x}) \in K'_+.$$

Аналогично можно получить реализации и других иррациональных операторов $F(s)$.

Приведем примеры реализации показательных выражений.

13. Оператор e^{-as}. В параграфе 1 мы обозначали через e^{-as} оператор сдвига, то есть обобщенную функцию $\delta(x-a)$, так что

$$e^{-as} = \delta(x-a)$$

(эту обобщенную функцию мы будем называть гиперболической показательной функцией). Пользуясь этим равенством, можно получить реализацию некоторых обобщенных функций, которые по аналогии с обычным случаем будем называть гиперболическими показательными функциями.

14. Оператор $\frac{e^{-as}}{s}$. Имеем:

$$\frac{1}{s}e^{-as} = \frac{1}{s} * \delta(x-a) = \eta_1(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geqslant a \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

15. Оператор $\frac{1-e^{-as}}{s^2}$ имеет реализацию:

$$\frac{1-e^{-as}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} * \delta(x-a) = x_+ - (x-a)_+,$$

где

$$(x-a)_+ = \begin{cases} x-a, & x \geqslant a \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

16. Оператор $\frac{1}{s(e^s-1)}$. Представим его в виде:

$$\frac{1}{s(e^s-1)} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-s})^{k+1}, \qquad (13)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где

$$(e^{-s})^{k+1} = \underbrace{e^{-s} * e^{-s} * \cdots * e^{-s}}_{k+1} = \delta(x-1) * \delta(x-1) * \cdots * \delta(x-1).$$

Легко видеть, что

$$\delta(x-1) * \delta(x-1) * \cdots * \delta(x-1) = \delta(x-[k+1])$$

и

$$\frac{1}{s} * \delta(x-[k+1]) = \eta_1(x-[k+1]) = \begin{cases} 1, & x \geqslant k+1 \\ 0, & x < k+1. \end{cases} \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), получим:

$$\frac{1}{s(e^s-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(x-[k+1]) = [x],$$

где через $[x]$ обозначена целая часть x.

17. Оператор $\frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}}$. Под этим оператором понимаем ряд из обобщенных функций:

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k!\, s^{k+1}}.$$

Используя формулу примера 2, получим:

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k * a^k}{(k!)^2} = I_0^+(2\sqrt{ax}) = \begin{cases} I_0(2\sqrt{ax}), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Аналогично можно получить и все другие формулы 3.1—3.74 из [5].

18. Через $e^{-a\sqrt{s}}$ обозначается обобщенная функция $F(a)$, зависящая от параметра a, такая, что

$$F(a) = \frac{a}{2\sqrt{\pi x^3}} e^{-\frac{a^2}{4x}}, \quad F(0) = \delta(x).$$

Пользуясь этим равенством, мы можем получить реализацию выражений, содержащих оператор $e^{-a\sqrt{s}}$.

19. Оператор $\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$, $a > 0$. Имеем:

$$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} = \eta_1(x) * \frac{a}{2\sqrt{\pi x^3}} e^{-\frac{a^2}{4x}} = \int_0^x \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}} dt = \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right).$$

Комбинируя ранее полученные реализации рациональных и иррациональных выражений операторов с вновь полученной реализацией показательных гиперболических и параболических операторов и ис-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

пользуя некоторые другие реализации, мы могли бы получить реализацию любого оператора $F(s)$, указанного в [5].

§ 3. О соотношении между полем M операторов Микусинского и кольцом D'_+ операторов

В этом параграфе показывается, что кольцо D'_+ линейно изоморфно подкольцу поля M операторов Микусинского. Приведем предварительно определение поля M по Микусинскому [6].

Класс функций, тождественно равных нулю на левой полуоси $(-\infty, 0)$ и непрерывных на $[0, \infty)$, обозначается через $C = \{a, b, c, \ldots\}$. Символ $\frac{a}{b}$, $a \in C$, $b \in C$, $b \neq 0$ называется оператором. Если существует элемент $c \in C$ такой, что $a = b * c$, то считается, что $\frac{a}{b} = c$. Через $\{\alpha\}$, $\alpha = \text{const}$ обозначается функция из C, равная тождественно α. Оператор вида

$$\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$$

называется числовым оператором. Два оператора $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a * d = b * c$.

Оператор

$$\frac{\{1\}}{\{1\}} = \frac{\{\alpha\}}{\{\alpha\}}$$

называется единицей и обозначается через 1. Через l обозначается $\{1\}$, l называется оператором интегрирования. Оператор $\frac{1}{l}$ обозначается через s и называется оператором дифференцирования.

Для операторов определяются действия по обычным правилам алгебры, при этом вместо обычного произведения рассматривается сверточное произведение. Операторы Микусинского образуют поле, которое мы обозначим через M.

Пусть $\frac{f}{g} \in D'_+$ произвольный элемент и f_0 — функционал, отвечающий бесконечно дифференцируемой финитной функции, носитель которой расположен на левой полуоси $[0, \infty)$. Известно, что тогда $f_0 * f$, $f_0 * g$ есть функционалы типа бесконечно дифференцируемых функций ([7], стр. 174). Нетрудно видеть, что функционалы $f_0 * f$ и $f_0 * g$ имеют носители на $[0, \infty)$. Следовательно,

$$\frac{f_0 * f}{f_0 * g} \in M.$$

Сопоставим обобщенной функции $\frac{f}{g} \in D'_+$ оператор Микусинского

$$\frac{f_0 * f}{f_0 * g} \in M:$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{f}{g} \sim \frac{f_0 * f}{f_0 * g}.$$

Сделаем несколько замечаний.

а) Сопоставление не зависит от выбора f_0. Действительно, если f_0^1 есть другая финитная бесконечно дифференцируемая функция указанного типа, то

$$\frac{f_0^1 * f}{f_0^1 * g} = \frac{f_0 * f}{f_0 * g}.$$

б) Если $\frac{f}{g} \in C \subset D'_+$, то

$$D'_+ \ni \frac{f}{g} \sim \frac{f}{g} \in C \subset M.$$

Действительно,

$$D'_+ \ni \frac{f}{g} \sim \frac{f_0 * f}{f_0 * g} = \frac{f}{g} \in M.$$

в) Если

$$M \ni \frac{a_1}{b_1} \equiv \frac{f_0 * f_1}{f_0 * g_1} \sim \frac{f_1}{g_1} \in D'_+, \quad M \ni \frac{a_2}{b_2} \sim \frac{f_2}{g_2} \in D'_+ \quad \text{и} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

то, очевидно,

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2},$$

то есть соответствие однозначно.

Образ D'_+ в M обозначим через M'.

г) При рассматриваемом соответствии сохраняются операции сложения и свертки. В самом деле, пусть

$$\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_0 * f_1}{f_0 * g_1}, \qquad \frac{f_2}{g_2} \sim \frac{f_0 * f_2}{f_0 * g_2}.$$

Имеем:

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 * g_2 + g_1 * f_2}{g_1 * g_2} \sim \frac{f_0 * (f_1 * g_2 + g_1 * f_2)}{f_0 * g_1 * g_2} =$$

$$= \frac{f_0 * f_1}{f_0 * g_1} + \frac{f_0 * f_2}{f_0 * g_2}.$$

Очевидно также, что свертке $\left(\frac{f_1}{g_1} * \frac{f_2}{g_2}\right) \in D'_+$ соответствует свертка

$$\frac{f_0 * f_1}{f_0 * g_1} * \frac{f_0 * f_2}{f_0 * g_2} \text{ в } M.$$

д) Обобщенной функции δ соответствует единица. Действительно,

$$\delta = \frac{\delta}{\delta} \sim \frac{f_0 * \delta}{f_0 * \delta} = 1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

е) Обобщенной функции $\delta^{(n)}$ соответствует s^n. В самом деле,

$$\delta^{(n)} = \frac{\delta^{(n)}}{\delta} \sim \frac{f_0 * \delta^{(n)}}{f_0 * \delta} = \frac{s^n f_0}{f_0} = s^n.$$

Можно было бы указать и другие примеры соответствий.

ж) При указанном соответствии между кольцами D'_+ и M' сохраняется операция предельного перехода в том смысле, что если $\frac{f_n}{g_n} \to \frac{f}{g}$ в смысле сходимости обобщенных функций, то

$$\frac{f_0 * f_n}{f_0 * g_n} \to \frac{f}{g}$$

также в смысле сходимости обобщенных функций. Для наших целей этого очевидного соответствия достаточно, однако мы покажем, что

$$\frac{f_0 * f_n}{f_0 * g_n} \to \frac{f_0 * f}{f_0 * g}$$

в смысле определения сходимости последовательности операторов, данного Я. Микусинским. С этой целью приведем последнее определение и некоторые сведения из теории линейных топологических пространств.

1°. Последовательность операторов $\frac{a_n}{b_n} \in M$, $n = 1, 2, \ldots$, называется по Микусинскому сходящейся к оператору $\frac{a}{b}$, если существует оператор $\frac{p}{q} \in M$ и последовательность $\{P_n(x)\}$ функций класса C со следующими свойствами:

A. Последовательность $\{P_n(x)\}$ сходится к $P(x)$ равномерно на каждом конечном промежутке $0 \leqslant x \leqslant x_0$,

B. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{q} P_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

C. $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} P(x)$, ([6], стр. 137).

2°. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — счетно-нормированное пространство. Множество $A \subset \Phi$ называется ограниченным, если каждая из норм пространства Φ ограничена на множестве A, то есть

$$\| \varphi \|_p \leqslant C_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \varphi \in A,$$

([7], стр. 44).

3°. Пусть Φ' — пространство, сопряженное к Φ. Множество $B \subset \Phi'$ называется сильно ограниченным, если B содержится в некотором Φ'_p и ограничено по его норме ([7], стр. 63).

4°. Если последовательность функционалов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ сходится на каждом элементе $\varphi \in \Phi$, то эта последовательность сильно ограничена ([7], стр. 67).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Пусть теперь последовательность $\frac{f_n}{g_n} \in D'_+$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к $\frac{f}{g} \in D'_+$ в смысле сходимости последовательности обобщенных функций. Положим

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{f_0} * \left(f_0 * \frac{f_n}{g_n}\right) = \frac{1}{f_0} * \psi_n,$$

где

$$\psi_n(x) = f_0 * \frac{f_n}{g_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Покажем, что

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \text{ при } n \to \infty \text{ в } M,$$

где

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{g}.$$

Заметим, что ψ_n является обобщенной функцией типа бесконечно дифференцируемой функции, $(n = 1, 2 \ldots)$. Далее, по теореме о непрерывности свертки ([4]. стр. 140) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty} \left(f_0 * \frac{f_n}{g_n}\right) = f_0 * \frac{f}{g} = \psi, \tag{15}$$

где ψ — обобщенная функция типа бесконечно дифференцируемой функции и сходимость рассматривается в смысле сходимости последовательности обобщенных функций. Покажем, что существуют оператор $\frac{p}{q}$ и последовательность $\{P_n(x)\}$, удовлетворяющие условиям A—C. Будем рассматривать в качестве Φ пространство $K(a)$, $a > x_0$, которое, как известно, является счетно-нормированным пространством (см. [7], стр. 32). Согласно (15) последовательность $B = \{\psi_n\}$ сходится на каждом элементе $\varphi \in K(a)$ (так как $K(a) \subset K$) и, следовательно, в силу пункта 4° сильно ограничена. Тогда, согласно 3° множество $B = \{\psi_n\}$ содержится в некотором K'_p и ограничено по его норме.

Пусть $\varphi \in K_p(a)$; так как ψ_n — линейные непрерывные функционалы на пространстве $K_p(a)$, то имеет место формула:

$$(\psi_n, \varphi) = \int_{-a}^{a} \varphi^{(p)}(x)\, d\mu_n(x), \tag{16}$$

(μ_n — некоторая функция ограниченной вариации), которая дает общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве $K_p(a)$ ([7], стр. 52). В нашем случае

$$\mu_n(x) = (-1)^p\, l^{p+1} * \psi_n(x).$$

Если поставить в соответствие каждой функции $\varphi \in K_p(a)$ непрерывную функцию $\varphi^{(p)}(x)$, то получим отображение пространства $K_p(a)$ на часть пространства $C_{[-a,\,a]}$ — всех непрерывных на $(-a, a)$ функций.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определим формулой (16) функционал на всем пространстве $C_{[-a,\,a]}$, то есть для любой функции $\omega \in C_{[-a,\,a]}$ полагаем:

$$(\psi_n, \omega) = \int_{-a}^{a} \omega(x)\, d\mu_n(x).$$

Норма ψ_n на $C_{[-a,\,a]}$ выражается формулой:

$$\| \psi_n \| = \operatorname*{Var}_{-a}^{a} \mu_n.$$

На $C(a)$ — образе $K_p(a)$ в $C_{[-a,\,a]}$ норма ψ_n также равна $\operatorname*{Var}_{-a}^{a} \mu_n$. В самом деле, по определению нормы ψ_n в $C_{[-a,\,a]}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\omega_\varepsilon \in C_{[-a,\,a]}$ такая, что

$$| (\psi_n, \omega_\varepsilon) | = \left| \int_{-a}^{a} \omega_\varepsilon(x)\, d\mu_n \right| > \| \omega_\varepsilon \| \left(\operatorname*{Var}_{-a}^{a} \mu_n - \varepsilon \right). \tag{17}$$

Очевидно, что ω_ε можно считать непрерывной, обращающейся в нуль на концах интервала $(-a, a)$. функцией. Но ω_ε можно равномерно аппроксимировать на промежутке $[\alpha, \beta] \subset (-a, a)$ функцией из $C(a)$, то есть функцией $\varphi_\varepsilon(x)$, имеющей непрерывную производную порядка p и обращающейся в нуль в точках $x = \pm a$. Тогда из формулы (17) следует, что

$$\| \psi_n \| = \operatorname*{Var}_{-a}^{a} \mu_n$$

и на $C(a)$. Таким образом, мы пришли к тому, что нормы φ_n ограничены в совокупности, то есть

$$\| \psi_n \| < c, \quad c = \text{const}, \quad , \quad c > 0.$$

Тогда подавно

$$|\mu_n| = | l^{p+1} * \psi_n(x) | < c. \tag{18}$$

Замечая, что

$$l^p * \psi_n \to l^p \psi, \quad n \to \infty,$$

в смысле сходимости последовательности обобщенных функций, нетрудно видеть, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{x} [l^p * \psi_n(x) - l^p * \psi(x)]\, dx = 0 \tag{19}$$

в любом конечном. промежутке $[-a, x_0]$. Положим

$$P_n(x) = \int_{-a}^{x} l^p * \psi_n(x)\, dx \tag{20}$$

$$P(x) = \int_{-a}^{x} l^p * \psi(x)\, dx. \tag{21}$$

Равенство (19) означает, что $P_n \to P$ в каждой точке из $[-a, x_0]$, причем в силу (18) последовательность $\{P_n\}$ равномерно ограничена. Кроме того, как легко видеть, $\{P_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[-a, x_0]$, откуда заключаем, что $P_n(x) \to P(x)$ равномерно на $[-a, x_0]$. Если теперь в указанном определении Микусинского в качестве P_n

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и P взять функции (20) и (21) соответственно, а в качестве оператора $\frac{p}{q}$ — оператор $\frac{1}{f_0 * t^{\rho+1}}$, то

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{f_0 * f_n}{f_0 * g_n} \to \frac{a}{b} = \frac{f_0 * f}{f_0 * g}$$

в смысле сходимости последовательности по Микусинскому.

Таким образом, кольцо D'_+ изоморфно подкольцу поля M операторов Микусинского с сохранением предельного перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Малаховская, Уч. зап. ТГУ, № 36, 1960.
2. Р. М. Малаховская, Доклады научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, Томск, 1960.
3. Р. М. Малаховская, Труды ТГУ, т. 155, 1961.
4. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 1, М., 1958.
5. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
6. Я. Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, 1956.
7. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 2, М., 1958.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ОТНОСИТЕЛЬНО ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА В КЛАССЕ S*

М. И. Редьков

Н. А. Лебедевым [1] с помощью вариационного метода определена область значений функционала

$$I = \ln \frac{w^\lambda f'(w)^{1-\lambda}}{f(w)^\lambda}$$

в классе S^*. В общем виде решение этой задачи сводится к решению алгебраического уравнения. В некоторых случаях ($\lambda = 1$, $\lambda = {}^1/_2$, $\lambda = {}^2/_3$) найдены корни этого уравнения, и задача решена до конца.

Автором [2] аналогичная задача с помощью метода, предложенного П. П. Куфаревым [3], исследовалась для ограниченных однолистных функций. Как следствие, в классе S получен следующий результат: граница области значений функционала

$$I = \ln \frac{w^\lambda f'(w)^{1-\lambda}}{f(w)^\lambda / f(w) /^\varkappa}$$

определяется параметрическим уравнением

$$I_0 = 2 \int_0^{|w|} \left[(2\lambda - 1)(q - \rho^2) - (1 - \lambda) \frac{q - \rho^2}{1 - q} \right] \frac{d\rho}{\rho (1 - \rho^2)} +$$

$$+ \varkappa \left[\int_0^{|w|} \frac{q + \bar{q} - 2\rho^2}{\rho (1 - \rho^2)} d\rho - \ln |w| \right], \qquad (1)$$

где I_0 — граничная точка, а q, $|q| = \rho$ есть корень уравнения

$$(1 - 2\lambda)(\overline{qx} - qx) + \varkappa \frac{x + \bar{x}}{2} (q - \bar{q}) =$$

---

* S — класс функций $f(\omega) = \omega + a_2\omega_2 + .. + a_n\omega^n + ...$, регулярных и однолистных в круге $|\omega| < 1$; w — любая фиксированная точка круга $|\omega| < 1$; λ — произвольное вещественное число.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$=(1-\lambda)(1-\rho^2)\left[\frac{qx}{(1-q)^2}-\frac{\bar{q}x}{(1-\bar{q})^2}\right], \qquad (2)$$

в котором $x=e^{-i\alpha}$, α — параметр, меняющийся в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Наличие параметра $\varkappa$ в уравнении (2) позволяет решить до конца, кроме задач, решенных Н. А. Лебедевым, еще некоторые. В данной заметке приводится решение двух таких задач.

1) $\lambda=1$, $I=\ln\dfrac{w}{f(w)|f(w)|^{\varkappa}}$

Из уравнения (2) при $\lambda=1$

$$q=\pm\rho\frac{(1+\varkappa)\cos\alpha+i\sin\alpha}{\sqrt{(1+\varkappa)^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}.$$

Если подставить эту величину в (1), то получится уравнение границы области значений функционала в параметрическом виде:

$$I_0=\pm\frac{(1+\varkappa)^2\cos\alpha+i\sin\alpha}{\sqrt{(1+\varkappa)^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}\ln\frac{1+|w|}{1-|w|}+\ln\frac{(1-|w|^2)^{1+\varkappa}}{|w|^{\varkappa}},$$
$$-\pi<\alpha\leqslant\pi.$$

Очевидно, эта кривая есть эллипс. При $\varkappa=0$ этот эллипс переходит в окружность (этот случай решен Н. А. Лебедевым). Если $\varkappa\to-1$, то одна из полуосей эллипса неограниченно уменьшается и эллипс вырождается в вертикальный отрезок.

2) $\lambda=0$, $\varkappa=2$; $\qquad I=\ln\dfrac{f'(w)}{|f(w)|^2}$

Соотношение (1) при $\lambda=0$, $\varkappa=2$ можно записать в виде

$$I_0=2\int_0^{|w|}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1-\bar{q}}{\rho(1-\rho^2)(1-q)}\right]d\rho-\ln|w|^2. \qquad (3)$$

Уравнение (2) имеет следующие решения:

а) $q^2-2\rho^2 q+\rho^2=0$; $\qquad q_{1,2}=\rho^2\pm i\rho\sqrt{1-\rho^2}$;

б) $\dfrac{1-\bar{q}}{1-q}=\bar{x}$; $\qquad q_{3,4}=\dfrac{1-x}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2+\rho^2 x}$;

в) $\dfrac{1-\bar{q}}{1-q}=-\bar{x}$; $\qquad q_{5,6}=\dfrac{1+x}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^2-\rho^2 x}$.

Заметим прежде всего, что подстановка в (3) корней $q_{5,6}$ противоречит геометрическому смыслу параметра α*, поэтому эти корни исключаются из дальнейшего рассмотрения.

---

* Относительно геометрического смысла параметра $\varkappa$ см. [2], стр. 37.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Далее легко проверить, что

$$|q_{1,2}| = \rho,$$

если $\rho < 1$; однако подстановка этих корней в (3) дает только две граничные точки. Что касается $q_{3,4}$, то

$$|q_{3,4}| = \rho,$$

если $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leqslant \rho$, или иначе $\rho \geqslant \sin \frac{|\alpha|}{2}$.

Из самого определения величины q^* ясно, что это есть непрерывная функция от ρ на промежутке $[0, |W|]$, если граничная функция $f(\omega)$ отображает круг $|\omega| < 1$ на плоскость с одним разрезом, уходящим на бесконечность, и разрывная, если таких разрезов два.

Предположим сначала, что $q(\rho)$, $|q(\rho)| = \rho$, непрерывна; тогда на промежутке $[0, |W|]$ она может быть определена следующими способами:

$$q(\rho) = q_1 = \rho^2 + i\rho\sqrt{1-\rho^2};$$

$$q(\rho) = q_2 = \rho^2 - i\rho\sqrt{1-\rho^2};$$

$$q(\rho) = \bar{q} = \begin{cases} q_{1,2}, & 0 \leqslant \rho \leqslant \sin \frac{|\alpha|}{2}, \\ q_{3,4}, & \sin \frac{|\alpha|}{2} \leqslant \rho \leqslant |W|. \end{cases}$$

Если подставить $\bar{q}$ в (3) при $|\alpha| \leqslant 2 \arcsin |W|$, а q_1 и q_2 — при $|\alpha| \geqslant 2 \arcsin |W|$, то получится уравнение кривой

$$I_0 = \begin{cases} -e^{i\alpha} \ln \frac{|W|^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1-|W|^2} + \ln \frac{4}{\sin^2 \alpha} \pm 2i|\alpha|, & |\alpha| \leqslant 2 \arcsin |W|, \\ \ln \frac{1}{|W|^2(1-|W|^2)} \pm 4i \arcsin |W|, & |\alpha| \geqslant 2 \arcsin |W|, \end{cases} \tag{4}$$

где знак плюс берется при $\alpha < 0$, а минус — при $\alpha > 0$. Так как эта кривая не замкнута, то, очевидно, это есть часть границы. Остальным точкам границы соответствуют функции, отображающие круг на плоскость с двумя разрезами. Разрывная функция $q(\rho)$ определяется следующим образом:

$$q(\rho) = \begin{cases} \rho^2 + i\rho\sqrt{1-\rho^2}, & 0 \leqslant \rho < s, \\ \rho^2 - i\rho\sqrt{1-\rho^2}, & s \leqslant \rho \leqslant |W|, \end{cases}$$

где s — любое число из промежутка $[0, |W|]$. Если подставить $q(\rho)$ в (3), то при непрерывном изменении параметра s в промежутке $[0, |W|]$ граничная точка I_0 будет пробегать вертикальный отрезок, соединяющий точки

$$\ln \frac{1}{|W|^2(1-|W|^2)} \pm 4i \arcsin |W|,$$

* см. [2], стр. 38.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

которые являются концами кривой (4). Таким образом, граница области значений функционала

$$I = \ln \frac{f'(W)}{|f(W)|^2}$$

в классе S определена полностью.

ЛИТЕРАТУРА

Н. А. Лебедев, Мажорантная область для выражения $I = \ln \frac{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}}{f(z)^\lambda}$ в классе S, Вестник ЛГУ, № 8, 29—41, 1955.

2. М. И. Редьков, Область значений одного функционала на некоторых классах ограниченных однолистных функций, Уч. зап. ТГУ, 36, 33—50, 1960.

3. П. П. Куфарев, Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций, ДАН СССР, 107, № 5, 633—635, 1956.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ И ДЛИНЕ КРИВОЙ

С. Л. Крушкаль

В статье Е. Баяда и Г. Кардамоне [1] доказывается, что если $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция с конечным изменением, то для ее полной вариации и для длины кривой $y = f(x)$ соответственно имеют место равенства

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{h \to 0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx,$$

$$\overset{b}{\underset{a}{l}}(f) = \lim_{h \to 0} \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]^2}\, dx,$$

где положено $f(x) = f(a)$ для $x < a$, $f(x) = f(b)$ для $x > b$ и интегралы понимаются в смысле Римана, а также доказывается, что существование конечных пределов в правых частях является необходимым и достаточным условием соответственно для ограниченности вариации и спрямляемости кривой. Доказательство проводится посредством равномерной аппроксимации функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$, где $y = \varphi(x)$ есть уравнение ломаной, вписанной в кривую $y = f(x)$. Доказательство элементарное, однако оно занимает около 40 стр. журнального текста и довольно сложно.

В данной заметке дается другое, более краткое, доказательство этих утверждений с помощью стекловских средних и указываются некоторые простейшие следствия.

1°. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Полагая $\varphi(t) = \varphi(a)$ для $t < a$, $\varphi(t) = \varphi(b)$ для $t > b$, построим для функции $\varphi(t)$ ее стекловские средние

$$\varphi_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t+s) ds. \tag{1}$$

Ниже будут использованы следующие свойства стекловских средних для непрерывной функции $\varphi(t)$, которые легко выводятся из (1).

(α) Функция $\varphi_h(t)$ непрерывно дифференцируема, причем

$$\varphi_h'(t) = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$(\beta) \qquad \varphi_h(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varphi(s)\,ds = \varphi(t+\Theta h) \to \varphi(t) \text{ при } h \to 0$$

равномерно по t на $[a, b]$.

Функции $\varphi_h(t)$ обладают свойствами (α) и (β) при любом h, положительном и отрицательном. Все дальнейшие утверждения мы будем доказывать только для $h > 0$, но они верны и будут сформулированы для любого h. Для $h < 0$ доказательство теорем проводится аналогично, только нужно брать $|h|$.

2°. Теорема 1. Для того, чтобы непрерывная на $[a, b]$ функция $f(t)$ имела конечное изменение на $[a, t]$, $a \leqslant t \leqslant b$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{h\to 0} \int_a^t \left|\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right| ds < \infty. \tag{2}$$

При этом полное изменение дается выражением

$$\overset{t}{V}_a(f) = \lim_{h\to 0} \int_a^t \left|\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right| ds. \tag{3}$$

Интегралы здесь понимаются в смысле Римана и $f(x) = f(a)$ для $t \leqslant a$, $f(t) = f(b)$ для $t \geqslant b$.

Доказательство. (a) Так как стекловские средние непрерывно дифференцируемы, то (см., например, [2], стр. 78)

$$\overset{t}{V}_a(f_h) = \int_a^t |f_h'(s)|\,ds = \int_a^t \left|\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right| ds. \tag{4}$$

Пусть $\Pi : \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, t]$. Тогда, обозначая через $\sigma_h(\Pi)$ и $\sigma(\Pi)$ вариационные суммы соответственно для функций $f_h(t)$ и $f(t)$, в силу свойства (β), будем иметь, что

$$\lim_{h\to 0} \sigma_h(\Pi) \equiv \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f_h(t_{k+1}) - f_h(t_k)| = \sigma(\Pi).$$

Но так как $\sigma_h(\Pi) \leqslant \overset{t}{V}_a(f_h)$, то $\sigma(\Pi) \leqslant \lim_{h\to 0} \overset{t}{V}_a(f_h)$ и

$$\overset{t}{V}_a(f) = \sup_{\Pi} \sigma(\Pi) \leqslant \lim_{h\to 0} \overset{t}{V}_a(f_h). \tag{5}$$

Отсюда следует достаточность условия (2).

(b). С другой стороны, получаем

$$\sigma_h(\Pi) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} |f_h(t_{k+1}) - f_h(t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{1}{h}\int_0^h f(s+t_{k+1})\,ds - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h}\int_0^h f(s+t_k)\,ds \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h}\int_0^h |f(s+t_{k+1}) - f(s+t_k)|\,ds =$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \sum_{k=0}^{n-1} |f(s+t_{k+1}) - f(s+t_k)|\, ds \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \overset{t+s}{\underset{a+s}{V}}(f)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\overset{t+h}{\underset{a}{V}}(f)\, h = \overset{t+h}{\underset{a}{V}}(f).$$

Таким образом, для любой суммы σ_h (П) будет

$$\sigma_h(\Pi) \leqslant \overset{t+h}{\underset{a}{V}}(f),$$

откуда получим

$$\overset{t}{\underset{a}{V}}(f_h) = \sup_{\Pi} \sigma_h(\Pi) \leqslant \overset{t+h}{\underset{a}{V}}(f). \tag{6}$$

Далее, так как вместе с функцией $f(t)$ непрерывна и функция $\overset{t}{\underset{a}{V}}(f)$ (см., например, [2], стр. 84—85), то из (6) следует

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \overset{t}{\underset{a}{V}}(f_h) \leqslant \overset{t}{\underset{a}{V}}(f), \tag{7}$$

что доказывает необходимость условия (2).

Сравнивая (5) и (7) и учитывая (4), получим (3). Теорема доказана.

Замечание. Равенство (3) одновременно доказано и для случая, когда $\overset{t}{\underset{a}{V}}(f) = \infty$.

3°. Пусть дана непрерывная кривая

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{8}$$

Как известно, кривая C спрямляема тогда и только тогда, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют ограниченное изменение на $[a, b]$.

Теорема 2. Для того, чтобы кривая (8) была спрямляема на $[a, t]$, $a \leqslant t \leqslant b$, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\lim_{h\to 0} \int_a^t \left|\frac{z(s+h) - z(s)}{h}\right| ds < \infty. \tag{9}$$

Тогда длина кривой может быть вычислена по формуле

$$\overset{t}{\underset{a}{l}}(C) = \lim_{h\to 0} \int_a^t \left|\frac{z(s+h) - z(s)}{h}\right| ds. \tag{10}$$

Интегралы понимаются в смысле Римана, причем для $t \leqslant a$ $x(t) = x(a)$, $y(t) = y(a)$, для $t \geqslant b$ $x(t) = x(b)$, $y(t) = y(b)$.

Доказательство. Необходимость и достаточность условия (9) следуют из неравенств

$$\int_a^t \left|\frac{x(s+h) - x(s)}{h}\right| ds \leqslant \int_a^t \left|\frac{z(s+h) - z(s)}{h}\right| ds \leqslant$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\leqslant \int_a^t \left[\left| \frac{x(s+h)-x(s)}{h} \right| + \left| \frac{y(s+h)-y(s)}{h} \right| \right] ds$$

и теоремы 1.

Докажем теперь равенство (10). Строим для функций $x(t)$ и $y(t)$ стекловские средние $x_h(t)$ и $y_h(t)$ и рассмотрим кривые

$$C_h : z = z_h(t) \equiv x_h(t) + iy_h(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

В силу свойства (α),

$$\overset{t}{\underset{a}{l}}(C_h) = \int_a^t \sqrt{x_h'^2(s) + y_h'^2(s)}\, ds =$$

$$= \int_a^t \sqrt{\left[\frac{x(s+h)-x(s)}{h}\right]^2 + \left[\frac{y(s+h)-y(s)}{h}\right]^2}\, ds. \tag{11}$$

Пусть $\Pi : \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, t]$. Так же, как в пункте (a) доказательства теоремы 1, получается известное неравенство

$$\overset{t}{\underset{a}{l}}(C) \leqslant \varliminf_{h \to 0} \overset{t}{\underset{a}{l}}(C_h). \tag{12}$$

С другой стороны, используя неравенство

$$\sqrt{\left[\int_\alpha^\beta f(s)\, ds\right]^2 + \left[\int_\alpha^\beta \varphi(s)\, ds\right]^2} \leqslant \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}\, ds, \tag{13}$$

которое имеет место для любых двух заданных на $[\alpha, \beta]$ неотрицательных измеримых функций ([3], стр. 254—255), будем иметь:

$$\sigma_h(\Pi) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[x_h(t_{k+1}) - x_h(t_k)]^2 + [y_h(t_{k+1}) - y_h(t_k)]^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left|\frac{1}{h}\int_0^h [x(s+t_{k+1}) - x(s+t_k)]\, ds\right|^2 + \left|\frac{1}{h}\int_0^h [y(s+t_{k+1}) - y(s+t_k)]\, ds\right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{1}{h}\int_0^h |x(s+t_{k+1}) - x(s+t_k)|\, ds\right)^2 + \left(\frac{1}{h}\int_0^h |y(s+t_{k+1}) - y(s+t_k)|\, ds\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h}\int_0^h \sqrt{[x(s+t_{k+1}) - x(s+t_k)]^2 + [y(s+t_{k+1}) - y(s+t_k)]^2}\, ds =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \sum_{k=0}^{n-1} |z(s+t_{k+1}) - z(s+t_k)|\, ds \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \overset{t+s}{\underset{a+s}{l}}(C)\, ds \leqslant \overset{t+h}{\underset{a}{l}}(C).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда

$$\overset{t}{\underset{a}{l}}(C_h) = \sup_{\Pi} \sigma_h(\Pi) \leqslant \overset{t+h}{\underset{a}{l}}(C). \tag{14}$$

Так как из непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ следует непрерывность функции $\overset{t}{\underset{a}{l}}(C)$ ([2], стр. 89), то из (14) получим

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \overset{t}{\underset{a}{l}}(C_h) \leqslant \overset{t}{\underset{a}{l}}(C). \tag{15}$$

Сравнивая (12) и (15) и учитывая (11), получим (10). Теорема доказана.

Следствие. В случае явного задания кривой $C(y = f(x))$ имеет место аналогичная теорема и

$$\overset{x}{\underset{a}{l}}(C) = \lim_{h\to 0} \int_a^x \sqrt{1 + \left[\frac{f(s+h) - f(s)}{h}\right]^2}\, ds. \tag{16}$$

4°. Если теперь $f(t)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то почти везде на $[a, b]$ будет

$$\lim_{h\to 0} f'_h(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

и для любого измеримого множества $e_t \subset [a, t]$ (при фиксированном t, $a \leqslant t \leqslant b$) будем иметь

$$\int_{e_t} \left|\frac{f(s+h) - f(s)}{h}\right| ds = \frac{1}{h}\int_{e_t} \left|\int_s^{s+h} f'(u)\, du\right| ds \leqslant \frac{1}{h}\int_{e_t}\int_0^h |f'(s+u)|\, du ds =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h\int_{e_t} |f'(s+u)|\, ds du = \frac{1}{h}\int_0^h\int_{e_\tau} |f'(\tau)|\, d\tau\, du.$$

Здесь положено $\tau = s + u$, $d\tau = ds$. Когда точка s пробегает множество e_t, точка τ пробегает некоторое множество e_τ, которое получается из e_t сдвигом на u, и, следовательно, $me_t = me_\tau$ при любом $u \in [0, h]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла, найдем такое $\delta > 0$, чтобы для любого измеримого множества $e \subset [a, t + h_1]$, $h_1 > 0$, с мерой $me < \delta$ было

$$\int_e |f'(\tau)|\, d\tau < \varepsilon.$$

Тогда, если $me_t < \delta$ и $h \leqslant h_1$, то

$$\int_{e_t} \left|\frac{f(s+h) - f(s)}{h}\right| ds \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h\int_{e_\tau} |f'(\tau)|\, d\tau\, du < \frac{\varepsilon}{h}\int_0^h du = \varepsilon,$$

что означает равностепенную абсолютную непрерывность интегралов

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\left\{\int_a^t \left|\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right| ds\right\}$, $h \leqslant h_1$. Поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла ([4], стр. 168—170), и из (3) получается известное равенство:

$$\underset{a}{\overset{t}{V}}(f) = \int_a^t f'(s)\, ds.$$

Используя неравенство (13), путем аналогичных рассуждений можно получить, что если функции $x(t)$, $y(t)$ (соответственно $f(x)$) абсолютно непрерывны на $[a, b]$, то формулы (10) и (16) переходят соответственно в следующие известные равенства:

$$\underset{a}{\overset{t}{l}}(C) = \int_a^t \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)}\, ds,$$

$$\underset{a}{\overset{x}{l}}(C) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(s)}\, ds.$$

5. Из свойств (α) и (β) следует, что если $\varphi(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\varphi_h(t) = \varphi_h(a) + \int_a^t \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h}\, ds$$

и

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \lim_{h \to 0} \int_a^t \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h}\, ds. \tag{17}$$

С другой стороны, непрерывная функция ограниченной вариации $\varphi(t)$ однозначно представляется в форме

$$\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \varphi'(s)\, ds + r(t), \tag{18}$$

где $r(t)$ — сингулярная функция (или нуль) ([4], стр. 288—289). Сравнивая (17) и (18), получаем следующее представление для $r(t)$:

$$r(t) = \lim_{h \to 0} \int_a^t \left[\frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} - \varphi'(s)\right] ds,$$

где $\varphi(t) = \varphi(a)$ при $t \leqslant a$, $\varphi(t) = \varphi(b)$ при $t \geqslant b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baiada, G. Cardamone, La variazione totale e la lunghezza di una curva Ann. Scuola norm. super. Pisa (1957), 11, № 1—2, 24—71.
2. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Физматгиз, М.—Л., 1960.
3. С. Сакс, Теория интеграла, Москва, ИЛ, 1949.
4. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, Москва, 1957.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ТИПА ТЕОРЕМЫ ФАТУ

С. Л. Крушкаль

В этой заметке приводится доказательство двух теорем типа теоремы Фату для неаналитических в общем случае функций и устанавливается связь этих результатов с известными теоремами такого же типа.

1°. Известная теорема Фату утверждает, что функция $F(z)$, аналитическая и ограниченная в круге $|z|<1$, стремится почти всюду на окружности $|z|=1$ к определенному значению $F(z_0)$, когда точка z приближается к точке z_0, $|z_0|=1$, по любому некасательному пути (см., например, [1], стр. 66—68).

Получены аналоги этой теоремы и для некоторых классов неаналитических функций. Ж. Лелон-Ферран доказала [2] теорему такого типа для однолистных отображений с непрерывными частными производными и ограниченным интегралом Дирихле, а также привела соображения, позволяющие распространить ее метод на несколько более широкий класс отображений.

После работ Г. Д. Суворова, в которых метод Ж. Лелон-Ферран был уточнен и обобщался на однолистные отображения с обобщенными частными производными в смысле С. Л. Соболева (с ограниченными же интегралами Дирихле), соответствующий результат можно считать установленным и для таких отображений*).

Для функций $\zeta=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy=re^{i\varphi}$, однозначных в кольце $r\leqslant|z|<1$, с непрерывными производными u_x, u_y, $v_x v_y$. К. С. Сцилард [3] доказал следующую теорему:

Пусть на множестве E: $\{\varphi_1<\varphi<\varphi_2,\ r_1\leqslant r<1\}$ выполнены условия: 1) $f(z)$ осуществляет локально внутреннее отображение множества E, причем это отображение взаимно однозначно в некоторой окрестности каждой точки $z\in E$, кроме, быть может, конечного или счетного множества точек, не имеющего точек сгущения внутри E:

2) $\iint\limits_E \sqrt{|D(x,y)|}\,dx\,dy<\infty$ (D—якобиан отображения f):

3) Существует постоянная C, $0<C\leqslant 1$ такая, что в любой точке z_0 однолистности f будет

$$\liminf_{\rho\to 0}\frac{\min|f(z_0)-f(z)|}{\max|f(z_0)-f(z)|}\geqslant C,$$

где z — текущая точка окружности $|z-z_0|=\rho$. Тогда существует $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\varphi})$ почти для всех значений $\varphi\in(\varphi_1,\varphi_2)$.

*) Впрочем, тот же результат следует, по-видимому, и из одной работы Дени.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство опирается на следующие две теоремы, которые мы также используем ниже.

(α). Всякая возрастающая последовательность функций $\{h_n(x)\}$ действительного переменного x, суммируемых в некотором интервале (a, b), интегралы которых равномерно ограничены, сходится почти всюду к некоторой суммируемой функции, и интеграл предела такой последовательности равен пределу интегралов $h_n(x)$ (см., например, [4], стр. 44).

(β). Пусть на полуинтервале $a \leqslant r < b$ задана непрерывная комплексная функция $\zeta = Z(r)$ и пусть для всех r_0, $a \leqslant r_0 < b$, длина $L(r_0)$ образа отрезка $[a, r_0]$ при отображении $Z(r)$ конечна. Тогда, если существует конечная верхняя граница множества величин $L(r_0)$, существует так же конечный предел $\lim\limits_{r_0 \to b} Z(r_0)$ (см. [3]).

2°. Рассмотрим функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy = re^{i\varphi}$, однозначную в кольцевом секторе D: $\{r_1 \leqslant r < 1, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ плоскости z, и будем предполагать, что отображение f непрерывно и не переводит в точку никакой отличный от точки континуум. Используя рассуждения Сциларда, докажем следующую теорему:

Теорема 1. Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условию Липшица в любой замкнутой подобласти $\overline{D}'_{r_0}$: $\{r_1 \leqslant r \leqslant r_0, \varphi'_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi'_2\}$ сектора $D(r_0 < 1, \varphi_1 < \varphi'_1 < \varphi'_2 < \varphi_2)$ и их производные u_x, u_y, v_x, v_y суммируемы по D, то почти для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ существует $\lim\limits_{r \to} f(re^{i\varphi})$.

Доказательство. Заметим, что частные производные функций u и v суммируемы тогда и только тогда, когда

$$J_D(f) = \iint\limits_D \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}\, dx\, dy < \infty.$$

Для любых точек z_1, z_2 из D, лежащих на некотором луче $\varphi = \mathrm{const}$ ($z_1 = r_1 e^{i\varphi}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$, $r_2 > r_1$), будем иметь:

$$|u(r_2, \varphi) - u(r_1, \varphi)| \leqslant K(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) = K(|\cos\varphi|\,|r_2 - r_1| + |\sin\varphi|\,|r_2 - r_1|) < 2K|r_2 - r_1|,$$

$$|v(r_2, \varphi) - v(r_1, \varphi)| < 2K_1|r_2 - r_1|.$$

Значит, функции $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ удовлетворяют условию Липшица на любом сегменте $[r_1, r]$, $r < 1$, при $\varphi = \mathrm{const}$ и, следовательно, абсолютно непрерывны на $[r_1, r]$ при фиксированном φ. Обозначая через $s(r_1, r, \varphi)$ длину образа сегмента $[r_1, r]$ на луче $\varphi = \mathrm{const}$ при отображении f, будем иметь

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 s(r_1, r, \varphi)\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r} \sqrt{u_r^2(r, \varphi) + v_r^2(r, \varphi)}\, r^2\, dr =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r} \sqrt{(u_x \cos\varphi + u_y \sin\varphi)^2 + (v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi)^2}\, r^2\, dr =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r_1}^{r} \sqrt{(u_x x + u_y y)^2 + (v_x x + v_y y)^2}\, r\, dr\, d\varphi =$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= \iint\limits_{D_r} \sqrt{(u_x x + u_y y)^2 + (v_x x + v_y y)^2}\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{D_r} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy < I_{D_r}(f) < I_D(f) < \infty.$$

Таким образом, для любого r, $r_1 \leqslant r < 1$,

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 s(r_1, r, \varphi)\, d\varphi < I_D(f)$$

и, кроме того, при $r \to 1$ величина $r^2 s(r_1, r, \varphi) = \tilde{s}(r_1, r, \varphi)$ монотонно возрастает, если $\varphi = \text{const}$. Применяя теорему (α) к семейству функций $\tilde{s}(r_1, r, \varphi)$ от φ (r — непрерывный параметр), получим, что

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} s(r_1, 1, \varphi)\, d\varphi < I_D(f),$$

где через $s(r_1, 1, \varphi)$ обозначен $\lim\limits_{r \to 1} s(r_1, r, \varphi) = \lim\limits_{r \to 1} r^2 s(r_1, r, \varphi)$. Отсюда, величина $s(r_1, 1, \varphi)$ конечна почти для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$, и по ($\beta$) для этих φ существует $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\varphi})$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается более общая

Теорема 2. Если функции $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ почти для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ абсолютно непрерывны по r на любом сегменте $[r_1, r]$, $r < 1$ и частные производные u_x, u_y, v_x, v_y суммируемы на множестве D, то почти для всех значений φ, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ существует $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\varphi})$.

Замечание. Утверждения теорем 1 и 2 очевидным образом переносятся и на случай отображений областей n-мерного пространства ($n > 2$).

3°. Если не требовать суммируемости частных производных или, что эквивалентно, ограниченности интеграла $I_D(f)$, не налагая на отображения дополнительных условий, то утверждения теорем 1 и 2 не имеют места.

Пример. Рассмотрим следующее топологическое отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ ($z = re^{i\varphi}$, $w = r' e^{i\varphi'}$):

$$r' = r, \quad \varphi' = \varphi + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} r\right).$$

Для этого отображения

$$I_D(f) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 + \frac{\pi^2 r^2}{4 \cos^4\left(\frac{\pi}{2} r\right)}}\, r\, dr\, d\varphi > \pi^2 r_0^2 \int\limits_{\substack{r_0 \\ (0 < r_0 < 1)}}^1 \frac{dr}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} r\right)} =$$

$$= 2\pi r_0^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} r\right)\Big|_{r_0}^1 = \infty,$$

и каждый радиус $\varphi = \text{const}$ переходит в спираль, навертывающуюся изнутри на окружность $|w| = 1$, а следовательно, $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\varphi})$ не су-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ществует для всех $\varphi \in [0,2\pi]$. Обратное отображение $z = f^{-1}(w)$ обладает теми же свойствами.

4°. Теоремы 1 и 2 (как и теорема Сциларда) применимы к некоторым классам функций, которые осуществляют отображения, не являющиеся внутренними в смысле Стоилова. Кроме того, теорема 2 является обобщением теоремы Лелон-Ферран (даже в усиленной форме) на более широкий класс функций.

Приведем пример отображения, которое не является внутренним, удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 и к которому не применимы теоремы Лелон-Ферран и Сциларда.

Пусть $w = f(z) = u + iv$, $z = x + iy$, $u = x + y$, $v = \sqrt{2xy}$, $z = re^{i\varphi}$, $w = r'e^{i\theta}$, причем $f(z)$ определена в области D: $\left\{r_0 < r < 1, \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$, $r_0 > 0$. Нетрудно видеть, что отображение f „двулистно", не будет внутренним и преобразует дуги окружностей $|z| = r$, $x > 0$, $y > 0$ в дуги гипербол $u^2 - v^2 = r^2$, $u > 0$, $v > 0$ (так как $u^2 - v^2 = x^2 + y^2$), а лучи $\varphi = \text{const}$ — в лучи $\theta = \text{const}$. Таким образом, $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\varphi})$ существует для всех $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Далее, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\frac{y}{2x}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\frac{x}{2y}}.$$

Отсюда находим, что $I_D(f) < \infty$, а $\iint\limits_D (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy = \infty$

Можно показать, что для данного отображения

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} \frac{\min |f(z_0) - f(z_\rho)|}{\max |f(z_0) - f(z_\rho)|} \leqslant \frac{x_0 - y_0}{\sqrt{2}\, x_0}, \qquad (*)$$

где $z_\rho = z_0 + \rho e^{i\psi}$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$. Из (*) следует, что требуемая в условиях теоремы Сциларда константа C, $0 < C \leqslant 1$ не существует.

Отметим еще, что из всех приведенных выше теорем нельзя получить самой теоремы Фату, как частный случай. Действительно, если $f(z) = u + iv$ — аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, то

$$I_D(f) = \sqrt{2} \iint\limits_{|z|<1} \sqrt{|u_x v_y - v_x u_y|}\, dx\, dy = \sqrt{2} \iint\limits_{|z|<1} |f'(z)|\, ds,$$

а С. М. Мергелян [5] построил пример аналитической в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$, ограниченной единицей, для которой

$$\iint\limits_{|z|<1} |f'(z)|\, dS = \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

2. J Lelong-Ferrand, Reprentations conformes et transformations à integrale de Dirichlet bornée, Paris, 1955.

3. К. С. Сцилард, О распространении теоремы Фату на один класс непрерывных отображений, ДАН СССР, 127, № 2, 278—280, 1959.

4. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, ИЛ, 1954.

5. С. Н. Мергелян, Об одном интеграле, связанном с аналитическими функциями, Изв. АН СССР, серия матем., 15, 395—400, 1951.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ Г. М. ГОЛУЗИНА

П. П. КУФАРЕВ

В заметке [1] был указан новый вывод вариационной формулы Г. М. Голузина, лежащий в основе его вариационного метода исследования экстремальных задач теории однолистных функций. Подробное изложение доказательства было дано в специальном курсе по теории однолистных функций, читаемом в Томском университете, но в печати оно до сих пор не публиковалось.

В данной статье приводится это доказательство.

§ 1. Доказательство опирается на следующую теорему, установленную в работе [2].

Теорема 1. Пусть семейство односвязных областей $G(t)$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ плоскости z удовлетворяет следующим условиям:

1. Точка $z = 0$ принадлежит каждой области $G(t)$;
2. Граница $\Gamma(t)$ области $G(t)$ есть простая замкнутая кривая Жордана: $z = \Omega(\lambda, t)$ $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$;
3. Функция $\Omega(\lambda, t)$ равномерно относительно λ дифференцируема по t при $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$;
4. $\Gamma(t_0)$ — аналитическая кривая.

Тогда функция $w = F(z, t)$, $F(0, t) = 0$, $F'_z(0, t) > 0$, конформно отображающая $G(t)$ на круг $|w| < 1$, равномерно относительно z внутри $G(t_0)$ дифференцируема по t при $t = t_0$, и имеет место соотношение:

$$\left[\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = -\frac{F(z,t_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial \log|F(\Omega(\lambda,t),t_0)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{e^{i\Theta}+F(z,t_0)}{e^{i\Theta}-F(z,t_0)}\,d\Theta, \quad (1)$$

а для функции $z = \Phi(w, t)$, обратной $w = F(z, t)$

$$\left[\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = \frac{w}{2\pi}\frac{\partial \Phi(w,t)}{\partial w}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial \log|F(\Omega(\lambda,t),t_0)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{e^{i\Theta}+w}{e^{i\Theta}-w}\,d\Theta. \quad (2)$$

При этом предполагается еще, что в уравнении $z = \Omega(\lambda, t_0)$ границы $\Gamma(t_0)$ области $G(t_0)$ λ есть (непрерывная) функция от $e^{i\Theta} = F(\Omega(\lambda, t_0)t_0)$.

§ 2. Теорема 2. Пусть $\xi = \xi(w)$, $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) > 0$, голоморфна и однолистна в круге $0 \leqslant |w| < 1$, а функция $\xi(w) + tq(w)$ голоморфна и однолистна при $0 \leqslant t \leqslant T$ в кольце Q: $r_0 \leqslant |w| < 1$, $0 < r_0 < 1$, и отображает это кольцо на область, ограниченную континуумами $D_1(t)$ и $D_{r_0}(t)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Функция $z = \Phi(w, t)$, $\Phi(0, t) = 0$, $\Phi'(0,t) > 0$, отображающая $|w|<1$ на односвязную область B, граница которой есть $D_1(t)$, представима во всяком круге $|w| < \rho$, $\rho < 1$, в виде

$$z=\Phi(w,t)=\xi(w)+tw\xi'(w)\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\,\xi'(\omega)}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}. \qquad (3)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\rho < 1$. Обозначим через $\Gamma_r(t)$ аналитическую кривую, в которую окружность $|w| = r$ $(\rho < r < 1)$ отображается функцией $\xi(w) + tq(w)$, и через $G_r(t)$, содержащую $z = 0$ область, ограниченную кривой $\Gamma_r(t)$. Уравнение кривой $\Gamma_r(t)$ можно записать в виде:

$$z = \Omega(\lambda, t) = \xi(re^{i\Theta}) + tq(re^{i\Theta}), \quad \lambda = \frac{\Theta}{2\pi}. \qquad (4)$$

Очевидно, для любого $\tau \in [0, T]$ при $t \to \tau$ семейство областей $G_r(t)$ сходится как к ядру (относительно $z = 0$) к области $G_r(\tau)$, и функция $\Omega(\lambda, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (с заменой t_0 на τ). Поэтому для функции $\Phi_r(w, t)$, отображающей круг $|w| < r$ на $G_r(t)$, справедливо равенство:

$$\left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial t}\right]_{t=\tau} = \frac{w}{2\pi i}\,\frac{\partial \Phi_r(w,\tau)}{\partial w}\int_{|w|=r}\left[\frac{\partial \log|F_r(\Omega(\lambda,t),\tau)|}{\partial t}\right]_{t=\tau}\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}, \qquad (5)$$

в котором через $F_r(z, t) = w$ обозначена функция, обратная $\Phi_r(w, t)$ и $\omega = F_r(\Omega(\lambda, \tau), \tau)$, $\Omega(\lambda, \tau) = \Phi_r(\omega, \tau)$.

Так как в нашем случае

$$\left[\frac{\partial \log|F_r(\Omega(\lambda,t),\tau)|}{\partial t}\right]_{t=\tau} = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial \log F_r(\Omega(\lambda,t),\tau)}{\partial t}\right]_{t=\tau} =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\Phi'_r(\omega,\tau)}\right], \qquad (6)$$

то уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi_r(w,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi_r(w,\tau)}{\partial w}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}\mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\,\Phi_r(\omega,\tau)}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega} \qquad (7)$$

Интегрируя это равенство по τ от $\tau = 0$ до $\tau = t$ и учитывая, что $\Phi_r(w, 0) = \xi(w)$, находим:

$$\Phi_r(w,t)=\xi(w)+tw\xi'(w)\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}\mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\,\xi'(\omega)}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}+R, \qquad (8)$$

где

$$R = \frac{w}{2\pi i}\int_0^t\left\{\frac{\partial \Phi_r(w,r)}{\partial w}\int_{|\omega|=r}\mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\Phi'_r(\omega,\tau)}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}+\right.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-\xi'(w)\int_{|\omega|=r}\mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\xi'(\omega)}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}\Big\}\,d\tau. \tag{9}$$

Для подсчета и оценки интегралов в (8) и (9) разложим функцию $q(\omega)/\omega\Phi_r'(\omega,\tau)$ в ряд Лорана в кольце $r_0\leqslant|\omega|\leqslant r$:

$$\frac{q(\omega)}{\omega\Phi_r'(\omega,\tau)}=T_r(\omega)+S_r(\omega), \tag{10}$$

где через $T_r(\omega)$ и $S_r(\omega)$ обозначены соответственно правильная и главная части ряда Лорана;

$$T_r(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(2)}\omega^k,\qquad S_r(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}^{(r)}}{\omega^k} \tag{11}$$

(зависимость $T_r(\omega)$, $S_r(\omega)$ и коэффициентов $a_n^{(r)}$ от τ для краткости записи не указываем).

Подсчитаем интеграл

$$2J_r=\frac{1}{\pi i}\int_{|\omega|=r}\mathrm{Re}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\Phi_r'(\omega,\tau)}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}\,. \tag{12}$$

Его можно представить в виде:

$$2J_r=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}\left[\frac{q(\omega)}{\omega\Phi_r'(\omega,\tau)}+\frac{\overline{q(\omega)}}{\omega\,\overline{\Phi_r'(\omega,\tau)}}\right]\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{13}$$

где

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}T_2(\omega)\,\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega},\quad I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}S_r(\omega)\,\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega},$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}\overline{T}_r\left(\frac{r^2}{\omega}\right)\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega},\quad I_4=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=r}\overline{S}_r\left(\frac{r^2}{\omega}\right)\frac{\omega+w}{\omega-w}\,\frac{d\omega}{\omega}. \tag{14}$$

Учитывая, что $T_r(\omega)$, $S_r(\omega)$, $\overline{T}_r\left(\frac{r^2}{\omega}\right)$, $\overline{S}_r\left(\frac{r^2}{\omega}\right)$ голоморфны соответственно в областях $|\omega|\leqslant r$, $|\omega|\geqslant r_0$, $|\omega|\geqslant r$ и $|\omega|\leqslant\frac{r^2}{r_0}$, получим при $\omega\leqslant\rho<r$,

$$I_1=2T_r(w)-T_r(0),\quad I_2=0,\ I_3=\overline{T}_r(0),\ I_4=\overline{S}_r\left(\frac{r^2}{w}\right). \tag{15}$$

Итак,

$$J_r=T_r(w)+\overline{S}_r\left(\frac{r^2}{w}\right)+\frac{1}{2}\left[\overline{T}_r(0)-T_r(0)\right] \tag{16}$$

Учитывая это, находим из (8) и (9)

$$\Phi_r(w,t)=\xi(w)+tw\xi'(w)\left[T(w)+\overline{S}\left(\frac{r^2}{w}\right)+\frac{1}{2}\left\{\overline{T(0)}-T(0)\right\}\right]+R \tag{17}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и

$$R = w\int_0^t \left\{ \frac{\partial \Phi_r(w,\tau)}{\partial w}\left[T_r(w) + \bar{S}_r\left(\frac{r^2}{w}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{T}_r(0) - T_r(0)\right)\right] + \right.$$

$$\left. - \xi'(w)\left[T(w) + \bar{S}\left(\frac{r^2}{w}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{T}(0) - T(0)\right)\right]\right\} d\tau . \qquad (18)$$

Здесь через $T(w)$ и $S(w)$ обозначены правильная и главная части разложения в ряд Лорана функции

$$q(w)/w\,\Phi_r'(w,0) = \frac{q(w)}{w\,\xi'(w)} \text{ в кольце } r_0 < |w| < 1.$$

Оценим теперь остаточный член R при малых t, полагая, что $|w| \leqslant \rho$. Так как при $\tau \to 0$ и $r \to 1$ $(r < 1)$ произвольным образом области $G_r(\tau)$ сходятся, как к ядру, к области $B = G_1(0)$, то $\Phi_r(w,\tau) \to \xi(w)$ равномерно во всяком круге $|w| \leqslant \rho_0$, $\rho_0 < 1$. Положим, что $\rho_0 > \rho$. Поскольку r устремляется нами к единице, можно считать, что $r \geqslant \rho_0$. Тогда (считая еще что $\rho_0 \geqslant r_0$) $T_r(w)$ можно представить в виде:

$$T_r(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=\rho_0} \frac{q(\omega)}{\omega\,\Phi_r'(\omega,\tau)}\,\frac{d\omega}{\omega - w} . \qquad (19)$$

Фиксируем ρ_0, выбирая его одинаковым для всех r, $r \to 1$, $\rho_0 < r < 1$. Так как $\Phi_r'(0,\tau) \to \xi'(0)$ при $r \to 1$, $\tau \to 0$, то $\Phi_r'(0,\tau)$ равномерно ограничены снизу положительной константой, следовательно, поскольку на окружности $|\omega| = \rho_0$

$$\Phi_r'(\omega,\tau) \geqslant r^3\,\Phi_r'(0,\tau)\,\frac{r-\rho_0}{(r+\rho_0)^3} > \frac{1}{2}\,\xi'(0)\,\frac{r-\rho_0}{(r+\rho_0)^3}$$

функции $\Phi_r'(\omega,\tau)$ также равномерно ограничены снизу, $|\Phi_r'(\omega,\tau)| \geqslant k(\rho_0) > 0$ на $|\omega| = \rho_0$. Поэтому на $|\omega| = \rho_0$ функции $q(\omega)\,\omega\Phi_r'(\omega,\tau)$ вместе с $\Phi_r'(\omega,\tau)$ равномерно сходятся к функции $q(\omega)\,\omega\xi'(\omega)$ при $\tau \to 0$, $r \to 1$; отсюда и из (19) следует, что в круге $|w| \leqslant \rho$ $T_r(w)$ равномерно сходится к $T(w)$ и $T_r(0) \to T(0)$.

Аналогично, пользуясь формулой

$$S_r\left(\frac{r^2}{w}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=\rho_0} \frac{q(\omega)}{\omega\Phi_r'(\omega,\tau)}\,\frac{d\omega}{\omega - \dfrac{r^2}{w}} \qquad (\rho_0 \geqslant r_0),$$

докажем, что при $\tau \to 0$ $\bar{S}_r\left(\dfrac{r^2}{w}\right)$ равномерно в $|w| \leqslant \rho$ сходятся к $\bar{S}\left(\dfrac{r^2}{w}\right)$, причем оценку малости $\left|\bar{S}_r\left(\dfrac{r^2}{w}\right) - \bar{S}\left(\dfrac{r^2}{w}\right)\right|$ при малых τ можно получить не зависящую от r. Но в таком случае из (18) следует, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при достаточно малых t и $1 - r$, $t < \delta(\varepsilon,\rho)$, $1 - r < \eta(\varepsilon,\rho)$, в круге $|w| \leqslant \rho$ будет иметь место неравенство:

$$|R| < \varepsilon\, t.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Перейдем теперь в равенстве (17) к пределу при $r \to 1$. Так как

$$\lim_{r\to 1} \Phi_r(w,t) = \Phi(w,t),\ \lim_{r\to 1} \bar{S}\left(\frac{r^2}{w}\right) = \bar{S}\left(\frac{1}{w}\right),$$

то в пределе получим, что при $t < \delta(\varepsilon,\rho)$ в $|w| \leqslant \rho$

$$\Phi(w,t) = \xi(w) + tw\xi'(w)\left[T(w) + S\left(\frac{1}{w}\right) + \frac{1}{2}(\bar{T}(0) - T(0))\right] + R_0^*),$$

$R|_0 < \varepsilon t$.

Это и есть формула Г. М. Голузина с той лишь разницей, что для остаточного члена R_0 Г. М. Голузин дал более точную оценку: $|R_0| = 0(t^2)$ (см. [3], стр. 203). Различие на постоянную $\frac{1}{2}[\bar{T}(0) - T(0)]$, очевидно, несущественно и связано с тем, что Г. М. Голузин не нормировал $\Phi(w,t)$ условием $\Phi'(0,t) > 0$.

Отметим, что на указанном здесь пути в заметке [4] вариационная формула Голузина распространена на семейства двусвязных областей.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Куфарев, Доклады АН СССР, том XCVII, № 3, 391—393, 1954.
2. П. П. Куфарев, Матем. сб., № 13, 55, 87—118, 1943.
3. Г. М. Голузин, Матем. сб., № 19, 61, 203—236, 1946.
4. П. П. Куфарев, Н. В. Семухина, Доклады АН СССР, том 107, 505—507, 1956.

*) Что эквивалентно формуле (3).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

П. П. КУФАРЕВ и В. Г. ПРЯЖИНСКАЯ

§ 1. В статье [1] вопрос о плоском неустановившемся движении грунтовых вод в слое бесконечной глубины в одном из предложенных способов ее решения был (при определенных предположениях) сведен к задаче определения решения $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ системы интегральных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2i \iint\limits_{C_\eta C_\zeta} \frac{Y\bar{Z}\,d\eta\,d\zeta}{(x-\bar{\zeta})(y-\bar{z})} + 2i \int\limits_{C_\xi} \frac{\bar{Z}\,d\zeta}{x-\bar{z}} - 2i \qquad (A)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = 4iX \iint\limits_{C_\eta C_\xi} \frac{Y\bar{Z}\,d\eta\,d\zeta}{(y-x)(x-\bar{\zeta})(y-\bar{z})} \text{ *)},$$

удовлетворяющего начальным условиям $x(\xi, 0) = \xi$,

$$X(\xi, 0) = x_0(\xi) \qquad (B)$$

Здесь C_η — прямая $\operatorname{Im}\eta = \delta$, $\delta > 0$, t — время, $x = x(\xi, t)$, $y = x(\eta, t)$, $z = x(\zeta, t)$, $X = X(\xi, t)$, $Y = X(\eta, t)$, $Z = X(\zeta, t)$ и $X_0(\xi)$ — известная функция.

Если x, X определены, то с помощью формулы

$$\frac{1}{z_w(w, t)} = 1 + \int\limits_{C_\xi} \frac{X(\xi, t)}{w - x(\xi, t)}\,d\xi$$

определяется функция $z(w, t)$, конформно отображающая полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ на область, занятую грунтовыми водами, а затем по известным формулам находятся скорости и давления.

Для обоснования этого метода необходимо иметь доказательство существования и единственности решения системы (A), удовлетворяющего начальным условиям (B). Это и является целью данной работы.

Доказательство проводится методом последовательных приближений**). При этом второе и третье слагаемые в правой части перво-

*) Интеграл понимается в смысле главного значения.

**) Аналогично доказательству, выполненному в [2] для системы типа (A) в более простом случае, когда в (A) входят интегралы не по бесконечной прямой, а по окружности.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

го из уравнений (A) мы отбрасываем, так как наличие их лишь усложняет вычисления, но не влияет на сущность доказательства. Далее, так как интегрирование по ς, как следует из вида интегралов и предполагаемых ниже свойств функций x, X, не ухудшает сходимость последовательности приближений, мы рассматриваем вместо (A) уравнения, содержащие не двойные, а простые интегралы. Наконец, очевидной заменой можно перейти к случаю, когда $C \equiv C_\eta$ будет прямой $\operatorname{Im}\eta = 0$. Таким образом, рассматривается система уравнений вида

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \int_C f(x, y, Y)\, d\eta, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = \int_C \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x}\, d\eta^{*}). \tag{I}$$

При этом из постановки рассмотренной в [1] физической задачи следует, что (в простейшем случае) функции f, φ можно считать удовлетворяющими следующим условиям:

1. f, φ голоморфны в области

$$L: -\delta < \operatorname{Im} x < \delta, \quad -\delta < \operatorname{Im} y < \delta, \quad |Y| < N.$$

2. Функция φ и ее производные по x, y, Y до второго порядка включительно, функция f и ее производные до третьего порядка включительно ограничены в L:

$$|\varphi|,\ |\varphi_x|,\ |\varphi_y|,\ |\varphi_Y| \ldots |\varphi_{xY}| \leqslant M \tag{II}$$

$$|f|,\ |f_x|,\ |f_y|\ |f_Y| \ldots |f_{xxY}| \leqslant M^{**}). \tag{III}$$

3. При $|y| \geqslant \frac{R}{2}$, где $R > 1$ — некоторое фиксированное число, функции f, φ и все указанные выше их производные, не содержащие дифференцирования по Y, удовлетворяют неравенствам вида

$$|\varphi|,\ |f|,\ |\varphi_x|,\ |\varphi_y|,\ |f_x|,\ |f_y|, \ldots |\varphi_{xy}|,\ |f_{xy}|,\ |f_{xxx}|,\ |f_{xxy}| \leqslant \frac{CY}{|y|^{\mu}} \tag{IV}$$

$0 < \mu < 1$.

4. Производные, содержащие дифференцирование по Y, при $|y| > \frac{R}{2}$, удовлетворяют неравенствам:

$$|\varphi_Y|,\ |f_Y|,\ |\varphi_{xY}|,\ |f_{xY}|,\ |f_{xxY}| \leqslant \frac{C}{|y|^{\mu}} \tag{V}$$

Всюду далее мы будем предполагать, что эти условия выполнены.

Назовем систему функций $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$, удовлетворяющих уравнениям (1) в области $G(t_0)$: $\xi \in C_\xi$, $|t| < t_0$ правильным решением системы (1) в области $G(t_0)$, если $x(\xi, t)$ имеет в $G(t_0)$ ограниченные производные по ξ до второго порядка включительно***), а $X(\xi, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера:

*) Множитель X во втором из уравнений (A), очевидно, также принципиально несущественен для теорем существования и единственности решения.

**) Впрочем, в дальнейшем эти условия используются из вторых производных от φ и f лишь для производных, содержащих одно дифференцирование по x, из третьих производных от f — лишь для производных, содержащих два дифференцирования по x.

***) Ср. [2]. Условия существования и ограниченности третьей производной от $x(\xi, t)$ по ξ, включенные в [2] в определение правильного решения, оказались излишними.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t)| \leqslant H|\xi_1 - \xi_2|^{\mu}$$

§ 2. Наша цель доказать теорему:

Теорема 1. Пусть функции $f(x, y, Y)$, $\varphi(x, y, Y)$ обладают в области L свойствами, перечисленными выше, а функция $X_0(\xi)$ удовлетворяет на C_ξ условиям:
$|X_0(\xi)| \leqslant N_0$, $N_0 < N$, $|X_0(\xi_1) - X_0(\xi_2)| \leqslant H_0|\xi_1 - \xi_2|^{\mu}$, $H_0 < H$ и при $|\xi| \geqslant R$.

$$|X_0(\xi)| < \frac{C_0}{|\xi|}$$

Тогда система уравнений (1), при достаточно малом t_0, имеет в $G(t_0)$ единственное удовлетворяющее начальным условиям

$$X(\xi, 0) = X_0(\xi), \quad x(\xi, 0) = \xi \tag{I'}$$

правильное решение.

Доказательство теоремы опирается на следующую основную лемму.

Лемма А. Пусть определенные в области $G(t_0)$ функции $x(\xi, t)$, $x^*(\xi, t)$, $X(\xi, t)$, $X^*(\xi, t)$, из которых первые две дважды дифференцируемы по ξ, удовлетворяют в $G(t_0)$ неравенствам вида:

$$-\delta < \operatorname{Im} x(\xi, t) < \delta, \quad -\delta < \operatorname{Im} x^*(\xi, t) < \delta, \tag{1}$$

$$|X(\xi, t)| < N, \ |X^*(\xi, t)| < N, \tag{2}$$

$$|x(\xi, t) - \xi| \leqslant \beta, \ |x^*(\xi, t) - \xi| \leqslant \beta, \ \beta \leqslant \frac{R}{2}, \tag{3}$$

$$A|\xi_1 - \xi_2| \leqslant |x(\xi_1, t) - x(\xi_2, t)|,$$

$$|x^*(\xi_1, t) - x^*(\xi_2, t) \leqslant B|\xi_1 - \xi_2|, \ A < 1 < B, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^\kappa x}{\partial \xi^\kappa}\right| \leqslant B, \quad \left|\frac{\partial^\kappa x^*}{\partial \xi^\kappa}\right| \leqslant B, \ \kappa = 1, 2, \tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial^\kappa x}{\partial \xi^\kappa} - \frac{\partial^\kappa x^*}{\partial \xi^\kappa}\right| \leqslant \Omega(t), \ \kappa = 0, 1, 2, \tag{6}$$

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t)| \leqslant H|\xi_1 - \xi_2|^{\mu},$$

$$|X^*(\xi_1, t) - X^*(\xi_2, t)| \leqslant H|\xi_1 - \xi_2|^{\mu}, \tag{7}$$

$$|X(\xi, t) - X^*(\xi, t)| \leqslant \Omega(t), \tag{8}$$

$$|X(\xi_1, t) - X^*(\xi_1, t) - X(\xi_2, t) + X^*(\xi_2, t)| \leqslant \Omega(t)|\xi_1 - \xi_2|, \tag{9}$$

и при $|\xi| \geqslant R$

$$|X(\xi, t)| \leqslant \frac{C}{|\xi|} \ |X^*(\xi, t)| \leqslant \frac{C}{|\xi|}, \tag{10}$$

$$|X(\xi, t) - X^*(\xi, t)| \leqslant \frac{\Omega(t)}{|\xi|}. \tag{11}$$

Пусть далее $X_0(\xi)$ — функция, удовлетворяющая на C_ξ условиям

$$|X_0(\xi)| \leqslant N_0, \ N_0 < N, \tag{12}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$|X_0(\xi_1) - X_0(\xi_2)| \leqslant H_0 |\xi_1 - \xi_2|, \quad H_0 < H \tag{13}$$

и при $|\xi| \geqslant R$.

$$|X_0(\xi)| \leqslant \frac{C_0}{|\xi|}, \quad C_0 < C. \tag{14}$$

Тогда функции

$$\begin{gathered}\tilde{x}(\xi, t) = \xi + \int_0^t dt \int_C f(x, y, Y)\, d\eta, \\ \tilde{x}^*(\xi, t) = \xi + \int_0^t dt \int_C f(x^*, y^*, Y^*)\, d\eta,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\tilde{X}(\xi, t) = X_0(\xi) + \int_0^t dt \int_C \frac{\varphi(x, y, Y)\, d\eta}{y - x},$$

$$\tilde{X}^*(\xi, t) = X_0(\xi) + \int_0^t dt \int_C \frac{\varphi(x^*, y^*, Y^*)\, d\eta}{y^* - x^*}, \tag{16}$$

при достаточно малом t_0 также удовлетворяют в $G(t_0)$ всем неравенствам вида (1)—(11), с той лишь разницей, что функция $\Omega(t)$ заменяется на $\tilde{\Omega}(t) = D \int_0^t \Omega(t)\, dt$, где D — положительная постоянная, зависящая лишь от входящих в формулировку теоремы и свойств функций $f(x, y, Y)$, $\varphi(x, y, Y)$ постоянных.

Действительно, из леммы A теорема 1 следует точно также, как в [2]. Таким образом, дело сводится к доказательству леммы A.

§ 3. Будем говорить, что функция $F(\xi, \eta, t)$ принадлежит в $E(t_0)$; $\xi \in C_\xi$, $\eta \in C_\eta$, $|t| < t_0$ классу $h(\nu, \mu; a(t))$ или удовлетворяет условию $H(\nu, \mu; a(t))$, если она удовлетворяет в $G(t_0)$ неравенству:

$$|F(\xi_1, \eta_1, t) - F(\xi_2, \eta_2, t)| \leqslant a(t) [|\xi_1 - \xi_2|^\nu + |\eta_1 - \eta_2|^\mu] \tag{17}$$

Аналогичную терминологию будем применять и в других случаях, например, если функция $F(\xi)$ удовлетворяет на C_ξ условию Гёльдера

$$|F(\xi_1) - F(\xi_2)| \leqslant K |\xi_1 - \xi_2|^\mu, \tag{18}$$

то будем писать: $F(\xi) \in h(\mu; K)$ или говорить, что $F(\xi)$ удовлетворяет условию $H(\mu, K)$

Рассмотрим для доказательства леммы A ряд вспомогательных лемм. При этом будем предполагать всюду, что функции φ, f, X_0 удовлетворяют условиям теоремы I, а x, x^*, X, X^* условиям леммы A. Так как способы доказательства лемм известны, а часть из них уже приведена в [2], то мы будем в большинстве случаев приводить их без доказательства или лишь намечая путь доказательства. Различные константы, зависящие лишь от констант, введенных в лемме A и в определении свойств функций f, φ, мы будем обозначать одной буквой D, не указывая связи между различными D, часто довольно громоздкие.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Лемма 1. Пусть в области

$$E \equiv E(t_0)\colon\ \xi \in C_\xi,\ \eta \in C_\eta,\ |t| < t_0$$

функция $\psi(\xi, \eta, t) \in h(1, \mu; a(t))$ и при $|\eta| > R$

$$|\psi(\xi_1, \eta, t) - \psi(\xi_2, \eta, t)| \leqslant \kappa \frac{a(t)}{|\eta|^\nu} |\xi_1 - \xi_2|,\ \nu < 0. \tag{19}$$

Тогда функция

$$u(\xi, t) = \int_C \frac{\psi(\xi, \eta, t)}{\eta - \xi}\, d\eta \tag{20}$$

(интеграл — в смысле главного значения) принадлежит классу $h(\mu, Da(t))$.

Доказательство аналогично приведенному в [3], стр. 54—55. При оценках используется равенство

$$\int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha} \frac{d\eta}{\eta - \xi} = 0\ (\alpha \text{ — любое}). \tag{21}$$

Интегралы по интервалам, принадлежащим интервалам $(-\infty, -R)$ $(R, +\infty)$, (за вычетом выделяемого при доказательстве интервала, содержащего ξ_1 и ξ_2), оцениваются с помощью неравенства (19); учитывается, что при любом $\nu > 0$

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma^\nu \log \sigma = 0,\ \lim_{\sigma \to \infty} \sigma^{-\nu} \log \sigma = 0$$

Лемма 2. Пусть $\psi(\xi, \eta, t) \in h(1, \mu; a(t))$ в E,

$$|\psi(\xi, \eta, t)| \leqslant \varepsilon a(t)\ (\varepsilon \leqslant 1) \tag{22}$$

и при $|\eta| > R$

$$|\psi(\xi, \eta, t)| \leqslant \frac{\varepsilon a(t)}{|\eta|^\mu}. \tag{23}$$

Тогда, каково бы ни было α, $0 < \alpha \leqslant 1$

$$|u(\xi, t)| \leqslant D(\alpha)\, \varepsilon^{1-\alpha} a(t). \tag{24}$$

Доказательство проводится путем разбиения интеграла (20) на интегралы по интервалам $(-\infty, \xi - \lambda)$, $(\xi - \lambda, \xi + \lambda)$, $(\xi + \lambda, \infty)$, $\lambda = \varepsilon^{\frac{1}{\mu}}$ и оценки каждого из этих интервалов для различных случаев расположения точек ξ, $\xi \pm \lambda$. Например, при $\xi \geqslant R$ интеграл по интервалу $(\xi + \lambda, \infty)$ оценивается так:

$$\int_{\xi+\lambda}^{\infty} \frac{\psi\, d\eta}{\eta - \xi} = I_1 + I_2,\ I_1 = \int_{\xi+\lambda}^{2\xi} \frac{\psi\, d\eta}{\eta - \xi},\ I_2 = \int_{2\xi}^{\infty} \frac{\psi\, d\eta}{\eta - \xi}.$$

В силу (23)

$$|I_1| \leqslant \int_{\xi+\lambda}^{2\xi} \frac{\varepsilon a(t)\, d\eta}{\eta^\mu (\eta - \xi)} \leqslant \frac{\varepsilon a(t)}{\xi^\mu} \log \frac{\xi}{\lambda} \leqslant \frac{D}{\alpha} \varepsilon^{1-\alpha} a(t)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

и

$$|I_2| \leqslant \varepsilon a(t) \int_{2\xi}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{\mu}(\eta - \xi)} < 2\varepsilon a(t) \int_{2\xi}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{\mu+1}} < D_1 \varepsilon a(t) < D\varepsilon^{1-\alpha} a(t).$$

Интеграл по отрезку $[\xi - \lambda, \ \xi + \lambda]$ во всех случаях оценивается одинаково:

$$\left|\int_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda} \frac{\psi\, d\eta}{\eta - \xi}\right| = \left|\int_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda} \frac{\psi(\xi, \eta, t) - \psi(\xi, \xi_1, t)}{\eta - \xi}\, d\eta\right| \leqslant a(t) \int_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda} \frac{|\eta - \xi|^{\mu}}{|\eta - \xi|}\, d\eta =$$

$$= 2\frac{a(t)}{\mu}\, \lambda^{\mu} = 2\frac{a(t)}{\mu}\, \varepsilon < \frac{\varepsilon^{\alpha}}{\mu} \cdot \varepsilon^{1-\alpha} a(t).$$

Аналогично выполняются оценки во всех других случаях. Лемма, конечно, остается справедливой, если в (23) заменить $|\eta|^{\mu}$ на $|\eta|^{\mu+1}$.

Лемма 3. Если $\psi \in h(1, \mu; a(t))$, $|\psi| \leqslant a(t)$ и при $|\eta| > R$ $|\psi| < a(t)|\eta|^{-\mu}$, то

$$|u(\xi, t)| \leqslant Da(t). \tag{25}$$

Эта лемма следует из леммы 2 при $\varepsilon = 1$ и $\alpha = 1$.

Лемма 4. Если $\psi \in h(1, \mu; a(t))$, $|\psi| \leqslant a(t)$ и при $|\eta| > R$

$$|\psi(\xi, \eta, t)| \leqslant \frac{a(t)}{|\eta|^{\mu+1}}, \tag{26}$$

то при $|\xi| > R$

$$|u(\xi, t)| \leqslant \frac{Da(t)}{|\xi|}. \tag{27}$$

Доказательство, которое достаточно выполнить для больших $\xi > 0$, сводим к оценке интегралов по интервалам

$$(-\infty, -R), \ (-R, R), \ \left(R, \frac{1}{2}\xi\right), \ \left(\frac{1}{2}\xi, \ \xi - \lambda\right), \ (\xi - \lambda, \ \xi + \lambda),$$

$$(\xi + \lambda, \ 2\xi), \ (2\xi, \ \infty), \ \lambda = \xi^{-\frac{1}{\mu}}.$$

Например,

$$\left|\int_{\xi+\lambda}^{2\xi} \frac{\psi\, d\eta}{\eta - \xi}\right| \leqslant a(t) \int_{\xi+\lambda}^{2\xi} \frac{d\eta}{\eta^{\mu+1}(\eta - \xi)} < \frac{a(t)}{(\xi + \lambda)^{\mu+1}} \log\frac{\xi}{\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant a(t)\frac{\mu+1}{\mu}\frac{\log\xi}{\xi^{\mu+1}} < \frac{2(\mu+1)}{\mu^2 e}\, a(t)\frac{1}{\xi}; \qquad \left|\int_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda}\right| \leqslant \frac{2a(t)}{\mu\xi}$$

Лемма 5. Введем далее в рассмотрение функции

$$v = \frac{x(\eta, t) - x(\xi, t)}{\eta - \xi}, \quad w = \frac{1}{v},$$

$$v_1(\xi, \eta, t) = v(\xi, \eta, t) - v^*(\xi, \eta, t) = \frac{x(\eta, t) - x(\xi, t) - x^*(\eta, t) + x^*(\xi, t)}{\eta - \xi}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$P(\xi, \eta_1, t) = \frac{\eta_1 - \xi}{y - x} - \frac{\eta_1 - \xi}{y^* - x^*} = v_1 w w^*, \quad F(\xi, \eta_1, t) = \varphi(x, y, Y)$$

$$\psi = \varphi \frac{\eta_1 - \xi}{y - x} = \varphi w,$$

$$\Phi(\xi, \eta_1, t) = \varphi(x, y, Y) - \varphi(x^*, y^*, Y^*)$$

$$\chi(\xi, \eta_1, t) = \varphi(x, y, Y) \frac{\eta_1 - \xi}{y - x} - \varphi(x^*, y^*, Y^*) \frac{\eta_1 - \xi}{y^* - x^*} = \Phi w + \varphi^* P.$$

Так же, как в [2] (см. в [2] леммы 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13), последовательно доказывается

$$|x_\xi^{(p)}(\xi_1, t) - x_\xi^{(p)}(\xi_2, t) - x_\xi^{*(p)}(\xi_1, t) + x_\xi^{*(p)}(\xi_2, t)| \leqslant \Omega(t) |\xi_1 - \xi_2| \quad (28)$$

$$|x_\xi^{(p)}(\xi_1, t) - x_\xi^{(p)}(\xi_2, t)| \leqslant B |\xi_1 - \xi_2|, \; p = 0, 1; \quad (29)$$

$v \in h\left(1, 1, \frac{1}{2} B\right)$ и $|v| \leqslant B$; $w \in h\left(1, 1; \frac{B}{2A^2}\right)$ и $|w| \leqslant \frac{1}{A}$;

$v_1 \in h\left(1, 1; \frac{1}{2} \Omega(t)\right)$ и $|v_1| \leqslant \Omega(t)$; $P \in h(1, 1; D\Omega(t))$ и $|P| \leqslant \frac{\Omega(t)}{A^2}$

$F \in h(1, \mu; D)$ и $|F| \leqslant M$; $\Phi \in h(1, \mu; D\Omega(t))$ и $|\Phi| \leqslant 3M\Omega(t)$;

$\psi \in h(1, \mu; D)$ и $|\psi| \leqslant \frac{M}{A}$; $\chi \in h(1, \mu; D\Omega(t))$ и $|\chi| \leqslant D\Omega(t)$.

Лемма 6. Последовательно доказывается, что при $|\eta_1| > R$

$$|F(\xi, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D}{|\eta_1|^{\mu+1}}, \quad |\psi(\xi, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D}{|\eta_1|^{\mu+1}} \quad (30)$$

$$|F(\xi_1, \eta_1, t) - F(\xi_2, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D}{|\eta_1|^{\mu+1}} |\xi_1 - \xi_2| \quad (31)$$

$$|\psi(\xi_1, \eta_1, t) - \psi(\xi_2, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D}{|\eta_1|^{\mu+1}} |\xi_1 - \xi_2| \quad (32)$$

$$|\Phi(\xi, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D\Omega(t)}{|\eta_1|^{\mu+1}}, \quad |\chi(\xi, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D\Omega(t)}{|\eta_1|^{\mu+1}} \quad (33)$$

$$|\Phi(\xi_1, \eta_1, t) - \Phi(\xi_2, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D\Omega(t)}{|\eta_1|^{\mu+1}} |\xi_1 - \xi_2| \quad (34)$$

$$|\chi(\xi_1, \eta_1, t) - \chi(\xi_2, \eta_1, t)| \leqslant \frac{D\Omega(t)}{|\eta_1|^{\mu+1}} |\xi_1 - \xi_2| \quad (35)$$

Доказательство. В силу (3) при $|\eta_1| > R$ будет $|y| > \frac{\eta_1}{2} > \frac{R}{2}$, $|y^*| > \frac{\eta_1}{2} > \frac{R}{2}$, а по (10), $|Y| < \frac{C}{|\eta_1|}$, $|Y^*| < \frac{C}{|\eta_1|}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда из неравенства (IV) (для φ) следует, что

$$|F(\xi,\ \eta,\ t)| = |\varphi(x,\ y,\ Y)| \leqslant \frac{C\cdot 2^{\mu}}{|\eta|^{\mu+1}},\quad |F^*| = |\varphi(x^*,\ y^*,\ Y^*)| < \frac{2^{\mu}C}{|\eta|^{\mu+1}}$$

$$|\psi| \leqslant \frac{2^{\mu}C}{A\,|\eta|^{\mu+1}},\quad |\psi^*| \leqslant \frac{2^{\mu}C}{A\,|\eta|^{\mu+1}}.$$

Далее, записывая Φ в виде

$$\Phi = \varphi - \varphi^* = \varphi_x(x - x^*) + \varphi_y(y - y^*) + \varphi_y(Y - Y^*),$$

где φ_x, φ_y, φ_Y — некоторые средние значения производных, из (IV), (V) и (6) (при $k = 0$), (11) находим указанную оценку для $|\Phi|$. Затем оценка χ следует из формулы: $\chi = \Phi w + \varphi^* P$ и оценок для φ, P, w (см. леммы 5, 6). Неравенства (31) и (32) также просто следуют из формулы

$$F(\xi_1, \eta, t) - F(\xi_2, \eta, t) = \varphi(x_1, y, Y) - \varphi(x_2, y, Y) = \varphi_x(x_1 - x_2).$$

Неравенство (34) доказывается аналогично тому, как в [2] установлена лемма (11). Именно, представим

$$\Delta\Phi = \Phi(\xi_1, \eta, t) - \Phi(\xi_2, \eta, t) = \varphi(x_1, y, Y) - \varphi(x_1^*, y^*, Y^*) -$$
$$- \varphi(x_2, y, Y) + \varphi(x_2^*, y^*, Y^*)$$

в виде

$$\Delta\Phi = S_4 + S_5 + S_6,$$

где (в соответствии с обозначениями в [2])

$$S_4 = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi_x(x, y, Y) - \varphi_x(x, y^*, Y^*)]\,dx$$

$$S_5 = \int_{x_2}^{x_1} [\varphi_x(x, y^*, Y^*) - \varphi_x(x_2^*, y^*, Y^*)]\,dx -$$
$$- \int_{x_2^*}^{x_1^*} [\varphi_x(x, y^*, Y^*) - \varphi_x(x_2^*, y^*, Y^*)]\,dx$$

$$S_6 = \varphi_x(x_2^*, y^*, Y^*)\ (x_1 - x_1^* + x_2^* - x_2).$$

Имеем, пользуясь (IV), (V) и затем (6) (при $k = 0$) и (11), (3), (4):

$$|S_4| \leqslant \int_{x_2}^{x_1} [|\varphi_{xy}^{cp}|\,|y - y^*| + |\varphi_{xY}^{cp}|\,|Y - Y^*|]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_2}^{x_1} \left[c\left|\frac{Y}{|y|^{\mu}}\right|_{cp} |y - y^*| + \frac{c}{|y_{cp}|^{\mu}}|Y - Y^*|\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D_1\,\Omega(t)}{|\eta|^{\mu+1}}\,|\xi_1 - \xi_2| \qquad (\alpha)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Далее оценка для S_5 следует аналогично из неравенств:

$$|S_5| \leqslant \max |\varphi_{xx}| \left[|x_1 - x_2| \left(|x_2 - x_2^*| + |x_1 - x_2| \right) + |x_1^* - x_2^*|^2 \right],$$

$$|S_5| \leqslant \max |\varphi_{xx}| \left[|x_1 - x_1^*| \left(|x_1^* - x_2^*| + |x_1 - x_1^*| \right) + |x_2 - x_2^*|^2 \right],$$

из которых второе получается после перестановки в S_5 пределов интегрирования (ср. [2]). Отсюда имеем в силу (IV), (4), (6):

$$|S_5| \leqslant c \frac{|Y_{cp}^*|}{|y_{cp}^*|^{\mu}} \left[2B^2 |\xi_1 - \xi_2|^2 + B\Omega(t) |\xi_1 - \xi_2| \right]$$

$$|S_5| < c \frac{|Y_{cp}^*|}{|y_{cp}^*|^{\mu}} \left[B\Omega(t) |\xi_1 - \xi_2| + 2(\Omega(t))^2 \right]$$

откуда следует, что

$$|S_5| < c \frac{|Y_{cp}^*|}{|y_{cp}^*|^{\mu}} \cdot 3B\Omega(t) |\xi_1 - \xi_2| \leqslant \frac{D_2 \Omega(t)}{|\gamma_l|^{\mu+1}} |\xi_1 - \xi_2|. \qquad (\beta)$$

Наконец, по (28) (при $p = 0$) и (IV)

$$|S_6| \leqslant D_3 \frac{\Omega(t)}{|\gamma_l|^{\mu+1}} |\xi_1 - \xi_2|. \qquad (\gamma)$$

Неравенства (α), (β), (γ) и доказывают оценку (34). Неравенство (35) следует затем также из формулы

$$\chi = (\varphi - \varphi^*) w + \varphi^* (w - w^*).$$

Лемма 7. Функции

$$u(\xi, t) = \int_c \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x} d\eta, \qquad u^*(\xi, t) = \int_c \frac{\varphi(x^*, y^*, Y^*)}{y^* - x^*} d\eta \qquad (36)$$

удовлетворяют в области $G(t_0)$ условию $H(\mu, D)$ и $|u| \leqslant D$, $|u^*| \leqslant D$ а при $|\xi| > R$

$$|u(\xi, t)| \leqslant \frac{D}{|\xi|}, \qquad |u^*(\xi, t)| \leqslant \frac{D}{|\xi|} \qquad (37)$$

функция

$$g(\xi, t) = u(\xi, t) - u^*(\xi, t) \qquad (38)$$

удовлетворяет условию $H(\mu, D\Omega(t))$, $|g| \leqslant D\Omega(t)$ и при $|\xi| > R$

$$|g(\xi, t)| \leqslant \frac{D\Omega(t)}{|\xi|}. \qquad (39)$$

Утверждения для u, u^* следуют из лемм (1), (3), (4) (при $a(t) = \text{const}$, $\nu = \mu + 1$) и (5), (6), поскольку

$$u(\xi, t) = \int_c \frac{\psi(\xi, \eta, t)}{\gamma_l - \xi} d\gamma_l, \qquad u^*(\xi, t) = \int_c \frac{\psi^*(\xi, \eta, t)}{\gamma_l - \xi} d\eta \qquad (40)$$

и функции ψ, ψ^* удовлетворяют условиям указанных лемм. Утверждения для $g(\xi, t)$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$g(\xi, t) = \int_c \frac{\chi(\xi, \eta, t)}{\eta - \xi}\, d\eta \tag{41}$$

следуют также из лемм (1), (3), (4) при $a(t) = D\Omega(t)$ ($\nu = \mu + 1$) и лемм (5), (6).

Лемма 8. Функции

$$p(\xi, t) = \int_c f(x, y, Y)\, d\eta, \quad p^*(\xi, t) = \int_c f(x^*, y^*, Y^*)\, d\eta \tag{42}$$

удовлетворяют условию $H(1, D)$. Более того, имеют место неравенства вида

$$\left|\frac{\partial p}{\partial \xi}\right| \leqslant D, \quad \left|\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}\right| \leqslant D, \quad |p| \leqslant D. \tag{43}$$

Производные от функции $q(\xi, t) = p(\xi, t) - p^*(\xi, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\partial q}{\partial \xi}\right| \leqslant D\Omega(t), \quad \left|\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}\right| \leqslant D\Omega(t). \tag{44}$$

Доказательства довольно очевидны. Установим, например, второе из неравенств (44). Имеем:

$$q_{\xi\xi}(\xi, t) = \int_c [(f_{xx} - f^*_{xx})\, x_\xi + f^*_{xx}(x_\xi - x^*_\xi) + (f_x - f^*_x)\, x_{\xi\xi} + f^*_x (x_{\xi\xi} - x^*_{\xi\xi})]\, d\eta.$$

Но

$$|f_{xx} - f^*_{xx}| \leqslant |f^{cp}_{xxx}|\,|x - x^*| + |f^{cp}_{xxy}|\,|y - y^*| + |f_{xxY}|\,|Y - Y^*|,$$

откуда, учитывая (IV), (V), ограниченность третьих производных от f и условия (5), (6), (11) и разбивая при оценках интеграл на интегралы по интервалам $(-\infty, -R)$, $(-R, R)$, $(R, +\infty)$, получим

$$\left|\int_c (f_{xx} - f^*_{xx})\, x_\xi\, d\eta\right| \leqslant D\Omega(t).$$

Аналогично оцениваются другие части интеграла для $q^{\xi\xi}$.

Теперь легко убедиться в справедливости леммы A. Действительно, неравенства (1), (3), (4), (5) и неравенство (6) с заменой $\Omega(t)$ на $\tilde{\Omega}(t)$ для $\tilde{x}(\xi, t)$, $\tilde{x}^*(\xi, t)$ следуют (при достаточно малом t_0) из леммы (8); неравенства (2), (7), (8), (9), (10), (11), также с заменой $\Omega(t)$ на $\tilde{\Omega}(t) = \int_0^t D\Omega(t)\, dt$ — из леммы (7) и неравенств (12), (13), (14).

В заключение заметим, что с помощью леммы 2 легко доказать голоморфность по t последовательных приближений $x_n(\xi, t)$, $X_n(\xi, t)$, строящихся по формулам типа (15), (16), следовательно, поскольку последовательные приближения равномерно сходятся в $G(t_0)$ к решению $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ системы (I), функции $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$, составляющие решение, голоморфны по t в $G(t_0)$ (ср. [2], лемма 9)).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Пряжинская, ПММ, т. X.
2. Ю. П. Виноградов и П. П. Куфарев, ПММ, т. XII, № 2, стр. 181—198, 1948.
3. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О КОМПОЗИЦИОННЫХ ПРИЗНАКАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ И ПОДГРУПП У ГРУПП

П. И. ТРОФИМОВ

Введем определение. Пусть G — группа, пусть α пробегает заданное множество индексов и пусть A и B — множества комплексов H_α и F_α элементов группы G. Комплексы M и N элементов из G будем называть сравнимыми по модулю (A, B) и писать

$$M \equiv N(A, B)$$

если

$$\bigcup_\alpha H_\alpha M F_\alpha = \bigcup_\alpha H_\alpha N F_\alpha,$$

где $\bigcup_\alpha$ знак теоретико-множественной суммы (по всем α).

Легко видеть, что это определение обобщает определение Е. Н. Торопова сравнения двух комплексов элементов группы по $2m$-модулю.

Приемами доказательства, использованными Е. Н. Тороповым в его статье [1], устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть α пробегает заданное множество индексов и пусть A и B — множества комплексов H_α и F_α элементов группы G. Пусть K — отличный от единицы инвариантный комплекс и пусть M — система элементов группы G.
Если

$$K \supseteq K^{-1},\ MK \equiv M(A, B),\ \bigcup_\alpha H_\alpha M F_\alpha \neq G,$$

то группа G непростая.

Теорема 2. Пусть α пробегает заданное множество индексов и пусть A и B — множества комплексов H_α и F_α группы G. Пусть K — отличный от единицы инвариантный комплекс элементов группы G, содержащий лишь элементы конечного порядка. Если M — система элементов из G, для которой

$$MK \equiv M(A, B)$$

и если

$$\bigcup_\alpha H_\alpha M F_\alpha \neq G,$$

то группа G непростая.

Теорема 3. Пусть α пробегает заданное множество индексов и пусть A и B множества комплексов H_α и F_α элементов из группы G. Пусть K — отличный от единицы инвариантный комплекс элементов

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

из G и пусть M и M_1 — системы элементов из G. Если для любого элемента k из K

$$Mk \equiv M_1(A, B),\ M \equiv M_1k^{-1}(A, B)$$

и если

$$\bigcup_{\alpha} H_\alpha M F_\alpha \neq G,$$

то группа G непростая.

Теорема 4. Пусть α пробегает заданное множество индексов и пусть A и B множества комплексов H_α и F_α элементов группы G. Пусть X — система всех элементов x из G, удовлетворяющих условию

$$M_x \equiv M(A, B).$$

Если X содержится в нормализаторах всех комплексов F_α, то X — подгруппа группы G. Если при этом

$$\bigcup_{\alpha} H_\alpha M F_\alpha \neq G,$$

то $X \neq G$.

Первые три теоремы превратятся в первые три теоремы Е. Н. Торопова [1], если предположить, что α пробегает некоторое конечное множество.

Четвертая теорема превратится в четвертую теорему Е. Н. Торопова [1], если предположить, что α пробегает некоторое конечное множество и что все элементы множества B суть нормальные делители группы G.

Таким образом, приведенные в этой заметке теоремы обобщают все теоремы Е. Н. Торопова [1]. Теоремы же Е. Н. Торопова заключают в себе композиционные признаки А. П. Дицмана [2] существования нормальных делителей и подгрупп у групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Торопов. Композиционные признаки непростоты групп. Ученые записки Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта, вып. 2, г. Гомель, 184—189, 1958.

2. А. П. Дицман. О сравнении систем элементов по двойному модулю, ДАН СССР, 26, 323—327, 1940.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О ПРИЗНАКАХ НЕПРОСТОТЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

П. И. ТРОФИМОВ

Символом $\tau(g)$ в статье обозначается число всех различных простых делителей порядка g конечной группы $\mathfrak{a}$. Под p будет подразумеваться простое число, делящее g.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{a}$ — конечная группа порядка g. Если $\tau(g) > 3$ и если среди всех различных делителей h числа g, удовлетворяющих условию $(h, g/h) = 1$, найдется не более $\tau(g) - 2$, которые, быть может, не являются порядками подгрупп группы $\mathfrak{a}$, то группа $\mathfrak{a}$ имеет нормальный делитель, заключенный в некоторой ее подгруппе порядка $\frac{g}{p^\alpha}$, $\left(p^\alpha, \frac{g}{p^\alpha}\right) = 1$, которая при условиях теоремы существует.

Доказательство. Положим $\tau(g) = n$. Пусть $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$. Рассмотрим следующие делители числа g:

$$\frac{g}{p_1^{\alpha_1}}, \frac{g}{p_2^{\alpha_2}}, \ldots, \frac{g}{p_n^{\alpha_n}}. \tag{1}$$

Ввиду условий теоремы по крайней мере два из них являются порядками подгрупп группы $\mathfrak{a}$. Очевидно, без ограничения общности доказательства, мы можем предположить, что именно делители

$$\frac{g}{p_1^{\alpha_1}}, \frac{g}{p_2^{\alpha_2}}$$

являются порядками некоторых подгрупп. Пусть $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ подгруппы порядков $\frac{g}{p_1^{\alpha_1}}$ и $\frac{g}{p_2^{\alpha_2}}$.

Логически допустимы два случая:
а) группа $\mathfrak{a}$ содержит подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$,
б) группа $\mathfrak{a}$ не содержит подгрупп порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$.

Рассмотрим случай а). Пусть группа $\mathfrak{a}$ содержит подгруппу $\mathfrak{a}_{12}$ порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ввиду известной теоремы Бернсайда группа $\mathfrak{a}_{12}$ разрешима, поэтому она имеет нормальный делитель по крайней мере одного из порядков $p_1^{\alpha_1'}$, $p_{22}^{\alpha_2'}$, где $0 < \alpha_1' \leqslant \alpha_1$, $0 < \alpha_2' \leqslant \alpha_2$. Пусть группа $\mathfrak{a}_{12}$ имеет нормальный делитель порядка $p_1^{\alpha_1'}$ (случай, когда $\mathfrak{a}_{12}$ имеет нормальный делитель порядка $p_2^{\alpha_2'}$, рассматривается аналогичным об-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

разом). Рассмотрим комплекс $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}$. В нем содержится всего $\frac{gp_1^{\alpha_1}}{d}$ различных элементов (здесь d — порядок пересечения v подгрупп $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_{12}$). Так как $\frac{gp_1^{\alpha_1}}{d}$ не превосходит g, то d совпадает с $p_1^{\alpha_1}$ и, следовательно, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{a}$, а подгруппа v является силовской подгруппой порядка $p_1^{\alpha_1}$ группы $\mathfrak{a}_{12}$.

Таким образом, пересечение v подгрупп $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_{12}$, произведение которых равно $\mathfrak{a}$, содержит нормальный делитель подгруппы $\mathfrak{a}_{12}$. По лемме 1 С. А. Чунихина [1] группа $\mathfrak{a}$ имеет нормальный делитель, равный, как это следует из доказательства леммы 1, пересечению всех подгрупп группы $\mathfrak{a}$, сопряженных с $\mathfrak{a}_2$ в $\mathfrak{a}$.

Итак, группа $\mathfrak{a}$ имеет нормальный делитель, заключенный в $\mathfrak{a}_2$.

Рассмотрим случай б). Пусть группа $\mathfrak{a}$ не содержит подгрупп порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Тогда в силу условий теоремы по крайней мере одно из чисел

$$\frac{g}{p_3^{\alpha_3}}, \ldots, \frac{g}{p_n^{\alpha_n}}$$

является порядком подгрупп группы $\mathfrak{a}$. Без ограничения общности мы можем число $\frac{g}{p_3^{\alpha_3}}$ считать порядком некоторой подгруппы, которую обозначим через $\mathfrak{a}_3$. Если по крайней мере одно из чисел

$$p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}, \quad p_1^{\alpha_1}p_3^{\alpha_3}$$

является порядком подгруппы, то приемом, использованным при исследовании случая а), нетрудно доказать, что группа $\mathfrak{a}$ имеет нормальный делитель, содержащийся в некоторой подгруппе $\mathfrak{a}_i$ порядка $\frac{g}{p_i^{\alpha_i}}$, где i — одно из чисел 1, 2, 3. Если же оба эти числа не являются порядками подгрупп, то вследствие условий доказываемой теоремы среди чисел

$$\frac{g}{p_4^{\alpha_4}}, \ldots, \frac{g}{p_n^{\alpha_n}}$$

содержатся порядки подгрупп.

Пользуясь таким приемом, нетрудно доказать, что группа $\mathfrak{a}$ всегда содержит нормальный делитель, заключенный в некоторой ее подгруппе порядка $\frac{g}{p_s^{\alpha_s}}$ (s — одно из чисел 1, 2,..., $n-1$), так как исследование, содержит ли группа $\mathfrak{a}$ подгруппу порядка $p_k^{\alpha_k}p_l^{\alpha_l}$, производится после установления существования подгрупп порядков $\frac{g}{p_k^{\alpha_k}}$, $\frac{g}{p_l^{\alpha_l}}$ и так как при $n > 3$ число сочетаний из $n-1$ по 2 уже больше $n-2$. Теорема 1 доказана.

Как известно, конечная группа $\mathfrak{a}$ порядка g непростая, если $\tau(g) = 1$ или 2.

Признак непростоты конечной группы $\mathfrak{a}$ порядка g с $\tau(g) > 2$ дается теоремой 2.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 2. Конечная группа $\mathfrak{a}$ порядка g, для которого $\tau(g) > 2$, является непростой, если среди всех делителей h числа g, удовлетворяющих условию $(h, g/h) = 1$, найдется не более $\tau(g) - 3$, которые, быть может, не являются порядками подгрупп.

Доказательство. Если $\tau(g) = 3$, то все делители h числа g, взаимно простые с $\frac{g}{h}$, являются порядками подгрупп, и, следовательно, в силу теоремы Ф. Холла [2], доказанной независимо от него С. А. Чунихиным [3], группа $\mathfrak{a}$ разрешима и поэтому ввиду равенства $\tau(g) = 3$ непростая.

Для случая $\tau(g) > 3$ теорема 2 является следствием теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чунихин. О существовании подгрупп у конечной группы. Труды семинара по теории групп, 106—125, 1938.

2. Hall Ph, A. characteristic properti of soluble groups. J. London Math. Soc., 12, 198—200, 1937.

3. С. А. Чунихин. О разрешимых группах. Изв. НИИММ Томского гос. ун-та, 2, 220—223, 1938.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О НЕКОТОРЫХ П-СВОЙСТВАХ ГРУПП

В. А. БЕЛОНОГОВ

В настоящей статье рассматривается ряд свойств подгруппы G^π произвольной группы G, а также вводятся так называемые (π, σ)-абелевы и (π, σ)-разрешимые группы, являющиеся обобщением обычных соответственно абелевых и разрешимых групп, а также соответственно p-абелевых и p-разрешимых групп, введенных С. А. Чунихиным в работе [1].

Определения и обозначения

Периодический элемент — элемент конечного порядка.

$\Pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа n.

$\Pi(g)$ — множество всех простых делителей порядка периодического элемента g.

$\Pi(G)$ — множество всех простых делителей порядков всех периодических элементов группы G.

Θ всюду означает множество всех простых чисел, а π и σ — некоторые подмножества из Θ.

$\pi + \sigma$ — объединение множеств π и σ.

Элемент g называется π-элементом, если он периодический и если $\Pi(g) \subseteq \pi$.

G_π — множество всех π-элементов группы G.

$$G^\pi = \{G_\pi\}.$$

$[M, N]$ — взаимный коммутант M и N — группа, порожденная всеми коммутаторами вида $[m, n]$, где $m \in M$ и $n \in N$.

$K(M) = [M, M]$ — коммутант множества M.

(π, σ)-коммутатор — коммутатор вида $[a, b]$, где a есть π-элемент, а b есть σ-элемент.

π-коммутатор — (π, π)-коммутатор.

$N_G(H)$ — нормализатор H в G: множество всех элементов из G перестановочных с H (G и H — произвольные подмножества некоторой группы).

§ 1. Некоторые свойства подгруппы G^π

Лемма 1. Если g — периодический элемент группы G и N — подгруппа G, то следующие условия эквивалентны:

1) существует число m такое, что $g^m \in N$ и $\Pi(m) \subseteq \pi$.

2) $g = sn = ns$, где $s \in G_\pi$ и $n \in N$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. Ясно, что из 2) следует 1), так как в качестве m мы можем взять, например, порядок элемента s. Докажем обратное. Порядок a элемента g запишем в виде $a = bc$, где $\Pi(b) \subseteq \pi$, а $\Pi(c) \cap \pi$ пусто; поэтому $(c, b) = (c, m) = (c, mb) = 1$. Тогда элемент g можно представить в виде $g = sn = ns$, где s — элемент порядка b (и поэтому является π-элементом), а n — элемент порядка c. Действительно, ввиду $(c, b) = 1$ существуют целые числа x и y такие, что $cx + by = 1$, так что $g = g^{cx+by} = g^{cx} g^{by}$, и мы можем взять $s = g^{cx}$ и $n = g^{by}$. Далее так как $(c, mb) = 1$, то существует целое число t такое, что $mbt \equiv 1(c)$, и мы имеем $n = n^{mbt} = n^{mbt} s^{mbt} = (ns)^{mbt} = g^{mbt} = (g^m)^{bt} \in N$. Это завершает доказательство леммы.

Следствие. Если N — периодический нормальный делитель группы G, то элемент фактор-группы G/N является π-элементом тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде sN, где s — π-элемент G.

Действительно, пусть gN есть π-элемент группы G/N, т. е. существует число m такое, что $\Pi(m) \subseteq \pi$ и $(gN)^m = N$, так что $g^m \in N$. Из периодичности N следует периодичность элемента g^m, а вместе с ним и g. Но тогда по лемме 1 $g = sn$, где $s \in G_\pi$ и $n \in N$, и поэтому $gN = snN = sN$. Обратное очевидно.

Теорема 1. Если N — периодический нормальный делитель группы G, то

$$(G/N)^\pi = G^\pi N/N.$$

Доказательство. Каждый элемент gN из $(G/N)^\pi$ имеет вид $gN = s_1 N s_2 N \ldots s_k N$, где $s_i N$ — π-элементы G/N. Ввиду следствия из леммы 1 мы можем в качестве $s_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ выбрать π-элементы G. Каждый же элемент $g'N$ из $G^\pi N/N$ имеет вид $g'N = s_1 s_2 \ldots s_l N$, где $s_j (j = 1, 2, \ldots l)$ — π-элементы G. Теперь равенство групп $(G/N)^\pi$ и $G^\pi N/N$ вытекает из очевидного соотношения $s_1 N s_2 N \ldots s_l N = s_1 s_2 \ldots s_l N$. Теорема доказана.

Следствие. Если N — периодический нормальный делитель группы G, то следующие условия эквивалентны:

1) N содержит все π-элементы G,

2) G/N не имеет отличных от единицы π-элементов.

Это непосредственно вытекает из теоремы 1 при $G^\pi \subseteq N$.

Замечание. Требование периодичности нормального делителя N не может быть опущено в теореме 1. Действительно, если $G = \{g\}$ — бесконечная циклическая группа, $N = \{g^n\}$ $(n > 1)$ и $\pi = \Pi(n)$, то G/N есть группа порядка n и, следовательно, $(G/N)^\pi = G/N$, в то время как $G^\pi = 1$ и, следовательно, $G^\pi N/N = N/N \neq G/N = (G/N)^\pi$.

Теорема 2. Для всякой группы G при любых π и σ имеет место равенство

$$[G^\pi, G^\sigma] = [G_\pi, G_\sigma].$$

Это утверждение является прямым следствием следующей леммы.

Лемма 2. Если M и N — инвариантные подмножества некоторой группы, то

$$[M, N] = [\{M\}, \{N\}].$$

Доказательство. Прежде всего ясно, что $[M, N] \subseteq [\{M\}, \{N\}]$. Покажем, что и $[\{M\}, \{N\}] \subseteq [M, N]$. Тождества $[a^{-1}, b^{-1}] = (ab)\,[a, b]\,(ab)^{-1}$, $[a^{-1}, b] = (aba^{-1})^{-1}[b^{-1}, a^{-1}]\,(aba^{-1})$ и $[b, a] = [a, b]^{-1}$ позволяют нам свести доказательство к случаю, когда в множествах M и N вместе с каждым элементом содержится и ему

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

обратный. Поскольку тогда каждый элемент из $\{M\}$ равен произведению конечного числа элементов из M и также каждый элемент из $\{N\}$ равен произведению конечного числа элементов из N, то достаточно показать, что всякий коммутатор вида $[m_1m_2...m_\kappa,\ n_1n_2...n_l]$, где $m_i \in M$ $(i = 1, 2,...,\kappa)$ и $n_j \in N$ $(j = 1, 2,...,l)$, содержится в группе $[M, N]$. Проведем доказательство индукцией по числу $\kappa + l$, которое мы назовем шириной коммутатора. При $\kappa + l = 2$ наше утверждение очевидно, а всякий коммутатор ширины $\kappa + l \geqslant 3$ может быть представлен в виде произведения коммутаторов меньшей ширины, как показывают следующие равенства:
При $\kappa > 1$

$$[m_1m_2...m_\kappa,\ n_1...n_l] = [m_2...m_k,\ m_1^{-1}n_1m_1,...\ m_1^{-1}n_lm_1]\,[m_1,\ n_1...n_l];$$

при $l > 1$ $[m_1...m_k,\ n_1\ n_2...n_l] =$

$$= [m_1...m_k,\ n_1]\ \ [n_1^{-1}m_1n_1...n_1^{-1}m_kn_1, n_2...n_l].$$

Проверка этих равенств сводится, очевидно, к проверке равенств $[ab,\ c] = [b,\ a^{-1}\ ca]\ [a, c]$ и $[c,\ ab] = [c,\ a]\ \ [a^{-1}ca,\ b]$.
Теперь по индукции мы можем заключить, что любой коммутатор вида $[m_1...m_k,\ n_1...n_l]$ содержится в $[M, N]$, так что $[\{M\},\ \{N\}] \subseteq [M,N]$. Лемма доказана.

Из леммы 2 при $M = G_\pi$ и $N = G_\sigma$ получается теорема 4. Из теоремы 4 при $\sigma = \pi$ вытекает следующее.

Следствие. Для любой группы G $K(G_\pi) = K(G^\pi)$.

Теорема 3. Для любой группы G

$$G^\pi = \prod_{p\in\pi} G^p.$$

Доказательство. Так как при любом $p \in \pi$ $G^p \subseteq G^\pi$, то включение $\prod_{p\in\pi} G^p \subseteq G^\pi$ очевидно. Обратно, каждый π-элемент g группы G можно представить в виде произведения p-элементов для некоторых $p \in \pi$ (это непосредственно следует из возможности представить конечную абелеву группу $\{g\}$ в виде прямого произведения ее силовских p-подгрупп), так что $G_\pi \subseteq \prod_{p\in\pi} G^p$. А так как $\prod_{p\in\pi} G^p$ есть группа (поскольку все G^p инвариантны в G), то и $G^\pi \subseteq \prod_{p\in\pi} G^p$. Теорема доказана.

Следствие. Для любой группы G $G^{\pi+\sigma} = G^\pi G^\sigma$.

Теорема 4. Для всякой группы G

$$K(G^\pi) = \prod_{p\in\pi} K(G^p).$$

Доказательство. Ясно, что $K(G^p) \subseteq K(G^\pi)$ для любого $p \in \pi$ и поэтому $\prod_{p\in\pi} K(G^p) \equiv H \subseteq K(G^\pi)$. С другой стороны, имеем $G^\pi/H = (\prod_{p\in\pi} G^p)/H = \prod_{p\in\pi}(G^pH/H)$, причем для любого $p \in \pi$ $G^pH/H \simeq G^p/H \cap G^p$ есть абелева группа, поскольку ясно, что $H \cap G^p \supseteq K(G^p)$. Кроме того, каждый элемент gH из G^pH/H имеет вид $gH = s_1s_2...s_kH = s_1Hs_2H...s_kH$, где $s_i \in G^p$ и следовательно, $s_iH \in (G^pH/H)_p$. Поэтому gH, будучи произведением попарно перестановочных (в силу абелевости группы G^pH/H) p-элементов s_iH, является p-элементом, так что G^pH/H есть абелева p-группа. Следовательно, G^π/H является произведением инвариантных

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

абелевых p-групп по различным простым $p\in\pi$. Нетрудно видеть, что это произведение будет прямым и группа G^π/H будет поэтому абелевой. Но это означает, что $H\supseteq K(G^\pi)$. Итак, $K(G^\pi)=H\equiv\prod_{p\in\pi}K(G^p)$, ч. т. д.

Следствие 1. Для любой группы G

$$K(G^{\pi+\sigma})=K(G^\pi)\ K(G^\sigma).$$

Следствие 2. Для любой группы G

$$[G^\pi,\ G^\sigma]\subseteq K(G^\pi)K(G^\sigma).$$

Следствие 3. Коммутатор $[a, b]$ любых двух периодических элементов произвольной группы G может быть представлен в виде произведения конечного числа p-коммутаторов для некоторых простых $p\in\Pi(a)+\Pi(b)$.

Действительно, $[a, b]\in[G^{\pi(a)},\ G^{\pi(b)}]\subseteq K(G^{\pi(a)+\pi(b)})=$

$$=\prod_{p\in\Pi(a)+\Pi(b)}K(G^p)=\prod_{p\in\Pi(a)+\Pi(b)}K(G_p),$$

откуда и следует наше утверждение.

Теорема 5. Для любой группы G следующие условия эквивалентны:

1) $G^p=G_p$ для каждого $p\in\pi$;

2) $G^\pi=G_\pi$ и произведение $\prod_{p\in\pi}G^p$ прямое.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2).

Пусть сначала множество π будет конечным. Проведем доказательство индукцией по числу n элементов множества π. При $n=1$ наше утверждение верно. Предположим, что оно уже верно при $n=N\geqslant 1$ и докажем его справедливость при $n=N+1$. Пусть множество π имеет $N+1$ элементов и пусть q — произвольный элемент из π. Имеем $G^\pi=G^{\pi-q}G^q$. Так как $\pi-q$ имеет N элементов, то в силу индукционного предположения и теоремы 3 получаем $G^{\pi-q}=G_{\pi-q}=\overset{\times}{\prod_{p\in\pi-q}}G^p$, где $\overset{\times}{\prod}$ — знак прямого произведения. Следовательно, $G^{\pi-q}\cap G^q=1$, и мы имеем $G^\pi=G^{\pi-q}\times G^q=(\overset{\times}{\prod_{p\in\pi-q}}G^p)\times G^q=\overset{\times}{\prod_{p\in\pi}}G^p$.

Каждый элемент из G^π является поэтому произведением конечного числа попарно перестановочных p-элементов для некоторых различных $p\in\pi$ и, следовательно, будет π-элементом, так что $G^\pi=G_\pi$. Этим завершено доказательство того, что при любом конечном π из 1) следует 2). В случае же, если множество π бесконечное, то произведение $\prod_{p\in\pi}G^p$ также будет прямым, поскольку любое конечное число множителей образует прямое произведение согласно предыдущему случаю. Понятно также, что $G^\pi=G_\pi$.

Обратно, из 2), очевидно, следует, что $\overset{\times}{\prod_{p\in\pi}}G^p=G^\pi=G_\pi=\prod_{p\in\pi}G_p$. Если q — произвольный элемент из π и $\pi_1=\pi-q$, то мы получаем $G^{\pi_1}\times G^q=G_{\pi_1}G_q$, а так как $G_{\pi_1}\subseteq G^{\pi_1}$, $G_q\subseteq G^q$ и $G^{\pi_1}\cap G^q=1$, то отсюда следует, что $G^{\pi_1}=G_{\pi_1}$ и $G^q=G_q$. Так как последнее равенство справедливо для любого $q\in\pi$, то условие 1) выполнено. Теорема доказана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 6. Пусть G — периодическая группа и $\pi \supseteq \Pi(G)$. Если $G = \overset{\times}{\prod_{p\in\pi}} G^p$, то для любой подгруппы H из G будет

$$H = \overset{\times}{\prod_{p\in\pi}} H^p \quad \text{и}$$

$$N_G(H) = \overset{\times}{\prod_{p\in\pi}} N_{G^p}(H^p).$$

Доказательство. Из теоремы 3 непосредственно следует $H = H^\pi = \prod_{p\in\pi} H^p$, а так как $H^p \subseteq G^p$, то это произведение прямое. Используя теорему 5, мы можем установить даже, что для любого $p\in\pi$ $G^p = G_p$, а также и $H^p = H_p$. Аналогично для подгруппы $N \equiv N_G(H)$ имеем $N_G(H) = \overset{\times}{\prod_{p\in\pi}} N^p$, где $N^p = N_p = N \cap G_p = N \cap G^p = N_G(H) \cap G^p = N_{G^p}(H)$. Покажем, что $N_{G^p}(H) = N_{G^p}(H^p)$. Включение $N_{G^p}(H) \subseteq N_{G^p}(H^p)$ сразу же следует из того, что H^p — характеристическая подгруппа H (так что из $g^{-1}Hg = H$ следует $g^{-1}H^pg = H^p$). Обратное же включение следует из того, что $N_{G^p}(H^p)$ содержится в прямом множителе G^p группы G, и поэтому каждый элемент из $N_{G^p}(H^p)$ перестановочен с каждой подгруппой H^q при $q \neq p$, а следовательно, и с $H^p \prod_{q\in\pi-p} H^q = H$.

Итак, $N_{G^p}(H^p) = N_{G^p}(H) = N^p$ и, следовательно, $N_G(H) = \overset{\times}{\prod_{p\in\pi}} N_{G^p}(H^p)$. Теорема доказана.

Если каждая истинная подгруппа группы G отлична от своего нормализатора в группе G, то говорят, что G обладает нормализаторным условием ([2], стр. 400).

Теорема 7. Следующие условия группы G эквивалентны:

1) G^π обладает нормализаторным условием;

2) G^p обладает нормализаторным условием для всех $p\in\pi$;

3) $G^\pi = \overset{\times}{\prod_{p\in\pi}} G^p = G_\pi$ и все G^p $(p\in\pi)$ обладают нормализаторным условием;

4) G имеет инвариантную силовскую π-подгруппу с нормализаторным условием.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1) и пусть H — силовская π-подгруппа G. Ясно, что H содержится в G^π и является ее силовской π-подгруппой. Если $N_G(H) \neq G^\pi$, то $N_{G^\pi}(H)$ должна быть отлична от своего нормализатора в G^π, что однако невозможно, так как нормализатор в любой группе ее силовской π-подгруппы совпадает со своим собственным нормализатором в той же группе (см. [2], стр. 346). Поэтому $N_{G^\pi}(H) = G^\pi$. Но всякая силовская π-подгруппа произвольной группы является единственной силовской π-подгруппой своего нормализатора, т. е. содержит все его π-элементы; следовательно, $H \supseteq (G^\pi)_\pi = G_\pi$ и потому $H = G^\pi$. Теперь ясно, что условие 4) выполнено. Если же, обратно, G имеет инвариантную силовскую π-подгруппу H, обладающую нормализаторным условием, то понятно, что $H = G_\pi = G^\pi$ и условие 1) выполняется. Итак, условия 1) и 4) эквивалентны.

Из 1) сразу же следует 2), поскольку всякая подгруппа группы с нормализаторным условием сама обладает нормализаторным условием ([2], стр. 405). Покажем, что из 2) следует 3). Действительно,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ввиду эквивалентности условий 1) и 4) должно быть $G^p = G_p$ и ввиду теорем 3 и 5 будет $G^\pi = G_\pi = \overset{\times}{\prod\limits_{p\in\pi}} G^p$. Остается показать, что из 3) следует 1). Из $G^\pi = G_\pi$ следует, что $\Pi(G^\pi)\subseteq\pi$, и мы можем, следовательно, применить теорему 6, согласно которой для любой подгруппы F из G^π будет $F = \overset{\times}{\prod\limits_{p\in\pi}} F^p$ и $N_{G^\pi}(F) = \overset{\times}{\prod\limits_{p\in\pi}} N_{G^p}(F^p)$. Если $F\subset G^\pi$, то для некоторого $q\in\pi$ будет $F^q\subset G^q$ и ввиду того, что G^q — группа с нормализаторным условием, $N_{G^q}(F^q)\supset F^q$. Поэтому $N_{G^\pi}(F) = \overset{\times}{\prod\limits_{p\in\pi}} N_{G^p}(F^p)\supset\overset{\times}{\prod\limits_{p\in\pi}} F^p = F$. Следовательно, G^π обладает нормализаторным условием. Теорема доказана.

§ 2. (π, σ)-абелевы группы

Определение 1. Группа G называется (π, σ)-абелевой, если каждый π-элемент G перестановочен с каждым σ-элементом G.

Определение 2. Подгруппа, порожденная всеми (π, σ)-коммутаторами группы G называется (π, σ)-коммутантом G и обозначается через $K^{\pi,\sigma}(G)$.

Из этих определений непосредственно следует: всякая подгруппа (π, σ)-абелевой группы (π, σ) -абелева; группа G (π, σ)-абелева тогда и только тогда, когда $K^{\pi,\sigma}(G) = 1$; $K^{\pi,\sigma}(G) \equiv [G_\pi, G_\sigma]$ и, следовательно (теорема 2), для всякой группы G $K^{\pi,\sigma}(G) = [G^\pi, G^\sigma]$; $K^{\pi,\sigma}(G)$ является характеристической подгруппой G; (π, σ) - коммутант подгруппы содержится в (π, σ)-коммутанте группы.

Теорема 8. Если N — периодический нормальный делитель группы G, то

$$K^{\pi,\sigma}(G/N) = K^{\pi,\sigma}(G)\, N/N.$$

Доказательство. Для всяких двух подгрупп A и B произвольной группы имеет место равенство $[AN/N, BN/N] = [A, B]\, N/N$ (это непосредственно следует из соотношения $[aN, bN] = (aN)^{-1}(bN)^{-1}(aN)\,(bN) = a^{-1}Nb^{-1}\,NaNbN = a^{-1}b^{-1}abN = [a, b]N$). Теперь, учитывая теорему 1, получаем $K^{\pi,\sigma}(G) = [(G/N)^\pi, (G/N)^\sigma] = [G^\pi N/N, G^\sigma N/N] = [G^\pi, G^\sigma]N/N = K^{\pi,\sigma}(G)N/N$. Теорема доказана.

Теорема 9. Пусть N — периодический нормальный делитель группы G. Фактор-группа G/N (π, σ)-абелева тогда и только тогда, когда $N\supseteq K^{\pi,\sigma}(G)$.

Доказательство. G/N является (π, σ)-абелевой тогда и только тогда, когда $K^{\pi,\sigma}(G/N) = 1$; в силу же теоремы 8 это возможно тогда и только тогда, когда $K^{\pi,\sigma}(G)\subseteq N$. Теорема доказана.

Следствие. Всякая фактор-группа (π,σ)-абелевой группы по периодическому нормальному делителю являеася (π, σ)-абелевой.

Теорема 10. Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:

1) $G(\pi, \Theta-\pi)$-абелева,

2) G равна прямому произведению своих π-силовской и ($\Theta-\pi$)-силовской подгрупп.

Доказательство. Пусть G (π, $\Theta-\pi$)-абелева, т. е. каждый элемент из G^π перестановочен с каждым элементом из $G^{\Theta-\pi}$. Поэтому все ($\Theta-\pi$)-элементы G, входящие в C^π, будут заключены в центре G^π, так что множество N всех ($\Theta-\pi$) - элементов из G^π является нормальным делителем в G^π. Поскольку N содержит все ($\Theta-\pi$)-элементы G^π, то, ввиду следствия из теоремы 1, G^π/N не имеет ($\Theta-\pi$)-элементов, так что если h есть порядок G^π/N и n есть порядок N, то мы должны иметь

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\Pi(h)\subseteq\pi$, $\Pi(n)\subseteq\Theta-\pi$, и поэтому $(n, h)=1$. Теперь, в силу теоремы Шура ([2], стр. 386), G^π имеет подгруппу H порядка h и $G^\pi=HN$. Так как N содержится в центре G^π, то H инвариантна в G^π. Отсюда следует (следствие теоремы 1), что H содержит все π-элементы из G^π, так что $H=G^\pi$, $N=1$. Итак, G^π является π-группой. Аналогично доказывается, что $G^{\Theta-\pi}$ является $(\Theta-\pi)$-группой. И теперь ясно, что $G=G^\pi\times G^{\Theta-\pi}$ и 2) выполняется. Из 2) же, очевидно, следует 1). Теорема доказана.

Замечание. В теореме 10 вместо Θ мы можем, очевидно, поставить $\pi(G)$. Понятно поэтому, что теореме 10 можно дать следующую формулировку.

Пусть группа G имеет порядок mn, где $(m, n)=1$. Если каждый элемент G, порядок которого делит m, перестановочен с каждым элементом G, порядок которого делит n, то G имеет подгруппы порядков m и n и равна их прямому произведению. И обратно.

π-абелевы группы

Рассмотрим один специальный класс (π, σ)-абелевых групп, когда $\sigma=\pi$.

Определение 3. Группа называется π-абелевой, если она (π, π)-абелева, т. е. если любые два ее π-элемента перестановочны.

Определение 4. π-коммутантом группы G называется подгруппа $K^\pi(G)\equiv K^{\pi,\pi}(G)$, т. е. подгруппа, порожденная всеми π-коммутаторами группы G.

Теорема 11. Следующие условия группы G эквивалентны:

1) G π-абелева;
2) G^π абелева;
3) G имеет инвариантную абелеву π-силовскую подгруппу;
4) G p-абелева для каждого $p\in\pi$.

Доказательство. Из теоремы 2 при $\sigma=\pi$ следует, что π-коммутант группы G совпадает с коммутантом группы G^π; отсюда вытекает эквивалентность условий 1) и 2). Далее, если G π-абелева, то произведение любых двух π-элементов G есть снова π-элемент и поэтому $G^\pi=G_\pi$. Следовательно, G^π является π-силовской подгруппой G, а так как G^π инвариантна в G и абелева (ввиду эквивалентности условий 1) и 2)), то условие 3) выполняется. Пусть теперь верно 3) и пусть H—инвариантная абелева π-силовская подгруппа G. Из инвариантности H следует, что $H=G_\pi=G^\pi$, и мы получаем, что G^π — абелева. Следовательно, условия 1), 2) и 3) эквивалентны. Далее, ввиду очевидного включения $G^p\subseteq G^\pi$ для $p\in\pi$, из 2) следует, что все G^p $(p\in\pi)$ абелевы, так что группа G является p-абелевой для каждого $p\in\pi$; условие 4) выполняется. Пусть, наконец, верно 4). Тогда для каждого $p\in\pi$ будет, очевидно, $G^p=G_p$, причем все G^p — абелевы группы, и, ввиду теорем 3 и 5, имеем $G^\pi=\prod\limits_{p\in\pi}{}^{\times} G^p$. Следовательно, группа G^π, являясь прямым произведением абелевых групп, будет абелевой группой, что влечет 2). Этим завершено доказательство теоремы.

Следствие. Периодическая группа является абелевой тогда и только тогда, когда для любого простого числа p всякие два p-элемента группы перестановочны.

§ 3. (π, σ)-разрешимость

Определение 5. Конечный нормальный (в частности, инвариантный или характеристический) ряд группы называется (π, σ)-разрешимым рядом, если все его факторы (π, σ)-абелевы.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 6. Группа G называется (π, σ)-разрешимой, если она обладает конечным (π, σ)-разрешимым нормальным рядом.

По аналогии с обычными разрешимыми группами ([2], § 57) доказывается теорема 12.

Теорема 12. Для периодической группы G следующие условия эквивалентны:

1) G (π, σ)-разрешима;

2) G обладает конечным (π, σ)-разрешимым характеристическим рядом;

3) убывающая цепь (π, σ)-коммутантов группы G через конечное число шагов оканчивается единицей.

Доказательство. Покажем сначала, что из 1) следует 3). Пусть K_i — i-тый (π, σ)-коммутант группы G

$$(K_1 = K^{\pi, \sigma}(G), \qquad K_{i+1} = K^{\pi, \sigma}(K_i))$$

и пусть $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n = 1$ суть (π, σ)-разрешимый нормальный ряд G. Так как фактор—группа G/G_1 (π, σ)-абелева, то согласно теореме 9 $G_1 \supseteq K_1$. Будем предполагать уже доказанным, что $G_i \supseteq K_i$. Тогда из (π, σ)-абелевости фактор-группы G_i/G_{i+1} следует, что

$$G_{i+1} \supseteq K^{\pi, \sigma}(G_i) \supseteq K^{\pi, \sigma}(K_i) = K_{i+1}.$$

Итак, для любого i имеет место включение $K_i \subseteq G_i$. При $i = n$ получаем $K_n \subseteq G_n = 1$, т. е. $K_n = 1$ и условие 3) выполнено. Далее, из 3), очевидно, следует 2), а из 2) следует 1). Теорема доказана.

Теорема 13. Все подгруппы и все фактор-группы по периодическим нормальным делителям (π, σ)-разрешимой группы (π, σ)-разрешимы.

Доказательство. Пусть G — (π, σ)-разрешимая группа и пусть $(*)$ $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_K = 1$ — некоторый инвариантный (π, σ)-разрешимый ряд G. По известному свойству (см. [2], стр. 104) всякая подгруппа F группы G обладает конечным нормальным рядом, факторы которого изоморфны подгруппам некоторых факторов ряда $(*)$; эти факторы, будучи подгруппами (π, σ)-абелевых групп, сами (π, σ)-абелевы и, следовательно, F (π, σ)-разрешима.

Пусть, далее, N — периодический нормальный делитель группы G. Покажем, что ряд

$$(**) \qquad G/N = G_0N/N \supseteq G_1N/N \supseteq \ldots \supseteq G_KN/N = 1$$

является инвариантным (π, σ)-разрешимым рядом фактор-группы G/N. Действительно, инвариантность ряда $(**)$ очевидна. Далее

$$(G_iN/N) / (G_{i+1}N/N) \simeq G_iN/G_{i+1}N \simeq G_i/G_i \cap G_{i+1}N \simeq$$

$$\simeq (G_i/G_{i+1}) / (G_i \cap G_{i+1}N/G_{i+1}).$$

Поскольку G_i/G_{i+1} (π, σ)-абелева и $G_i \cap G_{i+1}N/G_{i+1}$ есть периодическая группа (так как она содержится в $G_{i+1}N/G_{i+1} \simeq N/N \cap G_{i+1}$), то $(G_iN/N) / (G_{i+1}N/N)$ — (π, σ)-абелева (следствие теоремы 9). Следовательно, ряд $(**)$ является (π, σ)-разрешимым (мы можем опустить те члены, которые встречаются в нем не в первый раз) и G/N (π, σ)-разрешима. Теорема доказана.

Теорема 14. Если группа G имеет нормальный делитель N такой, что N и G/N (π, σ)-разрешимы, то и G (π, σ)-разрешима.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. Если $G/N \supset G_1N \supset \ldots \supset G_kN = 1$ и $N \supset N_1 \supset \ldots \supset N_s = 1$ суть нормальные (π, σ)-разрешимые ряды групп G/N и N, то ряд $G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = N \supset N_1 \supset \ldots \supset N_s = 1$ будет, очевидно, (π, σ)-разрешимым нормальным рядом группы G. Теорема доказана.

Следствие. Группа G, имеющая конечный нормальный ряд, факторы которого (π, σ)-разрешимы, сама (π, σ)-разрешима.

Теорема 15. Пусть G — периодическая группа и $\pi \cap \sigma$ пусто. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) G (π, σ)-разрешима;

2) G имеет конечный нормальный ряд, факторы которого не имеют отличных от единицы π-элементов, либо не имеют отличных от единицы σ-элементов;

3) G имеет конечный характеристический ряд, факторы которого либо не имеют отличных от единицы π-элементов, либо не имеют отличных от единицы σ-элементов.

Доказательство. Все факторы ряда в условии 2) будут, очевидно, (π, σ)-абелевыми, так что из 2) следует 1). Ясно также, что из 3) вытекает 2). Покажем, что из 1) следует 3). Пусть группа G (π, σ)-разрешима. Тогда G имеет конечный характеристический ряд, все факторы которого (π, σ)-абелевы и для доказательства условия 3) достаточно, следовательно, показать, что всякая (π, σ)-абелева группа F имеет характеристический ряд, факторы которого либо не имеют отличных от единицы π-элементов, либо не имеют отличных от единицы σ-элементов. Покажем, что таким рядом для (π, σ)-абелевой группы F будет, например, ряд $F \supseteq F^\pi \supseteq D \supseteq D^\pi \supseteq 1$, где $D = F^\pi \cap F^\sigma$. Действительно, прежде всего ясно, что все члены этого ряда являются характеристическими подгруппами F. Далее, в силу следствия теоремы 2, F/F^π не имеют отличных от единицы π-элементов, F^π/D не имеют отличных от единицы σ-элементов и D/D^π не имеет отличных от единицы π-элементов. Наконец, из $[D, D] \subseteq [F^\pi, F^\sigma] = K^{\pi, \sigma}(F) = 1$ следует, что подгруппа D — абелева, и поэтому $D^\pi = D_\pi$, так что D^π не имеет отличных от единицы σ-элементов (поскольку $\pi \cap \sigma$ пусто). Это завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 10 при $\sigma = \Theta - \pi$ непосредственно вытекает

Следствие. Для периодической группы G следующие условия эквивалентны:

1) G $(\pi, \Theta - \pi)$-разрешима;

2) G имеет конечный нормальный ряд, факторы которого либо π-группы, либо $(\Theta - \pi)$-группы;

3) G имеет конечный характеристический ряд, факторы которого либо π-группы, либо $(\Theta - \pi)$-группы.

π-разрешимость

Определение 7. Группа G называется π-разрешимой, если она (π, π)-разрешима, т. е. если она имеет конечный нормальный ряд, факторы которого π-абелевы (π-разрешимый ряд).

Теорема 16. Для периодической группы G следующие условия эквивалентны:

1) G π-разрешима;

2) G^π π-разрешима;

3) G имеет конечный нормальный ряд, факторы которого суть либо абелевы π-группы, либо $(\Theta - \pi)$-группы;

4) G имеет конечный характеристический ряд, факторы которого суть либо абелевы π-группы, либо $(\Theta - \pi)$-группы;

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

5) Ряд π-коммутантов G через конечное число шагов оканчивается единицей.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 5) есть прямое следствие эквивалентности условий 1), 3) теоремы 12. Далее, из $K^{\pi}(G^{\pi}) = [(G^{\pi})^{\pi}, (G^{\pi})^{\pi}] = [G^{\pi}, G^{\pi}] = K^{\pi}(G)$ следует, что ряды π-коммутантов групп G и G^{π} совпадают, так что условия 1) и 2) эквивалентны. Покажем, что из 1) следует 4). По теореме 12 (при $\sigma = \pi$) G имеет характеристический ряд

$$(*)\quad G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = 1,$$

все факторы G_i/G_{i+1} которого π-абелевы. Поэтому G_i/G_{i+1} согласно теореме 11 имеет характеристическую абелеву π-силовскую подгруппу F_i/G_{i+1}. Но тогда F_i характерична в G и фактор-группа

$$G_i/F_i \simeq (G_i/G_{i+1}) / (F_i/G_{i+1})$$

является $(\Theta - \pi)$-группой (следствие теоремы 1). Следовательно, если мы в ряду $(*)$ между G_i и G_{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ вставим подгруппу F_i, то придем к ряду условия 4). Из 4) же непосредственно следует 3), а из 3) следует 1), так как ряд условия 3) является, очевидно, π-разрешимым. Теорема доказана.

Если группа G конечная, то ряды в условиях 3) и 4) теоремы 11 мы можем уплотнить соответственно до композиционного и до главного рядов группы G, и тогда получается

Следствие. Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:

1) G π-разрешима;

2) Индексы композиционного ряда G либо равны простым числам из π, либо взаимно просты с каждым простым числом из π;

3) Индексы главного ряда G либо равны степеням простых чисел из π, либо взаимно просты с каждым простым числом из π.

Теорема 17. Если множество π — конечное, то периодическая группа G π-разрешима тогда и только тогда, когда она p-разрешима для каждого $p \in \pi$.

Доказательство. Если группа G π-разрешима, то она и p-разрешима для каждого $p \in \pi$, поскольку π-абелева группа является p-абелевой для каждого $p \in \pi$. Обратное же утверждение легко вывести, применяя метод индукции, из следующей теоремы.

Теорема 18. Если периодическая группа π-разрешима и σ-разрешима, то она $(\pi \dotplus \sigma)$-разрешима.

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Из π-разрешимости G вытекает (по теореме 16) существование нормального ряда

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = 1, \qquad (1)$$

факторы которого суть либо абелевы π-группы, либо $(\Theta - \pi)$-группы. Пусть G_i/G_{i+1} есть $(\Theta - \pi)$-группа. Ввиду теоремы 13, из σ-разрешимости группы G вытекает, что G_i/G_{i+1} также σ-разрешима. Поэтому (теорема 16) G_i/G_{i+1} имеет нормальный ряд

$$G_i/G_{i+1} \supset F_1^i/G_{i+1} \supset \ldots \supset F_{s_i}^i/G_{i+1} \supset G_{i+1}/G_{i+1} = 1, \qquad (2)$$

факторы которого суть либо абелевы σ-группы, либо $(\Theta - \sigma)$-группы. Так как у нас G_i/G_{i+1} есть $(\Theta - \pi)$-группа, то таковы же и все фак-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

торы ряда (2), а поэтому факторы ряда (2), являющиеся $(\Theta - \sigma)$-группами, будут даже $(\Theta - (\pi + \sigma))$-группами. Таким образом, вставляя в ряд (1) между всякими двумя членами G_i и G_{i+1}, такими, что $G_i\, G_{i+1}$ есть $(\Theta - \pi)$-группа, подгруппы $F_1^i, \ldots, F_{s_i}^i$ мы получим новый конечный нормальный ряд группы G, факторы которого суть либо абелевы π-группы, либо абелевы σ-группы, либо $(\Theta - (\pi + \sigma))$-группы. Следовательно, согласно теореме 16, группа G является $(\pi + \sigma)$-разрешимой, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чунихин, О Н-свойствах конечных групп, Матем. сб. 25 (67), 321—346, 1949.
2. А. Г. Курош, Теория групп, изд. 2, 1953.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ, КРОМЕ ОДНОГО КЛАССА, — АБЕЛЕВЫ

Л. П. УСОЛЬЦЕВ

§ 1. Пусть G — конечная группа порядка g. Условимся обозначать через $N_G(H)$ нормализатор подгруппы H в группе G; через $(G, N_G(H))$ — индекс нормализатора подгруппы H в группе G; через (H)—класс подгрупп группы G, сопряженных с H в G; через E—единичную подгруппу. Знаки $\setminus$ и $\cap$ имеют обычный теоретико-множественный смысл.

Американскими учеными Miller'ом и Moreno изучены конечные неспециальные группы, все подгруппы которых абелевы. Используя доказанную с помощью теории характеров теорему Frobenius'a о группах подстановок степени n и класса $n-1$, Miller и Moreno получили следующий результат (см. [1], стр. 132).

Если у конечной неспециальной группы G все подгруппы абелевы, то она порядка $p^\alpha q^\beta$ (p, q — различные простые числа), подгруппа Силова порядка p^α — циклическая $\{z\}$, подгруппа Силова порядка q^β— элементарная и инвариантная в G. Центр группы G есть $\{z^p\}$. При этом. β есть низшая степень, при которой $q^\beta \equiv 1 \pmod p$.

Не опираясь на вышеназванную теорему Frobenius'a, исключительно методами абстрактной теории групп О. Ю. Шмидт (см. [1]) исследовал конечные неспециальные группы, все подгруппы которых специальные, и получил результаты, для которых результат Miller'a и Moreno является частным случаем.

В настоящей работе исследованы конечные неспециальные группы, все подгруппы которых, кроме одного класса сопряженных неспециальных подгрупп — абелевы. Доказана непростота и разрешимость таких групп, найдены их порядки и исследовано их строение. Все результаты получены вне какой бы то ни было зависимости от теории характеров, поскольку используемый в данной работе результат Miller'a и Moreno может быть получен, как это сделал О. Ю. Шмидт, без привлечения теории характеров.

§ 2. Теорема 1. В конечной неспециальной группе G все подгруппы которой, кроме одного класса—(H), абелевы, одна из максимальных подгрупп будет абелевой.

Доказательство. Ясно, что найдется делитель b порядка g группы G, равный наибольшей степени лишь одного простого числа, входящей в g, который не является делителем порядка h группы H, этому делителю b соответствует в G подгруппа Силова B порядка b, не входящая в H. Далее, B не может совпадать с G, ибо тогда группа G была бы специальной. Поэтому максимальная подгруппа

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

группы G, заключающая в себе подгруппу B, будет отлична от G и H, а следовательно, будет абелевой.

Теорема 2. Конечная группа G, все подгруппы которой, кроме одного класса—(H), абелевы, непроста.

Доказательство. Предположим обратное, что группа G проста. Мы следующим путем придем к противоречию.

Лемма. Если группа G (исследуемого вида) проста, то каждая ее максимальная подгруппа G_1, являющаяся абелевой, взаимно проста с любой другой абелевой подгруппой G_2 группы G, не входящей в G_1.

Доказательство. Пусть максимальная в G подгруппа G_1, являющаяся абелевой, имеет с другой абелевой подгруппой G_2 общий наибольший делитель Θ, причем Θ не равно G_2. Предположим, что Θ, вопреки лемме, больше E. Группу всех элементов из G, перестановочных с Θ, обозначим через G_3. Так как G_1 и G_2 абелевы, то G_3 включает в себя как G_1, так и G_2, не совпадая с G_1, ибо G_2 не входит в G_1 по условию. Так как G_1 максимальна в G, то G_3 совпадает с G. Но, с другой стороны, G_3 не может совпадать с G, ибо G_3 содержит инвариантную подгруппу Θ, а G по условию проста. Полученное противоречие доказывает, что Θ не может быть больше E, что и доказывает лемму.

Следствие из леммы. Если группа G (исследуемого вида) проста, G_1—ее максимальная подгруппа, являющаяся абелевой, то подгруппы Силова группы G_1 суть подгруппы Силова самой группы G.

В самом деле, если G_1 имеет подгруппу Силова P_1, то эта последняя по известной 2-ой теореме Силова входит в некоторую подгруппу Силова P группы G. Если бы было $P_1 < P$, то мы могли бы применить предыдущую лемму, положив $P = G_2$. Получилось бы, вопреки предположению, $P_1 = E$.

Продолжим теперь доказательство нашей теоремы.

Возьмем максимальную в G подгруппу A, являющуюся абелевой. По предыдущей лемме A будет взаимно простою со всеми сопряженными подгруппами. Пусть порядок A равен a, а порядок G есть g, тогда $g = ab$, причем числа a и b взаимно просты, так как по следствию из леммы подгруппы Силова группы G либо входят в A, либо не имеют с A ни одного общего элемента, исключая единицу группы. Очевидно, $N_G(A) = A$, ибо A—абелева и максимальна в G. Далее $(G, N_G(A)) = b$, следовательно, в G будет b сопряженных с A подгрупп, в которых вместе $b(a-1)$ различных элементов, не считая единицы группы.

Имеем два случая:

1) в G найдется не входящая в (A) подгруппа Силова, которая не входит в (H);

2) любая не входящая в (A) подгруппа Силова группы G входит в (H).

Рассмотрим первый случай. Пусть P — подгруппа Силова группы G, не входящая ни в (A), ни в (H). Построим подгруппу, максимальную в G и содержащую P. Она, очевидно, будет абелевой. Пусть это будет подгруппа A_1 порядка a_1. Тогда $g = a_1 c$, причем числа a_1 и c взаимно просты по следствию из леммы. Очевидно, $(G, N_G(A_1)) = c$ и в c сопряженных с A_1 подгруппах будет вместе $c(a_1 - 1)$ различных элементов, не считая единицы группы. По лемме $(A) \cap (A_1) = E$, отсюда видно, что a_1 является делителем числа b, $b = a_1 m$. Из соотношений $g = ab$, $g = a_1 c$ и $b = a_1 m$ находим $c = am$. Таким образом, в (A_1) будет $c(a_1 - 1) = am(a_1 - 1)$ различных элементов, отличных

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

от единицы. Так как $(A)\bigcap(A_1)=E$, то в G будет по меньшей мере

$$b(a-1)+am(a_1-1)+1=g+1+m[aa_1-(a+a_1)]=t$$

различных элементов, что исключено, ибо $t\geqslant g+1$ вследствие $a\neq 1$, $a_1\neq 1$. Полученное противоречие доказывает теорему в условиях первого случая.

Перейдем ко второму случаю. Любая не входящая в (A) подгруппа Силова входит в (H). Здесь b будет, очевидно, делителем порядка h группы H.

Если $h=b$, то $(A)\bigcap(H)=E$ и, так как H не инвариантна в G, в (H) содержится по меньшей мере $b+1$ различный элемент. В G получается самое меньшее $b(a-1)+b+1=g+1$ различный элемент, чего быть не может.

Пусть $h=bm$, $m\neq 1$. Очевидно, $a=a_1m$, $(a_1, b)=1$, $(m, b)=1$. Группу $A\bigcap H$ обозначим через M. Порядок группы M, как нетрудно видеть, делит m, т. е. меньше или равен m. Имеем $(M)\subset(A)\bigcap(H)$. Так как M инвариантна в A и A максимальна в G, то $N_G(M)=A$, $(G, N_G(M))=b$. В (M) содержится, следовательно, не более чем $b(m-1)$ различных элементов, отличных от единицы. В $(A)\setminus(M)$ содержится не менее $b(a-1)-b(m-1)=b(a-m)$ различных элементов, отличных от единицы. Так как H не инвариантна в G, то в (H) содержится по меньшей мере $mb+1$ различный элемент. Далее, $((A)\setminus(M))\bigcap(H)=E$. поэтому в G содержится по меньшей мере $b(a-m)+mb+1=g+1$ различный элемент, что исключено. Полученное противоречие доказывает теорему и во втором случае.

Можно доказать более общую, чем теорема 2, теорему 3, если использовать доказанную с помощью теории характеров следующую теорему (см. [2], стр. 112).

Теорема Frobenius'a. Если подгруппа H группы G совпадает со своим собственным нормализатором и если H и любая сопряженная с ней подгруппа не имеют общих элементов (кроме единицы), то элементы G, не входящие в систему сопряженных с H подгрупп (включая H), образуют совместно с единицей нормальный делитель G.

Теорема 3. Конечная группа, одна из максимальных подгрупп которой абелева, непроста.

Доказательство. Пусть G — конечная группа, A — ее максимальная подгруппа, являющаяся абелевой. Предположим, что G проста, тогда получим (используя лемму теоремы 2), что A совпадает со своим собственным нормализатором и имеет равное E пересечение с каждой из своих сопряженных подгрупп, по теореме Frobenius'a группа G не может быть простой.

§ 3. Теорема 4. Если максимальная подгруппа B конечной группы G инвариантна в G, то ее индекс в G есть простое число.

Доказательство. Очевидно, G/B не содержит ни одной подгруппы, т. е. ее порядок, а следовательно, и индекс B в G есть простое число.

Теорема 5. Конечная группа G, все подгруппы которой, кроме одного класса $-(H)$, абелевы, разрешима.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 в G имеется максимальный нормальный делитель, который мы обозначим через N. Имеем два случая.

1) N совпадает с одной из максимальных подгрупп группы G. В этом случае N разрешима, так как она либо абелева, либо неабелева, все подгруппы которой абелевы. Фактор—группа G/N также

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

разрешима, ибо по теореме 4 ее порядок есть простое число. В этом случае G разрешима как группа, обладающая разрешимой инвариантной подгруппой, фактор-группа самой группы по которой разрешима.

2) N не является максимальной подгруппой группы G. В этом случае, с одной стороны, G/N непроста как группа, все подгруппы которой, кроме, может быть, одной, — абелевы. С другой стороны, G/N проста, ибо N — максимальный нормальный делитель в G. Следодательно, этот случай не имеет места. Теорема доказана.

Используя теорему 3, мы можем доказать более общую, чем теорема 5, следующую теорему.

Теорема 6. Конечная группа G с любым числом k классов сопряженных неабелевых подгрупп разрешима, если сама G и любая из ее неабелевых подгрупп содержат не более чем по одному классу сопряженных неабелевых, максимальных в них, подгрупп.

Теорема легко доказывается методом полной математической индукции по числу k классов сопряженных неабелевых подгрупп, содержащихся в группе G. Заметим лишь, что как сама группа G, так и любая ее неабелева подгруппа удовлетворяют условию теоремы 3, а следовательно, все они непросты.

§ 4. Теорема 7. Если G — конечная группа, все подгруппы которой, кроме одного класса — (H), абелевы, то H инвариантна в G.

Доказательство. В силу разрешимости G индекс одной из ее инвариантных подгрупп, например A, есть простое число.

Если $A = H$, то все доказано.

Предположим, что A — абелева. Пусть порядок g группы G есть $p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots s^\delta$, где $p, q, r, \dots, s$ — различные простые числа. Тогда порядок группы A равен $p^{\alpha-1}q^\beta r^\gamma \dots s^\delta$. Очевидно, $A = P_1 \times Q \times R \times \dots \times S$, где $\times$ есть знак прямого произведения, P_1 имеет порядок $p^{\alpha-1}$, а $Q, R, \dots, S$ — подгруппы Силова порядков $q^\beta, r^\gamma, \dots, s^\delta$ соответственно. Как известно (см., например, [3], стр. 45, лемма 1), инвариантные подгруппы Силова произвольной конечной группы являются характеристическими подгруппами этой группы. Следовательно, подгруппы $Q, R, \dots, S$ в A характеристические, поэтому они в G входят как инвариантные подгруппы. В частности, элемент z подгруппы Силова P порядка p^α группы G, не входящий в P_1, перестановочен с $Q, R, \dots, S$, но не с каждым из их элементов, ибо в противном случае, если z перестановочно с каждым из элементов этих групп, G была бы сама абелевой. Далее, P не инвариантна в G, ибо в противном случае G была бы прямым произведением всех своих подгрупп Силова различных порядков, т. е. она была бы специальной, что исключено. Пусть z не перестановочно со всеми элементами Q, тогда группа $\{z, Q\} = \{P, Q\}$, имеющая Q своей инвариантной подгруппой, не будет абелевой. Здесь возможны два случая: 1) $\{P, Q\} = H$, 2) $\{P, Q\} = G$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\{P, Q\} = H$, тогда $\{P, Q, R\} = G$. Очевидно, $N_G(P) = \{P, Q_1, R\}$, $N_H(P) = \{P, Q_1\}$, где Q_1 — некоторая подгруппа группы Q. Так как $(G, N_G(P)) = (H, N_H(P))$, то число подгрупп, сопряженных с P в подгруппе H, равно числу подгрупп, сопряженных с P в группе G, т. е. все подгруппы, сопряженные с P в группе G, суть все подгруппы, сопряженные с P в подгруппе H. Пусть H^* обозначает подгруппу, сопряженную с H в группе G. Тогда $H^* = \{P^*, Q^*\} = \{P^*, Q\}$. Так как P^* входит в H, то H^* входит в H или с H совпадает. Ввиду того, что порядки групп H и H^* равны, $H = H^*$, т. е. в этом случае H инвариантна в G.

Второй случай. Пусть $\{P, Q\} = G$. В этом случае $g = p^\alpha q^\beta$. В группе Q возьмем подгруппу Q_1 порядка $q^{\beta-1}$ и образуем группу $\{P, Q_1\}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Очевидно, это неабелева группа, ибо в противном случае все подгруппы группы G были бы абелевыми. Так как порядок h делит $g = p^\alpha q^\beta$ и $h \geqslant p^\alpha q^{\beta-1}$, то $h = p^\alpha q^{\beta-1}$. Это означает, что Q_1 инвариантна в G, ибо было показано, что циклическая подгруппа P в G не инвариантна. Таким образом, как и в первом случае, здесь $(G, N_G(P)) = (H, N_H(P))$, т. е. и в этом случае H будет инвариантна в G. Теорема доказана.

Теорема 8. В условиях теоремы 7 порядок g группы G равен $p^\alpha q^\beta r$, где p, q — различные простые числа, r — простое число, которое может как совпадать с p или q, так и быть отличным от них обоих, β — низшая степень, при которой $q^\beta \equiv 1 \pmod p$. При этом, в разложение g должны входить, по меньшей мере два различных простых числа. Подгруппа порядка P^α — циклическая $P = \{z\}$ и не инвариантная в G; подгруппа $P_1 = \{z^p\}$ порядка $p^{\alpha-1}$ является центром группы G; подгруппа Q порядка q^β инвариантна и элементарна в G; если $r \neq p$, $r \neq q$, то подгруппа R порядка r инвариантна в G, если же $r = q$, то подгруппа Q порядка $q^{\beta+1}$ инвариантна в G.

Доказательство. Так как H — неспециальная группа, все подгруппы которой абелевы, то ее порядок равен $p^\alpha q^\beta$, где p, q — различные простые числа, β — низшая степень, при которой $q^\beta \equiv 1 \pmod p$ (см. результат Miller'a и Moreno). Так как H максимальна и инвариантна в G, то ее индекс в G есть простое число (см. теорему 4). Таким образом, $g = p^\alpha q^\beta r$, причем r может как совпадать с p или q, так и быть отличным от них обоих. Условие, накладываемое на β, остается в силе. Подгруппа Силова P порядка p^α есть циклическая $\{z^p\}$, не инвариантная в G; центр группы G есть подгруппа $P_1 = \{z^p\}$ порядка $p^{\alpha-1}$. Подгруппа Q порядка q^β, во-первых, инвариантна в G, во-вторых, элементарна в G, ибо она элементарна уже в H. Если $r \neq p$, $r \neq q$, то подгруппа R порядка r инвариантна в G; если $r = q$, то подгруппа $\{Q, R\}$ порядка $q^{\beta+1}$ инвариантна в G.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные, труды семинара по теории групп, М.—Л., стр. 126—132, 1938.

2. С. А. Чунихин, О существовании подгрупп у конечной группы, там же, стр. 106—125.

3. П. И. Трофимов, О влиянии числа всех классов неинвариантных сопряженных подгрупп на свойства конечной неспециальной группы, Математический сборник, М., т. 33 (75), № 1, стр. 45—72, 1958.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

В. И. Машанов

В связи с исследованиями линейчатых образов в пространстве Лобачевского возникла необходимость рассмотрения некоторых вопросов аналитической геометрии этого пространства, связанных с заданием и взаимным положением прямых и плоскостей. Этим вопросам посвящены работы Л. Я. Березиной [5], Ю. Н. Ястребова и Б. С. Вакарчука [7]. В данной работе сделана попытка систематизировать эти результаты и дополнить их.

§ 1. Вейерштрассовы координаты точки и плоскости

Возьмем три взаимно перпендикулярные плоскости пространства Лобачевского, пересекающиеся в точке A_0. Если взять за единицу измерения длин отрезков абсолютную единицу—радиус кривизны пространства Лобачевского, то вейерштрассовыми координатами точки X этого пространства будут являться числа

$$x^0 = \operatorname{ch} A_0X, \qquad x^i = \operatorname{sh} P_iX, \tag{1}$$

где P_iX — длины перпендикуляров, опущенных из точки X на координатные плоскости, взятые с определенным знаком. Эти числа удовлетворяют, как известно, соотношению

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1. \tag{2}$$

Расстояние r между точками X и Y вычисляется, как известно, по формуле

$$\operatorname{ch} r = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3. \tag{3}$$

Уравнение плоскости имеет вид:

$$-u^0x^0 + u^1x^1 + u^2x^2 + u^3x^3 = 0. \tag{4}$$

Коэффициенты u^i впредь будем считать нормированными так, что

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 1, \tag{5}$$

и называть вейерштрассовыми координатами плоскости. Угол φ между двумя плоскостями с тангенциальными координатами u^i и v^i на-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ходится по формуле

$$\cos\varphi = -u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3. \tag{6}$$

При $|-u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3| = 1$ плоскости параллельны, а при $|-u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3| > 1$ они расходятся, и φ—мнимая величина. Положим $\varphi = \sqrt{-1}\,\rho$. Тогда кратчайшее расстояние ρ между расходящимися плоскостями вычисляется по формуле

$$\operatorname{ch}\rho = |-u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3|. \tag{7}$$

Условие ортогональности плоскостей с тангенциальными координатами u^i и v^i имеет вид:

$$-u^0v^0 + u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 = 0. \tag{8}$$

Расстояние d от точки X до плоскости с тангенциальными координатами u^i вычисляется по формуле

$$\operatorname{sh} d = -u^0x^0 + u^1x^1 + u^2x^2 + u^3x^3 \tag{9}$$

Прямая может быть задана системой

$$\begin{aligned} -u^0x^0 + u^1x^1 + u^2x^2 + u^3x^3 &= 0, \\ -v^0x^0 + v^1x^1 + v^2x^2 + v^3x^3 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Эта прямая определяет пучок плоскостей с уравнением

$$\lambda(-u^0x^0 + u^1x^1 + u^2x^2 + u^3x^3) + \mu(-v^0x^0 + v^1x^1 + v^2x^2 + v^3x^3) = 0. \tag{11}$$

§ 2. Аналитические точки

Введем в рассмотрение четырехмерное векторное пространство аналитических точек (см. [3], ч. 1, гл. VI и ч. 2, гл. VI).

Определение 1. Скалярным произведением аналитических точек $X(x^i)$ и $Y(y^i)$ называется выражение

$$(X, Y) = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3. \tag{12}$$

Следствие 1. Скалярное произведение линейно и коммутативно.

Следствие 2. Множества аналитических точек $X(x^i)$ и $U(u)$, удовлетворяющих условиям $X^2 = -1$, $U^2 = 1$, находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством точек X и множеством плоскостей U пространства Лобачевского, заданных вейерштрассовыми координатами.

Для краткости вместо слов „аналитическая точка, изображающая точку (плоскость) пространства Лобачевского“, будем впредь говорить просто „точка“ („плоскость“).

Следствие 3. Уравнение плоскости U имеет вид

$$(U, X) = 0,$$

где X — произвольная точка плоскости.

Следствие 4. Соотношения

$$\operatorname{ch} r = -(X, Y),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\cos\varphi = (U, V),$$

$$\operatorname{ch}\rho = |(U, V)|,$$

$$\operatorname{sh} d = (U, X)$$

определяют, соответственно, расстояние r между точками X и Y, угол φ между пересекающимися и расстояние ρ между расходящимися плоскостями, расстояние d от точки X до плоскости U.

Определение 2. Взаимно перпендикулярные плоскости A_1, A_2, A_3 и точка A_0 их пересечения образуют репер пространства Лобачевского.

Следствие 1. Аналитические точки репера образуют базис пространства аналитических точек.

Следствие 2. Вейерштрассовы координаты точки X и плоскости U являются коэффициентами разложения соответствующих аналитических точек X и U по аналитическим точкам репера:

$$X = x^i A_i, \qquad U = u^i A_i. \tag{13}$$

Формулы перехода от репера $\{A_j\}$ к реперу $\{A_{i'}\}$, где $A_{i'} = a^j_{i'} A_j$, имеют вид

$$x^j = a^j_{i'} x^{i'}. \tag{14}$$

Матрица преобразования (14) есть псевдоортогональная матрица индекса „1“ (см. [5], § 51).

§ 3. Взаимное положение прямых пространства Лобачевского

Пучок плоскостей, определенный ортогональными плоскостями U и V, будем обозначать $\{U, V\}$, а линию их пересечения называть осью пучка. Всегда можно от задания $\{U, V\}$ пучка плоскостей перейти к заданию $\{U_1, V_1\}$ этого пучка, где

$$U_1 = U\cos\varphi + V\sin\varphi,$$

$$V_1 = -U\sin\varphi + V\cos\varphi, \tag{15}$$

а φ — угол между плоскостями U_1 и U.

Теорема 1. Плоскости $P(\varphi) = U\cos\varphi + V\sin\varphi$, $R(\psi) = W\cos\psi + S\sin\psi$ пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ всегда могут быть выбраны так, что будут выполняться соотношения

$$(P(\varphi + \pi/2),\ R(\psi)) = (P(\varphi), R(\psi + \pi/2)) = 0. \tag{16}$$

В этих условиях при $|(R(\varphi),\ R(\psi))| < 1$ плоскости $P(\varphi)$, $R(\psi)$ определяют общий перпендикуляр осей пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$.

Доказательство. Условия (16) дают два уравнения на φ и ψ, решая которые получаем, что искомые плоскости определяются значениями φ и ψ, удовлетворяющими уравнениям

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon\psi) = -[(U, S) + \varepsilon(V, W)] : [(V, S) - \varepsilon(U, W)], \tag{17}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Найденные плоскости $P(\varphi)$ и $R(\psi)$ при $|(P, R)| < 1$ пересекаются, определяя, очевидно, прямую, пересекающую ортогонально оси данных пучков.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 3. Будем называть углом между прямыми угол между плоскостями, определенными этими прямыми и их общим перпендикуляром. Прямые назовем ортогональными, если угол между ними равен $\pi/2$.

Следствие. В условиях теоремы 1 угол α между прямыми и кратчайшее расстояние d между ними находятся из соотношений

$$\cos\alpha = (P(\varphi),\quad R(\psi)),$$

$$\operatorname{ch} d = (P(\varphi+\pi/2),\quad R(\psi+\pi/2)). \tag{18}$$

Теорема 2. Расстояние d и угол α между осями пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ находятся по формулам

$$\operatorname{ch} d = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\nabla^* + 2\Delta^*} + \sqrt{\nabla^* - 2\Delta^*}\right), \tag{19}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\nabla^* + 2\Delta^*} - \sqrt{\nabla^* - 2\Delta^*}\right), \tag{20}$$

где

$$\nabla^* = \operatorname{ch}^2 d + \cos^2\alpha = (U, W)^2 + (U, S)^2 + (V, W)^2 + (V, S)^2, \tag{21}$$

$$\Delta^* = \operatorname{ch} d \cos\alpha = \begin{vmatrix} (U, W) & (V, W) \\ (U, S) & (V, S) \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Для доказательства достаточно подсчитать величины ∇^*, Δ^* пользуясь соотношениями (18) и (16).

Следствие 1. Условие ортогональности осей пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ имеет вид

$$\Delta^* = 0. \tag{23}$$

Следствие 2. Условие параллельности осей пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ имеет вид

$$|\Delta^*| = \frac{1}{2}\nabla^* = 1. \tag{24}$$

Определение 4. Пучки $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ будем называть пересекающимися, если они имеют общую плоскость. Оси пересекающихся пучков будем называть компланарными.

Теорема 3. При условии

$$(\det|U, V, W, S|)^2 = \nabla^* - 1 - (\Delta^*)^2 = 0 \tag{25}$$

пучки $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ имеют общую плоскость $P = U\cos\varphi + V\sin\varphi$, где

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - (U, W)^2 - (U, S)^2}{(U, W)(V, W) + (U, S)(V, S)} = \frac{(U, W)(V, W) + (U, S)(V, S)}{1 - (V, W)^2 - (V, S)^2}. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $P = U\cos\varphi + V\sin\varphi = W\cos\varphi + S\sin\psi$ — общая плоскость пучков. Тогда справедливы соотношения

$$\cos\varphi = (W, U)\cos\psi + (S, U)\sin\psi,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sin\varphi = (W, V)\cos\psi + (S, V)\sin\psi, \qquad (*)$$

$$(U, W)\cos\varphi + (V, W)\sin\varphi = \cos\psi,$$

$$(U, S)\cos\varphi + (V, S)\sin\varphi = \sin\psi.$$

Эта система совместна при выполнении условия (25). Отсюда и следуют соотношения (26).

Теорема 4. Оси пересекающихся пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ пересекаются при $|\Delta^*|<1$ (см. (22)) под углом α, $\cos\alpha = \Delta^*$ параллельны при $|\Delta^*| = 1$ и расходятся при $|\Delta^*|>1$, с кратчайшим расстоянием d, $\operatorname{ch} d = |\Delta^*|$ между ними.

Для доказательства достаточно, например, найти угол между плоскостями пучков $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$, ортогональными их общей плоскости P_1 (см. теор. 3), используя соотношения (*)

Следствие. Условия

$$(U, W)^2 + (U, S)^2 = (V, W)^2 + (V, S)^2 = 1 \qquad (27)$$

необходимы и достаточны для совпадения осей пучков $\{U, V\}$ и $\{W,S\}$.

Определение 5. Будем говорить, что аналитическая точка $X(x^0, x^1, x^2, x^3)$, удовлетворяющая условию $X^2 = 0$, определяет несобственную точку

$$X_\infty(x^0:x^1:x^2:x^3).$$

Теорема 5. Параллельные прямые пересекаются в несобственной точке.

Доказательство. Пусть данные прямые суть оси пучков $\{U,V\}$ и $\{W, S\}$. Перенесем систему координат так, чтобы координатная плоскость A_3 совпала с плоскостью P, общей пучкам $\{U, V\}$ и $\{W, S\}$ (см. теорему 3). Тогда плоскости Q и R, ортогональные плоскости P, будут иметь координаты: $Q(q^0, q^1, q^2, 0)$, $R(r^0, r^1, r^2, 0)$. Угол между плоскостями Q и R есть, очевидно, угол между данными прямыми. Если прямые параллельны, то $(Q, R)^2 = 1$. В этом случае точка $X(x^0, x^1, x^2, 0)$ пересечения данных прямых удовлетворяет условию

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -\begin{vmatrix} q^1 & q^2 \\ r^1 & r^2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q^0 & q^2 \\ r^0 & r^2 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} q^0 & q^1 \\ r^0 & r^1 \end{vmatrix}^2 = (Q, R)^2 - Q^2 R^2 = 0.$$

Осуществленный перенос системы координат не нарушает общности теоремы, так как псевдоортогональная матрица этого преобразования имеет скалярное произведение аналитических точек своим инвариантом.

Сравнивая уравнение плоскости и условие ортогональности двух плоскостей (см. (4), (8)), получаем следующую теорему.

Теорема 6. Две плоскости ортогональны, если координаты одной из них удовлетворяют уравнению другой.

Следствие. Плоскость ортогональна прямой, если ее координаты удовлетворяют уравнениям прямой.

Теорема 7. Плоскость U, ортогональная данной прямой, и точка X пересечения этой плоскости с данной прямой образуют линейно независимый базис на прямой.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство. Уравнения прямой выделяют двумерное подпространство пространства аналитических точек. В силу $(U, X) = 0$ предположение $X = \lambda U$ приводит к условию $U^2 = 0$, что невозможно.

Прямую, определенную ортогональной ей плоскостью U и точкой X их пересечения, будем обозначать $\{X, U\}$.

Теорема 8. Точка Y прямой $\{X, U\}$ и плоскость V, ортогональная этой прямой, могут быть представлены в виде

$$Y = X \operatorname{ch} r + U \operatorname{sh} r, \qquad V = X \operatorname{sh} \rho + U \operatorname{ch} \rho, \tag{28}$$

где r — расстояние между точками Y и X, а ρ — расстояние между плоскостями U и V (см. [8]).

Определение 6. Множество плоскостей, ортогональных прямой $\{U, X\}$, будем называть пучком расходящихся плоскостей $\{U, X\}$.

Теорема 9. Прямая имеет две несобственные точки. Расстояние любой точки прямой до ее несобственной точки бесконечно велико.

Доказательство. Пусть $X_\infty = X \operatorname{ch} r + V \operatorname{sh} r$ — несобственная точка прямой $\{X, U\}$. В силу определения $5 - \operatorname{ch}^2 r + \operatorname{sh}^2 r = 0$, или $\operatorname{th}^2 r = 1$. Следовательно, $r = \pm \infty$.

Следствие 1. Аналитические точки

$$X + \varepsilon U, \tag{29}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, определяют несобственные точки прямой $\{X, U\}$.

Следствие 2. Условие параллельности прямых $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ имеет вид

$$X + \varepsilon U = \lambda (Y + \varepsilon V), \tag{30}$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Теорема 10. Несобственные точки X_∞ и Y_∞ удовлетворяют условию $(X_\infty, Y_\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда они совпадают.

Доказательство. Пусть X и Y — аналитические точки, определяющие X_∞ и Y_∞ и удовлетворяющие условию

$$(X_\infty, Y_\infty) = 0.$$

Возьмем $\lambda = x^0 : y^0$ и составим выражение

$$X^2 - 2\lambda (X, Y) + \lambda^2 Y^2 \equiv 0.$$

Из этого выражения следует, что

$$(x^1 - \lambda y^1)^2 + (x^2 - \lambda y^2)^2 + (x^3 + \lambda y^3)^2 \equiv 0 \text{ или}$$

$$x^1 : y^1 = x^2 : y^2 = x^3 : y^3 = \lambda.$$

Следствие. Условие

$$(X + \varepsilon_1 U, Y + \varepsilon_2 V) = 0, \tag{31}$$

где $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$, является необходимым и достаточным для параллености прямых $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$.

Теерема 11. Всегда можно перейти к такому заданию $\{U_0, X_0\}$ и $\{Y_0, V_0\}$ прямых $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$, что будут выполняться соотношения:

$$(X_0, V_0) = (Y_0, U_0) = 0. \tag{32}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В этих условиях точки X_0 и Y_0 определяют общий перпендикуляр данных прямых.

Доказательство. Точки X_0, Y_0 и плоскости U_0, V_0, удовлетворяющие условиям $(X_0, U_0) = 0$, $(Y_0, V_0) = 0$, можно представить в виде

$$X_0 = X\mathrm{ch}r + U\mathrm{sh}r, \quad U_0 = X\mathrm{sh}r + U\mathrm{ch}r,$$

$$Y_0 = Y\mathrm{ch}\rho + V\mathrm{sh}\rho, \quad V_0 = Y\mathrm{sh}\rho + V\mathrm{ch}\rho.$$

В силу (32) имеем два уравнения на r и ρ, решив которые, получим, что искомые r и ρ удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{th}(r + \varepsilon\rho) = -[(X, V) + \varepsilon(U, Y)]:[(U, V) + \varepsilon(X, Y)], \tag{33}$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Следствие. В условиях теоремы 11 кратчайшее расстояние d и угол α между прямыми $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ вычисляются из соотношений:

$$\mathrm{ch}d = -(X_0, Y_0), \quad \cos\alpha = (U_0, V_0). \tag{34}$$

Теорема 12. Расстояние d и угол α между прямыми $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ в пространстве вычисляются по формулам:

$$\mathrm{ch}\, d = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\nabla + 2\Delta} + \sqrt{\nabla - 2\Delta}\right), \tag{35}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\nabla + 2\Delta} - \sqrt{\nabla - 2\Delta}\right), \tag{36}$$

где

$$\nabla = \mathrm{ch}^2 d + \cos^2\alpha = (XY)^2 + (U, V)^2 - (X, V)^2 - (U, Y)^2, \tag{37}$$

$$\Delta = \mathrm{ch}d\cos\varphi = \begin{vmatrix} (X, Y) & (U, Y) \\ (X, V) & (U, V) \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Для доказательства достаточно подсчитать величины ∇ и Δ, используя соотношения (34) и (32).

Следствие 1. Условие ортогональности прямых $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ имеет вид

$$\Delta = 0. \tag{39}$$

Следствие 2. Условие параллельности прямых $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ имеет вид

$$|\Delta| = \frac{1}{2}\nabla = 1. \tag{40}$$

Теорема 13. При $|\mathrm{th}(r + \varepsilon\rho)| = 1$ (см. (33)) прямые $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ параллельны.

Доказательство. Пусть $\mathrm{th}(r + \varepsilon\rho) = \varepsilon_1 = \pm 1$. Тогда $(X - \varepsilon_1 U, Y - \varepsilon\varepsilon_1 V) = 0$. В силу соотношения (31) прямые параллельны.

Теорема 14. Прямые $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ при

$$(\det|X, U, Y, V|)^2 = \nabla - 1 - \Delta^2 = 0 \tag{41}$$

компланарны. Пусть

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\mu = \frac{1-(X,Y)^2+(X,V)^2}{(X,Y)(U,Y)-(X,V)(U,V)} = \frac{(X,V)(U,V)-(X,Y)(U,Y)}{1+(U,Y)^2-(U,V)^2}. \quad (42)$$

Тогда компланарные прямые пересекаются при $|\mu|<1$ в точке $X_0 = X\mathrm{ch}r + U\mathrm{sh}r$, $\mathrm{th}r = \mu$, параллельны при $|\mu| = 1$ и имеют общую ортогональную им плоскость

$$U_\rho = X\mathrm{sh}\rho + U\mathrm{ch}\rho, \qquad \mathrm{th}\rho = 1:\mu, \qquad \text{при } |\mu|>1.$$

Доказательство. Пусть прямые пересекаются в точке

$$X\mathrm{ch}r + U\mathrm{sh}r = Y\mathrm{ch}\rho + V\mathrm{sh}\rho. \quad (43)$$

Умножая скалярно это соотношение на X, U, Y, V, получаем систему, совместную при условии (41) и дающую $\mathrm{th}r=\mu$. Случай расходящихся прямых рассматривается аналогично.

Теорема 15. Компланарные прямые $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ при $|\Delta|<1$ (см. (38)) пересекаются под углом α, $\cos\alpha = \Delta$, при $|\Delta| < 1$ параллельны и при $|\Delta| > 1$ расходятся, имея кратчайшее расстояние между ними, равное $d = \arg\mathrm{ch}\,|\Delta|$.

Для доказательства достаточно вычислить соответствующий угол или расстояние.

Следствие. При

$$(XY)^2 - (X,V)^2 = -(U,Y)^2 + (U,V)^2 = 1 \quad (44)$$

прямые $\{X, U\}$ и $\{Y, V\}$ совпадают.

Теорема 16. Прямая пересечения плоскостей V и W образует с плоскостью U, в случае их пересечения, угол φ, вычисляемый по формуле

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{(U,V)^2+(U,W)^2-2(U,V)(U,W)(V,W)}{1-(V,W)^2}}. \quad (45)$$

Если указанные прямая и плоскость расходятся, то кратчайшее расстояние d между ними вычисляется по формуле (45) с заменой $\cos\varphi$ на $\mathrm{ch}\,d$.

Для доказательства надо найти плоскости R и S, проходящие через данную прямую, такие, что $(R, U) = 0$, $(S, R) = 0$. Угол между плоскостями S, U и есть искомый угол φ.

Следствие. Линии пересечения плоскостей U, V, W принадлежат связке пересекающихся прямых (см. [2], стр. 415) при

$$\delta = (U,V)^2 + (U,W)^2 + (V,W)^2 - 2(U,V)(U,W)(V,W), \quad (46)$$

связке параллельных прямых при $\delta = 1$ и связке расходящихся прямых при $\delta>1$.

Теорема 17. Плоскости

$$U_\lambda = \lambda V + \varepsilon(1-\lambda)W, \quad (47)$$

где $\varepsilon = (V, W) = \pm 1$, параллельны при любых вещественных λ.

Для доказательства достаточно проверки соотношений

$$U_\lambda^2 = (U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}) = 1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 7. Множество плоскостей (47) будем называть пучком параллельных плоскостей, определенным параллельными плоскостями V, W.

Теорема 18. Параллельные плоскости имеют единственную общую несобственную точку.

Доказательство. Пусть $(V, W)=\varepsilon=\pm 1$. Тогда $\delta=1+[(U,V)-\varepsilon(U, W)]^2 \geqslant 1$ (см. 46). Отсюда видим, что прямые пересечения плоскости U с параллельными плоскостями V и W параллельны тогда и только тогда, когда $(U, V-\varepsilon W)=0$. Аналитическая точка $X=V-\varepsilon W$ определяет, очевидно, несобственную точку $X\infty$, принадлежащую всем плоскостям пучка (47).

Следствие. Пучок параллельных плоскостей можно задавать соотношением

$$U=\lambda X+V, \tag{48}$$

где X — аналитическая точка, определяющая общую несобственную точку всех плоскостей пучка.

§ 4. Плюккеровы координаты

Символом $\{W, V\}$, где $V^2=1$, будем обозначать при $W^2=1$ пучок пересекающихся плоскостей, при $W^2=0$ — пучок параллельных плоскостей и при $W^2=-1$ — пучок расходящихся плоскостей с общим перпендикуляром $\{W, V\}$ (см. опр. 6, (15) и (48)).

Определение 8. Плюккеровыми координатами пучка плоскостей $\{W, V\}$ называются шесть чисел

$$\xi^{ij}=W^iV^j-W^jV^i, \tag{49}$$

взятых в порядке ξ^{01}, ξ^{02}, ξ^{03}, ξ^{12}, ξ^{31}, ξ^{23}, где W^i и V^i – координаты аналитических точек W и V.

Введем в рассмотрение шестимерное векторное пространство аналитических точек $\Xi(\xi^{ij})$, где координаты ξ^{ij} берутся в указанном выше порядке.

Определение 9. Выражения

$$(\Xi, H)=-\xi^{01}\eta^{01}-\xi^{02}\eta^{02}-\xi^{03}\eta^{03}+\xi^{12}\eta^{12}+\xi^{31}\eta^{31}+\xi^{23}\eta^{23}, \tag{50}$$

$$[\Xi, H]=\xi^{01}\eta^{23}+\xi^{02}\eta^{31}+\xi^{03}\eta^{12}+\xi^{12}\eta^{03}+\xi^{31}\eta^{02}+\xi^{23}\eta^{01} \tag{51}$$

будем называть соответственно скалярным и косым произведениями аналитических точек Ξ и H.

Теорема 19. Плюккеровы координаты пучка плоскостей удовлетворяют условиям

$$(\Xi, \Xi)=\varepsilon, \tag{52}$$

$$[\Xi, \Xi]=2(\xi^{01}\xi^{23}+\xi^{02}\xi^{31}+\xi^{03}\xi^{12})=0, \tag{53}$$

где $\varepsilon=1$ для пучка пересекающихся плоскостей, $\varepsilon=0$ для пучка параллельных плоскостей и $\varepsilon=-1$ для пучка расходящихся плоскостей пространства Лобачевского.

Доказывается непосредственным подсчетом.

Лемма. Координаты произвольной плоскости U, принадлежащей пучку $\{W, V\}$, удовлетворяют уравнениям

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$u^0\xi^{12} - u^1\xi^{02} + u^2\xi^{01} = 0,$$
$$u^1\xi^{23} + u^2\xi^{31} + u^3\xi^{12} = 0. \qquad (54)$$

Доказательство. В силу соотношений (15), (28) и (48) ранг матрицы из координат аналитических точек U, V и W равен двум. Приравнивая нулю определители из элементов этой матрицы, получаем (54).

Теорема 20. Аналитической точке $\Xi(\xi^{ij})$, удовлетворяющей соотношениям (52) и (53), соответствует единственный пучок пересекающихся плоскостей при $\varepsilon = 1$, единственный пучок параллельных плоскостей при $\varepsilon = 0$ и единственный пучок расходящихся плоскостей при $\varepsilon = -1$.

Для доказательства составим систему (54). Относительно частного решения $U(\xi^{02}:\xi^{12}:0:\xi^{23})$ предположим, что

$$-(\xi^{02})^2 + (\xi^{12})^2 + (\xi^{23})^2 > 0. \qquad (*)$$

Второе решение Y системы (57), удовлетворяющее условию $(U, Y) = 0$, имеет вид:

$$y^0:y^1:y^2:y^3 = (\xi^{01}\xi^{12} - \xi^{03}\xi^{23}):(\xi^{31}\xi^{23} + \xi^{01}\xi^{02}):$$
$$:((\xi^{02})^2 - (\xi^{23})^2 - (\xi^{12})^2):(\xi^{02}\xi^{03} + \xi^{12}\xi^{31}).$$

Элементарными выкладками показывается, что

$$-(y^0)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = \varepsilon[-(\xi^{02})^2 + (\xi^{12})^2 + (\xi^{23})^2].$$

Отсюда видим, что $Y^2 > 0$ при $\varepsilon = 1$, $Y^2 = 0$ при $\varepsilon = 0$ и $Y^2 < 0$ при $\varepsilon = -1$. Нормируя решения U и Y так, чтобы $U^2 = 1$, $Y^2 = 1$, 0 или -1, получим соответственно пучок пересекающихся, параллельных или расходящихся плоскостей.

Предположение

$$-(\xi^{02})^2 + (\xi^{12})^2 + (\xi^{23})^2 < 0 \qquad (**)$$

приводит нас при $\varepsilon = +1$ к пучку расходящихся плоскостей. При $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 0$ предположение (**) невозможно, так как приводит к тому, что для двух точек U, Y или соответственно точки U и несобственной точки Y мы имели бы $\operatorname{ch} r = -(U, Y) = 0$.

Будем для кратности вместо слов „аналитическая точка $\Xi(\xi^{ij})$, определяющая пучок плоскостей с плюккеровыми координатами ξ^{ij}“, писать просто „пучок $\Xi(\xi^{ij})$“. Пучок расходящихся плоскостей $\Xi(\xi^{ij})$ будем называть прямой $\Xi(\xi^{ij})$.

Теорема 21. Оси координат обозначим Ξ_{01}, Ξ_{02}, Ξ_{03}, а определяемые ими пучки пересекающихся плоскостей—Ξ_{23}, Ξ_{31}, Ξ_{12}. Аналитические точки Ξ_{ij} составляют базис шестимерного векторного пространства аналитических точек Ξ. Тогда произвольный пучок $\Xi(\xi^{ij})$ представляется в виде

$$\Xi = \frac{1}{2}\,\xi^{ij}\,\Xi_{ij}. \qquad (55)$$

Теорема 22. Прямые Ξ и H (оси пучков пересекающихся плоскостей Ξ и H), удовлетворяющих условию

$$[\Xi, H] = 0, \qquad (56)$$

лежат в одной плоскости.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Доказательство вытекает из того, что если пучки Ξ и H суть пучки $\{XV\}$ и $\{YW\}$, то

$$[\Xi, H] = \det|X, V, Y, W|. \tag{57}$$

Теорема 23. Плюккеровы координаты прямой Ξ и определяемого ею пучка пересекающихся плоскостей $\overline{\Xi}$ связаны условиями

$$\xi^{01} = \pm\overline{\xi}^{23}, \quad \xi^{02} = \pm\overline{\xi}^{31}, \quad \xi^{03} = \pm\overline{\xi}^{12}, \quad \xi^{12} = \mp\xi^{03},$$

$$\xi^{31} = \mp\overline{\xi}^{02}, \quad \xi^{23} = \mp\overline{\xi}^{01}. \tag{58}$$

Доказывается непосредственным подсчетом.

Следствие. Справедливы соотношения:

$$|[\Xi, H]| = |[\overline{\Xi}, \overline{H}]|, \quad |(\Xi, H)| = |(\overline{\Xi}, \overline{H})|, \quad |[\Xi, H]| = |(\Xi, \overline{H})|. \tag{59}$$

Теорема 24. Плюккеровы координаты пучков имеют одну и ту же величину при любом задании их вида $\{W, V\}$.

Теорема 15. Пусть даны прямые (пучки) Ξ и H. Тогда

$$(\Xi, H) = \operatorname{ch} r \cos\varphi, \tag{60}$$

$$[\Xi, H] = \pm \operatorname{sh} r \sin\varphi, \tag{61}$$

где r и φ — кратчайшее расстояние и угол между прямыми (осями пучков) Ξ и H.

Доказательство. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что если пучки Ξ и H есть пучки $\{X, V\}$ и $\{Y, W\}$, то $(\Xi, H) = \Delta$ или Δ^* (см. (22), (38)). Подсчитывая квадрат определителя (57) и переходя к заданиям пучков, удовлетворяющим условиям (16) и (32), получаем соотношение (61).

Следствие 1. Условие

$$(\Xi, H) = 0 \tag{62}$$

есть условие ортогональности прямых (осей пучков) Ξ и H.

Следствие 2. Условие $(\overline{\Xi}, H) = 0$, где Ξ — прямая, а $\overline{H}$ — пучок пересекающихся плоскостей, есть условие компланарности прямой Ξ и оси H пучка $\overline{H}$.

Следствие 3. Условие $[\Xi, H] = 0$ есть условие ортогональности прямой Ξ и оси H пучка $\overline{H}$.

Следствие 4. Условия

$$[\Xi, H] = 0, \quad (\Xi, H) = 1 \tag{63}$$

необходимы и достаточны для параллельности прямых Ξ и H.

Теорема 25. Плоскости пучков параллельных плоскостей Ξ и H перпендикулярны и имеют общую несобственную точку (см. доказательство теор. 20).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Успенский, Введение в неевклидову геометрию Лобачевского—Больяи, Петроград, 1922.
2. В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
3. С. П Фиников, Аналитическая геометрия, Учпедгиз, М., 1949.
4. П. К. Рашевский, Римановa, Геометрия и тензорный анализ, ГИТТЛ, М., 1953.
5. Л. Я. Березина, Некоторые вопросы аналитической и дифференциальной геометрии пространства Лобачевского, изв. АН Латв. ССР, 11, стр. 115—126, 1958.
6. Б. С. Вакарчук, Дифференциально-геометрические свойства линейчатых поверхностей пространства Лобачевского, ежегодник Черновицкого ун-та, стр. 294—296, 1956.
7. Ю. Н. Ястребов и Б. С. Вакарчук, О некоторых аналитических признаках расположения прямых в пространстве Лобачевского, труды Ленинградского института инженеров водного транспорта, XXVI, стр. 274—280, 1959.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

РЕШЕНИЕ ВИХРЕВОЙ ЗАДАЧИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. НАЗАРОВ

Методом Бергмана рассмотрены общие точные решения вихревой задачи магнитной гидродинамики с бесконечной проводимостью в плоскости годографа скорости для дозвукового и сверхзвукового течений газа при адиабатическом процессе для магнитного поля, параллельного полю скоростей.

* * *

Известно [1], что уравнения магнитной газодинамики для идеального газа с бесконечной проводимостью при стационарном режиме движения имеют вид:

$$\rho \frac{v^2}{2} + [\operatorname{rot} \bar{v}, \bar{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} [\bar{H}, \operatorname{rot} \bar{H}] \tag{1}$$

$$\bar{H} \cdot \operatorname{div} \bar{v} - (\bar{H}, \nabla)\bar{v} + (\bar{v}, \nabla)\bar{H} = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \rho \bar{v} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \qquad \left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right) \tag{4}$$

Здесь $\bar{H}$ — напряженность магнитного поля, p — давление, ρ — плотность, $\bar{v}$ — скорость.

В этой системе уравнения магнитного поля $\operatorname{rot} [\bar{v}, \bar{H}] = 0$, $\operatorname{div} \bar{H} = 0$ заменены одним уравнением (2). В рассматриваемой далее задаче $\operatorname{div} \bar{H} \equiv 0$.

Уравнения (1) — (4) сохраняют свой вид, если перейти к безразмерным величинам $\bar{v}_1$, $\bar{H}_1$, p_1, ρ_1, $\bar{r}_1$, определив их следующими соотношениями

$$\bar{v} = v_0 \cdot \bar{v}_1, \qquad \bar{H} = H_0 \cdot \bar{H}_1, \qquad \rho = \rho_0 \cdot \rho_1, \qquad p = p_0 \cdot p_1$$

$$\bar{r} = l \cdot \bar{r}_1 \qquad (\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z),$$

где $H_0 = v_0 \cdot \sqrt{\rho_0}$, $p_0 = \rho_0 \cdot v_0^2$.

Здесь ρ_0, v_0 — плотность и скорость набегающего невозмущенного потока из бесконечности, l — характерный размер (например, хорда профиля, длина пластины, ширина канала и т. д.). В дальнейшем уравнения (1) — (4) будем рассматривать как безразмерные, в которых опущены

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

индексы у относительных величин. В качестве ρ_0 и v_0 могут быть взяты плотность и скорость звука в точке торможения.

Рассмотрим задачу о движении газа в магнитном поле, параллельном скорости течения, решенную в [2] другим методом.

По условию $\bar{H} \| \bar{v}$, следовательно, можно записать равенство

$$\bar{H} = k \cdot \rho \bar{v} \tag{5}$$

В [2] доказано, что $k = \text{const}$. Не нарушая общности, можно положить $k = 1$. Тем самым мы определим ее из условий набегающего невозмущенного потока на бесконечности, где $\rho = 1$, $v = 1$, $H = 1$. Однако для удобства выделения влияния магнитного поля мы это обозначение сохраним.

Умножая уравнение (1) на орт касательной к линии тока $\bar{\tau}^\circ$, а затем на орт нормали $\bar{n}^\circ$ к этой линии и, учитывая формулу

$$(\nabla f, \bar{l}^\circ) = \frac{\partial f}{\partial l},$$

где $\bar{l}^\circ$ — орт какого-нибудь направления к линии тока, а также используя (5) и равенства

$$\bar{\tau}^\circ = i\alpha + j\beta, \qquad \bar{n}^\circ = i\beta - j\alpha$$

$$\alpha = \cos(\tau, x) = \cos\Theta, \qquad \beta = \cos(\tau, y) = \sin\Theta$$

$$([\operatorname{rot}\bar{v}, \bar{v}], \bar{\tau}^\circ) = v \operatorname{rot}_z \bar{v} \cdot ([\bar{z}^\circ, \bar{\tau}^\circ], \bar{\tau}^\circ) = 0$$

$$([\operatorname{rot}\bar{v}, \bar{v}], \bar{n}^\circ) = v \operatorname{rot}_z \bar{v} \cdot ([\bar{z}^\circ, \bar{\tau}^\circ], \bar{n}^\circ) = v \cdot \operatorname{rot}_z \bar{v}$$

$$([\bar{H}, \operatorname{rot}\bar{H}], \bar{\tau}^\circ) = k^2 \cdot \rho v \operatorname{rot}_z \rho \bar{v} ([\bar{\tau}^\circ, \bar{z}^\circ], \bar{\tau}^\circ) = 0$$

$$([\bar{H}, \operatorname{rot}\bar{H}], \bar{n}^\circ) = -k^2 \rho v \operatorname{rot}_z \rho \bar{v}$$

(z° — орт по оси z), получим, что проекция уравнения (1) на касательную к линии тока дает ($d\tau = ds$, ds — элемент длины линии тока):

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = 0,$$

то есть имеем интеграл Бернулли.

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = 0,$$

который, в силу (4), запишем в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\rho^{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \tag{6}$$

Проекция на нормаль к линии тока представится равенством

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{v^2}{2} + v \operatorname{rot}_z \bar{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\kappa^2 \cdot v}{4\pi} \operatorname{rot}_z \rho \bar{v} \tag{7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Известно [3], что имеет место равенство

$$dn = \frac{d\psi}{\rho \cdot v},$$

и формула (7) принимает вид

$$\Omega = \mathrm{rot}_z \vec{v} = \frac{\kappa^2}{4\pi} \mathrm{rot}_z \rho \vec{v} - \frac{\partial p}{\partial \psi} - \rho \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{v^2}{2}. \tag{8}$$

Из уравнений (4) и (6) следует, что p и v не зависят от функции тока ψ. В силу этого (8) можно записать так

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\kappa^2}{4\pi} \left(\frac{\partial \rho v_y}{\partial x} - \frac{\partial \rho v_x}{\partial y} \right). \tag{9}$$

Из (9) видно, что магнитное поле, параллельное потоку скорости, вызывает вихревое движение при адиабатическом процессе (4).

При этом интеграл Бернулли имеет тот же вид (6), как и в обычной гидродинамике. Если $\kappa = 0$ (магнитное поле отсутствует), то движение становится потенциальным.

Уравнение (9) удовлетворится, если ввести фиктивный потенциал $\varphi(x, y)$ при помощи равенств

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{\kappa^2 \rho}{4\pi}\right) \cdot v_x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(1 - \frac{\kappa^2 \rho}{4\pi}\right) \cdot v_y$$

Откуда

$$v_x = \lambda(\rho) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \lambda(\rho) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{10}$$

где

$$\lambda(\rho) = \left[1 - \frac{\kappa^2 \rho}{4\pi}\right]^{-1}. \tag{11}$$

С другой стороны, из уравнения неразрывности (3) следует существование функции тока $\psi(x, y)$

$$v_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{12}$$

Объединяя (11) и (12) и привлекая интеграл (6), получим, что рассматриваемое вихревое адиабатическое движение управляется следующей системой уравнений

$$\lambda(\rho) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\lambda(\rho) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{13}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Переходя обычным путем в системе (13) от координат физической плоскости x, y к координатам годографа скорости v, Θ ($\Theta = (\bar{v}, \hat{x})$), получим уравнение

$$dz = dx + idy = \left(\lambda d\varphi + \frac{i}{\rho} d\psi\right) \cdot \frac{e^{i\Theta}}{v} \tag{14}$$

и систему (при переходе от v к ρ):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{v}{\lambda} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho v}\right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\lambda}{d\rho} - \frac{\lambda}{\rho}\frac{dv}{d\rho}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \tag{15}$$

Вводя в систему (15) произвольную функцию $s = s(\rho)$, получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{v}{\lambda} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho v}\right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\lambda}{ds} - \frac{\lambda}{v}\frac{dv}{ds}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} \tag{16}$$

Сличая (15) и (16) замечаем, что эти системы уравнений остаются инвариантными по отношению преобразования $s = s(\rho)$.

Пользуясь произволом функции $s(\rho)$ системе (16) можно придать тот или иной вид.

Наипростейшим из них является симметричный вид Лейбензона:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{K} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}, \tag{17}$$

который мы получим, если наложим условия (штрихи — производные по s)

$$\frac{1}{\rho\lambda}\left(\frac{v'}{v} + \frac{\rho'}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\lambda' - \frac{\lambda}{v}v'\right)^{-1} = \frac{1}{K}, \tag{18}$$

где $K = K(s)$ — функция, аналогичная функции Чаплыгина, подлежит вычислению.

С одной стороны, из (18) имеем равенство

$$\left(\frac{v'}{v} + \frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{v'}{v} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right) = 1. \tag{19}$$

Из (6) и (11) находим

$$d\lambda = \frac{K^2\lambda^2}{4\pi} d\rho, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{\rho^{\gamma-2}}{(1 - \rho^{\gamma-1})} \cdot d\rho. \tag{20}$$

Внося (20) в (19), получим

$$s = \int_{\rho_*}^{\rho} \left(\frac{\gamma - 1}{2}\frac{\rho^{\gamma-2}}{1 - \rho^{\gamma-1}} - \frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{2}\frac{\rho^{\gamma-2}}{1 - \rho^{\gamma-1}} + \frac{\lambda K^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho. \tag{21}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Здесь постоянная интегрирования s_0 выбрана так, чтобы при $\rho=\rho^*$ (критическая точка, в которой $v=a$, где a — скорость звука), $s=0$.

В (21) перед интегралом можно взять также знак минус, однако это не существенно и мы ограничиваемся одним знаком плюс.

Переходя в (21) от ρ к M при помощи соотношения

$$\rho=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \qquad \left(M=\frac{v}{a}\right), \tag{22}$$

вытекающего из (6) (M — число Маха, a—скорость звука), получим

$$s=\int \frac{(1-M^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}+\frac{\lambda\kappa^2M^2}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{2\gamma-1}{2(\gamma-1)}}}\cdot\frac{dM}{M}. \tag{23}$$

При $M=1$, $s=0$ и при $M=0$, $s=-\infty$.

При отсутствии магнитного поля ($\kappa=0$), путем интегрирования выражения (23), придем к известной зависимости [3]:

$$s=\frac{1}{2}\left(h\ln\frac{h+y}{h-y}-\ln\frac{1+y}{1-y}\right) \tag{24}$$

$$\left(y=\sqrt{1-M^2}, \qquad h=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right).$$

Переходим к вычислению функции Чаплыгина K. Из (18) находим

$$\sqrt{K}=\frac{1}{\rho\lambda}\left(\frac{v'}{v}+\frac{\rho'}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho\lambda}\left(\frac{1}{v}\frac{dv}{d\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\cdot\frac{d\rho}{ds}.$$

Учитывая (20) и (21) и проводя преобразования, окончательно получим

$$K=\frac{1}{\lambda^2}\left[(\gamma+1)\rho^{\gamma-1}-2\right]\left[(\gamma-1)\rho^{\gamma+1}+\frac{\kappa^2\lambda\rho^3}{2\pi}(1-\rho^{\gamma-1})\right]^{-1}. \tag{25}$$

Используя (22), формуле (25) придадим вид

$$K=\frac{(1-M^2)\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}-\frac{\kappa^2}{4\pi}\right]^3}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}-\frac{\kappa^2}{4\pi}(1-M^2)}. \tag{26}$$

Полагая в (26) $\kappa=0$ ($\lambda=1$), получим известную [3] формулу для функции Чаплыгина.

Исключаем φ из (17) путем перекрестного дифференцирования, получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\Theta^2}+N(s)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial s}=0 \qquad \left(N=\frac{K'}{2K}\right). \tag{27}$$

Для $K>0$ уравнение (27) эллиптического типа, для $K<0$ — гиперболического типа. Для $K<0$ обычно вводится функция $s=it$ и уравнение (27) принимает вещественный вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\Theta^2}+T(t)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \qquad \left(T=\frac{\chi'}{2\chi}\right), \tag{28}$$

где $\chi=-K>0$.

Если при переходе к безразмерным величинам в системе (1) — (4) положить $H_0=\kappa\cdot v_0\sqrt{\rho_0}$ (κ — безразмерная постоянная, имеющая другое значение, чем в (5)), то κ^2 войдет также в уравнение (1) и (27) и формулы (24) и (26) сохранят тот же вид с новым смыслом для κ^2. В этом случае κ^2 — параметр (меняет поле H_0), влияющий на тип уравнений (1) и (27), как у И. М. Юрьева [2].

Вводя комплексные сопряженные переменные

$$u=s+i\Theta, \qquad \bar{u}=s-i\Theta \tag{29}$$

и характеристические переменные

$$\xi=t-\Theta, \qquad \eta=t+\Theta, \tag{30}$$

уравнения (27) и (28) приведем к гиперболическому виду:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial\bar{u}}+\frac{N}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial\bar{u}}\right)=0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{T}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)=0. \tag{32}$$

Уравнение (31), конечно, имеет гиперболический вид формально.

Решения уравнений (31) и (32) будем искать по одному и тому же типу в виде ряда Бергмана [4]

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\Phi_n(u)+F_n(\bar{u})\right]\cdot f_n(s) \tag{33}$$

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{\Phi}_n(\xi)+\tilde{F}_n(\eta)\right]\cdot\tilde{f}_n(t), \tag{34}$$

где $R_n=\Phi_n(u)+F_n(\bar{u})$, $\tilde{R}_n=\tilde{\Phi}_n(\xi)+\tilde{F}_n(\eta)$ — произвольные функции, удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 R_n(u,\bar{u})}{\partial u\cdot\partial\bar{u}}=0, \qquad \frac{\partial^2\tilde{R}_n(\xi,\eta)}{\partial\xi\cdot\partial\eta}=0 \tag{35}$$

Функции $f_n(s)$ и $\tilde{f}_n(t)$ — также пока произвольные функции.

Первое уравнение (35) представляет собой не что иное, как гиперболическую запись эллиптического уравнения Лапласа, которое

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

удовлетворяется аналитическими функциями комплексного переменного R_n.

Беря производные от (33) и внося их в (31), а также используя (35) и видоизмененные условия Бергмана [5]:

$$f_0' + \frac{1}{2} N f_0 = 0$$

$$f_n' + \frac{1}{2} N f_n = -\frac{1}{2}(f_{n-1}'' + N f_{n-1}') \tag{36}$$

$$\frac{d\Phi_n(u)}{du} = \Phi_{n-1}(u), \qquad \frac{dF_n(\bar{u})}{d\bar{u}} = F_{n-1}(\bar{u})$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

получим, что уравнение (31) удовлетворится при произвольных комплексных потенциалах $\Phi_0(u)$ и $F_0(\bar{u})$. Имеем, что функции $\Phi_n(u)$, $F_n(\bar{u})$, $f_n(s)$ выражаются через предыдущие и в конечном счете через функции $\Phi_0(u)$, $F_0(\bar{u})$ и $f_0(s)$, причем вещественные и мнимые части функций $\Phi_0(u)$ и $F_0(\bar{u})$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Исходя из этого, по существу можно ограничиться одной произвольной функцией $\Phi_0(u)$, которая определяется граничными условиями конкретной задачи.

Внося производные от (34) в (32), учитывая (35) и, налагая условия на произвольные функции, аналогичные (36):

$$\tilde{f}_0' + \frac{1}{2} T \tilde{f}_0 = 0$$

$$\tilde{f}_n' + \frac{T}{2} \tilde{f}_n = -\frac{1}{2}(\tilde{f}_{n-1}'' + T \tilde{f}_{n-1}') \tag{37}$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}_n(\xi)}{d\xi} = \tilde{\Phi}_{n-1}(\xi), \qquad \frac{d\tilde{F}_n(\eta)}{d\eta} = \tilde{F}_{n-1}(\eta)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

мы видим, что функции $\tilde{f}_n(t)$, $\tilde{\Phi}_n(\xi)$ и $\tilde{F}_n(\eta)$ подчиняются такому же закону, как и в предыдущем случае, и в конечном счете выражаются соответственно через $\tilde{f}_0(t)$, $\tilde{\Phi}_0(\xi)$ и $\tilde{F}_n(\eta)$, при этом уравнения (37) тождественны системе (36). Поэтому рассмотрим только зависимости (36), ограничиваясь нахождением частных решений. Это не нарушает общности (в силу наличия произвольной функции $\Phi_0(u)$). Вторую произвольную функцию $F_0(\bar{u})$ и ее прообразы $F_n(\bar{u})$, в силу сказанного выше, из рассмотрения опускаем.

Решение системы (36) и (37) проводится так же, как в [5, 6]. Потому мы выпишем окончательные решения.

$$f_0 = K^{-\frac{1}{4}} \tag{38}$$

$$g_n(s) = -\frac{1}{2}\left[g_{n-1}'(s) - \frac{1}{4}\int g_{n-1}(s)\left(\frac{K''}{K} - \frac{3}{4}\frac{K'^2}{K^2}\right) ds \right], \tag{39}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$(n = 1, 2,\ldots)$$

где введена функция $g_n(s)$ соотношением

$$f_n(s) = K^{-\frac{1}{4}} \cdot g_n(s), \qquad g_0 = 1 \qquad (n = 0, 1, 2,\ldots) \tag{40}$$

$$\Phi_n(u) = \int \frac{d\Phi(v)}{dv} \frac{(u-v)^n}{n!} dv. \tag{41}$$

Здесь $\frac{d\Phi}{du} = \frac{d\Phi_0}{du}$ — комплексная произвольная функция для несжимаемой жидкости.

При помощи (23) и (25) функции $f_n(s)$ можно затабулировать аналогично тому, как это сделано в работе [7], в которой установлены реккурентные зависимости для определения коэффициентов, входящих в функции Бергмана $f_n(s)$ и $\tilde{f}_n(t)$, для дозвукового и чисто сверхзвукового движений обычной газодинамики и установлена связь между этими функциями, справедливая и для нашего случая. Она имеет вид

$$\tilde{f}_n(t) = i^n f_n(is) \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{42}$$

где $\tilde{f}_n(t)$ — функции Бергмана для чисто сверхзвукового течения газа

Функции Бергмана $f_n(s)$ и $\tilde{f}_n(t)$ не зависят от течения: они одни и те же для всех задач, поддающихся решению в плоскости годографа (s, Θ). Нужно иметь в виду, что иногда формально существующие решения в плоскости (s, Θ) не имеют физического смысла, когда возникают предельные линии (при сверхзвуковом течении), не позволяющие переходить с плоскости годографа в физическую плоскость течения.

Решение (33) с учетом (40) и (41) можно записать в виде

$$\psi(s, \Theta) = \operatorname{Im} \int_0^u \frac{d\Phi}{dv} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s) \cdot \frac{(u-v)^n}{n!} dv. \tag{43}$$

Здесь использовано условие равномерной и абсолютной сходимости ряда (33), которая может быть доказана тем же путем, как это сделано в [4] для обычного газа.

Ряд, входящий в (43), не зависит от течения и может быть вычислен раз и навсегда для всех задач выделенного класса, а функция $\Phi(v)$ зависит от краевых условий.

Струйные дозвуковые течения рассматриваемой здесь вихревой задачи магнитной гидродинамики решаются видоизмененным методом Бергмана по трафарету, разработанному в [5].

Краевые задачи при чисто сверхзвуковом безударном течении газа могут быть рассмотрены так же, как в работе [6].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. Магнитная гидродинамика. ГИФМЛ, М., 1962.
2. И. М. Юрьев. К решению уравнений магнитной газодинамики. ПММ, т. XXIV, в. 1, 1960.
3. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
4. Р. Мизес. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. ИЛ., 1961.
5. Г. И. Назаров. Давление газовой струи на равнобокий клин. ПМТФ, № 1, 1962.
6. Г. И. Назаров. О точном аналитическом решении уравнений сверхзвукового течения газа (см. настоящий сборник).
7. Г. И. Назаров. Функции Бергмана в теории течений сжимаемой жидкости (находится в печати).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О ТОЧНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Г. И. НАЗАРОВ

Известно, что уравнения плоского сверхзвукового установившегося и безвихревого движения газа при отсутствии трения и теплопроводности имеют вид [1]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\sqrt{K}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \sqrt{K}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \tag{1}$$

где $K = K(t)$ — функция Чаплыгина, φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, ξ, η — характеристические переменные плоскости годографа, связанные с функцией t, зависящей от скорости, и углом Θ — наклона вектора скорости к оси абсцисс ox, равенствами:

$$2\xi = t - \Theta \qquad 2\eta = t + \Theta, \tag{2}$$

где

$$t = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1} \tag{3}$$

$$\left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,\ 4\right).$$

При адиабатическом процессе имеют место формулы:

$$\rho = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \qquad v = M\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

$$p = \rho^{\gamma}, \quad K = (M^2-1)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \tag{5}$$

где давление p, плотность ρ и модуль скорости v отнесены соответственно к давлению, плотности и скорости звука в точке торможения.

Переход к физической плоскости течения $z = x + iy$ производится при помощи соотношения:

$$dz = \left(d\varphi + \frac{i}{\rho}d\psi\right)\cdot\frac{e^{i\Theta}}{v} \tag{6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Исключим φ из (1.1), тогда получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + T(t)\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\,\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{7}$$

где

$$T(t) = \frac{K_t'}{4K}. \tag{8}$$

Будем искать решение уравнения (7) в виде:

$$\psi = \sum_{\kappa=0}^{\infty} R_\kappa(\xi,\ \eta)\cdot f_\kappa(t), \tag{9}$$

где $t = \xi + \eta$, R_κ $(\kappa = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ — функции, удовлетворяющие волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 R_\kappa}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad R_\kappa = \Phi_\kappa(\xi) + F_\kappa(\eta), \tag{10}$$

где $\Phi_\kappa(\xi)$, $F_\kappa(\eta)$ — пока произвольные функции.
Из (9) находим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{\partial R_\kappa}{\partial \xi} f_\kappa + R_\kappa f_\kappa'\right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{\partial R_\kappa}{\partial \eta} f_\kappa + R_\kappa f_\kappa'\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^2 R_\kappa}{\partial \xi \partial \eta} f_\kappa + \left(\frac{\partial R_\kappa}{\partial \xi} + \frac{\partial R_\kappa}{\partial \eta}\right) f_\kappa' + R_\kappa f_\kappa''\right].$$

С учетом (10) уравнение (7) принимает вид:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial R_\kappa}{\partial \xi} + \frac{\partial R_\kappa}{\partial \eta}\right)(f_\kappa' + T f_\kappa) + R_\kappa(f_\kappa'' + 2T f_\kappa')\right] = 0. \tag{10a}$$

Это уравнение удовлетворится, если на произвольные функции R_κ, f_κ наложить условия, аналогичные условиям Бергмана [2, 3]:

$$f_0' + T f_0 = 0,\ f_\kappa' + T f_\kappa = -(f_{\kappa-1}' + 2T f_{\kappa-1}') \tag{11}$$

$$\frac{\partial R_\kappa}{\partial \xi} + \frac{\partial R_\kappa}{\partial \eta} = R_{\kappa-1} \quad (\kappa = 1,\ 2, \ldots)$$

Или в силу (10) имеем

$$\frac{d\Phi_\kappa}{d\xi} = \Phi_{\kappa-1}(\xi),\ \frac{dF_\kappa}{d\eta} = F_{\kappa-1}(\eta). \tag{12}$$

Можно потребовать также выполнения условий

$$f_0' + 2Tf_0 = 0,\ f_\kappa' + 2Tf_\kappa = -(f_{\kappa-1}' + Tf_{\kappa-1}) \tag{13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Phi_\kappa = \frac{d\Phi_{\kappa-1}}{d\xi}, \quad F_\kappa = \frac{dF_{\kappa-1}}{d\eta} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, каждая последующая функция f_κ, Φ_κ, F_κ выражается через предыдущую и в конечном счете через начальную функцию соответственно f_0, Φ_0, F_0; при этом в случае (12) Φ_κ и F_κ определяются через интеграл, а в случае (13) — через производную от предыдущей функции. В результате мы имеем в обоих случаях решение, зависящее от двух произвольных функций $\Phi_0(\xi)$, $F_0(\eta)$. При определении $f_\kappa(t)$ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$ ограничимся только частными решениями уравнений (11) или (13).

Из (1) и (9) находим

$$\varphi = -\int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{K}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta}\left(\sqrt{K}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{\xi=\xi_0}\cdot d\eta. \tag{14}$$

Функции (9) и (14) дают интеграл системы уравнений (1) довольно общего характера, поскольку он зависит от двух произвольных функций.

Рассмотрим условия (11), (12).

Считая правую часть в (11) известной и учитывая (8), частные решения запишем в виде:

$$f_0 = K^{-\frac{1}{4}}, \quad f_\kappa = -K^{-\frac{1}{4}}\cdot\int (f''_{\kappa-1} + 2\,\mathrm{T} f'_{\kappa-1}) K^{\frac{1}{4}}\, dt. \tag{15}$$

Взяв интеграл по частям, получим

$$f_\kappa = -f'_{\kappa-1} - \frac{1}{4}K^{-\frac{1}{4}}\cdot\int K^{-\frac{3}{4}}\cdot K'_t\cdot f'_{\kappa-1}(t)\, dt.$$

Из (3) имеем

$$\frac{dt}{dM} = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}. \tag{16}$$

Пользуясь (5), (15), (16), все f_κ $(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$ можно выразить как функции от M или от t и затабулировать раз и навсегда.

Например, вводя обозначения

$$J = \int\left(\frac{K'}{K}\right)^2 dt, \; J_1 = \int\left(\frac{K'}{K}\right)^3 dt, \; J_2 = \int\frac{K'\cdot K''}{K^2}\, dt,$$

$$J_3 = \int\left(\frac{K'}{K}\right)^2\cdot\int\left(\frac{K'}{K}\right)^2 dt\cdot dt,$$

где

$$K' = \frac{dK}{dt}, \quad K'' = \frac{d^2K}{dt^2},$$

после элементарных вычислений получим

$$f_1 = \frac{1}{4}K^{-\frac{1}{4}}\left(K^{-1}\cdot K' + \frac{1}{4}J\right)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$f_2 = \frac{1}{4} K^{-\frac{1}{4}} \left[\left(\frac{K'}{K} \right)^2 - \frac{K''}{K} + \frac{K' \cdot J}{16K} + \frac{1}{4} \left(J_1 - J_2 + \frac{1}{64} J_3 \right) \right], \quad (17)$$

где

$$J = \frac{2(\gamma+1)^2}{\gamma-1} y - \frac{4(\gamma+2)}{y} - \frac{2(\gamma+1)}{3} \frac{1}{y^3} -$$

$$- \frac{16}{(\gamma-1)\sqrt{\gamma^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cdot y$$

$$J_1 - J_2 = -\frac{(\gamma+1)^2}{2} x - \frac{(3\gamma^2+6\gamma+7)}{x} - \frac{2(\gamma+1)^2}{x^2} - \frac{(\gamma+1)^2}{2x^3}$$

$$(y^2 = x = M^2 - 1)$$

$$J_3 = \frac{2(\gamma+1)^4}{(\gamma-1)^2} x + \frac{4(5\gamma^3+15\gamma^2-3\gamma-25)}{3(\gamma-1) \cdot x} - \frac{8(\gamma+1)(2-\gamma)}{3 \cdot x^2} +$$

$$+ \frac{2(\gamma+1)^2}{x^3} - \frac{32}{(\gamma-1)\sqrt{\gamma^2-1}} \left[\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma-1} y - \frac{2(\gamma+2)}{y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma+1}{3y^3} \right] \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cdot y + \frac{128}{(\gamma-1)^3(\gamma+1)} \operatorname{arc\,tg}^2 \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} y .$$

Графики функций f_0, f_1, f_2 при $\gamma = 1{,}4$ нанесены на рис. 1. В качестве частных решений (13) можно взять:

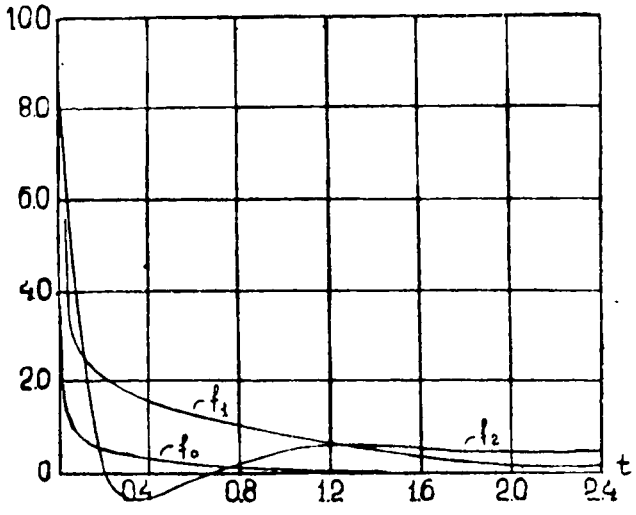


Рис. 1.

$$f_0 = -1, \; f_\kappa = -\int K^{-\frac{1}{2}} \int (f'_{\kappa-1} + \mathrm{T} f_{\kappa-1}) \cdot K^{\frac{1}{2}} \cdot dt \cdot dt$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Или

$$f_\kappa = -\int f_{\kappa-1}\,dt + \frac{1}{4}\int K^{-\frac{1}{2}}\int K^{-\frac{1}{2}}\cdot K'\cdot f_{\kappa-1}\,dt\,dt \tag{18}$$

Эти функции также могут быть вычислены и затабулированы раз и навсегда.

Если в (9) рассматривать конечный ряд ($\kappa = 0, 1, \ldots \nu$), как это имеет место при всяком практическом расчете, то уравнение (10а) удовлетворится при дополнительном условии

$$f'_\nu + 2\,\mathrm{T} f'_\nu = 0 \qquad \text{(в случае (11))} \tag{20}$$

$$f'_\nu + \mathrm{T} f_\nu = 0 \qquad \text{(в случае (13))} \tag{21}$$

В этом случае системы (11) ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots \nu$) и (20), а также (13) ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots \nu$) и (21) будут совместны, если K считать искомой функцией. Это приводит к той или иной аппроксимации функции Чаплыгина, а формулы (9) и (14) с конечными рядами представляют точные решения для гипотетического газа.

Рассмотрим несколько частных примеров. Положим $\nu = 0$, тогда как для (11) и (20), так и для (21) и (13) имеем систему:

$$f'_0 + \mathrm{T} f_0 = 0, \quad f'_0 + 2\,\mathrm{T} f'_0 = 0\,. \tag{22}$$

Определяем из первого уравнения (22) $f_0 = a\cdot K^{-\frac{1}{4}}$, учитываем (8) и затем вносим во второе уравнение (22)

$$K'' - \frac{3}{4}\frac{K'^2}{K} = 0$$

Интегрируя, находим

$$K = [A\,(t+b)]^4, \tag{23}$$

где a, A, b — постоянные интегрирования.

Вместо (2) можно записать

$$t - \Theta = 2\xi - b, \quad t + \Theta = 2\eta - b\,. \tag{24}$$

Тогда общий интеграл (9), (14) примет вид:

$$\psi = \frac{\Phi(\xi) + F(\eta)}{\xi + \eta} \tag{25}$$

$$\varphi = A\,(\xi+\eta)\cdot[F(\eta) - \Phi(\xi)] + 2A\left[\int \Phi(\xi)\,d\xi - \int F(\eta)\,d\eta\right],$$

где

$$\Phi = \frac{a}{A}\Phi_0(\xi), \quad F = \frac{a}{A}F_0(\eta).$$

Это известное решение С. А. Христиановича [4].

Положим теперь $\nu = 1$, тогда из (11), (20) имеем систему уравнений:

$$f'_0 + Tf_0 = 0,\ f'_1 + 2Tf_1 = 0,\ f'_0 + 2Tf'_0 = -(f'_1 + Tf_1)\,. \tag{26}$$

Из первых двух уравнений (26) находим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$f_0 = a \cdot K^{-\frac{1}{4}}, \quad f_1 = c \cdot \int K^{-\frac{1}{2}}\, dt + b, \tag{27}$$

где a, b, c — постоянные интегрирования.

С учетом (8) запишем третье уравнение (26) в виде

$$4 \cdot \frac{K}{K'} f_0'' + 2 f_0' = -\left(4 \cdot \frac{K}{K'} f_1' + f_1 \right).$$

Возьмем производную по t от этого уравнения и используем формулы (27), тогда, полагая $a = c$, $b = 0$, получим дифференциальное уравнение для определения K:

$$K^2 \cdot K' \cdot K''' - (K^2 \cdot K'' + K \cdot K'^2 - 4K^{\frac{11}{4}}) \cdot K'' + \left(\frac{15}{16} K'^2 - 3K^{\frac{7}{4}} \right) K'^2 = 0.$$

Интегрируя это уравнение, найдем, что K имеет тот же вид, что и (23), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Тогда

$$f_0 = \frac{a}{A(t+b)} \qquad f_1 = -\frac{a}{A(t+b)}$$

$$\psi = \frac{\Phi(\xi) + F(\eta) - \frac{1}{A}\left[\int \Phi(\xi)\, d\xi + \int F(\eta)\, d\eta \right]}{\xi + \eta},$$

где Φ и F те же обозначения, что и в (25). Это решение совпадает с (25), так как $\Phi(\xi)$, $F(\eta)$ — произвольные функции и интегралы следует опустить.

Если вместо (27) для f_1 взять частное решение $f_1 = c$, то из (26) имеем

$$f_0' + 2Tf_0 = -c \cdot T.$$

Внесем сюда f_0 по формуле (27)

$$K \cdot K'' - \left(\frac{3}{4} K' + \frac{c}{a} K^{\frac{5}{4}} \right) \cdot K' = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$K = [A \operatorname{tg} m(t+b)]^4, \tag{28}$$

где $2ma = cA$, A, m, b — постоянные интегрирования. Полагая $A^2 = \frac{n_1}{n_2}$, $c = 1$, $a = \frac{m}{2} n_1^{-\frac{1}{2}} \cdot n_2^{-\frac{3}{2}}$ и учитывая (24), придем к аппроксимации Г. А. Домбровского [5]:

$$K = \frac{n_1^2}{n_2^2} \operatorname{tg}^4 mt, \qquad (m = \sqrt{n_1 \cdot n_2})$$

n_1, n_2 — произвольные постоянные.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Формула (9) для аппроксимации (28) принимает вид:

$$\psi = \frac{a}{A}\operatorname{ctg} m(\xi+\eta)\cdot[\Phi_0(\xi)+F_0(\eta)]+c\left[\int \Phi_0(\xi)\,d\xi+\int F_0(\eta)\,d\eta\right]$$

или, вводя обозначение

$$\int \Phi_0(\xi)\,d\xi = \Phi(\xi), \qquad \int F_0(\eta)\,d\eta = F(\eta),$$

получим выражение, совпадающее с [5]

$$\psi = c\,[\Phi(\xi)+F(\eta)]+\frac{a}{A}\operatorname{ctg} m(\xi+\eta)\cdot[\Phi'(\xi)+F'(\eta)]\,. \tag{29}$$

Г. А. Домбровский использовал (29) для решения основных краевых задач [5].

Рассмотрим еще условия (13) и (21) для $\nu = 1$. В этом случае имеем систему

$$f_0''+2f_0'=0,\ f_1''+2Tf_1'=-(f_0'+Tf_0),\ f_1'+Tf_1=0.$$

Мы видим, что по сравнению с (26) функции f_0 и f_1 поменялись ролями и, следовательно, опять имеем дело с аппроксимацией (23) или (28).

С возрастанием числа ν увеличивается число постоянных в функции сравнения $\tilde{K}$ и расширяется интервал изменений t для наиболее удовлетворительного совпадения K с аппроксимирующей функцией.

Однако для практических расчетов целесообразнее иметь дело с приближенным решением системы (1), получающемся обрыванием рядов (9) и (14) на члене ν и содержащем точное значение функции Чаплыгина K. Выбор числа ν зависит от быстроты сходимости рядов для ψ и φ, а последнее — от поведения $\Phi_0(\xi)$, $F_0(\eta)$, то есть от краевых условий задачи.

В качестве примера рассмотрим одну из тех краевых задач, которые решены для гипотетических газов (23) и (28) в работах [4, 5] применительно к решению (9), взятого с конечным числом членов в ряде.

Задача с заданными условиями на двух характеристиках

Требуется определить $\Phi_0(\xi)$, $F_0(\eta)$ по заданным значениям φ и ψ на двух характеристиках различных семейств, пересекающихся в точке с координатами ξ_0, η_0.

Пусть при $\eta = \eta_0$ имеем $\psi = \psi_1(\xi)$, $\varphi = \varphi_1(\xi)$; при $\xi = \xi_0$ имеем $\psi = \psi_2(\eta)$, $\varphi = \varphi_2(\eta)$, причем $\psi_1(\xi_0) = \psi_2(\eta_0)$ и $\varphi_1(\xi_0) = \varphi_2(\eta_0)$.

Функции $\psi_1(\xi)$ и $\varphi_1(\xi)$ так же, как $\psi_2(\eta)$ и $\varphi_2(\eta)$ связаны между собой уравнениями (1), т. е.

$$\varphi_1'(\xi) = -K^{\frac{1}{2}}(\xi+\eta_0)\cdot\psi_1'(\xi),\quad \varphi_2'(\eta) = K^{\frac{1}{2}}(\xi_0+\eta)\cdot\psi_2'(\eta). \tag{30}$$

Не ограничивая общности, положим

$$\psi(\xi_0,\ \eta_0) = \psi_1(\xi_0) = \psi_2(\eta_0) = 0$$

$$\varphi(\xi_0,\ \eta_0) = \varphi_1(\xi_0) = \varphi_2(\eta_0) = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда из (30) находим

$$\varphi_1(\xi) = -K^{\frac{1}{2}}(\xi+\eta_0)\cdot\psi_1(\xi) + \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi} K^{-\frac{1}{2}}(\xi+\eta_0)\cdot K'_\xi(\xi+\eta_0)\cdot\psi_1(\xi)d\xi$$

$$\varphi_2(\eta) = K^{\frac{1}{2}}(\xi_0+\eta)\cdot\psi_2(\eta) - \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} K^{-\frac{1}{2}}(\xi_0+\eta)\cdot K'_\eta(\xi_0+\eta)\cdot\psi_2(\eta)\,d\eta. \tag{31}$$

В качестве приближенного решения возьмем сначала решение, состоящее из одного члена ряда (9), тогда с учетом (15)

$$\psi = K^{-\frac{1}{4}}[\Phi_0(\xi) + F_0(\eta)]. \tag{32}$$

Тогда произвольные функции сразу определяются.
Имеем

$$\Phi_0(\xi) = \psi_1(\xi)\cdot K^{\frac{1}{4}}(\xi+\eta_0) - F(\eta_0),$$

$$F_0(\eta) = \psi_2(\eta)\cdot K^{\frac{1}{4}}(\xi_0+\eta) - \Phi(\xi_0).$$

Кроме того, имеем равенство

$$\Phi_0(\xi_0) + F_0(\eta_0) = K^{\frac{1}{4}}(t_0)\cdot\psi_1(\xi_0).$$

Следовательно, в определение функций $\Phi_0(\xi)$ и $F_0(\eta)$ входит только одна произвольная постоянная.

Ограничимся теперь двумя членами в ряде (9)

$$\psi = f_0(t)[\Phi_0(\xi) + F_0(\eta)] + f_1(t)\left[\int \Phi_0(\xi)\,d\xi + \int F_0(\eta)\,d\eta\right].$$

Тогда имеем два равенства

$$\psi_1(\xi) = f_0(\xi+\eta_0)[\Phi_0(\xi) + F_0(\eta_0)] + f_1(\xi+\eta_0)\left[\int \Phi_0(\xi)\,d\xi + a\right],$$
$$\psi_2(\eta) = f_0(\xi_0+\eta)[\Phi_0(\xi_0) + F_0(\eta)] + f_1(\xi_0+\eta)\left[b + \int F_0(\eta)\,d\eta\right]. \tag{33}$$

Из первого уравнения (33) находим

$$\int \Phi_0(\xi)\,d\xi + a = \frac{1}{f_1(\xi+\eta_0)}\left\{\psi_1(\xi) - f_0(\xi+\eta_0)[\Phi_0(\xi) + F_0(\eta_0)]\right\}.$$

Возьмем $\frac{d}{d\xi}$ и сгруппируем члены

$$\Phi'_0 + \left(\frac{f'_0}{f_0} - \frac{f'_1}{f_1} + \frac{f_1}{f_0}\right)\Phi_0 = \left(\frac{f'_1}{f_1} - \frac{f'_0}{f_0}\right)F_0(\eta_0) + \frac{\psi'_1}{f_0} - \frac{f'_1}{f_0\cdot f_1}\cdot\psi_1 = P(\xi).$$

Откуда

$$\Phi_0(\xi) = e^{-N}\left(c_0 + \int P(\xi)\cdot e^N\,d\xi\right),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где

$$N = \int\left(\frac{f_0'}{f_0} - \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_1}{f_0}\right)d\xi = \ln\frac{f_0}{f_1} + \frac{1}{4}\int\left(-\frac{K'}{K} + \frac{I}{4}\right)d\xi =$$

$$= -\ln f_1 + \frac{1}{16}\int I\,d\xi.$$

Таким образом

$$\Phi_0 = f_1(\xi+\eta_0)\cdot e^{-\tilde{N}}\left(c_0 + \int\frac{P(\xi)}{f_1(\xi+\eta_0)}e^{\tilde{N}}d\xi\right), \text{ где } \tilde{N} = \frac{1}{16}\int I\,d\xi.$$

Аналогично

$$F_0 = f_1(\xi_0+\eta_1)\cdot e^{-N_1}\left(c_1 + \int\frac{Q(\eta_1)}{f_1(\xi_0+\eta_1)}e^{N_1}d\eta_1\right),$$

где

$$Q(\eta_1) = \left(\frac{f_1'}{f_1} - \frac{f_0'}{f_0}\right)\Phi_0(\xi_0) + \frac{\psi_2'(\eta_1)}{f_0} - \frac{f_1'\cdot\psi_2(\eta_1)}{f_0\cdot f_1}, \quad N_1 = \frac{1}{16}\int I d\eta_1.$$

Аналогичным приемом можно найти произвольные функции $\Phi_0(\xi)$ и $F_0(\eta_1)$ и для большего числа членов в ряде (9).

Внесем (32) в (7), тогда, обозначив левую часть уравнения (7) через L, получим

$$L(\xi,\ \eta_1) = \left(-\frac{1}{4}K^{-\frac{5}{4}}\cdot K'' + \frac{3}{16}K^{-\frac{9}{4}}\cdot K'^2\right)\left[\Phi_0(\xi) + F_0(\eta_1)\right].$$

Откуда видно, что $L = 0$ при условии $\Delta = 0$, где

$$\Delta = -\frac{K''}{4\cdot K^{\frac{5}{4}}} + \frac{3}{16}\frac{K'^2}{K^{\frac{9}{4}}}. \tag{34}$$

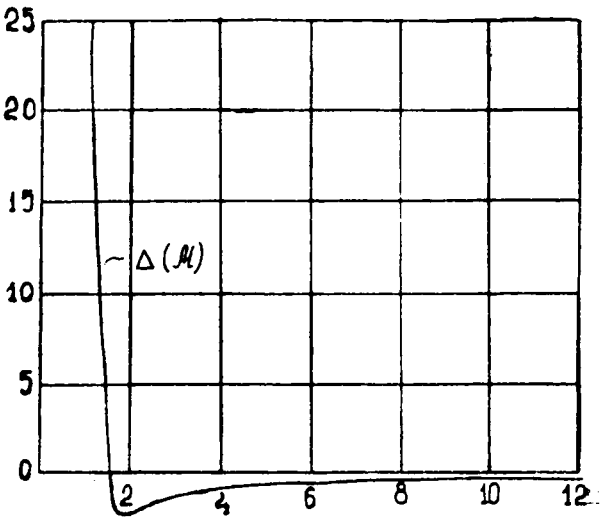


Рис. 2.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Интегрируя дифференциальное уравнение $\Delta = 0$, получим аппроксимацию С. А. Христиановича (23).

Формулу (34) с использованием (5) и (16) представим в виде

$$\Delta = \frac{\gamma+1}{16}\,\frac{M^4\left[16 - 4(3-2\gamma)M^2 - (3\gamma-1)M^4\right]}{(M^2-1)^{\frac{13}{4}}\cdot\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}}. \qquad (35)$$

Полагая

$$(3\gamma-1)M^4 + 4(3-2\gamma)M^2 - 16 = 0,$$

находим единственный корень $M_1 = 1{,}4542$ ($\gamma = 1{,}4$).

В окрестности некоторой линии в потоке, на которой скорость совпадает со скоростью, отвечающей значению M_1 решение (32) близко к точному. График функции $\Delta = \Delta(M)$ нанесен на рис. 2. Он в определенном смысле показывает, насколько точное решение для гипотетического газа (23) может быть рассматриваемо как приближенное для точного решения.

Вопрос о сходимости ряда (9) будет рассмотрен в отдельной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, стр. 379—386, 1950.

2. Р. Мизес, М. Шиффер. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости, Сб. „Проблемы механики", под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана, ИЛ, стр. 489—517, 1955.

3. Р. Мизес. Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИЛ, стр. 402—409, 1961.

4. С. А. Христианович. Приближенное интегрирование сверхзвукового течения газа, ПММ, XI, в. 2, стр. 215—222, 1947.

5. Г. А. Домбровский, Приближенное аналитическое решение плоской задачи сверхзвуковой газовой динамики. Сб. статей № 12, в. 4 (теоретическая гидромеханика), Оборонгиз, стр. 40—63, 1954.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

О ТОЧНОМ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. НАЗАРОВ

§ 1. Установившееся потенциальное осесимметричное движение несжимаемой жидкости определяется уравнениями:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (r > 0), \tag{1.1}$$

где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, r, z — переменные цилиндрической системы координат; oz — ось симметрии.

Исключая из (1.1) функцию φ, получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{1.2}$$

Это уравнение выражает отсутствие вихря.

Если из (1.1) исключить функцию тока ψ, то получим уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{1.3}$$

выражающее уравнение неразрывности для потенциального течения.

Из (1.1) легко установить связь между ψ и φ в квадратурах:

$$\psi(r, z) = \psi_0(r_0, z_0) + \int_{z_0}^{z} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) dz - \int_{r_0}^{r} r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=z_0} \cdot dr, \tag{1.4}$$

которая служит для вычисления ψ по найденному из уравнения (1.3) потенциалу скорости φ.

Аналогичная формула может быть записана для определения φ через ψ.

Решение уравнения (1.3) ищем в виде ряда

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(r, z) \cdot f_k(r), \tag{1.5}$$

где $\Phi_k(r, z)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.6}$$

то есть функция $\Phi_k(r, z)$ представляет потенциал скоростей для плоского движения несжимаемой жидкости и удовлетворяет уравнению Лапласа (1.6), в котором r, z играют роль декартовых координат.

Из (1.5) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \cdot f_k + \Phi_k \cdot f_k' \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial r^2} f_k + 2 \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} f_k' + \Phi_k \cdot f_k'' \right) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} \cdot f_k .$$

Внося (1.7) в (1.3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[f_k \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} \right) + \left(2 f_k' + \frac{1}{r} f_k \right) \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \left(f_k'' + \frac{1}{r} f_k' \right) \Phi_k \right] = 0.$$

Или в силу (1.6) имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(2 f_k' + \frac{1}{r} f_k \right) \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} + \left(f_k'' + \frac{1}{r} f_k' \right) \Phi_k \right] = 0. \tag{1.8}$$

Это уравнение удовлетворится, если на произвольные функции f_k и Φ_k наложить условия, аналогичные условиям Бергмана [1, 2]:

$$2 f_0' + \frac{1}{r} f_0 = 0, \quad 2 f_k' + \frac{1}{r} f_k = - \left(f_{k-1}'' + \frac{1}{r} f_{k-1}' \right) \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} = \Phi_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.10}$$

Можно наложить также условия в виде:

$$f_0'' + \frac{1}{r} f_0' = 0, \quad f_k'' + \frac{1}{r} f_k' = - \left(2 f_{k-1}' + \frac{1}{r} f_{k-1} \right) \tag{1.11}$$

$$\Phi_k = \frac{\partial \Phi_{k-1}}{\partial r} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

§ 2. Рассмотрение условий (1.9), (1.10)

Введем соотношение

$$\frac{d W_k(u)}{du} = - i W_{k-1}(u) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где $w_k(u)$ — аналитические функции от $u = z + ir$; $w_k(u) = \Phi_k(r, z) + i\Psi_k(r, z)$. Тогда условие (1.10) можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} = \operatorname{Re}\left[i \frac{dw_k(u)}{du} \right] = \operatorname{Re} w_{k-1}(u) = \Phi_{k-1}, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

На основании этой формулы имеем

$$\Phi_k = \operatorname{Re}\left\{ -i \int_{u_0}^{u} w_{k-1}\, du \right\} = \operatorname{Re}\left\{ (-1)^k \int\int \ldots \int w\, du \cdot du \ldots du \right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{ (-i)^k \cdot \int_{u_0}^{u} w(v) \frac{(u-v)^{k-1}}{(k-1)!}\, dv \right\} \quad (k = 1, 2\ldots), \tag{2.1}$$

где $w(v) = w_0(v)$ — произвольный комплексный потенциал, определяющий функцию $\Phi_0 = \operatorname{Re} w(u)$.

Формулу (2.1) можно представить также в виде:

$$\Phi_k = \operatorname{Re} \int_{u_0}^{u} \frac{dw(v)}{dv} \frac{[i(v-u)]^k}{k!}\, dv \qquad (k = 0, 1, 2\ldots) \tag{2.2}$$

Не нарушая общности рассуждений в (2.1) и (2.2), можно положить $u_0 = 0$, $w_n(u_0) = 0$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Таким образом, все функции $\Phi_k (k = 1, 2, \ldots)$ определенным образом выражаются через одну произвольную функцию $\Phi_0 = \operatorname{Re} w(u)$.

При определении функций f_k можно рассматривать общие решения уравнений (1.9) или (1.11), однако мы ограничимся частными решениями. Тем самым выделяется определенный класс решений, весьма общий, зависящий от произвольной функции двух переменных. Из первого уравнения (1.9) имеем

$$f_0 = r^{-\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

Считая правую часть во втором уравнении (1.9) известной, получим

$$f_k = -\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \int \left(f''_{k-1} + \frac{f'_{k-1}}{r} \right) \cdot r^{\frac{1}{2}}\, dr$$

или, интегрируя по частям, найдем

$$f_k = -\frac{1}{2} \left(f'_{k-1} + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \int f'_{k-1} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \cdot dr \right). \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) находим:

$$f_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot r^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_2 = \frac{3}{2^4}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot r^{-\frac{5}{2}}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$f_3 = \frac{3\cdot 5}{2^6}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot r^{-\frac{7}{2}}.$$

. . . . . .

$$f_k = \frac{(2k-1)!!\,(2k-1)!!}{2^{3k}\cdot k!}\, r^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (2.5)$$

Предполагая равномерную сходимость ряда (1.5) (область сходимости будет установлена ниже) и, используя (2.2) и (2.5), после перестановки суммирования и интегрирования, получим

$$\varphi = r^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\int_0^u \frac{dw(v)}{dv}\sum_{k=0}^{\infty} C_k\left[\frac{i(v-u)}{2r}\right]^k\cdot dv,$$

где

$$C_k = \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2.$$

Замечаем, что коэффициент

$$C_{k+1} = \frac{[2(k+1)-1]\cdot[2(k+1)-1]}{2^2(k+1)(k+1)}\,C_k = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)(k+1)}\cdot C_k$$

изменяется так же, как в гипергеометрическом ряде при $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, следовательно, имеем

$$\varphi = r^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}\int_0^u F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{i(v-u)}{2r}\right)\cdot\frac{dw(v)}{dv}\,dv. \qquad (2.6)$$

Ни один из параметров α, β, γ не является нулем или отрицательным целым числом, поэтому F вместе со всеми своими производными равномерно сходится в области

$$\left|\frac{i(v-u)}{2r}\right| \leqslant a < 1.$$

Но нам необходимо проинтегрировать функцию F в (2.6) от $u_0 = 0$ до u, что, например, можно сделать интегрированием по частям, тогда при верхнем пределе $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$, а для нижнего мы должны потребовать

$$\left|-\frac{iu}{2r}\right| < 1 \quad (r > 0).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Очевидно, такое же неравенство будет иметь место для сопряженной комплексной величины

$$\left|\frac{i\bar{u}}{2r}\right| < 1 .$$

Объединяя эти два неравенства, получим

$$|u|^2 < 4r^2 .$$

Откуда

$$z^2 < 3r^2 . \tag{2.7}$$

Неравенство (2.7) определяет внутренность конической поверхности:

$$z = \pm\sqrt{3}\cdot r . \tag{2.8}$$

Построим решение того же вида (1.5) для функции тока ψ, исходя из уравнения (1.2). Тогда условия (1.9) заменятся на следующие:

$$2f_0' - \frac{1}{r}f_0 = 0, \qquad 2f_k' - \frac{1}{r}f_k = -\left(f_{k-1}'' - \frac{1}{r}f_{k-1}'\right) .$$

Частные решения этих уравнений имеют вид

$$f_0 = r^{\frac{1}{2}} , \qquad f_k = -\frac{1}{2}\left(f_{k-1}' - \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}\int f_{k-1}'\cdot r^{-\frac{3}{2}}dr\right).$$

Проделывая выкладки, аналогичные предыдущим, найдем

$$f_k = \frac{(2k+1)!!\,(2k-3)!!}{2^{3k}\cdot k!}\cdot r^{\frac{1}{2}-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Используем эту формулу и (1.5), (2.1)

$$\psi = r^{\frac{1}{2}}\cdot \operatorname{Im}\left\{w(u) - i\int_0^u \frac{w(v)}{2r}\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\mu_k\cdot\left[\frac{i(v-u)}{2r}\right]^{k-1}\right\},$$

где

$$\mu_k = \frac{(2k+1)!!\,(2k-3)!!}{2^{2k}\cdot k!\,k!} .$$

Замечаем, что $\mu_{k+1} = \dfrac{\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\mu_k}{(k+1)(k+1)}$, и тогда, учитывая формулу

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\mu_k z^{k-1},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

получим

$$\psi = r^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im}\left\{ w(u) - \int_0^u F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{i(v-u)}{2r}\right)\cdot w(v)\cdot dv \right\}.$$

Возьмем интеграл по частям и используем равенство $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$, а также положим $w(0) = 0$, тогда получим решение, указанное в [3]:

$$\psi(r, z) = r^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Im} \int_0^u F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 1, \frac{i(v-u)}{2r}\right) \frac{dw(v)}{dv}\, dv\,. \quad (2.9)$$

Таким образом, осесимметричная задача несжимаемой жидкости приведена к комплексному потенциалу плоской задачи.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Положим $w(u) = u = z + ir = \rho\cdot e^{i\theta}$, тогда из (2.9) находим

$$\psi = r^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im}\left\{ u\cdot F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{-iu}{2r}\right)\right\}.$$

Для выделения Im следует воспользоваться формулой Муавра:

$$u^n = \rho^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta)$$

$$\rho = \sqrt{z^2 + r^2}\,, \qquad \Theta = \operatorname{arctg}\cdot\frac{r}{z}\,.$$

Поле скоростей определяется по известным формулам:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,, \qquad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,,$$

после чего давление найдется из интеграла Бернулли.

Пример 2. Пусть $w(u) = u^2$, тогда из (2.9) находим

$$\psi = r^{\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{Im}\left\{ u^2\cdot F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 3,\ -\frac{iu}{2r}\right)\right\}.$$

§ 3. Рассмотрение условий (1.11) и (1.12)

Используя формулу Коши, соотношение (1.12) можно записать в виде:

$$\Phi_k = \frac{\partial^k \Phi_0}{\partial r^k} = \operatorname{Re}\left[i^k\cdot\frac{d^k w(u)}{du^k}\right] = \operatorname{Re}\left\{\frac{i^k\cdot k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{w(v)\,dv}{(v-u)^{k+1}}\right\}, \quad (3.1)$$

где по-прежнему $w(u)$ — комплексный потенциал; γ — произвольный замкнутый контур, внутри которого находится точка u.

В качестве частных решений уравнений (1.11) имеем:

$$f_0 = 1, \quad f_k = -\int\frac{1}{r}\int\left(2f'_{k-1} + \frac{1}{r}f_{k-1}\right) r\cdot dr\cdot dr. \quad (3.2)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Интегрируя по частям, находим

$$f_k = -2\int f_{k-1}\,dr + \int \frac{1}{r}\int f_{k-1}\,dr\,dr \quad (k = 1, 2,\ldots) \tag{3.3}$$

Пользуясь формулами (3.2), (3.3), получим

$$f_1 = -r, \quad f_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}r^2, \quad f_3 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 2\cdot 3}\cdot r^3,\ldots$$

$$f_k = \frac{(-1)^k\cdot(2k-1)!!}{k!\,k!}\cdot r^k \quad (k = 1, 2,\ldots) \tag{3.4}$$

Вносим (3.1) и (3.4) в (1.5) и меняем местами суммирование и интегрирование

$$\varphi = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{w(v)}{v-u}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} C_k\left[\frac{2ir}{u-v}\right]^k dv\right\},$$

где

$$C_k = \frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}.$$

Замечаем, что

$$C_{k+1} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)}{(k+1)\,(k+1)}\cdot C_k.$$

Следовательно,

$$\varphi = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{w(v)}{v-u}\cdot F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1,\ \frac{2ir}{u-v}\right)dv\right\}. \tag{3.5}$$

Из этой формулы видно, что область равномерной сходимости ряда (1.5) определяется по меньшей мере неравенством

$$\left|\frac{2ir}{u-v}\right| < a < 1.$$

Или

$$|u-v|^2 < 4r^2,$$

т. е. имеем расширение интервала сходимости.

Обозначая $|u-v| = \rho$, находим $r < \frac{\rho}{2}$, что тем лучше выполняется, чем дальше точки потока от профиля.

Рассмотрим теперь ряд того же вида (1.5) для уравнения (1.2), определяющего функцию тока ψ. В этом случае условия типа (1.11) примут вид

$$f_0'' - \frac{1}{r}f_0' = 0, \quad f_k'' - \frac{1}{r}f_k' = -\left(2f_{k-1}' - \frac{1}{r}f_{k-1}\right) \tag{3.6}$$

Частное решение для первого уравнения (3.6) возьмем в виде

$$f_0 = r^2, \tag{3.7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а для второго уравнения (3.6) оно имеет вид:

$$f_k = -\int r \int \left(2 f_{k-1} - \frac{1}{r} f_{k-1}\right) \cdot \frac{dr \cdot dr}{r}.$$

Или после интегрирования по частям получим

$$f_k = -\left(2 \int f_{k-1}\, dr + \int r \int \frac{f_{k-1} \cdot dr\, dr}{r^2}\right). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) легко найти

$$f_k = \frac{(-1)^k \cdot (2k)!}{2^k \cdot k!\,(2k+1)!} \cdot r^{k+2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

Объединяем формулы (1.5), (3.1) и (3.9)

$$\psi(r, z) = r^2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{w(v)}{v-u} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \left(\frac{2ir}{u-v}\right)^k dv\right\},$$

где

$$\mu_{k+1} = \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)}{(k+1)(k+1)}\, \mu_k.$$

Следовательно,

$$\psi(r, z) = r^2 \cdot \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{w(v)}{v-u} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2ir}{u-v}\right) dv\right\}$$

Разложение функции ψ в ряд (1.5) имеет место в той же области, что и в (3.5) для φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Мизес. Математическая теория течений сжимаемой жидкости, И—Л, М, стр. 402—413, 1961.

2. Р. Мизес, М. Шиффер. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости, Сборник „Проблемы механики", И—Л. стр. 489—518, 1955.

3. Г. И. Назаров, Точное решение осесимметричной задачи идеальной жидкости, ПММ, XXIII, в, 2., 1959.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Г. И. НАЗАРОВ

Плоское сверхзвуковое движение баротропного газа определяется уравнениями [1]:

$$\psi_{tt} - \psi_{\theta\theta} + T(t)\cdot\psi_t = 0 \tag{1}$$

$$T(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln K \tag{2}$$

$$dt = -(\rho^2 K + 1)^{-1}\cdot\sqrt{K}\cdot d\rho \tag{3}$$

$$K = \frac{1}{\rho^2}(M^2 - 1), \qquad p = p(\rho), \tag{4}$$

где ψ — функция тока, t, Θ — переменные плоскости годографа скорости $v = v(t)$.

$K > 0$ — функция Чаплыгина, ρ — плотность, p — давление, v — скорость, M — число Маха.

Все величины замеряем в критических единицах, то есть в тех значениях, которые они принимают в тех точках, где местная скорость газа совпадает со скоростью звука a_*.

Для адиабатического процесса $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$ соответствующие функции имеют вид:

$$t = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1} \tag{5}$$

$$T(t) = \frac{\gamma+1}{2}\cdot M^4\cdot(M^2-1)^{-\frac{3}{2}}, \tag{6}$$

$$K = \left(M^2 - 1\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\cdot M^2\right)^{\frac{2}{\gamma-1}},$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,M\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так же легко записать формулы для $p = p(M)$ и $\rho = \rho(M)$ (см. [1]).

Для такого течения затруднительно построить точное эффективное решение задачи. Введем баротропный гипотетический газ. Для этого положим

$$\tilde{T} = a(t + b)^{-1}. \tag{8}$$

Тогда из (2) находим

$$\tilde{K} = c(t + b)^{2a}, \tag{9}$$

где a, b, c — постоянные, определяемые из условий наилучшей аппроксимации K и $\tilde{K}$. Например, можно потребовать совпадения K и $\tilde{K}$ с точностью до кривизны в точке $t_0 = 0{,}2441$ ($M_0 = 1{,}57$), тогда $a = 1$, $b = 0$, $c = 182{,}4$.

Эти кривые, а также T и $\tilde{T}$ нанесены на рис. 1.

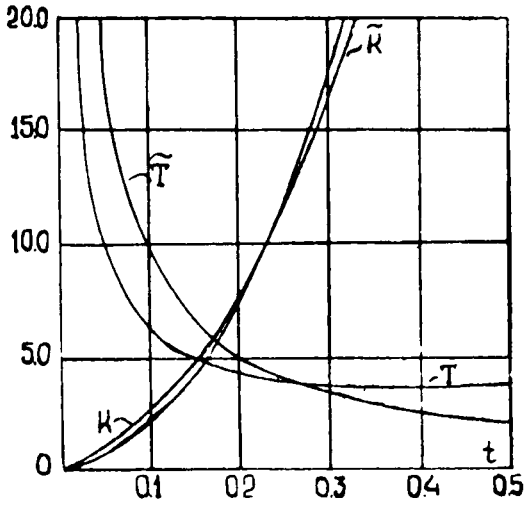


Рис. 1.

Функция (9) характеризует приближение С. А. Христиановича [2]. Однако, в отличие от [2] на постоянную a не накладывается никаких ограничений.

Для газа (9) имеем

$$\psi_{tt} - \psi_{\theta\theta} + a(t + b)^{-1} \cdot \psi_t = 0 \tag{10}$$

Положим

$$\psi = f(t) \cdot e^{in\theta},$$

где n — натуральное число.

Тогда имеем уравнение Бесселя:

$$f'' + a(t + b)^{-1} \cdot f' + n^2 f = 0$$

Следовательно,

$$f(t) = Z^{\nu}[A_n \cdot I_{\nu}(nz) + B_n \cdot N_{\nu}(nz)],$$

где

$$\nu = \frac{1 - a}{2}, \quad z = t + b. \tag{11}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Учитывая, что $N_\nu(0) = \infty$, положим $B_n = 0$, тогда в силу линейности уравнения (10) имеем

$$\psi = Z^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{in\Theta} \cdot I_\nu(nz).$$

Полагая

$$A_n = e^{-i\lambda n}$$

и используя интегральное представление функции Бесселя в форме Шлефли [3], найдем

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} z^\nu \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(z \cdot sh x + i\Theta - i\lambda)} \cdot \frac{dx}{e^{\nu x}},$$

где γ — некоторый замкнутый контур.

Пусть $x = iy$, учитывая равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nN} = \frac{1}{1 - e^N},$$

получим

$$\psi = \frac{z^\nu}{2\pi} \int_\gamma e^{-i\nu y} \cdot (1 - e^N)^{-1} dy,$$

где

$$N = i(z \sin y + \Theta - \lambda). \tag{12}$$

Для определения пути интегрирования γ поступим так же, как Томотика и Тамада [4]. Допустим y_0 — корень уравнения $N(y_0) = 0$

$$z \sin y_0 + \Theta - \lambda = 0.$$

Тогда в окрестности этой точки подинтегральное выражение можно представить в виде разложения

$$e^{-i\nu y}(1 - e^N)^{-1} = -\left[e^{+i\nu y_0}\left(\frac{dN}{dy}\right)_{y=y_0}\right]^{-1} \cdot \frac{1}{y - y_0} + 0(1).$$

Если $\left(\frac{dN}{dy}\right)_{y=y_0} \neq 0$, то выбирая в качестве γ контур, охватывающий особую точку y_0 и применяя теорему о вычетах, получим

$$\psi = -iz^\nu \cdot e^{-i\nu y_0} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dN}{dy}\right)_{y=y_0}},$$

но

$$\left(\frac{dN}{dy}\right)_{y=y_0} = iz \cos y_0.$$

Следовательно,

$$\psi_1 = -z^{\nu-1} \cdot e^{-i\nu y} \cdot \frac{1}{\cos y}, \tag{13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где параметр y определяется уравнением

$$z \cdot \sin y + \Theta - \lambda = 0. \tag{14}$$

Очевидно, что $\Theta - \lambda$ является частным решением уравнения (10). Тогда из (14) находим второе независимое решение

$$\psi_2 = z \cdot \sin y. \tag{15}$$

Независимым решением является также

$$\psi_3 = \int \psi_1 d\Theta = -\int \frac{z^{\nu-1} \cdot e^{-i\nu y}}{\cos y} \cdot \frac{d\Theta}{dy} dy.$$

Из (14) находим

$$\frac{d\Theta}{dy} = -z \cos y.$$

Следовательно,

$$\psi_3 = z^{\nu} \cdot e^{-i\nu y}.$$

Любые линейные комбинации этих решений являются решениями уравнения (10).

Для простоты рассмотрим линейную комбинацию решений (13) и (15) частного вида при $a = 1$, $\nu = 0$, $b = 0$,

$$\psi = \frac{P}{t \cdot \cos y} + t \cdot \sin y, \tag{16}$$

где P — постоянная.

Это решение характеризует сверхзвуковое обтекание заостренного полутела (см. рис. 2).

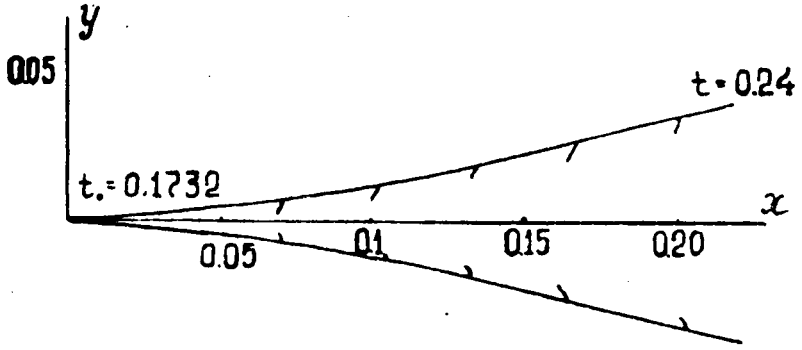


Рис. 2.

Расчет и построение картины течения проведено при $t_\infty = 0{,}1732$ в пределах, допускаемых аппроксимацией (9), при $a = 1$, $b = 0$.

Нулевая линия тока $\psi = 0$ для (16) имеет вид

$$t = (\Theta - \lambda)^{-1} [P^2 + (\Theta - \lambda)^4]^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

или

$$\Theta = \lambda \pm \left[\frac{1}{2} (t^2 \pm \sqrt{t^4 - 4P^2}) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Вторые два знака в (18) характеризуют два разных профиля, первые — разветвление профиля.

Постоянную λ определим из условия [4]: $\psi = \infty$ при $t = t_\infty$, $\Theta = \Theta_\infty$.

Тогда из (16) $\cos y_\infty = 0$.

Или

$$t_\infty^2 - (\Theta_\infty - \lambda)^2 = 0$$

Откуда

$$\lambda = \Theta_\infty - t_\infty. \tag{19}$$

P определим из (18). Полагая $t = t_0$, $\Theta = \Theta_0$, находим

$$P = (\Theta_0 - \lambda)[t_0^2 - (\Theta_0 - \lambda)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

P — вещественное. Следовательно, $t_0 \neq 0$ и $t_0 > \Theta_0 - \lambda$.

Не нарушая общности рассуждений, можно положить $\Theta_\infty = 0$. Кроме того, полагая $\Theta_0 = 0$, имеем $t_0 > t_\infty$.

Таким образом, на профиле, в том числе и в его носике t_0, где t_0 — значение, определяемое из условия $t_0^4 + 4P^2 = 0$, скорость $v > v_\infty$. Из (19) следует, что $t_\infty \neq 0$ ($\lambda \neq 0$).

Связь между потенциалом скорости φ и функцией тока ψ для сверхзвукового течения имеет вид

$$\varphi_t = K^{\frac{1}{2}} \cdot \psi_\Theta, \quad \varphi_\Theta = K^{\frac{1}{2}} \cdot \psi_t. \tag{21}$$

Для функции тока (16) с учетом (9) и $a = 1$, $b = 0$ легко найти

$$\varphi = -\sqrt{C}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{P(\Theta - \lambda)}{\sqrt{t^2 - (\Theta - \lambda)^2}}\right) + C_1. \tag{22}$$

Постоянной C_1 следует распорядиться так, чтобы в точке разветвления линии тока (носик профиля) $\varphi = 0$. Это условие можно также использовать для определения P. Формулы перехода к физической плоскости на нулевой линии тока имеют вид

$$x = \int_0^\varphi \left(\frac{\cos\Theta}{v}\right)_{\psi=0} \cdot d\varphi, \qquad y = \int_0^\varphi \left(\frac{\sin\Theta}{v}\right)_{\psi=0} \cdot d\varphi.$$

Предельная линия определяется уравнением

$$\rho^{-2}\left(M^2 - 1\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\Theta}\right)^2 = 0,$$

которое для газа (19) и решения (16) принимает вид

$$(t - \Theta + \lambda)^3(t + \Theta - \lambda) = P^2$$

или

$$(\Theta - \lambda)^4 - 2t(\Theta - \lambda)^3 + 2t^3(\Theta - \lambda) + P^2 - t^4 = 0.$$

Эта линия находится вне области скоростей, для которых применена аппроксимация.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Внося (9) в (3), (4) и интегрируя каким-нибудь приближенным методом, получим $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{M}$, $\tilde{v}|t$. Все эти кривые ведут себя удовлетворительно для рассматриваемой аппроксимации [2].

Представляет интерес комбинация

$$\psi = \psi_{11} + P \cdot \psi_{12}, \quad \nu \neq 0.$$

Нулевая линия тока имеет вид

$$\Theta = \lambda \pm t \cdot \sin\left[\frac{1}{\nu} \arccos P(1+P^2)^{-1}\right],$$

где постоянные λ и P определяются из тех же соображений. Картина течения для этого решения изображена на рис. 3

$$(a = 0{,}8,\ b = 0,\ c = 97{,}06,\ t_0 = 0{,}1619).$$

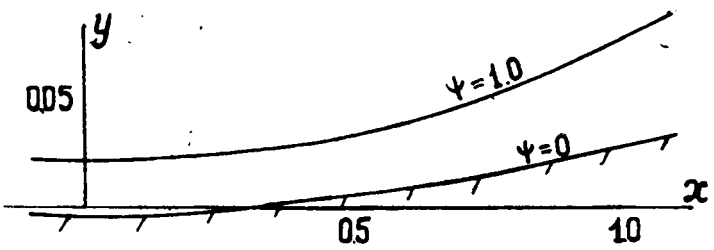


Рис. 3.

В числовых расчетах принимали участие студенты-дипломники Я. Г. Шлиомовичус и В. П. Карякин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. С. А. Христианович. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа, ПММ, XI, в. 2, 1947.
3. Р. О. Кузьмин. Бесселевы функции, М.—Л., ОНТИ, 1935.
4. С. Томотика, К. Тамада. Двумерное смешанное течение сжимаемой жидкости, часть III, Сб. „Механика", № 2(12), 1952.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

В. Н. ШЕПЕЛЕНКО

В статье рассматривается вторая основная задача плоской теории упругости для полосы, спаянной из двух бесконечных полос одинаковой ширины: T ($|x| \leqslant \infty$, $h \geqslant y \geqslant 0$) и T' ($|x| \leqslant \infty$, $0 \geqslant y \geqslant -h$). Такую полосу будем называть двойной полосой. Условимся все величины, относящиеся к полосе T' снабжать штрихами, например X'_x, u'. Изложение решения ведется в обозначениях статьи [2]. В данной работе мы ограничиваемся случаем, когда обе полосы изготовлены из одного и того же ортотропного материала и расположены так, что их соответствующие главные направления упругости [1] ортогональны друг другу и параллельны координатным осям. Причем в качестве ортотропного материала взят материал, характеризующийся комплексными параметрами вида

$$\mu_k = i\beta_k \quad \beta_1 > \beta_2 > 0 \tag{0,1}$$

и, следовательно, $a_{16} = a_{26} = 0$. Легко проверить, что в этом случае ([1], стр. 45 — 49)

$$\mu'_k = \frac{i}{\beta_k} = i\beta'_k,$$

$$a'_{11} = a_{22},\ a'_{22} = a_{11},\ a'_{12} = a_{12},\ a'_{66} = a_{66}. \tag{0,2}$$

Далее, так как μ_k являются корнями характеристического уравнения

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0, \tag{0,3}$$

то

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2a_{12} + a_{66}}{a_{11}}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}, \tag{0,4}$$

откуда следует, что

$$p_1 = \gamma_1,\ p_2 = \gamma_2,\ p'_1 = \gamma'_1 = \gamma_2,\ p'_2 = \gamma'_2 = \gamma_1,$$

$$q_1 = i\beta_1\gamma_2,\ q_2 = i\beta_2\gamma_1,$$

$$q'_1 = i\beta'_1\gamma'_2 = i\frac{\gamma_1}{\beta_1}, \qquad q'_2 = i\beta'_2\gamma'_1 = i\frac{\gamma_2}{\beta_2}, \tag{0,5}$$

где величины

$$\gamma_k = a_{11}(\lambda - \beta_k^2), \qquad \lambda = \frac{a_{12}}{a_{11}} \tag{0,6}$$

введены для краткости письма.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

1. Решение задачи

Пусть на кромках двойной полосы заданы компоненты вектора смещения

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(x), \quad v = \varphi_2(x), \quad y = h; \\ u &= \varphi_3(x), \quad v = \varphi_4(x), \quad y = -h. \end{aligned} \tag{1,1}$$

Будем считать, что граничные функции $\varphi_j(x)$ абсолютно интегрируемы в интервале $(-\infty, \infty)$, представимы интегралом Фурье и удовлетворяют условиям:

$$\varphi_j(x) \cdot |x|^{1+\sigma} = 0(1), \ \sigma > 0. \tag{1,2}$$
$$|x| \longrightarrow \infty$$

Граничные условия на основании известных соотношений [1], [2] запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\,[p_1 F_1(z_1) + p_2 F_2(z_2)] &= \varphi_1(x) \\ 2\,\mathrm{Re}\,[q_1 F_1(z_1) + q_2 F_2(z_2)] &= \varphi_2(x) \end{aligned}\right\} y = h, \tag{1,3}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\,[p_1' F_1'(z_1') + q_2' F_2'(z_2') &= \varphi_3(x) \\ 2\,\mathrm{Re}\,[q_1' F_1'(z_1') + q_2' F_2'(z_2')] &= \varphi_4(x) \end{aligned}\right\} y = -h.$$

На линии спая $y = 0$, очевидно, имеем $Y_y = Y_y'$, $X_y = X_y'$, $u = u'$, $v = v'$. Эти соотношения дают нам для определения функций F_k, F_k', f_k, f_k' еще четыре условия:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\,[p_1 F_1(z_1) + p_2 F_2(z_2)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[p_1' F_1'(z_1') + p_2' F_2'(z_2')], \\ 2\,\mathrm{Re}\,[q_1 F_1(z_1) + q_2 F_2(z_2)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[q_1' F_1'(z_1') + q_2' F_2'(z_2')], \\ 2\,\mathrm{Re}\,[f_1(z_1) + f_2(z_2)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[f_1'(z_1') + f_2'(z_2')], \\ 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1 f_1(z_1) + \mu_2 f_2(z_2)] &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1' f_1'(z_1')] + \mu_2' f_2'(z_2')]. \end{aligned} \tag{1,4}$$

Решение задачи ищется в виде (см. обозначения статьи [2])

$$\begin{aligned} F_k(z_k) &= \frac{1}{2\pi} \int\int A_{kj}(t)\, \varphi_j(\xi)\, e^{it(\xi - z_k)}\, d\xi\, dt, \\ F_k'(z_k') &= \frac{1}{2\pi} \int\int A_{kj}'(t)\, \varphi_j(\xi) \cdot e^{it(\xi - z_k')}\, d\xi\, dt, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где A_{kj} — и A_{kj}' — коэффициенты, подлежащие определению.

Запишем значения функций $F_k(z_k)$ и $\overline{F_k(z_k)}$ при $y = h$ имеем;

$$F_k(x + \mu_k h) = \frac{1}{2\pi} \int\int A_{kj}(t)\, \varphi_j(\xi)\, e^{it(\xi - x)}\, e^{-it\mu_k h}\, d\xi\, dt, \tag{1,6}$$

$$\overline{F_k(x + \mu_k h)} = \frac{1}{2\pi} \int\int \overline{A_{kj}(t)}\, \varphi_j(\xi)\, e^{-it(\xi - x)}\, e^{it\mu_k h}\, d\xi\, dt =$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int \overline{A_{kj}(-t)}\,\varphi_j(\xi)\,e^{it(\xi-x)}\,e^{-it\mu_k h}\,d\xi\,dt.$$

Подставим (1,6) в первое граничное условие (1,3) и представим функцию $\varphi_1(x)$ интегралом Фурье:

$$u(x,h) = \frac{1}{2\pi}\int\int\Big\{p_1\zeta^{-\mu_1}A_{1j}(t) + p_1\zeta^{-\mu_1}\overline{A_{1j}(-t)} +$$

$$+ p_2\zeta^{-\mu_2}A_{2j}(t) + p_2\zeta^{-\mu_2}\overline{A_{2j}(-t)}\Big\}\varphi_j(\xi)\,e^{it(\xi-x)}\,d\xi\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int p_l\zeta^{-\mu_l}A_{lj}\varphi_j e^{it(\xi-x)}\,d\xi\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\int\varphi_1 e^{it(\xi-x)}\,d\xi\,dt.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях φ_j, имеющих одинаковые индексы, получим первую строку нижеследующей таблицы. Три другие строки получаются аналогичным образом.

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$P_l\zeta^{-\mu_l}A_{lj} =$	1	0	0	0
$q_l\zeta^{-\mu_l}A_{lj} =$	0	1	0	0
$P'_l\zeta^{\mu'_l}A'_{lj} =$	0	0	1	0
$q'_l\zeta^{\mu'_l}A'_{lj} =$	0	0	0	1

(1,7)

Из условий на линии спая (1,4), рассуждая точно так же, получим:

$$p_l A_{lj} = p'_l A'_{lj},\quad q_l A_{lj} = q'_l A'_{lj},$$

$$\delta_l A_{lj} = \delta_l A'_{lj},\quad \mu_l A_{lj} = \mu'_l A_{lj}, \qquad (1,8)$$

где символ $\delta_l = 1$ введен для единообразия записи.

Соотношения (1,7) и (1,8) представляют собой при каждом фиксированном значении индекса j систему восьми линейных относительно коэффициентов A_{lj} и A'_{lj} уравнений. Эти системы, как нетрудно видеть, имеют один и тот же определитель и отличаются друг от друга лишь правыми частями. В дальнейшем, говоря о системе, мы будем иметь в виду систему при фиксированном значении индекса j. Система может быть значительно упрощена посредством замены:

$$A_{1j} = \frac{1}{2}(H_{1j} + A_{2j}),\quad A'_{1j} = -\frac{1}{2}(H_{7j} - H_{8j}),$$

$$A_{2j} = \frac{1}{2}(H_{3j} + H_{4j}),\quad A'_{2j} = -\frac{1}{2}(H_{5j} - H_{6j}),$$

(1.9)

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$A_{3j} = -\frac{1}{2}(H_{1j} - H_{2j}), \qquad A'_{3j} = \frac{1}{2}(H_{7j} + H_{8j}),$$

$$A_{4j} = -\frac{1}{2}(H_{3j} - H_{4j}), \qquad A'_{4j} = \frac{1}{2}(H_{5j} + H_{6j}).$$

Введем для удобства записи обозначения:

$$\beta_1 = \beta,\ \beta_2 = \delta,\ \beta'_1 = \frac{1}{\beta_1} = \beta',\quad \beta'_2 = \frac{1}{\beta_2} = \delta',$$
$$\gamma_1 = \gamma'_2 = \gamma,\ \gamma_2 = \gamma'_1 = \mu. \tag{1,10}$$

На основании (1,9) и (1,10) левые части первых четырех уравнений (1,7) системы примут вид:

$$p_l \zeta^{-\mu_l} A_{lj} = \gamma S_\beta H_{1j} + \gamma C_\beta H_{2j} + \mu S_\delta H_{3j} + \mu C_\delta H_{4j},$$
$$q_l \zeta^{-\mu_l} A_{lj} = i\{\beta\mu C_\beta H_{1j} + \beta\mu S_\beta H_{2j} + \delta\gamma C_\delta H_{3j} + \delta\gamma S_\delta H_{4j}\},$$
$$p'_l \zeta^{\mu_l} A_{lj} = \gamma S_{\delta'} H_{5j} + \gamma C_{\delta'} H_{6j} + \mu S_{\beta'} H_{7j} + \mu C_{\beta'} H_{8j},$$
$$q'_l \zeta^{\mu_l} A'_{lj} = -i\{\delta'\mu C_{\delta'} H_{5j} + \delta'\mu S_{\delta'} H_{6j} + \beta'\gamma C_{\beta'} H_{7j} + \beta'\gamma S_{\beta'} H_{8j}\},$$

а четыре последних уравнения (1,8) системы приведутся к виду:

$$H_{2j} + H_{4j} - H_{6j} - H_{8j} = 0,$$
$$\beta H_{1j} + \delta H_{3j} + \delta' H_{5j} + \beta' H_{7j} = 0,$$
$$\gamma H_{2j} + \mu H_{4j} - \gamma H_{6j} - \mu H_{8j} = 0,$$
$$\beta\mu H_{1j} + \delta\gamma H_{3j} + \delta'\mu H_{5j} + \beta'\gamma H_{7j} = 0.$$

Коэффициенты $H_{sj}\,(s = 1, 2, \ldots, 8)$ определяются по формулам:

$$H_{sj}(t) = \frac{S_{sj}(t)}{S(t)}, \tag{1,11}$$

где $S(t)$ — определитель системы, $S_{sj}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента e_{sj} (s — номер столбца).

Легко проверить, что если умножить 5-й и 7-й столбцы определителя $S(t)$, который мы не выписываем в силу его громоздкости, на $-\beta\delta$ и прибавить четыре последних столбца соответственно к первым четырем, то мы получим определитель, содержащий в левом нижнем углу определитель четвертого порядка, элементы которого суть нули. Отсюда следует, что

$$S(t) = D(t)\cdot\Delta, \tag{1,12}$$

где

$$\Delta = -\beta'\delta'(\gamma - \mu)^2$$

$$D(t) = \begin{vmatrix} \gamma S_\beta & \gamma C_\beta & \mu S_\delta & \mu C_\delta \\ i\beta\mu C_\beta & i\beta\mu S_\beta & i\delta\gamma C_\delta & i\delta\gamma S_\delta \\ -i\beta\gamma S_{\delta'} & \gamma C_{\delta'} & -i\delta\mu S_{\beta'} & \mu C_{\beta'} \\ i\beta\mu C_{\delta'} & -i\delta'\mu S_{\delta'} & i\beta\gamma C_{\beta'} & -i\beta'\gamma S_{\beta'} \end{vmatrix} \tag{1,13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Обозначая через $D_{sj}(t)$ алгебраическое дополнение элемента e_{sj} (s— номер столбца) в определителе $D(t)$, аналогичным образом найдем:

$$S_{sj} = D_{sj}\Delta \quad (s, j = 1, 2, 3, 4) \tag{1,14}$$

$$S_{5j} = -\beta\delta D_{1j}\Delta,\ S_{6j} = D_{2j}\Delta,\ S_{7j} = -\beta\delta D_{3j}\Delta,\ S_{8j} = D_{4j}\Delta.$$

На основании (1,14), (1,11) и (1,9) имеем для определения коэффициентов A_{sj} и A'_{sj} ($j, s = 1, 2, 3, 4$) следующие формулы:

$$\begin{aligned}
A_{1j} &= \frac{1}{2D}(D_{1j} + D_{2j}), & A'_{1j} &= \frac{1}{2D}(\beta\delta D_{3j} + D_{4j}),\\
A_{2j} &= \frac{1}{2D}(D_{3j} + D_{1j}), & A'_{2j} &= \frac{1}{2D}(\beta\delta D_{1j} + D_{2j}),\\
A_{3j} &= -\frac{1}{2D}(D_{1j} - D_{2j}), & A'_{3j} &= \frac{1}{2D}(\beta\delta D_{3j} - D_{4j}),\\
A_{4j} &= -\frac{1}{2D}(D_{3j} - D_{4j}), & A'_{4j} &= -\frac{1}{2D}(\beta\delta D_{1j} - D_{2j}).
\end{aligned} \tag{1,15}$$

Смещения и напряжения в полосе (см. [1], [2]) с помощью преобразования (1,6) и обозначения $\eta_l = e^{\mu_l y}$ можно записать так:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int p_l \eta_l^{-\mu_l} A_{lj}\varphi_j e^{it(\xi - x)}\, d\xi\, dt,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int q_l \eta_l^{-\mu_l} A_{lj}\varphi_j e^{it(\xi - x)}\, d\xi\, dt,$$

$$Y_y(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int (-it)\eta^{-\mu} A_{lj}\varphi_j e^{it(\xi - x)}\, d\xi\, dt,$$

$$-X_y(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\int (-it)\mu_l \eta^{-\mu_l} A_{lj}\varphi_j e^{it(\xi - x)}\, d\xi\, dt, \tag{1,16}$$

$$X_x(y, x) = \frac{1}{2\pi}\int\int (-it)\mu_l^2 \eta^{-\mu_l} A_{lj}\varphi_j e^{it(\xi - x)}\, d\xi\, dt.$$

Аналогично выразятся смещения и напряжения для полосы T', нужно лишь всюду поставить штрихи у μ_l, p_l, q_l, A_{lj}. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать смещения и напряжения лишь в полосе T.

Замечаем, что смещения и напряжения (1,16) выражаются посредством одной и той же формулы

$$A = \frac{1}{2\pi}\int\int a_l \eta^{-\mu_l} A_{lj} e^{it(\xi - x)}\, dt\, d\xi. \tag{1.17}$$

Если здесь расписать сумму по l под интегралом и выполнить элементарные преобразования с учетом зависимостей (1,15), то получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$A=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{T_j(t,y)}{D(t)}\varphi_j(\xi)\,e^{it(\xi-x)}\,d\xi\,dt, \tag{1,18}$$

где $T_j(t,y)$ — определитель, получающийся из определителя $D(t)$, если в нем заменить j-ую строку на строку с элементами:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(a_1\eta^{-\mu_1}-a_3\eta^{-\mu_3}),\quad \frac{1}{2}(a_1\eta^{-\mu_1}+a_3\eta^{-\mu_3}),\\ \frac{1}{2}(a_2\eta^{-\mu_2}-a_4\eta^{-\mu_4}),\quad \frac{1}{2}(a_2\eta^{-\mu_2}+a_4\eta^{-\mu_4}).\end{gathered} \tag{1,19}$$

Величины a_l для смещений и напряжений (1,16), очевидно, имеют вид:

$$\begin{array}{l|ll}
u & a_1=a_3=\gamma, & a_2=a_4=\mu;\\
v & a_1=-a_3=i\beta\mu, & a_2=-a_4=i\delta\gamma;\\
Y_y & a_1=a_2=a_3=a_4=-it & \\
X_y & a_1=-a_3=\beta t, & a_2=-a_4=\delta t\\
X_x & a_1=a_3=it\beta^2 & a_2=a_4=it\delta^2
\end{array} \tag{1,20}$$

Соответственно j-ая строка в определителе $T_j(t,y)$ запишется так:

$$\begin{array}{lllll}
u & \gamma S_\beta^y, & -\gamma C_\beta^y, & \mu S_\delta^y, & \mu C_\delta^y\\
v & i\beta\mu C_\beta^y, & i\beta\mu S_\beta^y & i\delta\gamma C_\delta^y & i\delta\gamma S_\delta^y\\
y_y & -itS_\beta^y & -itC_\beta^y & -itS_\delta^y & -itC_\delta^y\\
-X_y & \beta t C_\beta^y, & \beta t S_\beta^y, & \delta t C_\delta^y & \delta t S_\delta^y\\
X_x & it\beta^2 S_\beta^y, & it\beta^2 C_\beta^y, & it\delta^2 C_\delta^y & it\delta^2 S_\delta^y
\end{array} \tag{1,21}$$

Обозначим определители $T_j(t,y)$ для $u, v, Y_y, -X_y, X_x$ соответственно через $\Gamma_j\chi_j$, G_j, V_j, W_j. Для дальнейших рассуждений удобно ввести в рассмотрение следующие обозначения: обозначим через $\tilde{D}$, $\tilde{\Gamma}_j$, $\tilde{\chi}_j$, $\tilde{G}_j$, $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$ определители, получающиеся соответственно из определителей D, Γ_j, χ_j, G_j, V_j, W_j, если в них опустить все множители $i=\sqrt{-1}$, стоящие перед элементами одной, двух или трех строк. Очевидно тогда, что

$$\begin{gathered}D=-\tilde{D},\\ \Gamma_2=\tilde{\Gamma}_2 i,\ \Gamma_1=-\tilde{\Gamma}_1,\ \Gamma_3=-\tilde{\Gamma}_3,\ \Gamma_4=i\tilde{\Gamma}_4,\\ \chi_1=-i\tilde{\chi}_1,\ \chi_2=-\tilde{\chi}_2,\ \chi_3=-i\tilde{\chi}_3,\ \chi_4=-\tilde{\chi}_4\\ G_1=-i\tilde{G}_1,\ G_2=-\tilde{G}_2,\ G_3=-i\tilde{G}_3,\ G_4=-\tilde{G}_4,\\ V_1=-\tilde{V}_1,\ V_2=-i\tilde{V}_2,\ V_3=-V_3,\ V_4=i\tilde{V}_4,\end{gathered} \tag{1,22}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$W_1 = -i\tilde{W}_1,\ W_2 = -\tilde{W}_2,\ W_3 = -i\tilde{W}_3,\ W_4 = -\tilde{W}_4.$$

Далее, нетрудно проверить, что функции $\tilde{D}$, $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_3$, $\tilde{G}_2$, $\tilde{G}_4$, $\tilde{W}_2$, $\tilde{W}_4$, $\tilde{\chi}_2$, $\tilde{\chi}_4$, $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_3$ являются четными функциями переменной t, а функции $\tilde{\Gamma}_2$, $\tilde{\Gamma}_4$, $\tilde{\chi}_1$, $\tilde{\chi}_3$, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_3$, $\tilde{V}_2$, $\tilde{V}_4$, $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_3$ являются нечетными функциями переменной t.

Используя зависимости (1,22), разложим теперь компоненту u вектора смещения на действительную и мнимую части. Имеем

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\Gamma_j(t,y)}{D(t)}\varphi_j(\xi)\, e^{it(\xi-x)}\, d\xi\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint \{(\tilde{\Gamma}_1\varphi_1 + \tilde{\Gamma}_3\varphi_3)\cos t(\xi - x) +$$

$$+ (\tilde{\Gamma}_2\varphi_2 + \tilde{\Gamma}_4\varphi_4)\sin t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{\tilde{D}} +$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\iint \{(\tilde{\Gamma}_1\varphi_1 + \tilde{\Gamma}_3\varphi_3)\sin t(\xi - x) - (\Gamma_2\varphi_2 + \Gamma_4\varphi_4)\cos t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{\tilde{D}}$$

Поскольку функция под интегралом в $\operatorname{Im} u$ есть нечетная функция переменной t, то $\operatorname{Im} u = 0$, и мы получаем первую из нижеприведенных формул (1,23). Четыре других формулы устанавливаются аналогичным образом. Итак, имеем:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint \{(\tilde{\Gamma}_1\varphi_1 + \tilde{\Gamma}_3\varphi_3)\cos t(\xi - x) +$$

$$+ (\tilde{\Gamma}_2\varphi_2 + \tilde{\Gamma}_4\varphi_4)\sin t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{\tilde{D}}, \qquad (1,23)$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint \{(\tilde{\chi}_2\varphi_2 + \tilde{\chi}_4\varphi_4)\cos t(\xi - x) -$$

$$- (\tilde{\chi}_1\varphi_1 + \tilde{\chi}_3\varphi_3)\sin t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{\tilde{D}},$$

$$Y_y(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint \{(\tilde{G}_2\varphi_2 + G_4\varphi_4)\cos t(\xi - x) -$$

$$- (\tilde{G}_1\varphi_1 + \tilde{G}_3\varphi_3)\sin t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{D},$$

$$-X_y(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint \{(\tilde{V}_1\varphi_1 + V_3\varphi_3)\cos t(\xi - x) +$$

$$+ (\tilde{V}_2\varphi_2 + \tilde{V}_4\varphi_4)\sin t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{D},$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$X_x(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma}\{(\tilde{W}_2\varphi_2 + \tilde{W}_4\varphi_4)\cos t(\xi - x) -$$

$$-(\tilde{W}_1\varphi_1 + \tilde{W}_3\varphi_3)\sin t(\xi - x)\}\frac{d\xi\, dt}{\tilde{D}}.$$

II. Исследование решения

Из (1,13) нетрудно видеть, что $\tilde{D}(0) = 0$. Поэтому точка $t = 0$ может оказаться особой для подинтегральных функций в (1,23). Исследуем поведение подинтегральных функций в окрестности точки $t = 0$.

Разлагая определитель $\tilde{D}(t)$ по элементам последней строки, после элементарных преобразований получим:

$$\tilde{D}(t) = 2\beta\delta\mu^2\gamma^2 + \beta\delta\, m_1 m_1' + \frac{1}{\beta\delta}\, m_2 m_2' - m_3 m_3' - m_4 m_4', \tag{2,1}$$

где

$$m_1 = \frac{1}{2}(MS_v + NS_u), \quad m_1' = \frac{1}{2}(MS_{v'} + NS_{u'}),$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}(MS_v - NS_u), \quad m_2' = -\frac{1}{2}(MS_{v'} - NS_{u'}), \tag{2,2}$$

$$m_3 = \frac{1}{2}(MC_v - NC_u), \quad m_3' = -\frac{1}{2}(MC_{v'} + NC_{u'}),$$

$$m_4 = -\frac{1}{2}(MC_v + NC_u), \quad m_4' = \frac{1}{2}(MC_{v'} - NC_{u'}),$$

$$M = \beta\mu^2 - \delta\gamma^2, \quad N = \beta\mu^2 + \delta\gamma^2, \quad u = \beta - \delta,$$

$$v = \beta + \delta, \quad u' = \beta' - \delta' = -\frac{u}{\beta\delta}, \quad v' = \beta' + \delta' = \frac{v}{\beta\delta}. \tag{2,3}$$

Пользуясь известными формулами гиперболической тригонометрии

$$2S_\alpha C_\beta = S_{\alpha+\beta} + S_{\alpha-\beta}, \quad 2C_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} - S_{\alpha-\beta},$$
$$2S_\alpha S_\beta = C_{\alpha+\beta} - C_{\alpha-\beta}, \quad 2C_\alpha C_\beta = C_{\alpha+\beta} + C_{\alpha-\beta}, \tag{2,4}$$

можно установить, что

$$-m_3 m_3' = m_2 m_2' + \frac{1}{4}\{M^2 C_{v-v'} - N^2 C_{u+u'} + MN(C_{v+u'} - C_{u-v'})\},$$

$$-m_4 m_4' = m_1 m_1' + \frac{1}{4}\{M^2 C_{v-v'} - N^2 C_{u+u'} - MN(C_{v+u'} - C_{u-v'})\}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставляя $m_3 m_3'$ и $m_4 m_4'$ из этих равенств в (2,1), найдем:

$$\tilde{D}(t) = (\beta\delta + 1)\, m_1 m_1' + \left(\frac{1}{\beta\delta} + 1\right) m_2 m_2' + \\ + \frac{1}{2}\{M^2 C_{v-v'} - N^2 C_{u+u'} + 4\beta\delta\mu^2\gamma^2\}. \tag{2,5}$$

Исследуем знак фигурной скобки. Так как $4\beta\delta\mu^2\gamma^2 = N^2 - M^2$, то выражение в фигурной скобке можно переписать в виде

$$\{\ldots\} = t^2 h^2 \left\{ M^2 (v - v')^2 \frac{C_{v-v'} - 1}{[(v-v')\, th[}^2 - N^2 (u + u')^2 \frac{C_{u+u'} - 1}{[(u+u')\, th]^2} \right\}.$$

Вычислим разность коэффициентов, стоящих перед дробями в фигурной скобке, имеем (см. (1,10) и (0,4)):

$$M^2 (v - v')^2 - N^2 (u + u')^2 = \\ = \frac{4 a_{11}^4}{\beta\delta} (\beta\delta - 1)^2 (\beta^2 - \delta^2)^2 (2\lambda - \beta^2 - \delta^2)(\lambda^2 - \beta^2\delta^2).$$

На основании соотношений (0,4) произведение двух последних круглых скобок в этом выражении может быть выражено через упругие постоянные:

$$(2\lambda - \beta^2 - \delta^2)(\lambda^2 - \beta^2\delta^2) = -\frac{a_{66}}{a_{11}} \frac{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}{a_{11}^2}.$$

По свойству упругих постоянных [4] это произведение строго положительно. Отсюда следует, что, поскольку функция $(\mathrm{ch}\,\alpha - 1)/\alpha^2$ — монотонно возрастает с ростом $|\alpha|$, $a|v - v'| > |u + u'|$, выражение в фигурной скобке при значениях $t \neq 0$ строго больше нуля. Пользуясь монотонностью функции $\mathrm{sh}\,\alpha/\alpha$ легко установить также, что $m_1 m_1' > 0$, $m_2 m_2' > 0$ при $t \neq 0$. Таким образом, $\tilde{D}(t) > 0$ при $t \neq 0$. Разлагая функцию $\tilde{D}(t)$ в ряд Маклорена, находим:

$$\tilde{D}(t) = a_2 t^2 + a_4 t^4 + \ldots,$$
$$a_2 = 4 h^2 \left(\beta\delta + \frac{1}{\beta\delta}\right) a_{11}^4 (\beta^2 - \delta^2)(2\lambda - \beta^2 - \delta^2)(\lambda^2 - \beta^2\delta^2) > 0. \tag{2,6}$$

Остальные коэффициенты в разложении (2,6) мы не вычисляем, ибо в дальнейшем они нам не понадобятся.

Исследуем теперь поведение определителей $\tilde{\Gamma}_j$, $\tilde{\chi}_j$, $\tilde{G}_j$, $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$ в окрестности точки $t = 0$. С целью сокращения дальнейших вычислений введем в рассмотрение четыре вспомогательных определителя $\eta_j(t, y)$; $\eta_j(t, y)$ — определитель, получающийся из определителя $\tilde{D}(t)$, если в нем заменить j-ую строку на строку A, B, C, D, где A, B, C, D суть функции, зависящие от t и y. Заменяя в η_j строку A, B, C, D на строки (1,21), предварительно опустив в них все множители i, стоящие перед элементами второй, третьей и пятой строк, мы получим соответственно определители $\tilde{\Gamma}_j$, $\tilde{\chi}_j$, $\tilde{G}_j$, $\tilde{V}_j$ $\tilde{W}_j$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Введение определителей η_j позволяет свести исследование сорока определителей $\tilde{\Gamma}_j$, $\tilde{\chi}_j$, $\tilde{G}_j$, $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$, $\tilde{\Gamma}'_j$, $\tilde{\chi}'_j$, $\tilde{G}'_j$, $\tilde{V}'_j$, $\tilde{W}'_j$ к исследованию лишь четырех определителей η_j. При исследовании определителей $\tilde{G}_j$, $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$ удобно положить $A = at$, $B = bt$, $C = ct$, $D = dt$, тогда

$$\eta_j(t, y) = t \cdot \Theta_j(t, y), \tag{2,7}$$

где $\Theta_j(t, y)$ — новый определитель. Разложим функцию $\eta_j(t, y)$ в ряд Маклорена по переменной t, имеем

$$\eta_j(t, y) = \eta_j(0, y) + \eta'_j(0, y)\, t + \frac{1}{2}\eta''_j(0, y)\, t^2 + \ldots = \tag{2,8}$$

$$= \Theta_j(0, y)\, t + \Theta'_j(0, y)\, t^2 + \ldots$$

Далее, легко проверить, что $\Theta_j(0, y) = 0$, откуда следует, что

$$\frac{\eta_j}{\tilde{D}(t)} = \sigma_0^{(j)} + \sigma_1^{(j)} t + \sigma_2^{(j)} t^2 + \ldots, \quad \sigma_s^{(j)} = \sigma_s^{(j)}(y), \tag{2,9}$$

т. е. точка $t = 0$ не является особой для подинтегральных функций в интегралах, выражающих напряжения.

Переходим к исследованию поведения в окрестности точки $t = 0$ подинтегральных функций в интегралах, выражающих смещения. Произведя элементарные вычисления, нетрудно показать, что

$$\eta_j(0, y) = 0,$$

$$\eta'_1(0, y) = -\eta'_3(0, y) = h(\delta^2\gamma^2 - \beta^2\mu^2)\left(1 + \frac{1}{\beta\delta}\right)(\gamma\delta A_0 - \beta\mu C_0), \tag{2,10}$$

$$\eta'_2(0, y) = -\eta'_4(0, y) = 2h\beta\delta(\mu^2 - \gamma^2)(\mu B_0 - \gamma D_0),$$

где A_0, B_0, C_0, D_0 — значения функций A, B, C, D при $t = 0$. Из (1,21) и сделанного выше замечания относительно множителя $i = \sqrt{-1}$ следует, что

	A_0	B_0	C_0	D_0
$\tilde{\Gamma}_j$	0	γ	0	μ
$\tilde{\chi}_j$	$\beta\mu$	0	$\delta\gamma$	0

откуда видно, что и в этом случае

$$\eta_j(t, y) = \chi_2^{(j)} t^2 + \chi_3^{(j)} t^3 + \ldots, \tag{2,11}$$

т. е. точка $t = 0$ не является особой для подинтегральных функций и в интегралах, выражающих компоненты вектора смещения.

Опираясь на принятое условие (1,1) так же, как в [4], можно показать, что интегралы (1,23) сходятся и дают решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., 1957.
2. Шепеленко В. Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропной полосы. Ученые записки ТГУ, № 155, 1962.
3. Шепеленко В. Н. Определение напряжений в двойной ортотропной полосе. Ученые записки ТГУ, № 36, 1960.
4. Шепеленко В. Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропной и ортотропной полос. Кандидатская диссертация, 1960.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО БЕЗВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Е. Д. ТОМИЛОВ

В работе [1] показано, что существует класс точных решений уравнений плоского безвихревого движения газа, характеризующийся тем, что для него функция тока представима в виде

$$\Psi = \sum_{\nu=0}^{2n+1} \Theta^{\nu} P_{\nu}(\sigma),$$

где n — целое неотрицательное число, Θ — угол наклона скорости к оси x, а функции P_{ν} зависят только от переменной Чаплыгина σ —

$$\sigma = \int_{\tau}^{\tau_*} \frac{(1-\tau)^3}{2\tau}\, d\tau;$$

здесь

$$\beta = \frac{1}{\varkappa - 1}, \quad \tau = \frac{v^2}{v_m^2}, \quad \tau_* = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} = \frac{1}{2\beta + 1},$$

$\varkappa$ — показатель адиабаты, v — скорость, v_m — предельная скорость в газе, τ_* — значение τ, отвечающее скорости звука.

При этом функции $P_{\nu}(\sigma)$, а также полученные в указанной работе выражения координат точек физической плоскости течения выражаются с помощью функций:

$$F_{2i-1} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} K F_{2i-2}\, d\sigma, \qquad F_{2i} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F_{2i-1}\, d\sigma, \tag{1}$$

$$G_{2i-1} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} K G_{2i-2}\, d\sigma, \qquad G_{2i} = \int_{\sigma_0}^{\sigma} G_{2i-1}\, d\sigma \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

причем

$$F_0 = 1, \quad G_0 = \sigma - \sigma_0,$$

σ_0 есть значение σ при произвольно выбранном значении $\tau = \tau_0$, а K есть известная функция Чаплыгина:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$K = \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}.$$

Функции (1) и (2) — одни и те же для всех задач, поэтому желательно иметь их таблицы. Ниже такие таблицы даются при $i = 1, 2$. При этом было принято $\varkappa = 1{,}4$, $\sigma_0 = 0$; последнее удобно для расчета околозвуковых движений данного типа. Для принятых значений входной переменной τ даны также значения $G_0 = \sigma$ и переменной q, входящей в формулы для координат и равной

$$q = (1 - \tau)^{-5/2}.$$

Функции σ, F_1, F_2 и G_1 вычислены по указанным в [1] формулам для всего возможного диапазона значений τ. Функции G_2, F_3, F_4 и G_4 вычислялись путем разложения каждой функции в ряд Тейлора в окрестности предыдущей точки, имеющейся в таблице, если идти от точки к точке в обе стороны от скорости звука, то есть от $\tau = 1/6 = 0{,}16666\ldots$ и $\sigma = 0$. Эти вычисления были проделаны для всей дозвуковой области, в сверхзвуковой же они были доведены лишь до $\tau = 0{,}40$, ибо, начиная с этого значения, интервал между последовательными значениями τ, принятыми в таблице, был увеличен в пять раз, что сделало затруднительным применение данного способа. Функция же G_3, как и G_1, была определена по общей для всех G с нечетными индексами формуле (3.6) работы [1].

Упомянутые ряды Тейлора можно взять в виде

$$(G_2)_{i+1} = (G_2)_i + h(G_1)_i + \frac{h^2}{2!}(K\sigma)_i + \frac{h^3}{3!}(K'\sigma + K)_i +$$

$$+ \frac{h^4}{4!}(K''\sigma + 2K')_i + \frac{h^5}{5!}(K'''\sigma + 3K'')_i + \ldots.$$

$$(F_3)_{i+1} = (F_3)_i + h(KF_2)_i + \frac{h^2}{2!}(K'F_2 + KF_1)_i + \frac{h^3}{3!}(K''F_2 + 2K'F_1 + K^2)_i +$$

$$+ \frac{h^4}{4!}(K'''F_2 + 3K''F_1 + 4K'K)_i + \frac{h^5}{5!}(K^{(IV)}F_2 + 4K'''F_1 + 7K''K + 4K'^2)_i + \ldots$$

$$(F_4)_{i+1} = (F_4)_i + h(F_3)_i + \frac{h^2}{2!}(KF_2)_i + \frac{h^3}{3!}(K'F_2 + KF_1)_i +$$

$$+ \frac{h^4}{4!}(K''F_2 + 2K'F_1 + K^2)_i + \frac{h^5}{5!}(K'''F_2 + 3K''F_1 + 4K'K)_i + \ldots$$

$$(G_4)_{i+1} = (G_4)_i + h(G_3)_i + \frac{h^2}{2!}(KG_2)_i + \frac{h^3}{3!}(K'G_2 + KG_1)_i +$$

$$+ \frac{h^4}{4!}(K''G_2 + 2K'G_1 + K^2\sigma)_i + \frac{h^5}{5!}(K'''G_2 + 3K''G_1 + 4K'K\sigma + K^2)_i +$$

$$+ \frac{h^6}{6!}(K^{(IV)}G_2 + 4K'''G_1 + 7K''K\sigma + 4K'^2\sigma + 6KK')_i + \ldots.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

τ	q	σ	F_1	G_1	E_2	G_2	F_3	G_3	F_4	G_4
0	1	∞	∞							
0,001	1,00250	2,36369	2,22664	2,77041	2,49268	2,15538	1,86549	1,25364	1,04929	0,582033
0,005	1,01261	1,56396	1,42700	1,20004	1,03174	0,610381	0,498938	0,231495	0,181718	0,0700738
0,010	1,02544	1,22360	1,08693	0,726040	0,603928	0,285909	0,224082	0,0836647	0,0628100	0,0195663
0,015	1,03851	1,02706	0,890871	0,505402	0,409575	0,165533	0,125352	0,0401145	0,0290982	$7,79005\cdot10^{-3}$
0,020	1,05180	0,889387	0,753880	0,374130	0,296361	0,105210	0,772104	0,0217741	0,0153340	$3,62522\cdot10^{-3}$
0,025	1,06534	0,783960	0,649340	0,286661	0,222396	0,0704775	0,0501885	0,0126701	$8,68728\cdot10^{-3}$	$1,84175\cdot10^{-3}$
0,030	1,07912	0,698921	0,565397	0,224419	0,170749	0,0487994	0,0337357	$7,70012\cdot10^{-3}$	$5,15017\cdot10^{-3}$	$9,88684\cdot10^{-4}$
0,035	1,09315	0,627944	0,495731	0,178198	0,133094	0,0345421	0,0231792	$4,81560\cdot10^{-3}$	$3,14626\cdot10^{-3}$	$5,50500\cdot10^{-4}$
0,040	1,10744	0,567254	0,436570	0,142841	0,104805	0,0248197	0,0161587	$3,06987\cdot10^{-3}$	$1,96127\cdot10^{-3}$	$3,14188\cdot10^{-4}$
0,045	1,12200	0,514415	0,385485	0,115210	0,0830890	0,0180150	0,0113701	$1,98171\cdot10^{-3}$	$1,23904\cdot10^{-3}$	$1,82300\cdot10^{-4}$
0,050	1,13682	0,467764	0,340817	0,0932723	0,0661494	0,0131610	$8,04406\cdot10^{-3}$	$1,28905\cdot10^{-3}$	$7,89274\cdot10^{-4}$	$1,06878\cdot10^{-4}$
0,055	1,15192	0,426114	0,301386	0,0756473	0,0527775	$9,64982\cdot10^{-3}$	$5,70422\cdot10^{-3}$	$8,41590\cdot10^{-4}$	$5,04901\cdot10^{-4}$	$6,30078\cdot10^{-5}$
0,060	1,16729	0,388592	0,266321	0,0613622	0,0421281	$7,08408\cdot10^{-3}$	$4,04373\cdot10^{-3}$	$5,49670\cdot10^{-4}$	$3,23257\cdot10^{-4}$	$3,71998\cdot10^{-5}$
0,065	1,18296	0,354531	0,234965	0,0497098	0,0335923	$5,19601\cdot10^{-3}$	$2,85898\cdot10^{-3}$	$3,58096\cdot10^{-4}$	$2,06513\cdot10^{-4}$	$2,19167\cdot10^{-5}$
0,070	1,19893	0,323414	0,206804	0,0401629	0,0267204	$3,80046\cdot10^{-3}$	$2,01153\cdot10^{-3}$	$2,32061\cdot10^{-4}$	$1,31277\cdot10^{-4}$	$1,28426\cdot10^{-5}$
0,075	1,21519	0,294832	0,181436	0,0323199	0,0211733	$2,76672\cdot10^{-3}$	$1,40534\cdot10^{-3}$	$1,49193\cdot10^{-4}$	$8,28114\cdot10^{-5}$	$7,46060\cdot10^{-6}$
0,080	1,23177	0,268454	0,158537	0,0258693	0,0166906	$2,00093\cdot10^{-3}$	$9,72770\cdot10^{-4}$	$9,48957\cdot10^{-5}$	$5,16947\cdot10^{-5}$	$4,28268\cdot10^{-6}$
0,085	1,24867	0,244010	0,137843	0,0205657	0,0130694	$1,43473\cdot10^{-3}$	$6,65548\cdot10^{-4}$	$5,95444\cdot10^{-5}$	$3,18408\cdot10^{-5}$	$2,42092\cdot10^{-6}$
0,090	1,26589	0,221277	0,119137	0,0162128	0,0101495	$1,01773\cdot10^{-3}$	$4,48905\cdot10^{-4}$	$3,67410\cdot10^{-5}$	$1,92891\cdot10^{-5}$	$1,34256\cdot10^{-6}$
0,095	1,28345	0,200066	0,102238	0,0126517	$7,80279\cdot10^{-3}$	$7,12467\cdot10^{-4}$	$2,97610\cdot10^{-4}$	$2,22134\cdot10^{-5}$	$1,14514\cdot20^{-5}$	$7,27326\cdot10^{-7}$
0,100	1,30135	0,180220	0,0869953	$9,75234\cdot10^{-3}$	$5,92599\cdot10^{-3}$	$4,90838\cdot10^{-4}$	$1,93267\cdot10^{-4}$	$1,31046\cdot10^{-5}$	$6,63442\cdot10^{-6}$	$3,83034\cdot10^{-7}$
0,105	1,31960	0,161603	0,0732802	$7,40732\cdot10^{-3}$	$4,43499\cdot10^{-3}$	$3,31663\cdot10^{-4}$	$1,22432\cdot10^{-4}$	$7,50607\cdot10^{-6}$	$3,73230\cdot10^{-6}$	$1,94949\cdot10^{-7}$
0,110	1,33821	0,144098	0,0609841	$5,52694\cdot10^{-3}$	$3,26077\cdot10^{-3}$	$2,18911\cdot10^{-4}$	$7,52778\cdot10^{-5}$	$4,14897\cdot10^{-6}$	$2,02642\cdot10^{-6}$	$9,52096\cdot10^{-8}$
0,115	1,35719	0,127605	0,0500139	$4,03574\cdot10^{-3}$	$2,34630\cdot10^{-3}$	$1,40420\cdot10^{-4}$	$4,46391\cdot10^{-5}$	$2,19630\cdot10^{-6}$	$1,05376\cdot10^{-6}$	$4,42222\cdot10^{-8}$
0,120	1,37655	0,112036	0,0402898	$2,86974\cdot10^{-3}$	$1,64416\cdot10^{-3}$	$8,69604\cdot10^{-5}$	$2,53215\cdot10^{-5}$	$1,10255\cdot10^{-6}$	$5,19684,10^{-7}$	$1,93110\cdot10^{-8}$
0,125	1,39630	0,0973122	0,0317429	$1,97427\cdot10^{-3}$	$1,11470\cdot10^{-3}$	$5,15416\cdot10^{-5}$	$1,35915\cdot10^{-5}$	$5,18068\cdot10^{-7}$	$2,39906\cdot10^{-7}$	$7,8081\cdot10^{-9}$
0,130	1,41645	0,0833671	0,0243137	$1,30231\cdot10^{-3}$	$7,24651\cdot10^{-4}$	$2,88886\cdot10^{-5}$	$6,80064\cdot10^{-6}$	$2,23797\cdot10^{-7}$	$1,01822\cdot10^{-7}$	$2,8626\cdot10^{-9}$
0,135	1,43701	0,0701398	0,0179507	$8,13143\cdot10^{-4}$	$4,45913\cdot10^{-4}$	$1,50506\cdot10^{-5}$	$3,10464\cdot10^{-6}$	$8,6616\cdot10^{-8}$	$3,87200\cdot10^{-8}$	$9,2338\cdot10^{-10}$
0,140	1,45799	0,0575765	0,0126093	$4,71292\cdot10^{-4}$	$2,54710\cdot10^{-4}$	$7,10123\cdot10^{-6}$	$1,25178\cdot10^{-6}$	$2,8885\cdot10^{-8}$	$1,26874\cdot10^{-8}$	$2,5034\cdot10^{-10}$
0,145	1,47940	0,0456290	$8,25110\cdot10^{-3}$	$2,45649\cdot10^{-4}$	$1,30841\cdot10^{-4}$	$2,90870\cdot10^{-6}$	$4,22819\cdot10^{-7}$	$7,7898\cdot10^{-9}$	$3,36207\cdot10^{-9}$	$5,2993\cdot10^{-11}$
0,150	1,50125	0,0342542	$4,84256\cdot10^{-3}$	$1,08777\cdot10^{-4}$	$5,71005\cdot10^{-5}$	$9,58763\cdot10^{-7}$	$1,08824\cdot10^{-7}$	$1,5163\cdot10^{-9}$	$6,43031\cdot10^{-10}$	$7,6686\cdot10^{-12}$
0,155	1,52356	0,0234130	$2,35497\cdot10^{-3}$	$3,63380\cdot10^{-5}$	$1,87987\cdot10^{-5}$	$2,17049\cdot10^{-7}$	$1,75080\cdot10^{-8}$	$1,67959\cdot10^{-10}$	$6,99907\cdot10^{-11}$	$5,74962\cdot10^{-13}$
0,160	1,54633	0,0130701	$7,63612\cdot10^{-4}$	$6,61031\cdot10^{-6}$	$3,37018\cdot10^{-6}$	$2,18520\cdot10^{-8}$	$1,02274\cdot10^{-9}$	$5,51687\cdot10^{-12}$	$2,25898\cdot10^{-12}$	$1,04387\cdot10^{-14}$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

τ	q	ε	F_1	G_1	F_2	G_2	F_3	G_3	F_4	G_4
0,1065	1,56958	$3,19363\cdot10^{-3}$	$4,74193\cdot10^{-5}$	$1,00796\cdot10^{-7}$	$5,06441\cdot10^{-8}$	$8,07115\cdot10^{-11}$	$9,59044\cdot10^{-13}$	$1,27316\cdot10^{-15}$	$5,12251\cdot10^{-16}$	$5,82799\cdot10^{-19}$
0,1066...	1,57744	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1170	1,59333	$-6,24560\cdot10^{-3}$	$1,88559\cdot10^{-4}$	$-7,87657\cdot10^{-7}$	$-3,90006\cdot10^{-7}$	$1,22265\cdot10^{-9}$	$-2,95114\cdot10^{-11}$	$7,71619\cdot10^{-14}$	$3,05057\cdot10^{-14}$	$6,83860\cdot10^{-17}$
0,1175	1,61758	$-0,0152742$	$1,17213\cdot10^{-3}$	$1,20323\cdot10^{-5}$	$-5,87107\cdot10^{-6}$	$4,52737\cdot10^{-8}$	$-2,77514\cdot10^{-9}$	$1,78704\cdot10^{-11}$	$6,94199\cdot10^{-12}$	$3,83430\cdot10^{-14}$
0,1180	1,64235	$-0,0239165$	$2,98590\cdot10^{-3}$	$-4,82243\cdot10^{-5}$	$-2,31878\cdot10^{-5}$	$2,81590\cdot10^{-7}$	$-2,80574\cdot10^{-8}$	$2,84881\cdot10^{-10}$	$1,08736\cdot10^{-10}$	$-9,47379\cdot10^{-13}$
0,1185	1,66765	$-0,0321948$	$5,62006\cdot10^{-3}$	$1,22768\cdot10^{-4}$	$-5,81685\cdot10^{-5}$	$9,56316\cdot10^{-7}$	$-1,33127\cdot10^{-7}$	$1,83220\cdot10^{-9}$	$6,87121\cdot10^{-10}$	$-8,1177\cdot10^{-12}$
0,1190	1,69351	$0,0401296$	$9,06703\cdot10^{-3}$	$2\cdot48049\cdot10^{-4}$	$-1,15807\cdot10^{-4}$	$2,38655\cdot10^{-6}$	$-4,29700\cdot10^{-7}$	$7,42184\cdot10^{-9}$	$2,73483\cdot10^{-9}$	$-4,0565\cdot10^{-11}$
0,1195	1,71993	$0,0477400$	$0,0133213$	$4,35583\cdot10^{-4}$	$-2,00377\cdot10^{-4}$	$4,94000\cdot10^{-6}$	$-1,09771\cdot10^{-6}$	$2,27097\cdot10^{-8}$	$8,22149\cdot10^{-9}$	$-1,46116\cdot10^{-10}$
0,200	1,74693	$0,0550434$	$0,0183793$	$6,96138\cdot10^{-4}$	$-3,15524\cdot10^{-4}$	$9,01865\cdot10^{-6}$	$-2,39654\cdot10^{-6}$	$5,7553\cdot10^{-8}$	$2,04698\cdot10^{-8}$	$-4,2245\cdot10^{-10}$
0,221	1,80274	$-0,0687929$	$0,0309012$	$-1,47629\cdot10^{-3}$	$-6,49489\cdot10^{-4}$	$2,34570\cdot10^{-5}$	$-8,37606\cdot10^{-6}$	$2,54775\cdot10^{-7}$	$8,74521\cdot10^{-8}$	$-2,2876\cdot10^{-9}$
0,222	1,86107	$-0,0814942$	$0,0466381$	$-2,66354\cdot10^{-3}$	$-1,13720\cdot10^{-3}$	$4,91811\cdot10^{-5}$	$-2,23538\cdot10^{-5}$	$8,16138\cdot10^{-7}$	$2,70314\cdot10^{-7}$	$-8,4933\cdot10^{-9}$
0,223	1,92209	$0,0932480$	$0,0656205$	$-4,32668\cdot10^{-3}$	$-1,79230\cdot10^{-3}$	$8,96386\cdot10^{-5}$	$-5,00633\cdot10^{-5}$	$2,11874\cdot10^{-6}$	$6,76991\cdot10^{-7}$	$-2,46734\cdot10^{-8}$
0,224	1,98594	$-0,104142$	$0,0879013$	$-6,53023\cdot10^{-3}$	$2,62398\cdot10^{-3}$	$1,48106\cdot10^{-4}$	$9,91593\cdot10^{-5}$	$4,74720\cdot10^{-6}$	$1,46298\cdot10^{-6}$	$-6,03550\cdot10^{-8}$
0,225	2,05280	$0,114253$	$0,113555$	$9,33606\cdot10^{-3}$	$-3,63796\cdot10^{-3}$	$2,27610\cdot10^{-4}$	$1,79376\cdot10^{-4}$	$9,54113\cdot10^{-6}$	$2,83522\cdot10^{-6}$	$-1,30037\cdot10^{-7}$
0,226	2,12286	$0,123649$	$0,142678$	$-0,0128046$	$-4,83731\cdot10^{-3}$	$3,30886\cdot10^{-4}$	$-3,02687\cdot10^{-4}$	$1,76431\cdot10^{-5}$	$5,05390\cdot10^{-6}$	$-2,54165\cdot10^{-7}$
0,227	2,19631	$-0,132390$	$0,175385$	$0,0169962$	$6,22301\cdot10^{-3}$	$4,60360\cdot10^{-4}$	$-4,83478\cdot10^{-4}$	$3,05478\cdot10^{-5}$	$8,43265\cdot10^{-6}$	$-4,59975\cdot10^{-7}$
0,228	2,27336	$0,140529$	$0,211814$	$-0,0219716$	$7,79446\cdot10^{-3}$	$6,18154\cdot10^{-4}$	$7,38734\cdot10^{-4}$	$5,01534\cdot10^{-5}$	$1,33375\cdot10^{-5}$	$-7,82179\cdot10^{-7}$
0,229	2,35426	$0,148115$	$0,252122$	$0,0277932$	$9,54980\cdot10^{-3}$	$8,06090\cdot10^{-4}$	$1,08826\cdot10^{-3}$	$7,88158\cdot10^{-5}$	$2,01851\cdot10^{-5}$	$-1,26350\cdot10^{-6}$
0,230	2,43924	$-0,155189$	$0,296489$	$0,0345258$	$0,0114862$	$1,02571\cdot10^{-3}$	$-1,55492\cdot10^{-3}$	$1,19408\cdot10^{-4}$	$2,94397\cdot10^{-5}$	$-1,95506\cdot10^{-6}$
0,231	2,52858	$0,161792$	$0,345117$	$-0,0422371$	$-0,0136002$	$1,27828\cdot10^{-3}$	$2,16492\cdot10^{-3}$	$1,75383\cdot10^{-4}$	$4,16106\cdot10^{-5}$	$-2,91665\cdot10^{-6}$
0,232	2,62257	$-0,167958$	$0,398232$	$-0,0509987$	$-0,0158876$	$1,56485\cdot10^{-3}$	$2,94817\cdot10^{-3}$	$2,50847\cdot10^{-4}$	$5,72486\cdot10^{-5}$	$-4,21682\cdot10^{-6}$
0,233	2,72153	$-0,173718$	$0,456086$	$0,0608866$	$-0,0183439$	$1,88621\cdot10^{-3}$	$-3,93858\cdot10^{-3}$	$3,50637\cdot10^{-4}$	$7,69426\cdot10^{-5}$	$-5,93295\cdot10^{-6}$
0,234	2,82579	$-0,179102$	$0,518959$	$-0,0719821$	$-0,0209642$	$2,24296\cdot10^{-3}$	$-5,17455\cdot10^{-3}$	$4,80409\cdot10^{-4}$	$1,01316\cdot10^{-4}$	$-8,15117\cdot10^{-6}$
0,235	2,93573	$-0,184135$	$0,587158$	$0,0843726$	$-0,0237436$	$2,63553\cdot10^{-3}$	$6,69946\cdot10^{-3}$	$6,46740\cdot10^{-4}$	$1,31024\cdot10^{-4}$	$-1,09662\cdot10^{-5}$
0,236	3,05176	$-0,188842$	$0,661026$	$0,0981522$	$-0,0266769$	$3,06416\cdot10^{-3}$	$-8,56218\cdot10^{-3}$	$8,57237\cdot10^{-4}$	$1,66749\cdot10^{-4}$	$1,44812\cdot10^{-5}$
0,237	3,17430	$-0,193244$	$0,740937$	$0,113423$	$-0,0297587$	$3,52894\cdot10^{-3}$	$-0,0108177$	$1,12067\cdot10^{-3}$	$2,09199\cdot10^{-4}$	$-1,88074\cdot10^{-5}$
0,238	3,30385	$-0,197362$	$0,827308$	$0,130296$	$-0,0329837$	$4,02984\cdot10^{-3}$	$-0,0135281$	$1,44712\cdot10^{-3}$	$2,59101\cdot10^{-4}$	$-2,40639\cdot10^{-5}$
0,239	3,44093	$-0,201215$	$0,920593$	$0,148891$	$-0,0363465$	$4,56670\cdot10^{-3}$	$-0,0167628$	$1,84812\cdot10^{-3}$	$3,17204\cdot10^{-4}$	$-3,03774\cdot10^{-5}$
0,240	3,58610	$-0,204820$	$1,02130$	$0,169340$	$-0,0398420$	$5,13923\cdot10^{-3}$	$-0,0206002$	$2,33691\cdot10^{-3}$	$3,84270\cdot10^{-4}$	$-3,78815\cdot10^{-5}$
0,245	4,45752	$-0,219633$	$1,65767$	$0,304956$	$-0,0591246$	$8,52148\cdot10^{-3}$				
0,250	5,65685	$-0,230191$	$2,59290$	$0,515901$	$-0,0809613$	$0,0127105$				
0,255	7,36154	$-0,237630$	$3,99053$	$0,843485$	$-0,104782$	$0,0176043$				
0,260	9,88212	$-0,242774$	$6,14056$	$-1,36069$	$-0,130084$	$0,0230870$				
0,265	13,7984	$-0,246238$	$9,59014$	$-2,20503$	$-0,156427$	$0,0290386$				
0,270	20,2860	$-0,248483$	$15,4585$	$3,65774$	$-0,183428$	$0,0353409$				
0,275	32,0000	$-0,249862$	$26,2943$	$-6,35919$	$-0,210755$	$0,0418815$				
0,280	55,9017	$-0,250645$	$48,9318$	$12,0264$	$-0,238119$	$0,0485560$				
0,285	114,755	$-0,251040$	$105,256$	$-26,1581$	$-0,256274$	$0,0552696$				
0,290	316,228	$-0,251202$	$301,264$	$-75,3861$	$-0,292009$	$0,0619387$				
0,295	1788,85	$-0,251247$	$1753,21$	$-440,170$	$-0,318148$	$0,0684921$				
1,000	∞	$-0,251251$	∞	∞	$-0,343552$	$0,0748734$				

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Здесь индексом i обозначено значение соответствующих функций в предыдущей точке таблицы, $h = \sigma_{i+1} - \sigma_i$, K', K'', ... есть производные от функции K по переменной σ.

Во избежание набегания ошибок при вычислениях функций с большими индексами, а также для получения достаточного числа верных знаков в околозвуковой области, вычисления пришлось вести с большой точностью. Поэтому значения исходной величины

$$z = \sqrt{1 - \tau},$$

через которую определяются функции σ, F_1 и F_2, а также значения q, функции K и ее производных определялись с 10-ю значащими цифрами, F_1, F_2 и G_1 — с 9-ю, G_2, F_3 с 8-ю, F_4 и G_4 — с 7-ю значащими цифрами, за исключением околозвуковой области, где верных получалось для всех функций лишь 5—7 цифр.

В таблице даны округленные до 6 значащих цифр значения всех функций, причем только тех, которые необходимы для определения координат в физической плоскости (например, не даются значения K и ее производных).

Для проверки было проделано вычисление функций F_3 и G_2 в околозвуковой области $0{,}135 \leqslant \tau \leqslant 0{,}185$ путем разложения в ряд Тейлора в окрестности $\sigma = 0$. Получилось практически полное совпадение результатов. Для крайних значений была проведена оценка остаточных членов рядов, взятых в форме Лагранжа. Оказалось, что при $\tau = 0{,}135$ ошибка в F_3 будет менее $0{,}24\%$ от истинного значения F_3, а при $\tau = 0{,}185$ — менее $0{,}38\%$, для функции же G_2 получились значительно более лучшие результаты, например, при $\tau = 0{,}185$ относительная ошибка будет менее $0{,}006\%$

ЛИТЕРАТУРА

1. Томилов Е. Д. Об одном виде точных частных решений уравнений плоского безвихревого движения газа. Прикл. матем. и механика, т. XXIV, в. 3, 1960.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ «ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ»

М. И. РЕДЬКОВ

В упомянутой работе, опубликованной в „Ученых записках" Томского госуниверситета № 36, 1960 г., на страницах 44—46 без доказательства приведены точные оценки функционала

$$I = \operatorname{Re} \ln \frac{w^{\lambda}\varphi'(w)^{1-\lambda}}{\varphi(w)^{\lambda}}$$

в классе $S_1(\beta)$, причем в указанных там формулах допущены некоторые ошибки. Эти результаты следует сформулировать так:

$$\max I = \begin{cases} I_1(a_1), \text{ если } \lambda > 1, \text{ а также если} \\ A(r) = B(a_1) \text{ при } 2/3 \leqslant \lambda < 1; \\ I_{12}(\rho_0, x), \text{ где } \rho_0 \text{ и } x \text{ определяются системой уравнений} \\ \dfrac{dI_{12}}{d\rho_0} = 0, \ln 1/\beta = p(x, r, \rho_0), \text{ если } A(r) \geqslant B(a_1), \ \beta \leqslant \left(\dfrac{|\rho_{0*}|}{r}\right)^{\frac{1+\rho_{0*}}{1-\rho_{0*}}} \\ \text{при } 2/3 \leqslant \lambda < 1; \\ I_3(\rho_0), \text{ где } \rho_0 \text{ определяется уравнением } \dfrac{dI_3}{d\rho_0} = 0, \text{ если} \\ \beta \geqslant \left(\dfrac{|\rho_{0*}|}{r}\right)^{\frac{1+\rho_{0*}}{1-\rho_{0*}}} \text{ при } \lambda < 1; \\ I_{12}(\rho_0, x), \text{ где } \rho_0 \text{ и } x \text{ определяются системой уравнений } \dfrac{dI_{12}}{d\rho_0} = 0, \\ \ln 1/\beta = q(x, r, \rho_0), \text{ если } A_1(r) \geqslant B_1(a_2), \ \beta \leqslant \left(\dfrac{\rho_{0*}}{r}\right)^{\frac{1+\rho_{0*}}{1-\rho_{0*}}} \\ \text{при } \lambda \leqslant \dfrac{2}{3}; \\ I_2(a_2), \text{ если } A_1(r) \leqslant B_1(a_2) \quad \text{при } \lambda \leqslant 2/3. \end{cases}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\min I = \begin{cases} I_1(a_1), \text{ если } \lambda \leqslant \dfrac{2}{3-a_1^2}; \\ I_4(\rho_{01}), \text{ если } \dfrac{2}{3-a_1^2} \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{2}{3-a_2^2}; \\ I_2(a_2), \text{ если } \dfrac{2}{3-a_2^2} \leqslant \lambda < 1, \text{ а также если} \\ \qquad A_1(r) \leqslant B_1(a_2) \text{ при } \lambda > 1; \\ I_{12}(\rho_0 x), \text{ где } \rho_0 \text{ и } x \text{ определяются системой } \dfrac{dI_{12}}{d\rho_0} = 0. \\ \qquad \ln 1/\beta = q(x, r, \rho_0), \text{ если } A_1(r) \geqslant B_1(a_1) \\ \beta \geqslant \left(\dfrac{\rho_{0**}}{r}\right)^{\frac{1+\rho_{0**}}{1-\rho_{0**}}} \text{ при } \lambda > 1 \\ I_3(\rho_0), \text{ где } \rho_0 \text{ определяется уравнением } \dfrac{dI_3}{d\rho_0} = 0, \\ \text{если } \beta \geqslant \left(\dfrac{\rho_{0**}}{r}\right)^{\frac{1+\rho_{0**}}{1-\rho_{0**}}} \text{ при } \lambda > 1. \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$I_1(a_1) = \ln\left[\left(\frac{a_1}{r}\right)^{1-2\lambda}\left(\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1+a_1}{1-a_1}\right)^{1-\lambda}\right],$$

$$I_2(a_2) = \ln\left[\left(\frac{a_2}{r}\right)^{1-2\lambda}\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1-a_2}{1+a_2}\right)^{1-\lambda}\right],$$

$$I_{12}(\rho_0, x) = \ln\left\{\left(\frac{\rho_0}{r}\right)^{2-3\lambda}\left[\frac{(1-x^2)^2}{\beta(1-r^2)(1-\rho_0^2)}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{4x^2}{1-x^2}}\right]^{1-\lambda}\right\},$$

$$I_3(\rho_0) = \ln\left[\left(\frac{1-\rho_0^2}{1-r^2}\right)^{1-\lambda}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{\lambda}\right] + \frac{1-\lambda}{\ln\beta}\left(\ln\frac{r}{\rho_0}\right)^2,$$

$$I_4(\rho_0) = \ln\left[\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{3\lambda-2}\left(\frac{1-r^2}{1-\rho_0^2}\right)^{1-\lambda}\frac{1}{\beta^{1-\lambda}}\right]$$

$$p(x, r, \rho_0) = \frac{1-x}{1+x}\ln\frac{r}{x} + \ln\frac{x(1+\rho_0)^2}{\rho_0(1+x)^2}$$

$$q(x, r, \rho_0) = \frac{1+x}{1-x}\ln\frac{r}{x} + \ln\frac{x(1-\rho_0)^2}{\rho_0(1+x)^2}$$

$$A(r) = \frac{4r}{(1-r)^2}, \quad A_1(r) = \frac{4r}{(1+r)^2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$B(a_1) = \frac{3\lambda - 2}{1 - \lambda} \cdot \frac{1 + a_1}{1 - a_1} - \frac{2a_1^2}{(1-a_1)^2}$$

$$B_1(a_2) = \frac{2 - 3\lambda}{1 - \lambda} \cdot \frac{1 - a_2}{1 + a_2} + \frac{2a_2^2}{(1+a_2)^2}$$

$$\rho_{0*} = \frac{2(1 - \lambda) - \sqrt{4 - 10\lambda + 7\lambda^2}}{\lambda}$$

$$\rho_{0**} = \frac{2(1 - \lambda) + \sqrt{4 - 10\lambda + 7\lambda^2}}{\lambda}$$

$$\rho_{01} = \sqrt{\frac{3\lambda - 2}{\lambda}}$$

$$a_1 = \frac{4\beta r}{[(1 + r) + \sqrt{(1 + r)^2 - 4\beta r}]^2}$$

$$a_2 = \frac{4\beta r}{[(1 - r) + \sqrt{(1 - r)^2 + 4\beta r}]^2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 163 Серия механико-математическая

ВАРИАЦИЯ НЕОДНОЛИСТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. А. АЛЕКСАНДРОВ

§ 1. На основе вариационной теоремы Г. М. Голузина [1] нами была установлена [2—4] для класса S^* голоморфных однолистных в единичном круге W функций $z = f(w)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, отображающих W на области, звездообразные относительно начала, вариационная формула

$$f_*(w) = f(w) + t\sum_{k=1}^{n}\left[A_k K(w, a_k) H(a_k) - \overline{A}_k K\left(w, \frac{1}{\overline{a}_k}\right)\overline{H(a_k)} - \right.$$
$$\left. - A_k L(w, a_k) - \overline{A}_k L\left(w, \frac{1}{a_k}\right)\right] + o(t). \tag{1}$$

Здесь a_k — произвольно фиксированная в W совокупность n точек $(n = 1, 2, \ldots)$, A_k — произвольные комплексные постоянные,

$$K(w, a) = f(w)\left[\frac{w + a}{w - a} + H(w)\right],$$
$$L(w, a) = f(w)\left[H(w)\frac{w+a}{w - a} + 1\right], \tag{2}$$
$$H(w) = \frac{w f'(w)}{f(w)}$$

и $o(t)$ — величина более высокого порядка малости, чем t $(t > 0)$, на любом замкнутом множестве из W.

Формула (1) позволяет получить, как будет показано в этой статье, вариации ряда других классов аналитических в W функций, не обязательно однолистных, например, таких как класс K голоморфных функций $h(w)$, $h(0) = 1$, имеющих в W положительную вещественную часть, класс U голоморфных в W функций $\omega(w)$, $\omega(0) = 0$, принимающих значения только из круга $|\omega| < 1$. Затем мы выведем формулу для вариации семейства функций $\varphi(w)$, подчиненных в W однолистной или неоднолистной мажоранте $F(w)$.

§ 2. Хорошо известно (см., например, [5], стр. 217), что если $f(w) \in S^*$, то

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{w f'(w)}{f(w)} \in K.$$

Докажем обратное, т. е. что отличное от тождественно нулевого решение уравнения

$$\frac{w f'(w)}{f(w)} = h(w), \quad f(0) = 0, \tag{3}$$

содержащего произвольно фиксированную функцию $h(w)$ класса K, является, с точностью до числового множителя, функцией класса S^*.

Действительно, разделив в (3) переменные и выполнив интегрирование вдоль пути, не проходящего через центр W и соединяющего некоторую точку w_0, $w_0 \neq 0$, с текущей точкой w, будем иметь

$$\ln \frac{f(w)}{f(w_0)} = \int_{w_0}^{w} \frac{h(w)}{w}\, dw.$$

Отсюда легко следует, что

$$\ln \frac{w_0 f(w)}{w f(w_0)} = \int_{w_0}^{w} \frac{h(w) - 1}{w}\, dw.$$

Устремив здесь w_0 к нулю, получим формулу

$$f(w) = w f'(0) \exp \int_0^w \frac{h(w) - 1}{w}\, dw, \tag{4}$$

из которой непосредственно заключаем, что $f(w)$ голоморфна в W и принимает нулевое значение только при $w = 0$.

Установим однолистность в W решения (4), рассуждая от противного. Пусть в W имеются хотя бы две различные точки w_1 и w_2, в которых $f(w_1) = f(w_2)$. В силу сказанного ранее, можно считать, что $w_1 w_2 \neq 0$. Из равенства

$$\frac{w_2}{w_1} = \exp \int_{w_2}^{w_1} \frac{h(w) - 1}{w}\, dw,$$

следующего из (4) с учетом $f(w_1) = f(w_2)$, выводим, что

$$\int_{w_2}^{w_1} \frac{h(w)}{w}\, dw = 0, \tag{5}$$

каков бы ни был путь, соединяющий w_1 и w_2 и не проходящий через $w = 0$. Возьмем в качестве такого пути кривую

$$w = w_1^t\, w_2^{1-t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вдоль нее интеграл

$$\int_{w_2}^{w_1} \frac{h(w)}{w}\, dw = (\ln w_1 - \ln w_2) \int_0^1 h(w_1^t\, w_2^{1-t})\, dt \neq 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

так как $\ln w_1 - \ln w_2 \neq 0$, ибо $w_1 \neq w_2$, и

$$\operatorname{Re} \int_0^1 h(w_1^t w_2^{1-t})\, dt = \int_0^1 \operatorname{Re} h(w_1^t w_2^{1-t})\, dt > 0,$$

поскольку $h(w) \in K$. Полученное противоречие с (5) доказывает однолистность функции (4).

Итак, решение (4) уравнения (3) голоморфно однолистно в W и, в силу (3), для него в W

$$\operatorname{Re} \frac{w f'(w)}{f(w)} > 0.$$

Значит, оно, при условии $f'(0) = 1$, принадлежит классу S^*.

Таким образом, формула

$$\frac{w f'(w)}{f(w)} = h(w), \quad f(w) \in S^*, \quad h(w) \in K,$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между S^* и K.

§ 3. Если функции $h(w) \in K$ в указанном смысле соответствует $f(w) \in S_*$, то в качестве варьированной функции $h_*(w)$ [по отношению к $h(w)$] можно взять

$$\frac{w f_*'(w)}{f_*(w)},$$

где $f_*(w)$ определяется формулами (1), (2). Путем элементарного подсчета находим, что

$$h_*(w) = h(w) + t \sum_{k=1}^{n} \left[A_k K_1(w, a_k) h(a_k) - \bar{A}_k K_1\left(w, \frac{1}{\bar{a}_k}\right) \overline{h(a_k)} - \right.$$

$$\left. - A_k L_1(w, a_k) - \bar{A}_k L_1\left(w, \frac{1}{\bar{A}_k}\right) \right] + o(t) \qquad (6)$$

и

$$K_1(w, a) = w \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w + a}{w - a} + h(w) \right], \qquad (7)$$

$$L_1(w, a) = w \frac{\partial}{\partial w} \left[h(w) \frac{w + a}{w - a} \right].$$

Теорема 1. Если $h(w) \in K$, то при малых положительных t и любом натуральном n функция (6), (7) также принадлежит классу K, каковы бы ни были комплексные постоянные A_k и фиксированные в W точки a_k.

§ 4. Основываясь на отображении

$$\omega = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ на круг $|w| < 1$, нетрудно убедиться в том, что взаимно однозначное соответствие между классами K и U можно установить по формуле

$$\omega(w) = \frac{h(w) - 1}{h(w) + 1}, \quad \omega(w) \in U, \quad h(w) \in K,$$

и, значит, в качестве функции сравнения $\omega_*(w)$ для $\omega(w)$ можно выбрать

$$\omega_*(w) = \frac{h_*(w) - 1}{h_*(w) + 1}.$$

Подставим сюда $h_*(w)$ из (6) и (7). После простых вычислений получим следующее разложение $\omega_*(w)$ по степеням t:

$$\omega_*(w) = \omega(w) + t \sum_{k=1}^{n} \left[A_k K_2(w, a_k) H_2(a_k) - \overline{A}_k K_2\left(w, \frac{1}{\overline{a}_k}\right) \overline{H_2(a_k)} - \right. \tag{8}$$

$$\left. - A_k L_2(w, a_2) - \overline{A}_k L_2\left(w, \frac{1}{\overline{a}_k}\right) \right] + o(t),$$

где

$$K_2(w, a) = w[1 - \omega(w)]^2 \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{w + a}{w - a} + H_2(w) \right],$$

$$L_2(w, a) = w[1 - \omega(w)]^2 \frac{\partial}{\partial w} \left[H_2(w) \frac{w + a}{w - a} \right], \tag{9}$$

$$H_2(w) = \frac{1 + \omega(w)}{1 - \omega(w)}. \tag{10}$$

Теорема 2. Если $\omega(w) \in U$, то при малых положительных t и любом натуральном n функция (8)—(10) также входит в класс U, каковы бы ни были комплексные постоянные A_k и фиксированные в W точки a_k.

Отметим, что применяя рассуждения, использованные в §§ 3, 4, можно получить вариационные формулы и в других классах аналитических функций, если имеется формула, устанавливающая взаимно однозначное соответствие такого класса и класса S^*.

§ 5. В качестве примера приложения формулы (8) — (10) рассмотрим вариацию функций $\varphi(w)$, подчиненных в W однолистной или неоднолистной мажоранте $F(w)$.

По определению подчиненности (см., например, [5], стр. 404) множество функций $\varphi(w)$, подчиненных $F(w)$, задается формулой

$$\varphi(w) = F(\omega(w))$$

при условии, что $\omega(w)$ — любая функция из U. Так как $\varphi_*(w) = F(\omega_*(w))$ также подчинена $F(w)$, если $\omega_*(w) \in U$, то выбрав в качестве $\omega_*(w)$ функцию (8) — (10), получим вариацию $\varphi_*(w)$ функции $\varphi(w)$, подчиненной $F(w)$, в виде:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\varphi_*(w) = \varphi(w) + tF'(\omega(w)) \sum_{k=1}^{n} \Big[A_k K_2(w, a_k) H_2(a_k) - \overline{A}_k K_2\left(w, \frac{1}{\overline{a}_k}\right) \overline{H_2(a_k)} - A_k L_2(w, a_k) - \overline{A}_k L_2\left(w, \frac{1}{\overline{a}_k}\right) \Big] + o(t). \tag{11}$$

Теорема 3. Если $\varphi(w)$ подчинена в W однолистной или неоднолистной мажоранте $F(w)$, то при малых положительных t и любом натуральном n функция, определяемая формулами (11), (9) и (10), также подчинена в W функции $F(w)$, каковы бы ни были комплексные постоянные A_k и фиксированные в W точки a_k.

Формулы (1), (2); (6), (7); (8), (9), (10); (11), (9), (10) дают возможность свести решения весьма общих внутренних задач, поставленных в соответствующих классах, к исследованию решений, вообще говоря, функциональных уравнений, которым удовлетворяют экстремальные (относительно таких задач) функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г. М. Метод вариаций в конформном отображении. 1. Математ. сборн., 19 (1946), 203—236.

2. Александров И. А. Некоторые свойства однолистных отображений. Докл. науч. конф. по теоретич. и прикл. вопр. математ. и механ., Томск, 1960.

3. Александров И. А. Вариация звездообразных функций. Вопросы математики, Изд. Томск. ун-та, 1961.

4. Александров И. А. Вариационные задачи для звездообразных однолистных в круге функций. Изв. АН АрССР, 14, № 4 (1961), 7—19.

5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.—Л., 1952.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Н. Н. Круликовский — Об изучении научного наследства и архива Ф. Э. Молина . . . 3
З. И. Клементьев — К теории измеримых функций относительно меры в булевой алгебре и к теории интеграла со значениями в полуупорядоченном К-пространстве . . . 6
З. И. Клементьев и Н. Ф. Жданова — К вопросу о применении функционального анализа к теории меры . . . 19
З. И. Клементьев — К определению длины кривой в абстрактном метрическом пространстве . . . 23
В. В. Черников — Ограничения для взаимного роста модуля функции и модуля производной в классе функций с вещественными коэффициентами . . . 26
Р. М. Малаховская — О включении операционного исчисления на основе одностороннего преобразования Лапласа в теорию обобщенных функций . . . 28
М. И. Редьков — Относительно области значений одного функционала в классе S . . . 44
С. Л. Крушкаль — О полной вариации функции и длине кривой . . . 48
С. Л. Крушкаль — О некоторых теоремах типа теоремы Фату . . . 54
П. П. Куфарев — О вариационной формуле Г. М. Голузина . . . 58
П. П. Куфарев, В. Г. Пряжинская — Об одной системе интегральных уравнений в теории движения грунтовых вод . . . 63
П. И. Трофимов — О композиционных признаках существования нормальных делителей и подгрупп у групп . . . 73
П. И. Трофимов — О признаках непростоты конечных групп . . . 75
В. А. Белоногов — О некоторых П-свойствах групп . . . 78
Л. П. Усольцев — Конечные группы, все подгруппы которых, кроме одного класса, — абелевы . . . 89
В. И. Машанов — Некоторые вопросы аналитической геометрии пространства Лобачевского . . . 94
Г. И. Назаров — Решение вихревой задачи в магнитном поле, параллельном скорости движения сжимаемой жидкости . . . 106
Г. И. Назаров — О точном аналитическом решении уравнения плоского сверх-звукового газа . . . 115
Г. И. Назаров — О точном общем решении осесимметричной задачи несжимаемой жидкости . . . 125
Г. И. Назаров — Приближенное решение задачи о сверхзвуковом течении идеального газа . . . 133
В. Н. Шепеленко — Вторая основная задача плоской теории упругости для двойной ортотропной полосы . . . 139
Е. Д. Томилов — Таблицы функций для одного вида точных частных решений уравнений плоского безвихревого движения газа . . . 149
М. И. Редьков — Поправка к статье «Область значений одного функционала на некоторых классах ограниченных однолистных функций» . . . 152
И. А. Александров — Вариация неоднолистных аналитических функций . 155

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Редактор издательства М. И. Волкова

Корректоры Р. И. Андель, Т. А. Никифорова

К301415. Сдано в набор 21/XII-62 г. Подписано к печати 15/VI-63 г.
Объем 10 п. л. + 2 вклейки; 5 бум. л.; 13,7 уч.-изд. л.
Формат бумаги 70×108 1/16. Заказ 6373. Тираж 500.
Цена 96 коп.; в переплете 1 руб. 11 коп.
Издательство Томского университета, пр. Ленина, 34.

Типография № 1 Полиграфиздата, Томск, Советская, 47.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru
787641
Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00930226