РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ
ИМ. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

VIII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ЛАВРЕНТЬЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

посвященная 115-летию академика М. А. Лаврентьева

7 – 11 сентября 2015 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Новосибирск
2015

Список литературы

1. Итоу Х., Лойгеринг Г., Хлуднев А. М. *Тонкие включения Тимошенко в упругом теле с возможным отслоением.* ДАН. 2014. Т. 458. С. 32–35.

2. Destuynder P., Djaoua M. *Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile.* Math. Meth. Appl. Sci. 1981. V. 3. P. 70–87.

3. Khludnev A. M., Sokolowski J. *Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks.* Eur. J. Mech. A/Solids. 2000. V. 19. P. 105–119.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

О.А. Арбит, Э.Е. Либин

Томский государственный университет, Томск

Двумерные уравнения гидродинамики, записанные в форме Лагранжа [1]

$$\frac{\partial x}{\partial a}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial a}\ddot{y}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{\rho}\right),\qquad \frac{\partial x}{\partial b}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial b}\ddot{y}=-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right),\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}=1, \tag{1}$$

состоят из двух уравнений движения и из условия несжимаемости. Искомыми величинами являются функции: $x(a,b,t)$, $y(a,b,t)$ и $p\,(a,b,t)$, которые должны определяться по условиям на свободной границе, на твердых стенках и по начальным данным. Независимыми переменными являются параметры a, b, которые позволяют различать частицы, и время t. Насколько известно, до сих пор не предпринимались попытки упрощения нелинейной системы уравнений (1). Это можно сделать, если представить себе, что координаты a, b выражены через другую пару координат α и β. Тогда условие несжимаемости можно записать в виде

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{\partial(a,b)}{\partial(\alpha,\beta)}. \tag{2}$$

Легко проверить, что условие (2) выполняется, если представить величины x,y и a,b через произвольную функцию $\psi(\alpha,\beta,t)$, следующими зависимостями:

$$x=\alpha+\psi_\beta,\;\; y=\beta-\psi_\alpha;\qquad a=\alpha-\psi_\beta,\;\; b=\beta+\psi_\alpha. \tag{3}$$

Подстановка (3) в уравнения движения (1) приводит их к виду

$$\ddot{\psi}_\beta-g\psi_{\alpha\alpha}+det\begin{vmatrix}\psi_{\alpha\beta} & -\ddot{\psi}_\alpha\\ \psi_{\alpha\alpha} & \ddot{\psi}_\beta\end{vmatrix}=-\Phi_\alpha,\quad -\ddot{\psi}_\alpha-g\psi_{\alpha\beta}+det\begin{vmatrix}\psi_{\alpha\beta} & -\ddot{\psi}_\beta\\ \psi_{\beta\beta} & \ddot{\psi}_\alpha\end{vmatrix}=-\Phi_\beta, \tag{4}$$

где $\Phi=p/\rho+g\beta$. Исключая Φ из уравнений (4), получаем, что функция ψ должна удовлетворять однородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{\psi}_{\alpha\alpha}+\ddot{\psi}_{\beta\beta}+\frac{\partial(\psi_\alpha,\ddot{\psi}_\alpha)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(\psi_\beta,\ddot{\psi}_\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}=0. \tag{5}$$

Если известна какая-либо функция $\psi(\alpha,\beta,t)$, удовлетворяющая уравнению (5), то нахождение давления из системы уравнений (4) сводится к решению уавнения Пуассона. В задаче о стоячих или бегущих волнах получается точное решение, обобщающее известное решение Герстнера о трохоидальных волнах.

Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

Список литературы

1. Ламб Г., Гидродинамика. //Перевод. с англ. - М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1947, 929 с..