

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/36/2

М.А. Бахолдина, А.М. Горцев**СРАВНЕНИЕ МП- И ММ-ОЦЕНОК ДЛИТЕЛЬНОСТИ
НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В МОДУЛИРОВАННОМ
ОБОБЩЕННОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ**

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий (DSPPs). Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Проводится сравнение качества получаемых по наблюдениям за моментами наступления событий потока оценок длительности мертвого времени методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки).

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий; дважды стохастический поток событий (DSPP); MAP (Markovian Arrival Process)-поток событий; непродлевающееся мертвое время; оценка максимального правдоподобия; оценка методом моментов; длительность мертвого времени.

Условия функционирования реальных систем массового обслуживания таковы, что если в отношении параметров обслуживаемых устройств, как правило, можно утверждать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий (DSPPs) [1–9]. Интерес к рассмотрению дважды стохастических потоков событий проявляется неслучайно. Все это находит широкое применение в различных отраслях науки и техники, таких как теория сетей, Р2Р-сети и адаптивное вещание видео, системы оптической связи, статистическое моделирование, финансовая математика и др. [10–16]. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо, что еще более ухудшает ситуацию, изменяются со временем случайным образом. Поэтому при реализации адаптивного управления системой массового обслуживания возникают, в частности, следующие задачи: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока по наблюдениям за моментами наступления событий) [17–26]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [27–33].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока выступает мертвое время регистрирующих приборов. Необходимость рассмотрения случая мертвого времени вызвана тем, что на практике любое регистрирующее устройство затрачивает на измерение и регистрацию события некоторое конечное время, в течение которого оно не способно правильно обработать следующее событие, т.е. событие, поступившее на обслуживаемый прибор, порождает период так называемого мертвого времени [34–42], в течение которого другие наступившие события потока недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В частности, подобные ситуации встречаются в компьютерных сетях, например, при использовании протокола случайного множественного доступа с обнаружением конфликта (протокол CSMA/CD). В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки»; в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных

вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

В настоящей работе рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся обобщением полусинхронного потока [43–46] и обобщенного полусинхронного потока событий [47–49] и относящийся к классу дважды стохастических потоков событий с кусочно-постоянной интенсивностью. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [21, 22, 50, 51], при этом в [50] показано, что данные потоки могут быть представлены в виде моделей МАР-потоков событий. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работ [51–54], проводится сравнение оценок длительности мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий, полученных методом максимального правдоподобия (МП-оценки) и методом моментов (ММ-оценки) по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

1. Постановка задачи

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток или поток событий), интенсивность которого является кусочно-постоянным стационарным случайным процессом $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_1$, и второе состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_2$. В течение временного интервала случайной длительности, когда процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии λ_i ($\lambda(t) = \lambda_i$), имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1 , при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе также возможен в произвольный момент времени, не совпадающий с моментом наступления события, при этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β : $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-(p\lambda_1 + \beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен и может осуществляться только в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α : $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие. Отметим, что события пуассоновских потоков и дополнительные события неразличимы для наблюдателя. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс. При этом матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \beta) & \beta \\ \alpha(1 - \delta) & -(\lambda_2 + \alpha) \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} (1 - p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \alpha\delta & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиagonальные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны

наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис.1, где 1, 2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквами δ ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые t_1, t_2, \dots – белыми.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Поскольку процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то говорить о состоянии потока можно только в вероятностном смысле. Вся доступная информация о потоке – это моменты наступления событий t_1, t_2, \dots, t_k с начала наблюдения t_0 до момента t .

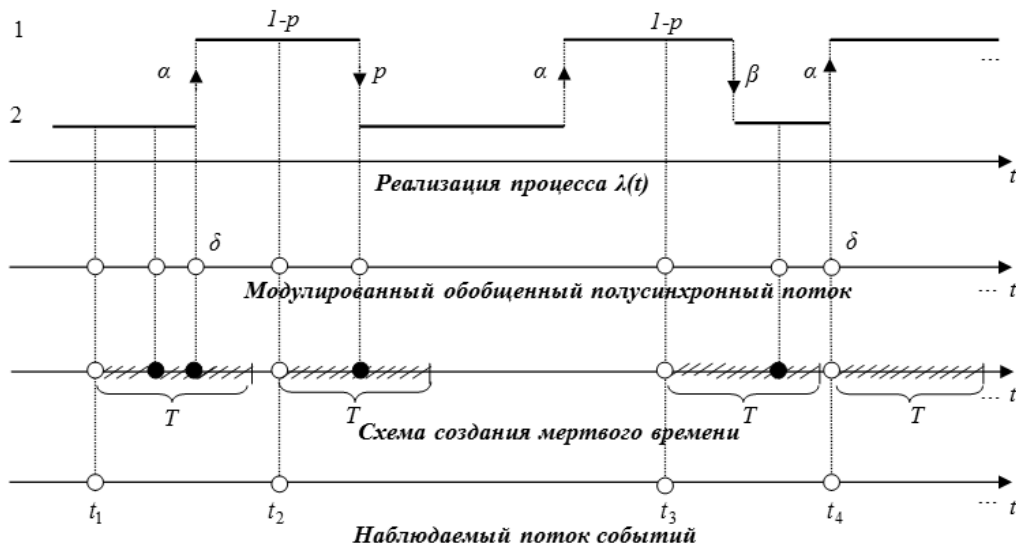


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ полагаются известными, длительность мертвого времени T неизвестна. Необходимо в момент окончания наблюдений (в момент времени t) на основании выборки t_1, t_2, \dots, t_k наблюдаемых моментов наступления событий потока осуществить методом максимального правдоподобия и методом моментов оценки \hat{T} длительности мертвого времени и произвести сравнение получаемых оценок.

2. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени

Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k, k = 1, 2, \dots$, значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k > 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau), \tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятности зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда одномерная плотность вероятности $p_T(\tau), \tau \geq 0$, примет вид [51, 53]:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \frac{z_1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_1(\tau - T)} - \frac{z_2}{z_2 - z_1} \left[z_1 - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} f(T) \right] e^{-z_2(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$f(T) = \lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta) + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \{ (p\lambda_1 + \beta)[\lambda_1(1-p+p\delta) - \lambda_2 + \delta\beta] - p\lambda_1 \alpha \} \frac{e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}}{F(T)},$$

$$F(T) = z_1 z_2 - q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}, \quad \beta_1 = p\lambda_1 + \beta, \quad \beta_2 = \alpha, \quad q = \lambda_1 [\lambda_2 - p(\lambda_2 + \alpha\delta)],$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha + \beta \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta(1-\delta)} \right), \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Пусть $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$, ..., $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, ..., $\tau_k \geq 0$, – последовательность измеренных в результате наблюдения за потоком в течение интервала наблюдения $(0, t]$ значений длительностей интервалов между соседними событиями потока. Упорядочим величины τ_1, \dots, τ_k по возрастанию: $\tau_{\min} = \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(k)}$. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда функция правдоподобия с учетом (1) запишется в виде

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}), \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}; \quad L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = 0, \quad T > \tau_{\min}.$$

Поскольку задача заключается в построении оценки \hat{T} длительности мертвого времени в предположении, что все параметры потока $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ известны, то согласно методу максимального правдоподобия [55] ее реализация есть решение оптимизационной задачи

$$L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)}) = \prod_{j=1}^k p_T(\tau^{(j)}) \Rightarrow \max_T, \quad 0 \leq T \leq \tau_{\min}, \quad \tau_{\min} > 0, \quad (2)$$

где $p_T(\tau^{(j)})$ определена в (1) для $\tau = \tau^{(j)}$. Значение T , при котором функция правдоподобия (2) достигает своего глобального максимума, есть оценка максимального правдоподобия $\hat{T}_{МП}$ длительности мертвого времени.

В [54] аналитически строго решена оптимизационная задача (2): показано, что функции $p_T(\tau^{(j)})$, $j = \overline{2, k}$, являются возрастающими функциями переменной T , $0 \leq T \leq \tau^{(j)}$, $0 \leq \tau^{(j)} < \infty$, $j = \overline{2, k}$, при любых значениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta$ и, следовательно, функция правдоподобия $L(T | \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(k)})$ достигает своего глобального максимума в точке $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$, т.е. решением оптимизационной задачи (2) является оценка длительности мертвого времени $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$. Таким образом, в процессе наблюдения за потоком событий (в течение временного интервала $(0, t]$) вычисляются величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, после чего находится $\tau_{\min} = \min \tau_k$, $k = \overline{1, n}$, и полагается $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$.

3. ММ-оценка длительности мертвого времени

В [51, 53] показано, что модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Только в частных случаях поток становится рекуррентным.

Пусть теперь (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$, $\tau_k \geq 0$, $\tau_{k+1} \geq 0$. Их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, при этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ [51, 53]:

$$\begin{aligned}
p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \\
p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + C_T \left[z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)} \right] \left[z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)} \right], \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\
C_T &= q e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta)] [(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0)]}{[(z_2 - z_1)(\beta_1 + \beta_2)F(T)]^2} \times \\
&\times \left\{ z_1 z_2 - [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] e^{-(\beta_1 + \beta_2)T} + [z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(\lambda_1(1-p) + \lambda_2)] e^{-2(\beta_1 + \beta_2)T} \right\},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2, q, F(T)$ определены в (1), $p_T(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k, k = 1, 2$.

Теоретическая ковариация значений τ_1 и τ_2 запишется в виде [56]:

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \int_T^\infty \int_T^\infty \tau_1 \tau_2 p_T(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \left[\int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau \right]^2. \tag{4}$$

Подставляя (1), (3) в (4), находим явный вид теоретической ковариации

$$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T, \tag{5}$$

где C_T определена в (3).

Пусть за время наблюдения за потоком (в течение временного интервала $(0, t]$) реализовалось n интервалов (t_k, t_{k+1}) длительности $\tau_k, k = \overline{1, n}$. Введем статистику:

$$\hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \tau_{k+1} - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k \right)^2, \tag{6}$$

являющуюся оценкой теоретической ковариации (5). Тогда, согласно методу моментов [55], уравнение моментов, учитывающее коррелированность потоков событий, запишется в виде

$$\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} \right)^2 C_T = \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2). \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражение для C_T из (3), вводя новую переменную $x = e^{-(\beta_1 + \beta_2)T}$ и проделывая при этом необходимые преобразования, находим (7) в виде

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \tag{8}$$

$$h = \frac{q}{[z_1 z_2 (\beta_1 + \beta_2)]^2} (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [\lambda_1 \alpha + (p\lambda_1 + \beta)(\lambda_2 + \alpha\delta)] [(p\lambda_1 + \beta)\pi_1(0) - \alpha\pi_2(0)],$$

$$a_0 = h \{ z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2) [\lambda_1(1-p) + \lambda_2] \}; \quad a_1 = - \left\{ h [2z_1 z_2 - (\beta_1 + \beta_2)(z_1 + z_2)] + q^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \right\},$$

$$a_2 = z_1 z_2 \{ h + 2q \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2) \}; \quad a_3 = -(z_1 z_2)^2 \hat{\text{cov}}(\tau_1, \tau_2),$$

где $z_1, z_2, \beta_1, \beta_2, q$ определены в (1).

Решение уравнения (8) определяет три корня x_1, x_2, x_3 , которые, в свою очередь, определяют три ММ-оценки длительности мертвого времени

$$\hat{T}_{MM}^{(i)} = - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \ln x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Сформулируем алгоритм нахождения единственной оценки \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени:

1) Для определенного набора параметров $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta, T$ осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока событий в течение времени моделирования T_m .

2) Результатом работы имитационной модели является выборка $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ длительностей интервалов между соседними событиями наблюдаемого потока, где n принимает одно из целых значений ($n \geq 2$). По данной выборке строится оценка теоретической ковариации (6).

3) Решается кубическое уравнение (8) [57], т.е. находятся корни x_1, x_2, x_3 ; рассматривается случай $a_0 \neq 0$.

4) Далее возможны три случая:

4.1) Вещественный корень один – x_1 , при этом x_2, x_3 – комплексно сопряженные корни, тогда:

а) если $x_1 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 > 0$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$;

б.3) если $\hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

4.2) Вещественных корней три, при этом $x_2 = x_3$, т.е. вещественных различных корней два – x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), тогда:

а) если $x_1 < x_2 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 \leq 0 < x_2$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; б.3) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

в) если $0 < x_1 < x_2$, то: в.1) если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; в.3) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2$; в.4) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.5) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$; в.6) если $\hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

4.3) Вещественных корней три – x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), тогда:

а) если $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

б) если $x_1 < x_2 \leq 0 < x_3$, то: б.1) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} > \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; б.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; б.3) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

в) если $x_1 \leq 0 < x_2 < x_3$, то: в.1) если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; в.3) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2$;

в.4) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; в.5) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$;

в.6) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$;

г) если $0 < x_1 < x_2 < x_3$, то: г.1) если $\tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.2) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(3)}$; г.3) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq \tau_{\min} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/2$; г.4) если $0 < \hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)} + \hat{T}_{MM}^{(3)})/3$;

г.5) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.6) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(2)}$; г.7) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = (\hat{T}_{MM}^{(1)} + \hat{T}_{MM}^{(2)})/2$; г.8) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \tau_{\min} \leq \hat{T}_{MM}^{(1)}$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$; г.9) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} \leq 0 < \hat{T}_{MM}^{(1)} < \tau_{\min}$, то $\hat{T}_{MM} = \hat{T}_{MM}^{(1)}$;

г.10) если $\hat{T}_{MM}^{(3)} < \hat{T}_{MM}^{(2)} < \hat{T}_{MM}^{(1)} \leq 0$, то $\hat{T}_{MM} = \tau_{\min}$.

В результате работы алгоритма осуществляется один из описанных вариантов, тем самым определяется единственная ММ-оценка длительности мертвого времени \hat{T}_{MM} .

4. Численное сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени

В настоящем разделе приводятся результаты статистических экспериментов по вычислению оценок длительности мертвого времени методом моментов и методом максимального правдоподобия для

различных значений параметров модулированного обобщенного полусинхронного потока событий. Приведенный в разделе 3 алгоритм нахождения единственной оценки \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени положен в основу реализации программы расчета. Программа расчета реализована на языке программирования С# в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2015 в виде пользовательского приложения и интерфейса командной строки.

Эксперимент заключается в следующем: 1) при заданных значениях параметров потока $\lambda_1, \lambda_2, p, \beta, \alpha, \delta, T$ и заданном времени моделирования T_m осуществляется имитационное моделирование потока и как результат – получение истинной траектории интенсивности процесса $\lambda(t)$ и последовательности значений длительностей временных интервалов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ($n = 2, 3, \dots$); описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит; 2) находится оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени $\hat{T}_{МП} = \tau_{\min}$ ($\tau_{\min} = \min \tau_k, k = \overline{1, n}$); 3) вычисляется статистика (6), решается уравнение (8) и осуществляется реализация алгоритма нахождения единственной оценки \hat{T}_{MM} длительности мертвого времени методом моментов; 4) осуществляется повторение N раз ($j = \overline{1, N}$) шагов 1–3 для получения выборок достаточного объема.

Результатом выполнения описанного алгоритма являются две выборки: $(\hat{T}_{МП}^{(1)}, \hat{T}_{МП}^{(2)}, \dots, \hat{T}_{МП}^{(N)})$, $(\hat{T}_{MM}^{(1)}, \hat{T}_{MM}^{(2)}, \dots, \hat{T}_{MM}^{(N)})$, на основании которых вычисляются выборочные средние

$$\hat{T}_{МП} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_{МП}^{(j)}, \quad \hat{T}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_{MM}^{(j)},$$

выборочные дисперсии

$$\hat{D}_{МП} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{МП}^{(j)} - \hat{T}_{МП} \right)^2, \quad \hat{D}_{MM} = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{MM}^{(j)} - \hat{T}_{MM} \right)^2$$

и выборочные вариации получаемых оценок

$$\hat{V}_{МП} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{МП}^{(j)} - T \right)^2, \quad \hat{V}_{MM} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_{MM}^{(j)} - T \right)^2.$$

Первый эксперимент проведен для большого числа параметров модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при различных значениях длительности мертвого времени $T = 0,5, 1, 1,5, \dots, 7, 9$ и времени моделирования $T_m = 20, 30, \dots, 900, 1000$; объем выборки составляет $N = 100$. В качестве иллюстрации в табл. 1, 2 приведены результаты численного эксперимента для потока в зависимости от времени моделирования T_m при значениях параметров $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2$ и длительности мертвого времени $T = 0,5$. Время моделирования T_m изменяется от 20 до 1000.

Т а б л и ц а 1

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,5$)

T_m	20	30	40	50	100	200	300
$\hat{T}_{МП}$	0,63132	0,58855	0,57871	0,55004	0,52809	0,51379	0,50708
$\hat{D}_{МП}$	0,025561	0,006909	0,006602	0,003162	0,000805	0,000185	0,000036
$\hat{V}_{МП}$	0,04255	0,01468	0,01273	0,00563	0,00159	0,00037	0,00009
\hat{T}_{MM}	0,63132	0,58486	0,57069	0,54497	0,52809	0,51379	0,50666
\hat{D}_{MM}	0,025561	0,008502	0,010998	0,006104	0,000805	0,000185	0,000059
\hat{V}_{MM}	0,04255	0,01562	0,01589	0,00807	0,00159	0,00037	0,00010

Результаты статистического эксперимента
 $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,5)$

T_m	400	500	600	700	800	900	1000
$\hat{T}_{МП}$	0,50539	0,50365	0,50415	0,50329	0,50304	0,50303	0,50263
$\hat{D}_{МП}$	0,000029	0,000018	0,000017	0,000012	0,000008	0,000008	0,000006
$\hat{V}_{МП}$	0,00006	0,00003	0,00003	0,00002	0,00002	0,00002	0,00001
$\hat{T}_{ММ}$	0,49601	0,49556	0,49990	0,50126	0,49666	0,49923	0,49473
$\hat{D}_{ММ}$	0,004414	0,002223	0,000958	0,000432	0,001628	0,000678	0,001648
$\hat{V}_{ММ}$	0,00439	0,00222	0,00095	0,00043	0,00162	0,00067	0,00166

Пример результата численного эксперимента в зависимости от длительности мертвого времени T приведен в табл. 3 при значениях параметров $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2$, в табл. 4 – при значениях параметров $\lambda_1 = 0,4, \lambda_2 = 0,1, \beta = 0,25, p = 0,2, \alpha = 0,25, \delta = 0,2$; время моделирования составляет $T_m = 1000$; объем выборки составляет $N = 100$. Длительность мертвого времени T изменяется от 0,5 до 9.

Таблица 3

Результаты статистического эксперимента
 $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T_m = 1000)$

T	0,5	1	1,5	2	3	5	7	9
$\hat{T}_{МП}$	0,50236	1,00257	1,50395	2,00493	3,00532	5,00769	7,01127	9,01534
$\hat{D}_{МП}$	0,000006	0,000006	0,000013	0,000021	0,000029	0,000047	0,000124	0,000178
$\hat{V}_{МП}$	0,00001	0,00001	0,00003	0,00005	0,00006	0,00011	0,00025	0,00041
$\hat{T}_{ММ}$	0,49671	0,99757	1,47580	1,99349	2,86230	4,91269	6,87790	8,67282
$\hat{D}_{ММ}$	0,002051	0,002533	0,039199	0,012995	0,334228	0,445407	0,885099	2,849317
$\hat{V}_{ММ}$	0,00204	0,00251	0,03939	0,01291	0,34985	0,44858	0,89116	2,92787

Таблица 4

Результаты статистического эксперимента
 $(\lambda_1 = 0,4, \lambda_2 = 0,1, \beta = 0,25, p = 0,2, \alpha = 0,25, \delta = 0,2, T_m = 1000)$

T	0,5	1	1,5	2	3	5	7	9
$\hat{T}_{МП}$	0,51837	1,01873	1,52102	2,02484	3,02529	5,03875	7,04114	9,05422
$\hat{D}_{МП}$	0,000257	0,000444	0,000463	0,000563	0,000631	0,001498	0,001451	0,002826
$\hat{V}_{МП}$	0,00059	0,00079	0,00090	0,00117	0,00126	0,00298	0,00313	0,00574
$\hat{T}_{ММ}$	0,51206	1,00293	1,49634	2,00921	2,93991	4,91482	6,80174	8,88871
$\hat{D}_{ММ}$	0,002442	0,008810	0,025294	0,022826	0,189082	0,511574	1,456847	1,366464
$\hat{V}_{ММ}$	0,00256	0,00873	0,02505	0,02268	0,19080	0,51371	1,48159	1,36518

Полученные результаты показывают, во-первых, достаточно высокое качество оценивания длительности мертвого времени; во-вторых, то, что при малом времени моделирования (T_m изменяется от 20 до 100) качество оценивания хуже по таким характеристикам, как выборочные средние, выборочные дисперсии и выборочные вариации, при этом по мере увеличения длительности времени моделирования (T_m изменяется от 100 до 1000) качество оценивания растет и при времени моделирования T_m от 500 и

выше наблюдается достаточная стабильность оценок (см. табл. 1, 2). В-третьих, при заданном значении времени моделирования T_m (T_m выбрано достаточно большим $T_m = 1000$ для обеспечения стабильности оценок) по мере увеличения длительности мертвого времени T качество оценивания становится хуже по таким характеристикам, как выборочные дисперсии и выборочные вариации (см. табл. 3, 4). И, наконец, оценка максимального правдоподобия по таким характеристикам, как выборочные дисперсии и выборочные вариации, оказывается лучше оценки, полученной методом моментов, по мере увеличения длительности мертвого времени T (T изменяется от 2 и выше) при фиксированном значении времени моделирования T_m (T_m выбрано достаточно большим ($T_m = 1000$) для обеспечения стабильности оценок) (см. табл. 3, 4).

Результаты второго статистического эксперимента приведены в табл. 5–8. В первой строке таблиц указана длительность имитационного моделирования T_m ($T_m = 10, 20, 30, \dots, 900, 1000$), во второй и третьей строках для каждой длительности имитационного моделирования T_m приведены численные значения выборочных вариаций $\hat{V}_{МП}$ и $\hat{V}_{ММ}$ соответственно. В четвертой строке таблицы приведены численные значения разности выборочных вариаций $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$. Численные результаты для всех таблиц получены для $N = 100$. Путем сравнения значений выборочных вариаций устанавливается, какая из оценок при заданных параметрах лучше, какая хуже: если $\hat{V}_{МП} < \hat{V}_{ММ}$, то МП-оценка лучше ММ-оценки, если, наоборот, $\hat{V}_{МП} > \hat{V}_{ММ}$, то ММ-оценка лучше МП-оценки. Отметим, что по определению оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени при конечных T_m будет всегда смещенная ($\tau_{\min} > T$); ее несмещенность реализуется только в асимптотическом случае при $T_m \rightarrow \infty$.

Таблица 5

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,4$)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,62307	0,05566	0,01911	0,00494	0,00542
$\hat{V}_{ММ}$	0,61807	0,05541	0,01790	0,00494	0,00542
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00500	0,00025	0,00121	0	0
T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00003	0,00001	0,00002	0,00001	0,00001
$\hat{V}_{ММ}$	0,00163	0,00050	0,00183	0,00182	0,00168
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00160	-0,00049	-0,00181	-0,00181	-0,00167

Таблица 6

Результаты статистического эксперимента
($\lambda_1 = 0,7, \lambda_2 = 0,2, \beta = 0,5, p = 0,8, \alpha = 1, \delta = 0,5, T = 0,2$)

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,40721	0,08531	0,04087	0,00871	0,00649
$\hat{V}_{ММ}$	0,40235	0,08448	0,04007	0,00911	0,00671
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	0,00486	0,00083	0,00080	-0,00040	-0,00023
T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00003	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
$\hat{V}_{ММ}$	0,00083	0,00121	0,00121	0,00161	0,00161
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00080	-0,00120	-0,00120	-0,00160	-0,00160

Результаты статистического эксперимента

 $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \beta = 0,025, p = 0,5, \alpha = 0,025, \delta = 0,5, T = 2)$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	–	0,58607	0,28668	0,12089	0,06472
$\hat{V}_{ММ}$	–	0,58607	0,28668	0,12089	0,06472
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	–	0	0	0	0

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00025	0,00016	0,00012	0,00010	0,00009
$\hat{V}_{ММ}$	0,02417	0,07572	0,03765	0,00010	0,03319
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,02392	-0,07556	-0,03752	0	-0,03309

Результаты статистического эксперимента

 $(\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2,5, \beta = 0,5, p = 0,2, \alpha = 0,5, \delta = 0,2, T = 0,4)$

T_m	10	20	30	40	50
$\hat{V}_{МП}$	0,00163	0,00027	0,00014	0,00004	0,00004
$\hat{V}_{ММ}$	0,00387	0,00150	0,00255	0,00629	0,00338
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,00224	-0,00123	-0,00241	-0,00625	-0,00334

T_m	600	700	800	900	1000
$\hat{V}_{МП}$	0,00000019	0,00000015	0,00000013	0,00000012	0,00000010
$\hat{V}_{ММ}$	0,01108566	0,00667453	0,01380863	0,01520267	0,01732796
$\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ}$	-0,01109	-0,00667	-0,01381	-0,01520	-0,01733

Анализ приведенных численных результатов показывает: 1) при малых временах наблюдения T_m за потоком (при малых $T_m = 10, 20, \dots, 50$) и малых значениях $\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 < \lambda_1 \leq 1$ (в случае редкого потока) ММ-оценки лучше МП-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} > 0$) либо, по крайней мере, не хуже МП-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} = 0$), что является вполне естественным, так как при малых временах наблюдения оценка $\hat{T}_{МП}$ может быть достаточно сильно смещенной относительно T (см. табл. 5–7); 2) при больших временах наблюдения за потоком (при больших $T_m = 600, 700, \dots, 1000$) МП-оценки лучше ММ-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} < 0$) либо, по крайней мере, не хуже ММ-оценок (когда разность $\hat{V}_{МП} - \hat{V}_{ММ} = 0$), что также является вполне естественным, так как при больших временах наблюдения смещение оценки $\hat{T}_{МП}$ относительно T уменьшается; 3) в остальных случаях оценка максимального правдоподобия $\hat{T}_{МП}$ оказывается лучше оценки $\hat{T}_{ММ}$, полученной методом моментов (см. табл. 5–8).

Заключение

По результатам проведенного исследования по сравнению оценок длительности мертвого времени методом моментов и методом максимального правдоподобия для различных значений параметров

модулированного обобщенного полусинхронного потока событий можно сделать вывод о том, что при малых временах наблюдения T_m за потоком и малых значениях $\lambda_1 \leq 1$, $\lambda_2 < \lambda_1 \leq 1$ (в случае редкого потока) предпочтительнее применять оценку \hat{T}_{MM} , полученную методом моментов; при больших временах наблюдения и / или больших значениях $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$ (в случае нередкого потока) – оценку \hat{T}_{MP} , полученную методом максимального правдоподобия. Кроме того, оценка максимального правдоподобия \hat{T}_{MP} по таким характеристикам, как выборочные дисперсии и выборочные вариации, оказывается лучше оценки \hat{T}_{MM} , полученной методом моментов, по мере увеличения длительности мертвого времени T при фиксированном значении времени моделирования T_m . Отдельно стоит отметить, что полученные результаты демонстрируют достаточно высокое качество оценивания длительности мертвого времени для обоих методов оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cox D.R. Some Statistical Methods Connected with Series of Events // J. Royal Statistical Society B. 1955. V. 17. P. 129–164.
2. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, No 4. P. 923–930.
3. Basharin G.P., Kokotushkin V.A., Naumov V.A. Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer // Engineering cybernetics. 1979. V. 17(6). P. 66–73.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Cox D. R., Isham V. Point Processes. London : Chapman & Hall, 1980.
7. Bremaud P. Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. New York : Springer-Verlag, 1981.
8. Last G., Brandt A. Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach. New York : Springer-Verlag, 1995.
9. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21, No. 3. P. 283–290.
10. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телеграфика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
11. Adamu A., Gaidamaka Y., Samuylov A. Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network // Lecture Notes in Computer Science: Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011 (August 23–25, 2011, St. Petersburg, Russia). 2011. P. 428–439.
12. Bouzas P.R., Valderrama M.J., Aguilera A.M., Ruiz-Fuentes N. Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 50(10). P. 2655–2667.
13. Centanni S., Minozzo M. A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes // Journal of the American Statistical Association. 2006. V. 101. P. 1582–1597.
14. Dubois J.-P. Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper) // Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004. 2004. P. 116–119.
15. Hossain M.M., Lawson A.B. Approximate methods in Bayesian point process spatial models // Computational Statistics and Data Analysis. 2009. V. 53(8). P. 2831–2842.
16. Snyder D.L., Miller M.I. Random Point Processes in Time and Space. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
17. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
18. Gortsev A.M., Shmyrin I.S. Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants // Automation and Remote Control. 1999. V. 60, No. 1. P. 41–51.
19. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
20. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий // Вестник ТюмГУ. 2008. № 6. С. 107–119.
21. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44–65.
22. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33–47.
23. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A., Solovev A.A. Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Automation and Remote Control. 2012. V. 73, No. 8. P. 1316–1326.

24. Бахолдина М.А. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 10–21.
25. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 13–24.
26. Bakholdina M.A., Gortsev A.M. Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9, No. 29. P. 1433–1451.
27. Горцев А.М., Завгородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10, № 3. С. 273–280.
28. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179–184.
29. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8–16.
30. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
31. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 25–40.
32. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 54–63.
33. Горцев А.М., Соловьев А.А. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлеваемого мертвого времени в потоке физических событий // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 11. С. 141–149.
34. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1967. Т. 1.
35. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М. : Наука, 1969.
36. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988.
37. Normey-Rico J.E. Control of dead-time processes (Advanced textbooks in control and signal processing). London : Springer-Verlag, 2007.
38. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3–7.
39. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8–11.
40. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Известия вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8–13.
41. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35–49.
42. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. Russian Physics Journal. 2005. V. 48(10). P. 1039–1054.
43. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
44. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № 1. С. 18–23.
45. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // Measurement Techniques. 2003. V. 46, No. 6. P. 536–545.
46. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 31–41.
47. Горцев А.М., Калягин А.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлеваемого мертвого времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
48. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2(27). С. 19–29.
49. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1(30). С. 27–37.
50. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О связи МС-потоков и MAP-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1(14). С. 13–21.
51. Бахолдина М.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени и условия его рекуррентности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2(31). С. 4–17.

52. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. V. 487. P. 18–25.
53. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 13–27.
54. Бахолдина М.А., Горцев А.М. Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в модулированном обобщенном полусинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. № 2(35). P. 13–29.
55. Шуленин В.П. Математическая статистика. Ч. 1: Параметрическая статистика : учеб. Томск : Изд-во НТЛ, 2012.
56. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие. М. : Высшая школа, 2000.
57. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1984.

Бахолдина Мария Алексеевна. E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Горцев Александр Михайлович, д-р техн. наук, профессор. E-mail: gam@fpmk.tsu.ru

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 24 марта 2016 г.

Bakholdina Maria A., Gortsev Alexander M. (Tomsk State University, Russian Federation).

Comparison of maximum likelihood method and moments method by estimating unextendable dead time period in the modulated semi-synchronous generalized flow of events.

Keywords: modulated semi-synchronous generalized flow of events; doubly stochastic Poisson process (DSPP); Markovian arrival process (MAP); unextendable dead time; maximum likelihood method; moments method; dead time period duration.

DOI: 10.17223/19988605/36/2

In this paper we consider the modulated semi-synchronous generalized flow of events, which is one of the mathematical models for incoming streams of events in computer communication networks and which is related to the class of doubly stochastic Poisson processes (DSPPs). The flow intensity process is a piecewise constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states 1, 2 (first, second correspondingly). In the first state $\lambda(t) = \lambda_1$ and in the second state $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). During the time interval of a random duration when the process $\lambda(t)$ is in the state λ_i ($\lambda(t) = \lambda_i$), a Poisson flow of events with intensity λ_i , $i = 1, 2$, arrives. The transition of the process $\lambda(t)$ from the first state to the second state is possible at any moment of a Poisson event occurrence in state, herewith the process $\lambda(t)$ can change its state to the second one with probability p ($0 \leq p \leq 1$) or can stay in state 1 with complementary probability $1 - p$. The transition of the process $\lambda(t)$ from state 1 to state 2 is also possible at any moment that does not coincide with the moment of a Poisson event occurrence, herewith the duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first state is distributed according to the exponential law with parameter β : $F(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$, $\tau \geq 0$. Then the duration of the process $\lambda(t)$ staying in the first state is distributed according to the exponential law with the distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-(\rho\lambda_1 + \beta)\tau}$, $\tau \geq 0$. The transition of the process $\lambda(t)$ from the second state to the first state at the moment of a Poisson event occurrence in state 2 is impossible and can be done only at a random moment. In this case the duration of the process $\lambda(t)$ staying in state 2 is distributed according to the exponential law with parameter α : $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$, $\tau \geq 0$. At the moment when the state changes from the second to the first one, an additional event is assumed to be initiated with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$).

The registration of the flow events is considered in conditions of a constant (unextendable) dead time. The dead time period of a constant duration T begins after every registered event at the moment t_k , $k \geq 1$. During this period no other events are observed. When the dead time period is over, the first coming event causes the next interval of a dead time of duration T and so on.

We assume that the flow parameters $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$, $0 \leq p \leq 1$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$, are known and the duration of the dead time period T is not known. The main problems are to find the maximum likelihood and moments estimates of the dead time period duration on monitoring the time moments of the events occurrence in observable flow of events and further to compare the obtained estimates.

REFERENCES

1. Cox, D.R. (1955) Some Statistical Methods Connected with Series of Events. *Journal of Royal Statistical Society B*. 17. pp. 129-164. DOI: 10.2307/2983950
2. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923-30.
3. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 17(6). pp. 66-73. DOI: 10.1016/0166-5316(84)90009-9
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) Method of equivalent substitutions for calculating fragments of communication networks for digital computer. *Engineering cybernetics*. 1. pp. 55-61.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764-779. DOI: 10.2307/3213143

6. Cox, D. R. & Isham, V. (1980) *Point Processes*. London: Chapman & Hall.
7. Bremaud, P. (1981) *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer-Verlag.
8. Last, G. & Brandt, A. (1995) *Marked Point Process on the Real Line: The Dynamic Approach*. New York: Springer-Verlag.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events. *Discrete Mathematics and Applications*. 21(3). pp. 283–290. DOI: 10.1515/dma.2011.017
10. Basharin, G.P., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical Theory of Teletraffic and Its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62-69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
11. Adamu, A., Gaidamaka, Y. & Samuylov, A. (2011) Discrete Markov Chain Model for Analyzing Probability Measures of P2P Streaming Network. *Lecture Notes in Computer Science*. Proc. of the 11-th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking NEW2AN-2011. August 23–25, 2011. St. Petersburg, Russia. pp. 428-439.
12. Bouzas, P.R., Valderrama, M.J., Aguilera, A.M. & Ruiz-Fuentes, N. (2006) Modelling the mean of a doubly stochastic Poisson process by functional data analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*. 50(10). pp. 2655–2667. DOI: 10.1016/j.csda.2005.04.015
13. Centanni, S. & Minozzo, M. (2006) A Monte Carlo approach to filtering for a class of marked doubly stochastic Poisson processes. *Journal of the American Statistical Association*. 101. pp. 1582–1597. DOI: 10.1198/016214506000000276
14. Dubois, J.-P. (2004) Traffic estimation in wireless networks using filtered doubly stochastic point processes (Conference Paper). *Proceedings – 2004 International Conference on Electrical, Electronic and Computer Engineering, ICEEC'04 2004*. pp. 116-119.
15. Hossain, M.M. & Lawson, A.B. (2009) Approximate methods in Bayesian point process spatial models. *Computational Statistics and Data Analysis*. 53(8). pp. 2831-2842. DOI: 10.1186/1471-2288-11-133
16. Snyder, D.L. & Miller, M.I. (1991) *Random Point Processes in Time and Space*. Heidelberg: Springer-Verlag.
17. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Shevchenko, T.I. (1993) States estimation of the MC flow of events in the presence of measurement errors. *Russian Physics Journal*. 12. pp. 67-85. (In Russian)
18. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999a) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 60(1). pp. 41-51.
19. Gortsev, A.M. & Shmyrin, I.S. (1999b) Optimal estimation of states of a double stochastic flow of events in the presence of measurement errors of time instants. *Automation and Remote Control*. 1. pp. 52-66. (In Russian)
20. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2008) Optimal'naya otsenka sostoyaniy asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka s initsirovaniem lishnikh sobytiy [Optimal estimation of the states of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta – The Bulletin of Tyumen State University*. 6. pp. 107-119.
21. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal states estimation of asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65. (In Russian).
22. Gortsev, A.M. & Leonova, M.A. (2010) Optimal state estimation of generic asynchronous doubly stochastic flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 33-47. (In Russian).
23. Gortsev, A.M., Nezhelskaya, L.A. & Solovev, A.A. (2012) Optimal State Estimation in MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Automation and Remote Control*. 73(8). pp. 1316-1326. DOI: 10.1134/S000511791208005X
24. Bakholdina, M.A. (2013) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 10-21. (In Russian).
25. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2014) Optimal states estimation of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in the condition of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(26). pp. 13-24. (In Russian).
26. Bakholdina, M.A. & Gortsev, A.M. (2015) Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability. *Applied Mathematical Sciences*. 9(29). pp. 1433-1451. DOI: 10.12988/ams.2015.5135
27. Gortsev, A.M. & Zavgorodnyaya, M.E. (1997) Otsenka parametrov al'terniruyushchego potoka sobytiy pri uslovii ego chastichnoy nablyudaemosti [Parameter estimation of alternating flow of events under conditions of particulate observability]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 10(3). pp. 273-280.
28. Vasileva, L.A. & Gortsev, A.M. (2002) Estimation of parameters of a double-stochastic flow of events under conditions of its incomplete observability. *Automation and Remote Control* 63(3). pp. 511-515. DOI: 10.1023/A:1014718921138
29. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of the dead time period and intensities of the synchronous double stochastic event flow. *Radiotechnics*. 10. pp. 8-16.
30. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy s initsirovaniem lishnego sobytiya [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with additional events initiation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 284. pp. 137-145.
31. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2011) Optimal estimation of parameters of an asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(17). pp. 25-40. (In Russian).
32. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54-63. (In Russian).

33. Gortsev, A.M. & Solovev, A.A. (2015) Otsenka maksimal'nogo pravdopodobiya dlitel'nosti neprodlevayushchegosya mertvogo vremeni v potoke fizicheskikh sobytiy [Maximum likelihood estimation of fixed dead time in physical flow of events]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(11). pp. 141-149.
34. Feller, W. (1950) *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [An introduction to probability theory and its applications]. Translated from English. Vol. I. New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc.
35. Bharucha-Reid, A.T. (1960) *Elementy teorii markovskikh protsessov i ikh prilozheniya* [Elements of the theory of Markov processes and their applications]. Translated from English by V. Kalashnikov, Yu. Krutovskiy, M. Epelman. Moscow: Nauka.
36. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: University Press.
37. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time processes. (Advanced textbooks in control and signal processing)*. London: Springer-Verlag.
38. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1991) Otsenka intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy v usloviyakh chastichnoy ego nenablyudaemosti [Intensity estimation of the Poisson flow of events in condition of its incomplete observability]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 12. pp. 3-7.
39. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1996) Otsenivanie perioda nenablyudaemosti i intensivnosti puassonovskogo potoka sobytiy [The estimation of intensity process and period of unobservability of the Poisson flow of events]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 2. pp. 8-11.
40. Gortsev, A.M. & Parshina, M.E. (1999) Estimation of parameters of an alternate stream of events in “dead” time conditions. *Russian Physics Journal*. 4. pp. 8-13. DOI: 10.1007/BF02509672
41. Otsenivanie dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov asinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy pri neprodlevayushchemya mertvom vremeni [Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 10. pp. 35-49.
42. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2005) Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period. *Russian Physics Journal*. 48(10). pp. 1039-1054. DOI: 10.1007/s11182-006-0023-y
43. Nezhelskaya, L.A. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytiy v usloviyakh ego chastichnoy nenablyudaemosti [Optimal state estimation of semi-synchronous flow in conditions of its incomplete observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95-98.
44. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Otsenivanie parametrov polusinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobytiy metodom momentov [Parameters estimation of a semi-synchronous doubly stochastic flow of events using method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 1. pp. 18-23.
45. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536-545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
46. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2008) Semi-synchronous twice-stochastic event flow in conditions of prolonged dead time. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 13(1). pp. 31-41. (In Russian).
47. Gortsev, A.M. & Kalyagin, A.A. (2010) Optimal states estimation of generalized semi-synchronous flow of events in conditions of constant dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(13). pp. 50-60. (In Russian).
48. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19-29. (In Russian).
49. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27-37. (In Russian).
50. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2011) About connectivity of MC-flows and MAP-flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(14). pp. 13-21. (In Russian).
51. Bakholdina, M.A. (2015) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of constant dead time and flow recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(31). pp. 4-17. (In Russian).
52. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18-25. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
53. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13-27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
54. Bakholdina, M.A. Gortsev, A.M. (2015) Maximum likelihood estimation of unextendable dead time period duration in the modulated semi-synchronous generalized flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 13-29. (In Russian).
55. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika. Ch. I. Parametricheskaya statistika* [Mathematical statistics. P. 1. Parametric statistics]. Tomsk: NTL.
56. Ventsel, E.S. & Ovcharov, L.A. (2000) *Teoriya veroyatnostey i ee inzhenernye prilozheniya* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow: Vysshaya shkola.
57. Faddeev, D.K. (1984) *Lektsii po algebra* [Lectures on Algebra]. Moscow: Nauka.