На правах рукописи

Панкратова Екатерина Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕОДНОРОДНЫХ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СМО

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», на кафедре теории вероятностей и математической статистики.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Моисеева Светлана Петровна

Официальные оппоненты:
Фархадов Маис Паша оглы, доктор технических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, лаборатория автоматизированных систем массового обслуживания и обработки сигналов, заведующий лабораторией
Семенова Дарья Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», базовая кафедра вычислительных и информационных технологий, доцент
Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов», г. Москва
Защита состоится 17 ноября 2016 г. в 10 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (корп. 2, ауд. 102).
С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.
Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ:
http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/PankratovaEV17112016.html.

Автореферат разослан «____» сентября 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор технических наук, профессор

Скворцов
Алексей Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Телекоммуникации в современном мире являются составной частью практически всех общественных процессов. В условиях постоянного роста требований к эффективности устройств, применяемых в системах передачи и обработки информации, к сокращению сроков исследования и разработки новых телекоммуникационных систем и сетей актуально их исследование с помощью построения математических моделей. Случайный характер процессов формирования, обработки и передачи данных обуславливает необходимость применения стохастических моделей, в качестве которых широко используются модели массового обслуживания, представляющие собой системы и сети массового обслуживания различной конфигурации.

Многие актуальные проблемы формулируются в терминах теории массового обслуживания, и многие методы решения, развиваемые в рамках этой теории, оказываются вполне пригодными для использования.

Системы с неограниченным числом обслуживающих приборов вызывают большой интерес у исследователей и встречаются во многих научных трудах. Например,в статьях П. П. Бочарова и А. В. Печинкина,P. Abaev, B. D. Auria, D. Baum и L. Breuer, J. Bojarovich и L. Marchenko, E. A. van Doorn и A. A Jagers, N. G. Duffield, C. Fricker и M. R. Jaibi, E. Girlich, A. K. Jayawardene и O. Kella, M. Parulekar, A. M. Makowski и многих других.

Сигналы в вычислительных сетях зачастую приходят не поодиночке, и мы имеем неординарный входящий поток и сталкиваемся с необходимостью обслуживания сразу нескольких заявок. Впервые системы с неординарными пуассоновскими входящими потоками и экспоненциальным временем обслуживания описаны в работах украинских ученых Е. А. Лебедева, А. А. Чечельницкого и О. В. Кучеренко. СМО с параллельно функционирующими блоками можно встретить в статьях Г. П. Башарина, К. Е. Самуйлова, A. Movaghar, Kargahi M., C. Knessl, J. A. Morrison, D. G. Down, N. Bambos, G. Michailidis, И. Синяковой и многих других. Но, как правило, в данных работах все заявки в группе являются однотипными и время их обслуживания одинаково распределено, что не всегда применимо для описания реальных вычислительных процессов.

Одной из модификаций систем с неограниченным числом приборов являются неоднородные системы массового обслуживания, в иностранной литературе они также называются гетерогенными, которые применяются для описания процессов в мультисервисных сетях связи и телекоммуникационных системах. Такие модели позволяют учитывать неоднородность каналов связи, которые могут различаться по скорости, надежности, стоимости эксплуатации и т.д. Моделируются такие процессы системами с непуассоновскими входящими потоками и разнотипными обслуживающими приборами. Решение задач анализа неоднородных немарковских систем массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками на сегодняшний день представлено лишь отдельными работами и является актуальной научной проблемой.

В настоящей диссертационной работе проводится исследование неоднородных систем массового обслуживания, на вход которых поступают ординарные специальные потоки заявок, а именно МАР-поток и рекуррентный.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является построение и исследование математических моделей неоднородных немарковских бесконечнолинейных СМО со специальными входящими потоками разнотипных заявок.

Задачи:

1. Построение математических моделей неоднородных бесконечнолинейных (гетерогенных) СМО с входящими марковским модулированным пуассоновским (МАР) и рекуррентным потоками разнотипных заявок.

2. Нахождение основных вероятностных характеристик числа занятых приборов каждого типа в рассматриваемых системах методом моментов.

3. Разработка асимптотических методов исследования систем в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах различного типа и предельно редких изменений состояний управляющей МАР-потоком цепи Маркова.

4. Разработка проблемно-ориентированных программ имитационного моделирования и численного анализа для оценки области применимости полученных асимптотических результатов.

Научная новизна результатов, представленных в диссертации, состоит в следующем:

1. Предложены новые математические модели неоднородных (гетерогенных) бесконечнолинейных СМО с различными типами обслуживающих приборов, позволяющие учитывать неоднородность поступающих заявок, требующих различного времени обслуживания, что более адекватно описывает реальные информационные системы.

2. Получены аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов каждого типа в системах с входящими МАР- и рекуррентным потоками, n типами обслуживающих приборов и экспоненциальным временем обслуживания. Выявлены корреляционная связь

между компонентами многомерного случайного вектора — числа занятых приборов каждого типа и факторы, влияющие на ее усиление.

3. Предложено новое асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах различного типа, применение которого для исследования систем типа MAP$|$M$^{(n)}|\infty$ и GI$|$M$^{(n)}|\infty$ позволило доказать, что распределение числа занятых приборов в них можно аппроксимировать многомерным гауссовским.

4. Впервые показано, что при условии предельно редких изменений состояний управляющей MAP-потоком цепи Маркова асимптотическая характеристическая функция числа занятых приборов в системе MAP$|$M$^{(n)}|\infty$ имеет вид взвешенной суммы пуассоновских распределений.

5. Предложена модификация метода просеянного потока, позволяющая, в отличие от существующих подходов, выполнять анализ многомерных процессов в гетерогенных СМО вида MMPP$|$GI$^{(n)}|\infty$, GI$|$GI$^{(n)}|\infty$, что позволяет проблему исследования немарковских СМО с разнотипным обслуживанием (с произвольными функциями распределения времени обслуживания) свести к задаче анализа многомерного просеянного нестационарного потока, решение которой проводится методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах.

Положения и результаты, выносимые на защиту состоят в следующем:

1.Математические модели неоднородных бесконечнолинейных СМО вида MAP$|$M$^{(n)}|\infty$ и GI$|$M$^{(n)}|\infty$.

2. Аналитические выражения для основных вероятностных характеристик числа занятых приборов каждого типа систем с входящими MAP- и рекуррентным потоками, n типами обслуживающих приборов и экспоненциальным временем обслуживания.

3. Модификация метода асимптотического анализа для построения стационарного распределения числа занятых приборов в системах типа MAP$|$M$^{(n)}|\infty$ и GI$|$M$^{(n)}|\infty$.

4. Теорема о виде асимптотической характеристической числа занятых приборов системы MAP$|$M$^{(n)}|\infty$ при условии предельно редких изменений состояний управляющей MAP-потоком цепи Маркова.

5.Модификация метода просеянного потока и асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах для анализа многомерных процессов в гетерогенных СМО вида MMPP$|$GI$^{(n)}|\infty$, GI$|$GI$^{(n)}|\infty$.

6.Комплекс проблемно-ориентированных программ имитационного моделирования и численного анализа распределений для оценки области применимости полученных асимптотических результатов.

Методы исследования. Для исследования рассмотренных моделей используется метод математического моделирования, аппарат теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений и информационные технологии.

В качестве методов исследования СМО применяются метод начальных моментов и модификация метода асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания требований на приборах. А также модификация метода асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний управляющей цепи Маркова.

Оригинальным авторским методом исследования систем с произвольной функцией распределения времени обслуживания является модификация многомерного метода просеянного потока.

Обработка результатов имитационного моделирования проводится методами математической статистики. Результаты, полученные в работе, имеют как теоретическое, так и практическое значения.

Теоретическая и практическая значимость работы. Модели гетерогенных СМО позволяют существенно расширить круг решаемых задач в теории массового обслуживания. Предложеные асимптотическое условие эквивалентного роста времени обслуживания на приборах разного типа и модификация метода многомерного динамического просеивания являются вкладом в развитие методов, используемых для анализа систем массового обслуживания.

Системы массового обслуживания с неоднородными приборами актуально использовать в качестве математических моделей работы гибридного канала, с помощью которых можно рассчитать его характеристики производительности и надежности в работе.

Кроме того, разработан комплекс проблемно-ориентированных программ имитационного моделирования и численного анализа распределений для оценки области применимости полученных асимптотических результатов, позволяющий решать ряд практически значимых задач при проектировании реальных телекоммуникационных систем.

Достоверность полученных результатов подтверждается математически корректными выводами и доказательствами теорем, представленными в работе, согласованностью результатов, полученных для разных моделей, как между собой, так и с известными в теории массового обслуживания результатами, а также многочисленными экспериментами с применением имитационного моделирования и численного анализа.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Автор лично участвовал в получении всех результатов, изложенных в работе, а именно в разработке и применении методов исследования рассматриваемых моделей, выводе всех формул, доказательстве всех представленных в диссертации теорем, разработке представленного комплекса проблемно-ориентированных программ и алгоритмов моделирования процессов массового обслуживания, выполнении численного анализа полученных результатов.

Связь работы с крупным научным проектом. Результаты диссертационной работы были получены в рамках выполнения следующих научных проектов: 1) госзадание минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2013 годы «Разработка и исследование вероятностных, статистических и логических моделей компонентов интегрированных информационно-телекоммуникационных систем обработки, хранения, передачи и защиты информации» № 8.4055.2011, номер госрегистрации 01201261193; 2) научно-исследовательская работа в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки РФ № 1.511.2014/К «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» (2014–2016г.).

Соответствие паспорту специальности. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и включает в себя оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ, а именно соответствуют следующим областям (номера соответствуют пунктам в паспорте специальности): п. 2. — Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; п. 4. — Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; п. 5. — Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Апробация работы. Основные положения работы и отдельные ее вопросы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: XI–XIV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование», г. Анжеро-Судженск, 2012–2015 гг; Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем», г. Москва, 2013, 2016 гг.; 17-ая, 18-ая Международная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2013, 2015)», г. Москва, 2013, 2015 гг.; X Российская конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур», пос. Катунь Алтайского края, 9–11 июня 2014 г.; 6th International Congress «Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)», г. Санкт-Петербург, 6–8 октября 2014 г.; Международная научная конференция, посвященная 80-летию проф. Г. А. Медведева «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения», г. Минск, 23–26 февраля 2015г.; XIX Всероссийская научно-практическая конференция «Научное творчество молодежи», г. Анжеро-Судженск, 15–16 мая 2015 г.; Международная научная конференция «Information Technologies for Complex System Analysis and Synthesis. The Second International Summer School», г. Анапа, 8–12 июня 2015г.

Публикации. По тематике диссертации опубликовано 16 работ, из них 2 статьи в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, 2 свидетельства о регистрации электронного ресурса, 12 публикаций в сборниках материалов международных и всероссийских научных и научно-практических конференций (в том числе 3 публикации в сборниках материалов конференций, индексируемых Web of Science и Scopus).

Структура работы. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы (143 наименования). Общий объем работы — 134 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описаны актуальность, теоретическая и практическая значимость работы, цель, основные задачи и методы исследования.

В **первой главе** исследуются математические модели неоднородных бесконечнолинейных СМО с входящим MAP-потоком разнотипных заявок.

MAP-поток задан управляющей цепью Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний K и определяемый матрицей инфинитезимальных характеристик

$\mathbf{Q}$, матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = diag[\lambda_k]$, матрицей $\mathbf{D} = d_{\nu k},\ \nu, k = 1, \ldots, K$. $d_{\nu k}$ — вероятности наступления событий в потоке в момент изменения состояния управляющей цепи ($\nu \neq k$), $d_{kk} = 0$.

Заявки, поступившие в систему, с вероятностью p_i $(i = 1, \ldots, n)$ обслуживаются в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_i $(i = 1, \ldots, n)$, соответствующим типу заявки. Ставится задача исследования n-мерного немарковского случайного процесса $\{l_1(t), \ldots, l_n(t)\}$, где $l_i(t)$ — число занятых приборов i-ого типа в системе в момент времени t.

Для стационарного распределения вероятностей $\Pi(k, l_1, \ldots, l_n)$ марковского $(n+1)$-мерного случайного процесса $\{k(t), l_1(t), \ldots, l_n(t)\}$ записана система дифференциальных уравнений Колмогорова

$$0 = \left(-\lambda_k - \sum_{i=1}^{n} l_i\mu_i\right)\Pi(k, l_1, \ldots, l_n)+$$

$$+\Pi(k, l_1 - 1, \ldots, l_n)\lambda_k p_1 + \cdots + \Pi(k, l_1, \ldots, l_n - 1)\lambda_k p_n+ \tag{1}$$

$$+\Pi(k, l_1 + 1, \ldots, l_n)(l_1 + 1)\mu_1 + \cdots + \Pi(k, l_1, \ldots, l_n + 1)(l_n + 1)\mu_n+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{K}\{(1 - d_{\nu k})\Pi(\nu, l_1, \ldots, l_n) + d_{\nu k}\,(p_1\Pi(\nu, l_1 - 1, \ldots, l_n)+ \ldots$$
$$+\ p_n\Pi(\nu, l_1, \ldots, l_n - 1))\}\, q_{\nu k}.$$

Далее, определив частичные характеристические функции в виде $H(k, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{l_n=0}^{\infty} e^{ju_1l_1} \times \cdots \times e^{ju_nl_n}\Pi(k, l_1, \ldots, l_n)$, $(j = \sqrt{-1})$, получено матричное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i j(e^{-ju_i} - 1)\frac{\partial \mathbf{H}(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i} = \mathbf{H}(u_1, \ldots, u_n)\left[\mathbf{Q} + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{ju_i} - 1\right)\mathbf{B}\right],$$

$$\mathbf{H}(0, \ldots, 0) = \mathbf{r}. \tag{2}$$

здесь

• $\mathbf{H}(u_1, \ldots, u_n, t) = [H(1, u_1, \ldots, u_n, t), \ldots, H(K, u_1, \ldots, u_n, t)]$ — вектор-строка, компонентами которой являются характеристические функции случайного процесса $\{k(t), l_1(t), ..., l_n(t)\}$ для каждого состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$;

• $\mathbf{B} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{A}$;

• $\mathbf{A}$ — произведение Адамара матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{Q}$, то есть матрица из элементов $d_{\nu k}q_{\nu k}$, $\nu = 1, \ldots, K$, $k = 1, \ldots, K$;

• $\mathbf{r} = [r(1), \ldots, r(K)]$ — ветор-строка стационраного распределения управляющей цепи Маркова, определямая системой уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = 0, \\ \mathbf{re} = 1, \ \mathbf{e} = [1, \ldots, 1]^T. \end{cases} \tag{3}$$

Получены выражения для начальных моментов первого и второго порядка числа занятых приборов неоднородной бесконечнолинейной СМО MAP|M|$^{(n)}$|∞.

Обозначим fm_i (first moment) — среднее число занятых приборов типа i, sm_i (second moment) — начальный момент второго порядка, cm_{ig}(correlation moment) — корреляционный момент числа занятых приборов типа i и g ($i = 1, \ldots, n$, $g = 1, \ldots, n$, $i \neq g$).

Начальные моменты первого порядка

$$fm_i = \frac{p_i}{\mu_i}\mathbf{rBe}, \ (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

где $\mathbf{e}$ —единичный вектор-столбец.

Начальные моменты второго порядка

$$sm_i = p_i\mathbf{rB}\left\{\mathbf{I} + [\mu_i\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}[\mu_i\mathbf{I} + 2p_i\mathbf{B}]\right\}\{2\mu_i\mathbf{I} - \mathbf{Q}\}^{-1}\mathbf{e}, \tag{5}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Корреляционный момент

$$cm_{ig} = (p_g\mathbf{fm}_i + p_i\mathbf{fm}_g)\mathbf{B}\left[(\mu_i + \mu_g)\mathbf{I} - \mathbf{Q}\right]^{-1}\mathbf{e}, \tag{6}$$

где $\mathbf{fm}_i = p_i\mathbf{rB}[\mu_i\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}$.

На численных примерах исследовано влияние исходных параметров системы на значение коэффициента корреляции r_{ig} между компонентами многомерного вектора $\{l_1(t), \cdots, l_n(t)\}$. Сделаны следующие выводы для системы MAP|M$^{(2)}$|∞:

1) чем выше интенсивность входящего потока, тем больше зависимость между компонентами двумерного процесса $\{l_1(t), l_2(t)\}$;

2) зависимость между числом занятых приборов каждого типа в системе обратно пропорциональна соотношению между параметрами обслуживания на приборах;

3) с увеличением соотношения вероятностей p_1 и p_2 коэффциент корреляции $r(l_1, l_2)$ уменьшается.

Далее исследование системы (2) проводилось методом асимптотического анализа при различных асимптотических условиях: 1)эквивалентного роста времени обслуживания на приборах каждого типа

$$\mu_i = q_i\mu, \qquad \mu \to 0, \qquad \left(\frac{1}{\mu_i} \to \infty\right), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

2)предельно редких изменений состояний (ПРИС) управляющей цепи Маркова

$$q^{(1)}_{\nu k} = \varepsilon q_{\nu k}, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \nu = 1, \ldots, K,\ k = 1, \ldots, K. \tag{8}$$

Доказаны теоремы.

Теорема 1. 1 *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в неоднородной системе $MAP|M^{(n)}|\infty$ при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\kappa\frac{p_1}{\mu_1}, \ldots, \kappa\frac{p_n}{\mu_n}]$ — *вектор математических ожиданий числа занятых приборов,*

$\mathbf{K} = [K_{is}]$, $i, s = 1, \ldots, n$, *где* $K_{ii} = \frac{\kappa p_i + \kappa_2 p_i^2}{\mu_i}$ — *дисперсия числа занятых приборов i-ого типа,* $K_{is} = \frac{\kappa_2 p_i p_s}{\mu_i + \mu_s}$, $i \neq s$ — *ковариационные моменты числа занятых приборов, где* $\kappa_2 = \mathbf{fBe}$, *вектор* $\mathbf{f}$ *является решением уравнения*

$$\begin{gathered}\mathbf{fQ} + \mathbf{r}\left[\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I}\right] = 0,\\ \mathbf{fe} = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 1. 2 *Асимптотическая характеристическая функция многомерного процесса $\{l_1(t), \cdots, l_n(t)\}$ — числа занятых приборов разного типа в системе $MAP|M^{(n)}|\infty$ в условии предельно редких изменений состояний входящего MAP-потока имеет вид*

$$h_1(u_1, ..., u_n) = \sum_{k=1}^{K} r(k) \exp\left\{\lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\mu_i}\left(e^{ju_i} - 1\right)\right\}. \tag{10}$$

Для определения области применимости асимптотических алгоритмов проведено численное сравнение асимптотических и допредельных характеристик системы.

Пример 1

Рассмотрим СМО MAP|M$^{(2)}$|∞, на вход которой поступает MAP-поток заявок, управляемый цепью Маркова с тремя сосотояниями.

Зададим следующие параметры входящего потока:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 6 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 2,5 & 2,5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,6$ — вероятности, определяющие тип заявки входящего MAP-потока, $\mu_1 = \varepsilon$, $\mu_2 = 2\varepsilon$ — параметры экспоненциального времени обслуживания на приборах первого и второго типа соответственно.

Будем оценивать величину относительной погрешности в виде $\Delta_i = \left|\frac{Var_i - Var_i^{as}}{Var_i}\right|$, где Var_i — точное значение дисперсии числа занятых приборов i-ого типа, а Var_i^{as} — асимптотическое.

Таблица 1 – Сравнение допредельных и асимптотических характеристик системы MAP|M$^{(2)}$|∞

ε	1	0,5	0,1
$\mathbf{a}^T = \mathbf{a}^T_{as}$	[4,143 3,107]	[8,285 6,214]	[41,426 31,069]
$\mathbf{K}$	$\begin{pmatrix} 4,6 & 0,457 \\ 0,457 & 3,621 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9,199 & 0,914 \\ 0,914 & 7,242 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 45,995 & 4,569 \\ 4,569 & 36,21 \end{pmatrix}$
$\mathbf{K}_{as}$	$\begin{pmatrix} 4,508 & 0,335 \\ 0,335 & 3,45 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9,098 & 0,772 \\ 0,772 & 7,037 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 45,884 & 4,406 \\ 4,406 & 35,966 \end{pmatrix}$
Δ_1	0,02	**0**,011	0,002
Δ_2	0,038	**0**,023	0,005

Из Таблицы 1 видно, что уже при $\varepsilon = 0,5$ величина относительной погрешности не превосходит 3%, что мы считаем очень хорошим результатом с точки зрения эффективности применения метода асимптотического анализа.

В Таблице 2 отображена зависимость относительных погрешностей от разности интенсивностей исходного MAP-потока и MAP-потока, в котором предельно редко изменяются состояния управляющей цепи Маркова. Можно сделать логичный вывод, что чем реже изменяется состояние управляющей входящим MAP-потоком цепи Маркова, тем точнее аппроксимация допредельных характеристик соответствующими асимптотическими характеристиками.

Таблица 2 – Зависимость относительных погрешностей от разности интенсивностей исходного MAP-потока и MAP-потока в условии ПРИС

$\frac{\lvert \mathbf{rBe} - \mathbf{r\Lambda e} \rvert}{\mathbf{rBe}}$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
$9,831 \cdot 10^-3$	$0,123$	$0,165$	$0,062$
$9,919 \cdot 10^-4$	$0,032$	$0,060$	$0,011$
$9.928 \cdot 10^-5$	$\mathbf{0,004}$	$\mathbf{0,008}$	$\mathbf{0,001}$

Вторая глава посвящена исследованию математических моделей неоднородных бесконечнолинейных СМО $\mathrm{GI}|\mathrm{M}^{(n)}|\infty$ с входящим рекурретным потоком разнотипных заявок.

Рекуррентный поток задан функцией распределения длин интервалов между моментами наступления событий $A(z)$. Дисциплина обслуживания такая же как в уже рассмотренной СМО $\mathrm{MAP}|\mathrm{M}^{(n)}|\infty$.

Исследован n-мерный немарковский случайный процесс $\{l_1(t), l_2(t), \ldots, l_n(t)\}$ — числа занятых приборов каждого типа. Для стационарного распределения вероятностей $\Pi(z, l_1, l_2, \ldots, l_n)$ $(n+1)$-мерного марковского процесса $\{z(t), l_1(t), l_2(t), \ldots, l_n(t)\}$, $z(t)$ — остаточное время от момента времени t до момента наступления следующего события потока, записана система дифференциальных уравнений Колмогорова и система дифференциальных уравнений для характеристических функций $H(z, u_1, \ldots, u_n) = \sum\limits_{l_1=0}^{\infty} \cdots \sum\limits_{l_n=0}^{\infty} e^{ju_1 l_1} \times \cdots \times e^{ju_n l_n} P(z, l_1, \ldots, l_n)$

$$\frac{\partial H(z, u_1, \ldots, u_n)}{\partial z} + \frac{\partial H(0, u_1, \ldots, u_n)}{\partial z} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{ju_i} A(z) - 1 \right) - \\ -j \sum_{i=1}^{n} \mu_i (e^{-ju_i} - 1) \frac{\partial H(z, u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i} = 0, \tag{11}$$

где

$$\frac{\partial H(0, u_1, \ldots, u_n)}{\partial z} = \left. \frac{\partial H(z, u_1, \ldots, u_n)}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Выражение для стационарного распределения вероятностей процесса $z(t)$ имеет вид

$$R(z) = \frac{\partial R(0)}{\partial z}\int_0^z (1 - A(x))dx. \qquad (12)$$

Доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Среднее значение числа занятых приборов i -ого типа fm_i, $(i = 1, \dots, n)$ в системе $GI|M^{(n)}|\infty$ имеет вид

$$fm_i = \frac{p_i}{\mu_i}\lambda, \qquad (13)$$

где $\lambda = R'(0)$.

Утверждение 2.

Начальные моменты второго порядка числа занятых приборов i-ого типа sm_i, $(i = 1, \dots, n)$ в системе $GI|M^{(n)}|\infty$ имеют вид

$$sm_i = \frac{p_i\lambda}{\mu_i} + \frac{p_i^2\lambda}{\mu_i}\frac{A^*(\mu_i)}{1 - A^*(\mu_i)}, \qquad (14)$$

где $A^*(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha z}dA(z)$ — преобразование Лапласа-Стилтьеса.

Утверждение 3.

Корреляционный момент числа занятых приборов i-ого и g-ого типов cm_{ig}, $(i = 1, \dots, n,\ g = 1, \dots, n,\ i \neq g)$ в системе $GI|M^{(n)}|\infty$ имеет вид

$$cm_{ig} = \frac{p_i p_g}{\mu_i + \mu_g}\left\{\frac{A^*(\mu_i)}{1 - A^*(\mu_i)} + \frac{A^*(\mu_g)}{1 - A^*(\mu_g)}\right\}\lambda. \qquad (15)$$

Теорема 2. 1 *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе $GI|M^{(n)}|\infty$ при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\lambda\frac{p_1}{\mu_1}, \dots, \lambda\frac{p_n}{\mu_n}]$ — *вектор математических ожиданий числа занятых приборов,*

$\mathbf{K} = [K_{is}]$, $i, s = 1, \dots, n$, *где* $K_{ii} = \frac{\lambda p_i + p_i^2 f_0}{\mu_i}$ — *дисперсия числа занятых приборов i-ого типа,* $K_{is} = \frac{p_i p_s f_0}{\mu_i + \mu_s}$, $i \neq s$ — *ковариационные моменты числа занятых приборов, где f_0 определяются выражением*

$$f_0 = \lambda^2\int_0^\infty (A(u) - R(u))du. \qquad (16)$$

Численные эксперименты позволили сформулировать выводы о зависимости между числом занятых приборов каждого типа в системе и соотношении между параметрами обслуживания на приборах и вероятностей p_i. А также о том, что точность аппроксимации очень велика и разница в значениях точных и асимптотических характеристик не превышает 3% уже в случае когда средняя продолжительность обслуживания в 10 и более раз больше интенсивности входящего потока.

В **третьей главе** выполнено исследование неоднородных немарковских СМО вида MMPP|GI$^{(n)}$|∞ и GI|GI$^{(n)}$|∞.

В качестве входящих потоков в данной главе рассматриваются математические модели MMPP-потока и рекуррентного потока разнотипных заявок. Время обслуживания на приборах имеет произвольную функцию распределения $B_i(x)(i = 1, \ldots, n)$. Для исследования данных систем применена модификация метода многомерного динамического просеивания. Она позволяет, получив выражения для характеристик потоков так называемых «просеянных»заявок, перейти к выражениям для характеристик изначально рассматриваемых потоков.

Далее поток просеянных заявок $\{m_1(t), \ldots, m_n(t)\}$ был преобразован в нестационарную $(n+1)$-мерную цепь Маркова путем введения дополнительной компоненты $k(t)$ для СМО MMPP|GI$^{(n)}$|∞ и $z(t)$ для СМО GI|GI$^{(n)}$|∞, которая исследуется методом асимптотического анализа в условиях эквивалентного роста времени обслуживания на приборах

$$b_i = q_i b, \qquad b \to \infty, \qquad \left(\frac{1}{b_i} \to 0\right), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Здесь $b_i = \int\limits_0^\infty (1 - B_i(x))dx\, (i = 1, \ldots, n)$ — среднее значение времени обслуживания заявки на приборе i-ого типа.

Доказаны соотвествующие теоремы.

Теорема 3. 1 *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в неоднородной системе $MMPP|GI^{(n)}|\infty$ при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\kappa_1 p_1 b_1, \ldots, \kappa_1 p_n b_n]$ *— вектор математических ожиданий числа занятых приборов, где $\kappa_1 = \mathbf{r\Lambda e}$, $\mathbf{e}$ — единичный вектор-столбец;*

$\mathbf{K} = [K_{ig}]$, *$i, g = 1, \ldots, n$, где $K_{ii} = \kappa_1 p_i b_i + 2p_i^2 \beta_i \kappa_2$ — дисперсия числа занятых приборов i-ого типа, $K_{ig} = \kappa_2 p_i p_g \beta_{ig}$, $i \neq g$ — ковариационные* *моменты числа занятых приборов. Здесь* $\kappa_2 = \mathbf{f\Lambda e}$, *а вектор-функция* $\mathbf{f}$ *является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{gathered}\mathbf{fQ} + \mathbf{r}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1 \mathbf{I}) = 0,\\ \mathbf{fe} = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Теорема 3. 2 *Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе* $GI|GI^{(n)}|\infty$ *с* n *типами обслуживающих приборов при условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах можно аппроксимировать многомерным гауссовским распределением с параметрами:*

$\mathbf{a}^T = [\lambda p_1 b_1, \ldots, \lambda p_n b_n]$ — *вектор математических ожиданий числа занятых приборов;*

$\mathbf{K} = [K_{ig}]$, $i, g = 1, \ldots, n$, *где* $K_{ii} = \lambda p_i b_i + 2p_i^2 \beta_i f_0$ — *дисперсия числа занятых приборов* i*-ого типа,* $K_{ig} = p_i p_g \beta_{ig} f_0$, $i \neq g$ — *ковариационные моменты числа занятых приборов, где*

$$f_0 = \lambda^2 \int_0^\infty (A(u) - R(u))du. \tag{19}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\beta_i = \int_{-\infty}^0 (S_i(z))^2 dz = \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-z))^2 dz = \int_0^\infty (1 - B_i(z))^2 dz,\\ \beta_{ig} = \int_{-\infty}^0 S_i(z) S_g(z) dz = \int_{-\infty}^0 (1 - B_i(-z))(1 - B_g(-z))dz = \\ = \int_0^\infty (1 - B_i(z))(1 - B_g(z))dz,\\ i = 1, \ldots, n, \qquad g = 1, \ldots, n, \qquad i \neq g.\end{gathered} \tag{20}$$

Сделаны выводы о хорошей сходимости результатов, полученных разными методами (асимптотического анализа и имитационного моделирования) для рассматриваемых систем в случае, когда средняя продолжительность обслуживания в 100 и более раз больше интенсивности входящего потока.

В **четвертой главе** представлено описание разработанного комплекса программ, реализующего имитационное моделирование и численный анализ вероятностно-временных характеристик исследуемых СМО. В представленный комплекс входит: программа численной реализации нахождения допредельных характеристик исследуемых процессов; программы, реализующие гауссовскую аппроксимацию числа занятых приборов в исследуемых СМО, полученную методом асимптотического анализа при условии растущего времени обслуживания и ПРИС; имитационное моделирование СМО с неограниченным числом приборов и разнотипным обслуживанием. Распределение времени обслуживания на приборах экспоненциальное или произвольное (равномерное или гамма-распределение). Численные алгоритмы для расчета точных и асимптотических характеристик ассматриваемых систем представлены в виде рабочих листов системы MathCAD. Для моделирования исследуемых систем был выбран дискретно-событийный метод моделирования. Разработан удобный нтерфейс пользователя. Проведена оценка области применимости результатов, полученных с помощью имитационного моделирования.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные на основе настоящей диссертационной работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:

1. Убонова Е. Г. Гауссовская аппроксимация для системы массового обслуживания MMPP/M/∞ с разнотипным обслуживанием / Е. Г. Убонова, **Е. В. Панкратова** // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2015. — Т. 58, № 11/2. — С. 225–229. — 0,3/ 0,15 п.л.

2. Моисеева С. П. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления / С. П. Моисеева, **Е. В. Панкратова**, Е. Г. Убонова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2016. — № 2 (35). — С. 46–53. — 0,72/ 0,24 п.л.

Публикации в сборниках материалов конференций, индексируемых Web of Science и Scopus:

3. **Pankratova E.** Queueing System MAP|M|∞ with n Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Communications in Computer and Information Science. — 2014. — Vol. 487 : Information Technologies and Mathematical Modeling: Proceedings of the 13th International Scientific Conference, ITMM 2014, named after A. F. Terpugov. Anzhero-Sudzhensk, Russia, November 20–22, 2014. — P. 356–366. — 1,1/ 0,55 п.л. — DOI: 10.1007/978–3–319–13671–4_41

4. **Pankratova E.** Queueing System with Renewal Arrival Process and Two Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva //6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2014): Proceedings.

St. Petersburg, October 06–08, 2014. — St. Petersburg, 2015. — P. 514–517. — 0,3/ 0,15 п.л. — DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002154

5. **Pankratova E.** Queueing System $GI|GI|\infty$ with n Types of Customers / E. Pankratova, S. Moiseeva // Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 564 : Information Technologies and Mathematical Modeling. Queueing Theory and Applications: Proceedings of the 14th International Scientific Conference, ITMM 2015, named after A. F. Terpugov. Anzhero-Sudzhensk, Russia, November 18–22, 2015. — P. 216–225. — 1/ 0,5 п.л. — DOI: 10.1007/978–3–319–25861–4_19

Свидетельства о регистрации электронного ресурса:

6. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 21261 «Программное обеспечение «MAP-модель»/ авторы: Панкратов И. В., **Панкратова Е. В.**, дата регистрации в объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» 20.10.2015 г.

7. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 21262 «GI-модель»/ авторы: Панкратов И. В., **Панкратова Е. В.** — дата регистрации в объединенном фонде электронных ресурсов «Наука и образование» 20.10.2015 г.

Публикации в других научных изданиях:

8. Моисеева С. П. Исследование вероятностных характеристик математической модели обслуживания разнотипных заявок телекоммуникационного потока / С. П. Моисеева, **Е. В. Панкратова** // Информационно-телекоммуникационн технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, 22–26 апреля 2013 г. — М., 2013. — С. 39–42. — 0,14/ 0,07 п.л.

9. **Панкратова Е. В.** Исследование системы массового обслуживания $GI/GI/\infty$ с двумя типами заявок /Е. В. Панкратова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2015): материалы XIV Международной конференции им. А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 18–22 ноября 2015 г. — Томск, 2015. — Ч. 1. — С. 152–157. — 0,38 п.л.

10. **Панкратова Е. В.** Исследование системы массового обслуживания $GI|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа / Е. В. Панкратова // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора, доктора физико-математических наук Г. А. Медведева. Минск, 23–26 февраля 2015 г. — Минск, 2015. — С. 242–247. — 0,48 п.л.

11. **Панкратова Е.** Исследование системы массового обслуживания $MAP|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием методом асимптотического анализа в условии

предельно редких изменений состояний входящего MAP-потока / Е. Панкратова // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь: материалы 18-ой международной научной конференции DCCN-2015. Москва, 19–22 октября 2015 г. — М., 2015. — С. 585–592. — 0,64 п.л.

12. **Панкратова Е. В.** Исследование системы MMAP|M|∞ с разнотипными заявками / Е. В. Панкратова, В. В. Коновалова // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: материалы X Российской конференции с международным участием. Катунь, 09–11 июня 2014 г. — Томск, 2014 — С. 107–108. — 0,24/ 0,12 п.л.

13. **Панкратова Е. В.** Исследование вероятностно-временных характеристик MMPP-потока разнотипных заявок / Е. В. Панкратова, С. П. Моисеева // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2013): материалы XII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием им. А. Ф. Терпугова. Анжеро-Судженск, 29–30 ноября 2013 г. — Томск, 2013. — Ч. 2. — С. 75–80. — 0,24/ 0,12 п.л.

14. **Панкратова Е. В.** Исследование многопродуктовой немарковской системы массового обслуживания методом динамического просеивания / Е. В. Панкратова, С. П. Моисеева // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2013): материалы международной научной конференции. Москва, 07–10 октября 2013 г. — М., 2013. — С. 386–393. — 0,64/ 0,32 п.л.

15. **Панкратова Е. В.** Исследование бесконечнолинейной СМО с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления / Е. В. Панкратова, Е. Г. Убонова, С. П. Моисеева // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы VI Всероссийской конференции с международным участием. Москва, 18–20 апреля 2016 г. —М., 2016. — С. 49–51. — 0,12/ 0,04 п.л.

16. Убонова Е. Г. Исследование системы массового обслуживания MMPP|M|∞ с разнотипным обслуживанием / Е. Г. Убонова, **Е. В. Панкратова** // Научное творчество молодежи. Математика, информатика: материалы XIX Всероссийской научно-практической конференции. Анжеро-Судженск, 15–16 мая 2015 г. — Томск, 2015. — С. 87–91. — 0,2/ 0,1 п.л.

Издание подготовлено в авторской редакции.
Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета
Заказ № 060916 от «09» сентября 2016 г. Тираж 100 экз.
г. Томск Московский тр.8 тел. 53-15-28