ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики

Задачи олимпиады 2016 года

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятина

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией ММФ
Протокол № 4 от 22 апреля 2016 г.
Председатель методической комиссии О.П. Федорова.

В данной работе представлены задачи с решениями олимпиад по математике, которые прошли в Томском государственном университете в 2016 г. Ряд задач являются авторскими. Многие задачи взяты из сборника избранных задач из журнала «American mathematical monthly» под редакцией В.М. Алексеева, а также из сборника «Избранные олимпиадные задачи» Н.Б. Васильева, А.П. Савина и А.А. Егорова.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по математике студентов дневной формы обучения ММФ, ФПМК, РФФ, ФТФ, ФФ, ФИнф, МФУ, ХФ, ГГФ, БИ.

СОСТАВИТЕЛИ:
доцент Н.Ю. Галанова, доцент Л.В. Гензе,
доцент Я.С. Гриншпон, ст. пр. Ю.К. Кошельский,
доцент В.А. Пчелинцев, доцент Е.Н. Путятина,
доцент Е.А. Тимошенко

ОЛИМПИАДА 2016
(физические факультеты, I курс)

Задача 1. Пусть $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{n}$ – все решения системы $\begin{cases} y = \cos x; \\ x = 100\cos 100y. \end{cases}$ Найдите отношение $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}$.

Задача 2. Функция $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{x \cdot \sin(\sqrt[3]{x})}$ теряет смысл при $x = 0$.

Доопределите, если это возможно, функцию, чтобы она стала непрерывной в нуле. Если это невозможно, то объясните почему.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального n, отличного от единицы, существует n иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Задача 4. Найдите все возможные наборы из трех попарно различных целых чисел, обладающих следующим свойством: если выбрать одно из этих чисел и прибавить к нему сумму кубов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа.

Задача 5. Дана система из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, все коэффициенты которой отличны от нуля. При решении этой системы по формулам Крамера $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ оказалось, что как основной определитель Δ, так и все дополнительные определители Δ_1, Δ_2, …, Δ_n равны нулю. Для каждого натурального n, отличного от единицы, ответьте на вопрос: «Верно ли, что данная система уравнений обязательно имеет бесконечно много решений?».

Задача 6. Решите уравнение

$$\left(5-x-x^2\right)^2+3\left(5-x-x^2\right)-5=x.$$

ОЛИМПИАДА 2016
(физические факультеты, старшие курсы)

Задача 1. Найдите площадь области, ограниченной в декартовой системе координат линией $(x-y)^2+x^2=1$.

Задача 2. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{1!+2!+\ldots+n!}$, где $(2n)!!$ – это произведение всех четных натуральных чисел, не превосходящих $(2n)$.

Задача 3. Докажите, что формула

$\int\cos^a x\,dx=\frac{\sin x\cos^{a-1}x}{a}+\frac{a-1}{a}\int\cos^{a-2}x\,dx$ верна для любого $a\neq 0$. С помощью этой формулы вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^8 x\,dx$.

Задача 4. Решите задачу Коши:

$$3(x^2-1)y^2y'+xy^3=x^3+x^2-x-1,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Задача 5. Докажите, что для любого натурального n, отличного от единицы, существует n иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Задача 6. Вычислите $\oint\limits_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, где $X = a_1x + b_1y$, $Y = a_2x + b_2y$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, C – простой замкнутый контур, окружающий начало координат.

ОЛИМПИАДА 2016
(естественнонаучные факультеты)

Задача 1. Решите уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$ в натуральных числах.

Задача 2. Рассмотрим отрезок AB. Последовательность точек $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строится следующим образом: $M_1 = A$, $M_2 = B$, M_{n+1} – середина отрезка, соединяющего точки M_{n-1} и M_n. К какой точке отрезка AB стремится последовательность $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Задача 3. Постройте график функции $y = x + [x]$ при $0 \le x \le 5$, где $[x]$ – это целая часть числа x.

Задача 4. Какой из двух следующих пределов существует, а какой нет: а) предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi n)$; б) предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(\pi x)$? Ответ обоснуйте.

Задача 5. Вычислите значение выражения $\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}$, где $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho>0$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Задача 6. Существуют ли три различных иррациональных числа, сумма и произведение которых являются целыми?

Решения (физические факультеты, I курс)

Задача 1. Пусть $\{(x_k;y_k)\}_{k=1}^{n}$ – все решения системы $\begin{cases} y=\cos x; \\ x=100\cos 100y. \end{cases}$ Найдите отношение $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}$.

Решение. Сделаем замену $z = 100y$. Тогда исходная система примет вид $\begin{cases} z=100\cos x; \\ x=100\cos z. \end{cases}$ Очевидно, что если пара $(a;\, b)$ – решение последней системы, то пара $(b;\, a)$ – тоже ее решение. Тогда $x_1+x_2+\cdots+x_n=z_1+z_2+\cdots+z_n=100(y_1+y_2+\cdots+y_n)$, откуда искомое отношение равно 100.

Задача 2. Функция $f(x)=\frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x\cdot\sin(\sqrt[3]{x})}$ теряет смысл при $x=0$.

Доопределите, если это возможно, функцию, чтобы она стала непрерывной в нуле. Если это невозможно, то объясните почему.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)$. Воспользуемся эквивалентностью при $x \to 0$:

$$\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\sim\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\left(1+\frac{1-x}{1+x}-1\right)\sim$$
$$\sim\sqrt{x^{2/3}}\sqrt{1+x^{1/3}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}-1\right)\sim|x|^{1/3}(-2x).$$

Тогда имеем равенства

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x^2}}\cdot\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x\cdot\sin(\sqrt[3]{x})}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{-2x|x|^{1/3}}{x\cdot x^{1/3}}=-2\lim_{x\to\pm 0}\left(\frac{|x|}{x}\right)^{1/3}.$$

Поэтому $f(0-0)=+2, f(0+0)=-2$. Предела в нуле не существует, а значит, доопределить по непрерывности в нуле нельзя.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального *n*, отличного от единицы, существует *n* иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Решение. Числа $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=\sqrt[n]{2}$,

$a_n=(1-n)\sqrt[n]{2}$ удовлетворяют условию задачи. Число $\sqrt[n]{2}$ иррационально, т.к. иначе $\sqrt[n]{2}=\frac{k}{m}$, где *k* и *m* – натуральные, $\frac{k}{m}$ – несократимая дробь; но тогда $2=\frac{k^n}{m^n}$ и $k^n=2m^n$ – четное число, а значит, $k^n=(2l)^n=2m^n$, $m^n=2^{n-1}l^n$, т.е. число *m* тоже четное и дробь $\frac{k}{m}$ можно сократить – противоречие.

Задача 4. Найдите все возможные наборы из трех попарно различных целых чисел, обладающих следующим свойством: если выбрать одно из этих чисел и прибавить к нему сумму кубов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа.

Решение. Числа *a*, *b*, *c* удовлетворяют условию $a+b^3+c^3=a^3+b+c^3=a^3+b^3+c$. Вычтя из всех частей равенства выражение $a^3+b^3+c^3$, получим $a-a^3=b-b^3=c-c^3$, т.е. *a*, *b*, *c* – это попарно различные решения уравнения $f(x)=y_0$, где $f(x)=x-x^3$. С помощью производной $f'(x)=1-3x^2$ мы видим, что область определения функции разбивается точками экстремумов $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ на три промежутка монотонности, каждому из которых принадлежит ровно один из трех различных корней уравнения $f(x)=y_0$.

Значит, считая, что $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, имеем

$y_0=f(a)\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{9};\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, а так как y_0 целое, то $y_0=0$. Из уравнения $f(x)=0$ находим, что $a=0$, $b=-1$, $c=1$. Остальные решения являются перестановкой данного решения.

Можно решать задачу также и аналитически. Учитывая, что $a\neq b$, выразим из равенства $a-a^3=b-b^3$ одну переменную через другую: $a=\dfrac{-b\pm\sqrt{4-3b^2}}{2}$. Видно, что $0\le 4-3b^2\le 4$, а значит, так как *a* и *b* – целые, то $4-3b^2=1$ или $4-3b^2=4$. Отсюда $b=\pm1$ или $b=0$, что соответствует набору чисел 0; –1; 1.

Задача 5. Дана система из *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными, все коэффициенты которой отличны от нуля. При решении этой системы по формулам Крамера $x_k=\dfrac{\Delta_k}{\Delta}$ оказалось, что как основной определитель Δ, так и все дополнительные определители Δ_1, Δ_2, …, Δ_n равны нулю. Для каждого натурального *n*, отличного от единицы, ответьте на вопрос: «Верно ли, что данная система уравнений обязательно имеет бесконечно много решений?».

Решение. Если $n \geq 3$, то ответ отрицателен.

Действительно, система уравнений вида $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

не имеет решений, так как первое и третье уравнения несовместны, но, с другой стороны, первые две строки в любом из определителей Δ, Δ_1, Δ_2, …, Δ_n одинаковы, а значит, эти определители равны нулю.

Если же $n = 2$, то ответ положителен, так как из равенства нулю определителей следует пропорциональность их строк, причем коэффициент пропорциональности для всех определителей один и тот же. Значит, уравнения линейно зависимы, и система имеет бесконечно много решений.

Задача 6. Решите уравнение

$\left(5 - x - x^2\right)^2 + 3\left(5 - x - x^2\right) - 5 = x$.

Решение. Обозначим $f\left(x\right) = x^2 + 3x - 5$ и

$g\left(x\right) = 5 - x - x^2$. Тогда $\begin{cases} f\left(y\right) = x, \\ g\left(x\right) = y, \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} 5 - x - x^2 = y, \\ y^2 + 3y - 5 = x. \end{cases}$

Складывая эти уравнения почленно, получим

$$y^2 - x^2 + 3y - x = x + y,$$

откуда следует $\left(y - x\right)\left(y + x + 2\right) = 0$. Если $y = x$, то $x^2 + 2x - 5 = 0$ и $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$; если же $y = -x - 2$, то $5 - x - x^2 = -x - 2$, отсюда $x^2 = 7$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{7}$.

Решения
(физические факультеты, старшие курсы)

Задача 1. Найдите площадь области, ограниченной линией $(x-y)^2+x^2=1$.

Решение. Сделаем замену $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi$, где $\rho\ge 0$ и $0\le\varphi<2\pi$. Уравнение границы $(x-y)^2+x^2=1$ в новой системе координат имеет вид $\rho=1$. Якобиан перехода равен

$$J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \cos\varphi+\sin\varphi & -\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

Следовательно, площадь искомой области равна $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho=\pi$.

Ответ: π.

Задача 2. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{1!+2!+\ldots+n!}$, где $(2n)!!$ – это произведение всех четных натуральных чисел, не превосходящих $(2n)$.

Решение. Так как $1!+2!+\ldots+n!<n\cdot n!$, то $a_n=\dfrac{(2n)!!}{1!+2!+\ldots+n!}>\dfrac{(2n)!!}{n\cdot n!}=b_n$. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+2)n}{(n+1)^2}=2$. Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ по признаку сравнения следует расходимость исходного ряда.

Задача 3. Докажите, что формула

$$\int \cos^a x\,dx = \frac{\sin x \cos^{a-1} x}{a} + \frac{a-1}{a}\int \cos^{a-2} x\,dx$$ верна для любого $a \neq 0$. С помощью этой формулы вычислите интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^8 x\,dx$.

Решение. Продифференцируем и затем преобразуем правую часть формулы:

$$\left(\frac{\sin x \cos^{a-1} x}{a} + \frac{a-1}{a}\int \cos^{a-2} x\,dx\right)' =$$

$$= \frac{\cos^a x - (a-1)\cos^{a-2} x \sin^2 x + (a-1)\cos^{a-2} x}{a} = \cos^a x,$$

что совпадает с производной от левой части.

Найдем интеграл

$$\int \cos^8 x\,dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7}{8}\int \cos^6 x\,dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} +$$

$$+ \frac{7}{8}\cdot\frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\int \cos^4 x\,dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} +$$

$$+ \frac{7\sin x \cos^5 x}{48} + \frac{35}{48}\cdot\frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{35}{48}\cdot\frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7\sin x \cos^5 x}{48} + \frac{35\sin x \cos^3 x}{192} +$$

$$+ \frac{35}{64}\cdot\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{35}{64}\cdot\frac{1}{2}\int dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7\sin x \cos^5 x}{48} +$$

$$+ \frac{35\sin x \cos^3 x}{192} + \frac{35\sin x \cos x}{128} + \frac{35x}{128} + C.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^8 x\,dx = \frac{1}{8\cdot 2^4} + \frac{7}{48\cdot 2^3} + \frac{35}{192\cdot 2^2} +$$

$$+\frac{35}{128\cdot 2}+\frac{35\pi}{128\cdot 4}=\frac{6+14+35+105}{3\cdot 2^8}+\frac{35\pi}{512}=\frac{5}{24}+\frac{35\pi}{512}.$$

Ответ: $\frac{5}{24}+\frac{35\pi}{512}$.

Задача 4. Решите задачу Коши:

$$3(x^2-1)y^2y'+xy^3=x^3+x^2-x-1,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Решение. Сначала запишем уравнение в виде $\left(y^3\right)'+\frac{x}{x^2-1}y^3=x+1$. Выполнив замену $y^3=z,\ z=z(x)$, получим уравнение $z'+\frac{x}{x^2-1}z=x+1$. Находим решение методом вариации постоянной: $z'+\frac{x}{x^2-1}z=0$,

$$\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{x\,dx}{x^2-1},\quad \ln|z|=-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+c,\quad z=\frac{C}{\sqrt{\left|x^2-1\right|}}.$$

Учитывая, что в начальном условии $x_0=\frac{1}{2}$, выбираем интервал $\left|x\right|<1$, то есть $\left|x^2-1\right|=1-x^2$. После вариации постоянной $C=C(x)$ получаем: $\frac{C'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=x+1$, откуда

$$C(x)=\int(x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

Итак, общее решение имеет вид

$y^3 = -\frac{1}{3}(1-x^2) + \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$. Найдем константу *C*, учитывая начальное условие $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: $C = -\frac{\pi}{12}$. Окончательно имеем

$$y^3 = -\frac{1}{3}(1-x^2) + \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{12\sqrt{1-x^2}}.$$

Задача 5. Докажите, что для любого натурального *n*, отличного от единицы, существует *n* иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Решение. Числа $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = \sqrt[n]{2}$, $a_n = (1-n)\sqrt[n]{2}$ удовлетворяют условию задачи. Число $\sqrt[n]{2}$ иррационально, т.к. иначе $\sqrt[n]{2} = \frac{k}{m}$, где *k* и *m* – натуральные, $\frac{k}{m}$ – несократимая дробь; но тогда $2 = \frac{k^n}{m^n}$ и $k^n = 2m^n$ – четное число, а значит, $k^n = (2l)^n = 2m^n$, $m^n = 2^{n-1}l^n$, т.е. число *m* тоже четное и дробь $\frac{k}{m}$ можно сократить – противоречие.

Задача 6. Вычислить $\oint\limits_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, где $X = a_1x + b_1y$, $Y = a_2x + b_2y$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, C – простой замкнутый контур, окружающий начало координат.

Решение. Обозначим через D область, ограниченную простым контуром C.

Зададим отображение $f(x,y)=(X,Y), \begin{cases} X=a_1x+b_1y, \\ Y=a_2x+b_2y. \end{cases}$ Отображение является непрерывно дифференцируемым (как линейное) и биекцией. При этом область D переходит в некоторую область $\tilde{D}=f(D)$, а край области D переходит в край области $\tilde{D}$. Точка (0,0) переходит в себя. Так как точка (0,0) – внутренняя точка области $\tilde{D}$, то найдётся окружность $\tilde{\Gamma}$ радиуса R с центром в начале координат, целиком лежащая в области $\tilde{D}$.

Зададим параметризацию окружности $\tilde{\Gamma}$: $\begin{cases} X=R\cos(t), \\ Y=R\sin(t), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$ Так как $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то переменные x,y однозначно выражаются через X,Y из системы $\begin{cases} X=a_1x+b_1y, \\ Y=a_2x+b_2y. \end{cases}$

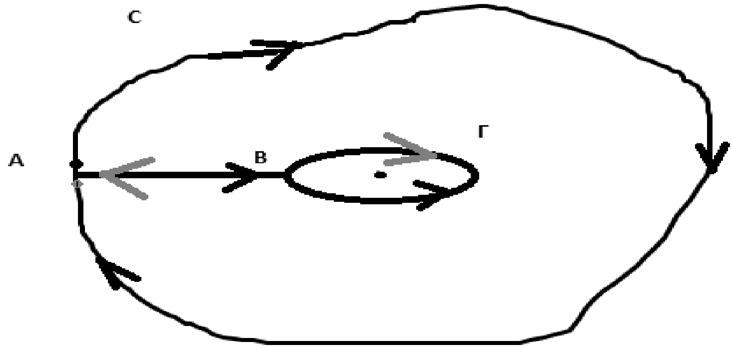
Окружность $\tilde{\Gamma}$ при отображении f^{-1} перейдёт в эллипс Γ с параметризацией

$$\begin{cases} x=\dfrac{R}{\Delta}(b_2\cos(t)-b_1\sin(t)), \\ y=\dfrac{R}{\Delta}(a_1\sin(t)-a_2\cos(t)), \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Эллипс Γ ориентирован так же, как $\tilde{\Gamma}$, если $\Delta>0$, и противоположно, если $\Delta<0$.

Пусть Γ ориентирован положительно.

Соединим внешний контур C с внутренним контуром Γ каким-нибудь отрезком *AB*; пусть точка *A* лежит на контуре C.



Тогда $\oint\limits_{C} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \int\limits_{\Pi} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} + \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, где

$C = C^+ \cup AB^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup AB^-$, $\Pi = C^+ \cup AB^+ \cup \Gamma^- \cup AB^-$.

Интеграл $\int\limits_{\Pi} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$ равен нулю по формуле Грина.

$$\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2(\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t)))dt}{R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

В случае отрицательной ориентации Γ ответ отличается знаком.

Ответ: $\pm 2\pi$.

Решения (естественнонаучные факультеты)

Задача 1. Решите уравнение $x+y=x^2-xy+y^2$ в натуральных числах.

Решение. Если $x=y$, то $x=y=2$. Пусть теперь $x\neq y$. Заметим, что если $(x;y)$ – решение уравнения, то $(y;x)$ – тоже решение, поэтому достаточно найти решения, в которых $y>x$, т.е. $y=x+k$. Подставив в уравнение и преобразовав, мы получим $x^2+(k-2)x+k^2-k=0$ – квадратное уравнение относительно переменной *x*. Потребуем, чтобы дискриминант этого уравнения был неотрицателен: $D=4-3k^2\geq 0$, отсюда $k=1$. Значит, $x=1$ и $y=2$.

Ответ: (2; 2), (1; 2), (2; 1).

Задача 2. Рассмотрим отрезок *AB*. Последовательность точек $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строится следующим образом: $M_1=A$, $M_2=B$, M_{n+1} – середина отрезка, соединяющего точки M_{n-1} и M_n. К какой точке отрезка *AB* стремится последовательность $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Решение. Будем считать, что прямая AB является числовой осью, причем координаты точек *A* и *B* равны нулю и единице соответственно. Методом математической индукции докажем, что координату точки M_n можно вычислить по формуле $\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$. Действительно, при $n=1$ и $n=2$ равенство проверяется непосредственно. Пусть теперь формула верна для точек M_{n-1} и M_n. Тогда для координаты точки M_{n+1} имеем

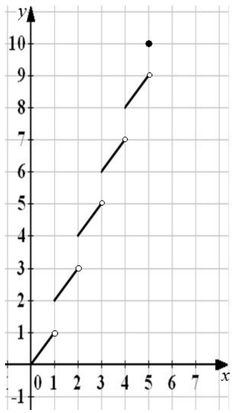
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{3}\left(2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right).$$

Таким образом, последовательность $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ стремится к точке с координатой $\dfrac{2}{3}$, т.е. к точке отрезка *AB*, делящей этот отрезок в отношении 2:1, считая от вершины *A*.

Задача 3. Постройте график функции $y = x + [x]$ при $0 \le x \le 5$, где $[x]$ – это целая часть числа *x*.

Решение. $y = x + [x] = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ x+1, & 1 \le x < 2, \\ x+2, & 2 \le x < 3, \\ x+3, & 3 \le x < 4, \\ x+4, & 4 \le x < 5, \\ 10, & x = 5. \end{cases}$



Задача 4. Какой из двух следующих пределов существует, а какой нет: а) предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi n)$; б) предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(\pi x)$? Ответ обоснуйте.

Решение. Так как $\sin(\pi n) = 0$ при любом натуральном *n*, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi n) = 0$. Покажем теперь с помощью определения Гейне, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(\pi x)$ не существует. Действительно, если рассмотреть две бесконечно большие последовательности $x_n = n$ и $y_n = 2n + \dfrac{1}{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi x_n) = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi y_n) = 1$.

Задача 5. Вычислите значение выражения $\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}$, где $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho>0$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Решение. Поскольку $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, то $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Найдем все частные производные, входящие в искомое выражение: $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho}=\cos\varphi$, $\frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi$, $\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}$. Подставив, получим $\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

Ответ: 1.

Задача 6. Существуют ли три различных иррациональных числа, сумма и произведение которых являются целыми?

Решение. Да. Числа $\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{2}$ и $-3\sqrt[3]{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Число $\sqrt[3]{2}$ иррационально, так как иначе мы имеем $\sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}$, $m,n-$натуральные, $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь; но тогда $2=\frac{m^3}{n^3}$, $m^3=2n^3-$четное число, а значит, $m=2k$, $n^3=4k^3$, т.е. число n тоже четно и дробь $\frac{m}{n}$ сократима – противоречие.

Областная олимпиада по математике 2016
(I курс)

Задача 1. Существуют ли матрица A из 3 строк и 2 столбцов и матрица B из 2 строк и 3 столбцов такие, что $AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$? Ответ обоснуйте.

Задача 2. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{A_1x^{k_1}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{A_2x^{k_2}}=1$, где A_1, A_2, k_1, k_2 – фиксированные вещественные числа, такие, что $A_1\neq 0$, $A_2\neq 0$ и выражение $A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}$ не равно тождественному нулю. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{A_1x^{k_1}+A_2x^{k_2}}=1$.

Задача 3. Студент Иван Недалёкий полагает, что $\operatorname{arctg} x=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$. Докажите, что существует $x\in(0;1)$, для которого это равенство является справедливым.

Задача 4. Решите уравнение $\big||x+[x]|-1\big|=x$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Задача 5. Найдите наименьшее расстояние между параболой $y=x^2$ и окружностью $(x-18)^2+y^2=1$.

Задача 6. Пусть n – фиксированное натуральное число, отличное от единицы. Запишите (аналитически) пример функции $y=f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) f – вещественная функция, определенная на всей вещественной прямой;

2) функция дифференцируема во всей области определения;

3) функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на промежутке (0;1);

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Областная олимпиада по математике 2016 (старшие курсы)

Задача 1. Докажите, что любое натуральное число является частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, где a_n — это целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$.

Задача 2. Найти все числа $\lambda > 0$ и решения $y(x)\neq 0$ дифференциального уравнения

$$y''(x)+\lambda y(x)=0,$$

удовлетворяющие условиям $y'(0)=0$,

$$y(0)=(1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cos t dt.$$

Задача 3. При каких положительных значениях параметра a сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$?

Задача 4. Найдите все действительные решения уравнения $(ix+1)^{100}=(x+i)^{100}$.

Задача 5. В ромбе $ABCD$ угол A составляет 120°, $AB = 1$. Прямые BC и CD пересекают окружность ω_1, описанную вокруг треугольника ABD, в точках K и L, отличных от точек B и D соответственно. Введем декартову систему координат с началом в центре окружности ω_2, описанной вокруг треугольника CKL, и осью ординат, направленной в сторону центра окружности ω_1. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy$, где Ω – область, ограниченная окружностями ω_1 и ω_2.

Задача 6. Вычислите $\int\limits_0^2 \left(\left[x^2\right]-\left[x\right]^2\right)dx$, где $[x]$ – это целая часть числа x.

Решения (I курс)

Задача 1. Существуют ли матрица A из 3 строк и 2 столбцов и матрица B из 2 строк и 3 столбцов такие, что $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Если даны матрицы $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$, то для матриц

$$C=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как нетрудно видеть, выполнено $AB = CD$. Следовательно, $|AB| = |CD| = |C| \cdot |D| = 0 \cdot 0 = 0$. Однако единичная матрица имеет определитель 1 и, значит, не может быть представлена в виде произведения AB.

Задача 2. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{A_1 x^{k_1}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{A_2 x^{k_2}} = 1$, где A_1, A_2, k_1, k_2 – фиксированные вещественные числа, такие, что $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ и выражение $A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}$ не равно тождественному нулю. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} = 1$.

Решение. а) Если $k_1 = k_2$, то $A_1 + A_2 \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{(A_1+A_2) x^{k_1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{A_1 x^{k_1}} + \dfrac{g(x)}{A_1 x^{k_1}}}{\dfrac{A_1+A_2}{A_1}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{A_1 x^{k_1}}}{\dfrac{A_1+A_2}{A_1}} + \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)}{A_2 x^{k_1}}}{\dfrac{A_1(A_1+A_2)}{A_1 A_2}} = \frac{A_1}{A_1+A_2} + \frac{A_2}{A_1+A_2} = 1.$$

б) Пусть теперь $k_1 > k_2, k_1 - k_2 > 0, k_2 - k_1 < 0.$ Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} + \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{A_1 x^{k_1}\left(1+\frac{A_2}{A_1}x^{(k_2-k_1)}\right)} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{A_2 x^{k_2}\left(1+\frac{A_1}{A_2}x^{(k_1-k_2)}\right)} =$$

$$= 0+1=1.$$

Задача 3. Студент Иван Недалёкий полагает, что $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$. Докажите, что существует $x \in (0;1)$, для которого это равенство является справедливым.

Решение. Заметим, что выполнено $\arccos x \in [0;\pi]$, отсюда $\dfrac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тогда, как легко видеть, из равенств $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$ следует, что $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Это позволяет переписать исходное равенство в виде $g(x) = 0$, где $g(x) = \dfrac{\pi}{2\arccos x} - 1 - \operatorname{arctg} x$. Имеем соотношение $g'(x) = \dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+x^2}$; так как $g'(0) = \dfrac{2}{\pi} - 1 < 0$, то существует $\varepsilon > 0$ с тем свойством, что при $x \in (0;\varepsilon]$ выполнено $0 > \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{g(x)}{x}$ и, значит, $g(x) < 0$. С другой стороны, имеем $g(1-0) = \dfrac{\pi}{+0} - 1 - \dfrac{\pi}{4} = +\infty$. Поскольку $g(\varepsilon) < 0$, а при значениях x, близких к 1, справедливо неравенство

$g(x) > 0$, то ввиду непрерывности функции $g(x)$ найдётся $x \in (\varepsilon; 1)$ такое, что $g(x) = 0$.

Задача 4. Решите уравнение $\left|\left|x+[x]\right|-1\right| = x$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Решение. Если $\left|x+[x]\right|-1 \ge 0$, т.е. $\left|x+[x]\right| \ge 1$ и, далее, $\left[\begin{array}{l} x+[x] \ge 1, \\ x+[x] \le -1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x < 0 \end{array}\right.$, то имеем уравнение $\left|x+[x]\right| = 1+x$. Из этого уравнения в случае $x \ge 1$ следует уравнение $x+[x] = 1+x$, или $[x] = 1$, решение которого есть промежуток $[1,2)$. Если же $x < 0$, то имеем уравнение $-x-[x] = 1+x$, или $2x+[x] = -1$, которое не имеет решения (действительно, при $x < 0$ будет $x = n+r$, $0 \le r < 1$, $n = -1;-2;\ldots$; тогда имеем $[x] = n$, $2x+[x] = 3n+2r = -1$, что невозможно, поскольку $3n+2r < 3\cdot(-1)+2\cdot 1 = -1$).

Если же выполняется $\left|x+[x]\right|-1 < 0$, т.е. $\left|x+[x]\right| < 1$, что эквивалентно $0 \le x < 1$, то получим уравнение $1-\left|x+[x]\right| = x$, или $\left|x+[x]\right| = 1-x$. В силу того, что $0 \le x < 1$ и $[x] = 0$, данное уравнение принимает вид $x = 1-x$, т.е. $x = \frac{1}{2}$. Таким образом, решениями уравнения являются $x = \frac{1}{2}$ и $x \in [1,2)$.

Задача 5. Найдите наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и окружностью $(x-18)^2 + y^2 = 1$.

Решение. Найдём сначала наименьшее расстояное от центра окружности до параболы. Пусть $d(x)$ – это расстояние от центра окружности, т.е. точки $C(18;0)$, до произвольной точки параболы $M\left(x;x^2\right)$. Тогда $d^2(x) = (x-18)^2 + x^4$. Найдем наименьшее значение полученной функции при помощи производной: $\left(d^2(x)\right)' = 2(x-18) + 4x^3 = 0$. Получим кубическое уравнение $2x^3 + x - 18 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ является корнем уравнения, а поделив на $(x-2)$, придем к уравнению $(x-2)(2x^2 + 4x + 9) = 0$, которое имеет единственное решение $x = 2$. С помощью второй производной $\left(d^2(x)\right)'' = 2 + 12x^2 > 0$ убеждаемся, что $x = 2$ является единственной точкой минимума, а значит, в ней функция достигает своего наименьшего значения. Таким образом, наименьшее расстояние от центра окружности до параболы равно $d(2) = \sqrt{(2-18)^2 + 2^4} = 4\sqrt{17} = CM$, где $M(2;4)$ и $C(18;0)$.

Обозначим через N точку пересечения отрезка CM с окружностью, а через M' и N' – произвольные точки на параболе и окружности соответственно. Тогда $M'N' = (M'N' + N'C) - N'C \geq M'C - NC \geq MC - NC = MN$, поэтому $MN = MC - 1 = 4\sqrt{17} - 1$ является искомым наименьшим расстоянием.

Ответ: $4\sqrt{17} - 1$.

Задача 6. Пусть n – фиксированное натуральное число, отличное от единицы. Запишите (аналитически) пример функции $y = f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) f – вещественная функция, определенная на всей вещественной прямой;

2) функция дифференцируема во всей области определения;

3) функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на промежутке (0;1);

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Решение. Зададим функцию $f_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n+1})$, $x \in [0,+\infty)$, где $a_k = \dfrac{1}{k}$, $k = 1;2;..;(2n+1)$. Эта функция имеет $(2n + 1)$ нуль на промежутке (0,1], поэтому она имеет не менее $2n$ экстремумов на интервале (0;1). Так как, кроме того, производная $f_1'(x)$ представляет собой многочлен степени $2n$, имеющий не более $2n$ корней, то функция $f_1(x)$ имеет ровно $2n$ экстремумов. Точки a_k разбивают промежуток (0,1] на промежутки знакопостоянства функции $f_1(x)$, причем соблюдается знакочередование этих промежутков. Следовательно, также чередуются максимумы и минимумы функции, а значит, функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на интервале (0;1).

Положим $f_2(x) = e^{-\alpha x}(x + f_1(0))$ на промежутке $(-\infty, 0]$. Тогда если α < 0, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$. Определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x),\ x \in [0,+\infty); \\ f_2(x),\ x \in (-\infty, 0]; \end{cases}$$

таким образом, чтобы она была дифференцируема в нуле (в остальных точках она, очевидно, дифференцируема). Так как $f_2'(x) = e^{-\alpha x}\left(-\alpha(x + f_1(0)) + 1\right)$ и

$f_2'(0) = -\alpha f_1(0) + 1$, то из условия равенства производных в нуле $f_2'(0) = f_1'(0)$ получим $\alpha = \dfrac{1 - f_1'(0)}{f_1(0)}$.

Покажем, что число α отрицательно. Действительно, $f_1(0) = -a_1 a_2 \cdots a_{2n+1} = -\dfrac{1}{(2n+1)!} < 0$,

$$f_1'(0) = \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_1} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_{2n+1}} =$$

$$= \frac{1 + 2 + \cdots + (2n+1)}{(2n+1)!} = \frac{n+1}{(2n)!} < 1$$

при $n \geq 2$.

Решения (старшие курсы)

Задача 1. Докажите, что любое натуральное число является частичной суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$, где a_n — это целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$.

Решение. Заметим, что в нашей последовательности $\{a_n\}$ встречаются все натуральные числа, причем каждое из них — несколько раз. Посмотрим, сколько раз в последовательности повторяется число *k*. Пусть $a_n = k$. Тогда *k* является ближайшим к $\sqrt{n}$, что эквивалентно соотношению $\left|\sqrt{n} - k\right| < 0,5$, т.е. $k - 0,5 < \sqrt{n} < k + 0,5$. Возведя все части неравенства в квадрат и учитывая, что числа *n* и *k* целые, получим $k^2 - k < n \leq k^2 + k$. Таким образом, если $n \in (k^2 - k; k^2 + k]$, то $a_n = k$. Осталось заметить, что в данный промежуток входит ровно $2k$ целых чисел. Итак, последовательность $\{a_n\}$ состоит из всех натуральных чисел k, каждое из которых повторяется $2k$ раз.

Рассмотрим сумму слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, равных $\frac{1}{k}$. Так как ряд содержит $2k$ таких слагаемых, то их сумма равна $2k \cdot \frac{1}{k} = 2$. Следовательно, частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, состоящая из первых m групп равных слагаемых, равна $2m$. Если же к этой сумме добавить $(m+1)$ слагаемое из следующей группы слагаемых, равных $\frac{1}{m+1}$, то сумма будет равняться $2m+1$. Таким образом, любое натуральное (как четное, так и нечетное) число является некоторой частичной суммой исходного ряда.

Задача 2. Найти все числа $\lambda > 0$ и решения $y(x) \neq 0$ дифференциального уравнения

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,$$

удовлетворяющие условиям $y'(0) = 0$,

$$y(0) = (1-\lambda)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cos t dt.$$

Решение. Общее решение уравнения имеет следующий вид: $y(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Составим систему для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = (1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(C_1\cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}t)\right)\cos t dt \\ C_2\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Из второго равенства системы находим, что $C_2 = 0$. Первое равенство системы примет вид

$C_1 = (1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} C_1\cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt$. Заметим, что C_1 отлично от нуля и λ отлично от единицы.

Найдем $\lambda > 0$, используя равенство

$(1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt = 1$. Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\sqrt{\lambda}-1)t + \cos(\sqrt{\lambda}+1)t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}-1)t}{\sqrt{\lambda}-1} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}+1)t}{\sqrt{\lambda}+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{1-\lambda}.$$

Следовательно, имеем $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) = 1$, откуда $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = 2\pi n$ и $\lambda = 16n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $y(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\lambda = 16n^2$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача 3. При каких положительных значениях параметра a сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$?

Решение. Сходимость данного интеграла равносильна сходимости следующего числового ряда: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$. В интеграле $\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x}$ сделаем замену $t = x - \pi k$, $dx = dt$, $\cos x = \cos(t+\pi k) = (-1)^k \cos t$; тогда мы получим $\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1+x^a\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a \cos^2 t}$.

Для интеграла $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a \cos^2 t}$ справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(k+1)^a \pi^a \cos^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(t+\pi k)^a \cos^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+k^a\pi^a \cos^2 t}.$$

Вычисляя теперь интегралы:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+k^a\pi^a\cos^2 t} = \int\limits_0^{\pi/2} \ldots + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ldots = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{tg} t)}{1+k^a\pi^a + \operatorname{tg}^2 t} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ldots =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}},$$

$\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+(k+1)^a\pi^a\cos^2 t}=\frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^a\pi^a}}$, мы окончательно получим двойное неравенство

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^a\pi^a}}<\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+(t+\pi k)^a\cos^2 t}<\frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}$ сходится при $a>2$ $\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+k^a\pi^a}}\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{\pi^{1-a/2}}{k^{a/2}}\right)$, поэтому и рассматриваемый ряд по признаку сравнения сходится при $a>2$, а так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^a\pi^a}}$ расходится при $a\le 2$, то расходится и рассматриваемый ряд. Следовательно, несобственный интеграл сходится при $a>2$ и расходится при $a\le 2$.

Задача 4. Найдите все действительные решения уравнения $(ix+1)^{100}=(x+i)^{100}$.

Решение. Разделим обе части равенства на $(x+i)^{100}$, получим $\left(\frac{ix+1}{x+i}\right)^{100}=1$.

Поскольку $\left|\dfrac{ix+1}{x+i}\right|=1$, то дробь можно представить в виде $\dfrac{ix+1}{x+i}=e^{i\varphi}$. Выражая *x*, получим

$$x=\frac{1}{i}\cdot\frac{ie^{i\varphi}-1}{ie^{i\varphi}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}-1}{e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

где $\varphi\neq\dfrac{\pi}{2}$.

Исходное уравнение принимает вид $e^{i100\varphi}=e^{i2\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$, отсюда мы находим, что $\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi n}{100}$, $n=0;1;\ldots;99$, а значит, $x=tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{100}\right)$, $n=0;1;\ldots;99$ (кроме *n*, равного 25).

Задача 5. В ромбе *ABCD* угол *A* составляет 120°, *AB* = 1. Прямые *BC* и *CD* пересекают окружность ω_1, описанную вокруг треугольника *ABD*, в точках *K* и *L,* отличных от точек *B* и *D* соответственно. Введем декартову систему координат с началом в центре окружности ω_2, описанной вокруг треугольника *CKL*, и осью ординат, направленной в сторону центра окружности ω_1. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy$, где Ω – область, ограниченная окружностями ω_1 и ω_2.

Решение. Так как *CB* = *CD* = *CA* = 1, то точка *C* является центром окружности ω_1, а значит, *CL* = *CK* = 1. Достроив треугольник *CKL* до ромба *CKML*, получим, что *MK* = *ML* = *MC* = 1, а значит, точка *M* – центр окружности ω_2 и *M* лежит на окружности ω_1. В полярной системе координат уравнение окружности ω_1 имеет вид $\rho=2\sin\varphi$, а ω_2 – уравнение $\rho=1$. Получаем

$$\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \sin\varphi\, d\rho =$$

$$= \frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4\varphi\, d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 6. Вычислите $\int\limits_0^2 \left(\left[x^2\right] - \left[x\right]^2\right)dx$, где $[x]$ – это целая часть числа x.

Решение. Рассмотрим функции $\left[x\right]^2$ и $\left[x^2\right]$ на отрезке [0; 2]. Получим $\left[x^2\right] = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2, & \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3, & \sqrt{3} \le x < 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ и $\left[x\right]^2 = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$. Следовательно, $\left[x^2\right] - \left[x\right]^2 = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 2, & \sqrt{3} \le x < 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ и

$$\int\limits_0^2 \left(\left[x^2\right] - \left[x\right]^2\right)dx = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx + 2\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx = 4 - \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly» / под ред. В.М. Алексеева. М. : Мир, 1977. 596 с.
2. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. М. : Бюро Квантум, 2007. 158 с.
3. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М. : Наука, 1978. 208 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ОЛИМПИАДА 2016 (физические факультеты, I курс) 3

ОЛИМПИАДА 2016 (физические факультеты, старшие курсы) 4

ОЛИМПИАДА 2016 (естественнонаучные факультеты) 5

Решения (физические факультеты, I курс) 6

Решения (физические факультеты, старшие курсы) 10

Решения (естественнонаучные факультеты) 16

Областная олимпиада по математике 2016 (I курс) 19

Областная олимпиада по математике 2016 (старшие курсы) 20

Решения (I курс) 21

Решения (старшие курсы) 27

Литература 34

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1926 от «17» июня 2016 г. Тираж 50 экз.