ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики

Задачи олимпиады 2015 года

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

ОДОБРЕНО кафедрой общей математики
Зав. кафедрой доцент Е.Н. Путятина

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией ММФ
Протокол № 4 от 22 апреля 2016 г.
Председатель методической комиссии О.П. Федорова.

Представлены задачи с решениями олимпиад по математике, которые прошли в Томском государственном университете в 2015 г. Ряд задач являются авторскими. Многие задачи взяты из сборника избранных задач из журнала «American mathematical monthly» под редакцией В.М. Алексеева, а также из сборника «Избранные олимпиадные задачи» Н.Б. Васильева, А.П. Савина и А.А. Егорова.

Предложенные задания могут быть использованы для подготовки к олимпиаде по математике студентов дневной формы обучения ММФ, ФПМК, РФФ, ФТФ, ФФ, ФИнф, МФУ, ХФ, ГГФ, БИ.

СОСТАВИТЕЛИ:
доцент Н.Ю. Галанова, доцент Я.С. Гриншпон,
ст. пр. Ю.К. Кошельский, доцент Е.Г. Лазарева,
доцент Е.Н. Путятина, доцент Е.А. Тимошенко,
доцент Е.В. Шапошникова

ОЛИМПИАДА 2015
(физические факультеты, I курс)

1. Найдите предел последовательности, заданной условиями $x_1 = 2015$ и $x_{n+1} = 1 + \ln x_n$.

2. *Перманентом* матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc$. Известно, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ составлена из целых чисел и выполнено $(\operatorname{per} A)^2 \neq \operatorname{per}(A^2)$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 3$.

3. Докажите, что если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a;b] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $f(a) = f(b) = 0$, то уравнение $f(x) + f'(x) \cdot \operatorname{tg} x = 0$ имеет решение на интервале $(a;b)$.

4. *Сумма множеств* $A + B$ $\left(A, B \subset \mathbb{R}^2\right)$ состоит из элементов $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B$. *Множество* $\alpha \cdot A$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ состоит из всех элементов $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in A$. Верно ли, что равенство $A + A = 2 \cdot A$ справедливо для любого $A \subset \mathbb{R}^2$?

5. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана окружность радиуса r с центром в точке O. Зададим отображение $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ по правилу: образ точки P определяется как точка P', лежащая на прямой OP по ту же сторону от O, что и P, и такая, что $OP \cdot OP' = r^2$. В какую фигуру перейдет при данном отображении прямая, не имеющая общих точек с окружностью?

6. Докажите, что множество чисел вида $\{4n + 3\}_{n \in \mathbb{N}}$ содержит бесконечно много простых чисел.

7. Пусть $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ и $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\ \text{раз}}$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всех $x \in [1;2]$.

ОЛИМПИАДА 2015
(физические факультеты, старшие курсы)

1. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{(n+1)/n}}$?

2. Для функции $f(x) = \dfrac{[x]}{x}$ найдите какую-нибудь первообразную $F(x)$, определенную для всех положительных x.

3. Эллипс l_2 получен из эллипса l_1 параллельным переносом вдоль вектора, соединяющего центр эллипса l_1 с наиболее удаленной от центра точкой эллипса. Найдите площадь фигуры, получающейся при пересечении этих двух эллипсов, если их полуоси равны a и b, причем $a > b$.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = 1$, где x, y, z, t – попарно различные натуральные числа.

5. Вычислите $\int\limits_0^{\pi} \ln\left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right) dx$.

6. Найдите явное выражение для суммы степенного ряда

$$3 + \frac{3x^3}{3!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{3x^9}{9!} + \ldots$$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y}. \end{cases}$

ОЛИМПИАДА 2015
(естественнонаучные факультеты)

1. Разрежьте прямыми линиями остроугольный треугольник на три части таким образом, чтобы из этих частей можно было составить прямоугольник.

2. Пусть $f(x) = \sin^4 x$. Вычислите $f^{(10)}(0) - f^{(10)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350. Может ли такая прогрессия состоять: а) из четырех членов; б) из пяти членов?

4. Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты $a,\ b,\ c$, чтобы система уравнений $\begin{cases} ax^4 + bx^2 + c = 0, \\ bx^4 + cx^2 + a = 0, \\ cx^4 + ax^2 + b = 0 \end{cases}$ имела решение?

5. Вычислите интеграл $\displaystyle\int \frac{x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x) + 1}{x^2\sin(2x) + x\ln(x)}dx$

6. *Перманентом* матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc$. Известно, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ составлена из целых чисел и выполнено $(\operatorname{per} A)^2 \neq \operatorname{per}(A^2)$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 3$.

7. При каких значениях положительного параметра a кривая $x^2 = y + 16$ будет иметь наибольшее число точек пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = a^2$?

Решения (физические факультеты, I курс)

Задача 1. Найдите предел последовательности, заданной условиями $x_1 = 2015$ и $x_{n+1} = 1 + \ln x_n$.

Решение. Так как для любого $x > 1$ выполняется неравенство $1 + \ln x > 1$, то по принципу математической индукции имеем $x_n > 1$ при всех натуральных n. Обозначим $f(x) = 1 + \ln x - x$. Заметим, что $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 < 0$ при $x > 1$ и $f(1) = 0$, а значит, $f(x) < 0$ при $x > 1$, т.е. $x > 1 + \ln x$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ убывает и существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда $a = 1 + \ln a$. Покажем, что это уравнение не имеет других корней, кроме $a = 1$. Действительно, так как $f'(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $f'(x) < 0$ при $x > 1$, то точка $x = 0$ является единственной точкой локального экстремума, а значит, в ней функция достигает своего наибольшего значения, равного нулю.

Задача 2. *Перманентом* матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc$. Известно, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ составлена из целых чисел и выполнено $(\operatorname{per} A)^2 \neq \operatorname{per}(A^2)$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 3$.

Решение. Имеем $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix}$, отсюда

$$\operatorname{per}(A^2) = (a^2d^2 + b^2c^2 + a^2bc + d^2bc) + (a^2bc + d^2bc +$$
$$+ abcd + abcd) = (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) + 2a^2bc + 2d^2bc =$$
$$= (\operatorname{per} A)^2 + 2bc(a^2 + d^2).$$

Из условия следует, что $2bc(a^2+d^2)\neq 0$. Поэтому b и c, а также хотя бы одно из чисел a и d отличны от нуля. Это значит, что $(b^2+c^2)+(a^2+d^2)\geq(1+1)+1=3$.

Замечание. Требуемая сумма может равняться 3, как показывает пример $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Задача 3. Докажите, что если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a;b]\subset\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(a)=f(b)=0$, то уравнение $f(x)+f'(x)\cdot\operatorname{tg}x=0$ имеет решение на интервале $(a;b)$.

Решение.

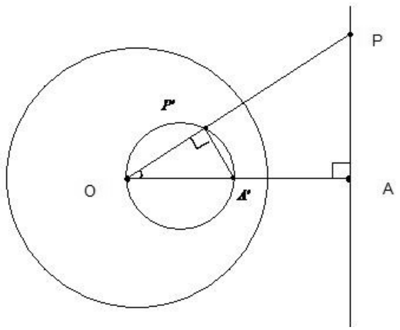
$f(x)+f'(x)\cdot\operatorname{tg}x=\dfrac{f(x)\cos x+f'(x)\sin x}{\cos x}=\dfrac{(f(x)\sin x)'}{\cos x}=0$, если в некоторой точке $x\in(a;b)$ выполнено $(f(x)\sin x)'=0$. Так как $f(a)=f(b)=0$, то имеем $f(a)\sin a=f(b)\sin b=0$, а значит, по теореме Ролля существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $(f(x)\sin x)'\big|_{x=c}=0$, что и требовалось доказать.

Задача 4. *Сумма множеств* $A+B$ $\left(A,B\subset\mathbb{R}^2\right)$ состоит из элементов $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{y}\in B$. *Множество* $\alpha\cdot A$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ состоит из всех элементов $\alpha\cdot\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}\in A$. Верно ли, что равенство $A+A=2\cdot A$ справедливо для любого $A\subset\mathbb{R}^2$?

Решение. Нет. На плоскости $\mathbb{R}^2$ можно взять в качестве множества A объединение осей Ox и Oy. Тогда $2\cdot A=A$, $A+A=\mathbb{R}^2$. Также в качестве A можно было взять любое двухэлементное множество: тогда множество $A+A$ состояло бы из трех элементов, а множество $2\cdot A$ – из двух.

Задача 5. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана окружность радиуса *r* с центром в точке *O*. Зададим отображение *f*: $\mathbb{R}^2\setminus\{O\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$ по правилу: образ точки P определяется как точка P', лежащая на прямой OP по ту же сторону от O, что и P, и такая, что $OP \cdot OP' = r^2$. В какую фигуру перейдет при данном отображении прямая, не имеющая общих точек с окружностью?

Решение.



Образом будет окружность, проходящая через точку O. Пусть P – произвольная точка на прямой, A – такая точка на прямой, что $\angle OAP = 90^o$. Тогда для точек P' и A' справедливы равенства $OP \cdot OP' = r^2 = OA \cdot OA'$. Поскольку $\dfrac{OP}{OA'} = \dfrac{OA}{OP'}$ и $\angle O$ – общий, то ΔAOP и $\Delta P'OA'$ подобны. Следовательно, $\angle OP'A' = 90^o$, и значит, через точки O, P' и A' проходит окружность с диаметром OA'.

Задача 6. Докажите, что множество чисел вида $\{4n+3\}_{n\in\mathbb{N}}$ содержит бесконечно много простых чисел.

Решение. Каждое простое число p, большее 2, нечетно, поэтому имеет вид либо $4n+1$, либо $4n+3$. Заметим, что произведение чисел вида $4n+1$ имеет такой же вид. Допустим, что существует только конечное число простых чисел $p_1, p_2, ..., p_k,$ имеющих вид $4n+3$. Рассмотрим число $N = 4(p_1 p_2 ... p_k - 1) + 3 = 4 p_1 p_2 ... p_k - 1$. Число N разлагается в произведение простых чисел, среди которых, однако, нет чисел $p_1, p_2, ..., p_k,$ так как эти числа делят N с остатком (–1). Кроме того, простые числа в разложении числа N не могут все иметь вид $4n+1$, так как $N=4(p_1p_2...p_k-1)+3$. Значит, хотя бы один из сомножителей разложения имеет вид $4n+3$, т.е. N делится на какое-то из чисел $p_1, p_2, ..., p_k$, что невозможно. Приходим к противоречию.

Задача 7. Пусть $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ и $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ раз}}$.

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всех $x\in[1;2]$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in[1,2), \\ 0, & \text{если } x=2. \end{cases}$

Решение. Обозначим искомый предел через $g(x)$. Из равенства $f(2-x)=f(x)$ следует $g(2-x)=g(x)$. Ясно также, что из $f(0)=0$ и $f(1)=1$ вытекает $g(0)=0$ и $g(1)=1$. Заметим, что $f''(x)<0$ на $(0,1)$, поэтому функция $f(x)$ будет выпуклой вверх на $x\in[0,1]$ и отрезок, соединяющий точки $(0;0)$ и $(1;1)$ графика $y=f(x)$, лежит ниже этого графика. Следовательно, для всякого $x\in(0,1)$ выполняется $0<x<f(x)<1$. Поэтому при любом $x\in(0,1)$ мы имеем возрастающую последовательность $0<f_1(x)<f_2(x)<\ldots<f_n(x)<\ldots$, ограниченную сверху числом 1. Это означает, что предел $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ конечен и принадлежит множеству $(0,1]$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$, в силу непрерывности функции $f(x)$ получаем $g(x)=f(g(x))$, что возможно лишь в случае $g(x)=1$. Пользуясь равенством $g(2-x)=g(x)$, получаем, что

$$g(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in[1,2), \\ 0, & \text{если } x=2. \end{cases}$$

Замечание. Неравенство $x < f(x)$ при $x \in (0,1)$ можно также доказать, используя лишь первую производную функции $f(x)$.

Решения (физические факультеты, старшие курсы)

Задача 1. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$?

Решение 1. Применим интегральный признак сходимости. Функция $f(x) = \frac{1}{x^{(x+1)/x}} = \frac{1}{x^{1+1/x}} = \frac{1}{x \cdot x^{1/x}} = \frac{1}{x \cdot e^{\ln x/x}}$ убывает при $x \geq 1$, так как

$$f'(x) = -\frac{e^{\ln x/x} + xe^{\ln x/x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{x^2 e^{2\ln x/x}} =$$

$$= -\frac{1 + \frac{1-\ln x}{x}}{x^2 e^{\ln x/x}} = -\frac{x+1-\ln x}{x^3 e^{\ln x/x}} < 0.$$

Сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot e^{\ln x/x}}$ исследуем по признаку сравнения: $\frac{1}{x \cdot e^{\ln x/x}} \sim \frac{1}{x}, x \to +\infty$, поскольку, как легко видеть, $\frac{\ln x}{x} \to 0, e^{\ln x/x} \to 1$ при $x \to +\infty$. Далее, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot e^{\ln x/x}}$ тоже будет расходиться, а вместе с ним и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(n+1)/n}}$.

Решение 2. Применим признак сравнения к данному ряду. Учтем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Имеем $\frac{1}{n^{(n+1)/n}}=\dfrac{1}{n^{1+1/n}}=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}\sim\dfrac{1}{n}$ при $n\to\infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(n+1)/n}}$ тоже расходится.

Задача 2. Для функции $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ найдите какую-нибудь первообразную $F(x)$, определенную для всех положительных x.

Решение. Так как для $\forall x>0$, $x=n+r$, $n=0$ либо $n\in\mathbb{N}$, $0\le r<1$, имеем $[x]=n$, то $f(x)=\dfrac{n}{x}$ и мы можем записать $F(x)=n\ln x+C_n=[x]\ln x+C_n$, $n\le x<n+1$. Из условия непрерывности первообразной следует $F(n-0)=F(n)$, т.е.

$$(n-1)\ln n+C_{n-1}=n\ln n+C_n \;\Rightarrow\; C_n=C_{n-1}-\ln n,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\; C_1=C_0-\ln 1,\ C_2=C_1-\ln 2=C_0-\ln 1-\ln 2,$$

$$C_3=C_2-\ln 3=C_0-\ln 1-\ln 2-\ln 3,\ \ldots,$$

$$C_n=C_0-\ln 1-\ln 2-\ldots-\ln n=C_0-\ln(n!),$$

где C_0 – произвольная постоянная. Считая, что $C_0=0$, получим $F(x)=[x]\ln x-\ln([x]!)$.

Задача 3. Эллипс l_2 получен из эллипса l_1 параллельным переносом вдоль вектора, соединяющего центр эллипса l_1 с наиболее удаленной от центра точкой эллипса. Найдите площадь фигуры, получающейся при пересечении этих двух эллипсов, если их полуоси равны a и b, причем $a>b$.

Решение. Введем декартову систему координат на плоскости так, чтобы центр эллипса l_1 находился в начале координат и параллельный перенос осуществлялся вдоль оси абсцисс. Тогда центр эллипса l_2 находится в точке $(a,0)$. Уравнения кривых l_1 и l_2 имеют вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и $\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ соответственно; кривые пересекаются при $x=\dfrac{a}{2}$. Следовательно, искомая площадь равна $4\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$. Замена $t=\arcsin\dfrac{x-a}{a}$ приводит к интегралу вида

$$4ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt=2ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}=ab\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Можно было решать и с помощью обобщенной полярной системы координат $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Тогда уравнения эллипсов приобретут вид $\rho=1$ и $\rho=2\cos\varphi$. Они пересекаются при $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{3}$. Найдем якобиан перехода к данной системе координат. Так как, очевидно, $\dfrac{\partial x}{\partial\rho}=a\cos\varphi$, $\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}=-a\rho\sin\varphi$, $\dfrac{\partial y}{\partial\rho}=b\sin\varphi$ и $\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}=b\rho\cos\varphi$, то справедливо равенство $J=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$. Следовательно, искомая площадь равна

$$2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_0^{1}ab\rho d\rho+2\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}ab\rho d\rho=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi+4ab\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=ab\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 4. Решите уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$, где $x,\ y,\ z,\ t$ – попарно различные натуральные числа.

Решение. Положим $x<y<z<t$. Заметим, что $1<x<4$, так как в противном случае в сумме мы не получим единицу. Значит, $x=2$ или $x=3$.

Пусть $x=2$. Тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$. Аналогично, $2<y<6$, т.е. $y\in\{3;4;5\}$. Если $y=3$, то $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6}$ и $z\in\{7;8;9;10;11\}$. Тогда получаем следующие решения: $(2,3,7,42)$, $(2,3,8,24)$, $(2,3,9,18)$, $(2,3,10,15)$. При подстановке $z=11$ значение t не является целым. Если $y=4$, то $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{4}$ и $z\in\{5;6;7\}$. Получаем решения $(2,4,5,20)$ и $(2,4,6,12)$. Если же $y=5$, то $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{10}$ и $5=y<z<7$, т.е. $z=6$, но t при этом не будет целым.

Пусть $x=3$. Тогда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{3}$ и $3=x<y<5$, т.е. имеем $y=4$. Тогда $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12}$, что невозможно, поскольку z и t не меньше 5.

Задача 5. Вычислите $\int\limits_0^{\pi}\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)dx$.

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int\limits_0^{\pi}\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)dx = x\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)\Big|_0^{\pi}+$$

$$+\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\pi\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+I,$$

где $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$. Произведем теперь замену $x=\pi-t$, $\sin(\pi-t)=\sin t$, $dx=-dt$.

Тогда

$$I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt-\int\limits_0^{\pi}\frac{t\sin t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}dt=$$

$$=-\pi\ln\left(\cos t+\sqrt{1+\cos^2 t}\right)\Big|_0^{\pi}-I$$

, откуда следует, что $I=\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi}\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)dx=\pi\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=0.$$

Задача 6. Найдите явное выражение для суммы степенного ряда

$$3+\frac{3x^3}{3!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{3x^9}{9!}+\ldots$$

Ответ: $e^x+2e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Радиус сходимости ряда $3+\frac{3y}{3!}+\frac{3y^2}{6!}+\frac{3y^3}{9!}+\ldots$ равен ∞, поэтому исходный ряд сходится при всех x, а значит, его радиус сходимости также равен ∞. Следовательно, исходный ряд можно почленно дифференцировать, т.е. сумма $y(x)$ этого ряда удовлетворяет равенствам

$$y'(x)=\frac{3x^2}{2!}+\frac{3x^5}{5!}+\frac{3x^8}{8!}+\ldots,$$

$$y''(x) = \frac{3x}{1!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{3x^7}{7!} + \ldots \quad \text{и}$$

$$y'''(x) = 3 + \frac{3x^3}{3!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{3x^9}{9!} + \ldots .$$

Получаем задачу Коши $y'''(x) = y(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. Так как уравнение $t^3 = 1$ имеет корни 1 и $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y(x) = Ae^x + Be^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + Ce^{-x/2}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Тогда имеем

$$y'(x) = Ae^x + \left(\frac{-B + C\sqrt{3}}{2}\right)e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-C - B\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-x/2}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$y''(x) = Ae^x + \left(\frac{-B - C\sqrt{3}}{2}\right)e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-C + B\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-x/2}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Из начальных условий получаем систему уравнений $A + B = 3$, $2A - B + C\sqrt{3} = 0$, $2A - B - C\sqrt{3} = 0$, решение которой имеет вид $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$.

Задача 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y}. \end{cases}$

Решение. ***Способ 1.*** Для первого уравнения системы запишем характеристическую систему: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{2z}$. Независимыми первыми интегралами этой системы тогда будут $y=C_1$, $\frac{z}{x^2}=C_2$. Общим решением первого уравнения является $\Phi\left(y,\frac{z}{x^2}\right)=0$. Будем искать решение системы в виде функции $z=x^2\varphi(y)$ (ибо она удовлетворяет первому уравнению системы). Чтобы найти вид функции φ, подставим во второе уравнение:

$x^2\varphi'(y)=-\frac{x^2}{y}\varphi(y)$, откуда имеем $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=-\frac{1}{y}$, $\varphi(y)=\frac{C}{y}$,

$z=\frac{Cx^2}{y}$.

Способ 2. Следствием исходной системы является следующее ДУ в частных производных:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z. \qquad (*)$$

Характеристическая система полученного уравнения имеет вид $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$, а $\frac{y}{x}=C_1$, $\frac{z}{y}=C_2$ – два ее независимых первых интеграла. Будем искать решение первоначальной системы в виде $\frac{z}{y}=\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, т.е. $z=y\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, ибо такая функция удовлетворяет уравнению $(*)$. Дифференцируем функцию $z=y\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ по x и подставляем в первое уравнение системы: $z'_x=y\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\Rightarrow$

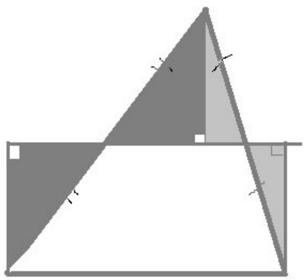
$$-\frac{y^2}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2y}{x}\psi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow t=\frac{y}{x} \Rightarrow -t\psi'(t)=2\psi(t) \Rightarrow$$

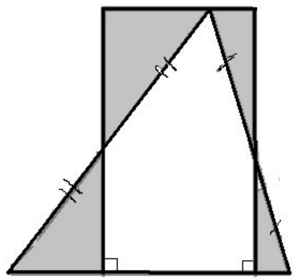
$$\frac{d\psi}{\psi}=-2\frac{dt}{t} \Rightarrow \psi=\frac{C}{t^2}=\frac{Cx^2}{y^2} \Rightarrow z=y\frac{Cx^2}{y^2}=\frac{Cx^2}{y}.$$

Решения (естественнонаучные факультеты)

Задача 1. Разрежьте прямыми линиями остроугольный треугольник на три части таким образом, чтобы из этих частей можно было составить прямоугольник.

Решение. Из середин боковых сторон треугольника опустим перпендикуляры на основание (либо опустим из вершины перпендикуляр на среднюю линию треугольника). В обоих случаях заштрихованные треугольники переместим, они равны по гипотенузе и острому углу.





Задача 2. Пусть $f(x)=\sin^4 x$. Вычислите

$$f^{(10)}(0)-f^{(10)}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. По формуле понижения степени мы имеем $f(x)=\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}$. Следовательно, выполнено соотношение $f^{(10)}(x)=2^9\cos 2x-2^{17}\cos 4x$. Тогда получаем

$f^{(10)}(0)=2^9-2^{17}$ и $f^{(10)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2^9-2^{17}$, откуда находим, что $f^{(10)}(0)-f^{(10)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2^{10}=1024$.

Задача 3. Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350. Может ли такая прогрессия состоять: а) из четырех членов; б) из пяти членов?

Решение. а) Очевидно, знаменатель прогрессии q обязан быть рациональным числом, т.е. $q=\frac{m}{n}$, где m и n взаимно просты и $m\geq n+1$. Тогда $a_4=a_1\cdot\frac{m^3}{n^3}$, $a_1 \vdots n^3$ и $n^3<350$, т.е. $n<7$. Если $n=7$, то $a_1=7^3=343$ и $a_4\geq a_1\frac{8^3}{7^3}>350$. Если $n=6$, имеем $a_1=6^3=216$, $a_2=216\cdot\frac{7}{6}=252$, $a_3=252\cdot\frac{7}{6}=294$, $a_4=294\cdot\frac{7}{6}=343$. Если $n=5$, то мы имеем $a_1=2\cdot 5^3=250$ и $a_4\geq a_1\frac{6^3}{5^3}>350$. Если $n=4$, то мы имеем $a_1\geq 4\cdot 4^3=256$ и $a_4\geq a_1\frac{5^3}{4^3}>350$. Если $n=3$, то мы имеем $a_1\geq 8\cdot 3^3=216$ и $a_4\geq a_1\frac{4^3}{3^3}>350$. Если $n=2$, то $a_1\geq 27\cdot 2^3=216$ и $a_4\geq a_1\frac{3^3}{2^3}>350$. Таким образом, набор чисел 216, 252, 294, 343 – единственный из четырех членов. Так как $343\cdot\frac{7}{6}>350$, то прогрессии из пяти членов не существует.

Задача 4. Какому соотношению должны удовлетворять коэффициенты $a,\ b,\ c$, чтобы система уравнений $\begin{cases} ax^4+bx^2+c=0, \\ bx^4+cx^2+a=0, \\ cx^4+ax^2+b=0 \end{cases}$ имела решение?

Решение. Сложив уравнения системы, получим $(a+b+c)(x^4+x^2+1)=0$. Так как $x^4+x^2+1\neq 0$, то для существования решений необходимо, чтобы $a+b+c=0$. Это условие является и достаточным, так как при его выполнении $x=1$ является решением системы.

Задача 5. Вычислите интеграл

$$\int \frac{x\sin(2x)+2x^2\cos(2x)+1}{x^2\sin(2x)+x\ln(x)}dx\,.$$

Решение.

$$\int \frac{x\sin(2x)+2x^2\cos(2x)+1}{x^2\sin(2x)+x\ln(x)}dx=\int \frac{d\left(x\sin(2x)+\ln(x)\right)}{x\sin(2x)+\ln(x)}=.$$

$$=\ln\left|x\sin(2x)+\ln(x)\right|+C$$

Задача 6. *Перманентом* матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется число $\operatorname{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad+bc$. Известно, что матрица $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ составлена из целых чисел и выполнено $(\operatorname{per}A)^2\neq \operatorname{per}(A^2)$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 3$.

Решение. Имеем $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix}$, отсюда

$$\operatorname{per}(A^2)=(a^2d^2+b^2c^2+a^2bc+d^2bc)+(a^2bc+d^2bc+abcd+$$

$$+abcd) = (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) + 2a^2bc + 2d^2bc =$$

$$= (\operatorname{per} A)^2 + 2bc(a^2 + d^2).$$

Из условия следует, что $2bc(a^2 + d^2) \neq 0$. Поэтому b и c, а также хотя бы одно из чисел a и d отличны от нуля. Это значит, что $(b^2 + c^2) + (a^2 + d^2) \geq (1+1) + 1 = 3$.

Замечание. Требуемая сумма может равняться 3, как показывает пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 7. При каких значениях положительного параметра a кривая $x^2 = y + 16$ будет иметь наибольшее число точек пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = a^2$?

Решение. В точках пересечения будет выполняться равенство $y + 16 + y^2 = a^2$; эта запись является квадратным уравнением относительно переменной y и может иметь максимум два корня. При этом уравнение $x^2 = y + 16$ может тоже иметь пару корней $x_1 = \sqrt{y+16}$ и $x_2 = -\sqrt{y+16}$, если $y > -16$. Таким образом, наибольшее число корней не превышает 4. Число корней будет равно 4, если

$D = 1 - 4(16 - a^2) > 0, a^2 > 16 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{63}{4}, a > \dfrac{\sqrt{63}}{2}$. Вычислим значения y: $y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-63 + 4a^2}}{2}$. Из соотношения $y > -16$ мы получаем $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-63 + 4a^2}}{2} > -16, -\sqrt{-63 + 4a^2} > -31$,

$$-63 + 4a^2 < 31^2, a^2 < \frac{961 + 63}{4}, a < \frac{\sqrt{1024}}{2} = 16.$$

Окончательно имеем $\dfrac{\sqrt{63}}{2} < a < 16$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Избранные задачи из журнала «American mathematical monthly» / под ред. В.М. Алексеева. М. : Мир, 1977. 596 с.
2. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. М. : Бюро Квантум, 2007. 158 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1925 от «17» июня 2016 г. Тираж 50 экз.