РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ СЕТИ: УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛЕНИЕ, СВЯЗЬ (DCCN-2015)

МАТЕРИАЛЫ ВОСЕМНАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

DISTRIBUTED COMPUTER AND COMMUNICATION NETWORKS: CONTROL, COMPUTATION, COMMUNICATIONS (DCCN-2015)

PROCEEDINGS OF THE EIGHTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE

Москва
ИПУ РАН
2015

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

Research and development company **"Information and networking technologies"**

Institute of Information and Communication Technologies
Bulgarian Academy of Sciences

DISTRIBUTED COMPUTER AND COMMUNICATION NETWORKS: CONTROL, COMPUTATION, COMMUNICATIONS (DCCN-2015)

PROCEEDINGS OF THE EIGHTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE

(19–22 october 2015 г., Moscow, Russia)

Under the general edition of Dr. of Computer Science V.M. Vishnevskiy

Moscow
ICS RAS
2015

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Научно-производственное объединение
«Информационные и сетевые технологии»

Институт информационных и телекоммуникационных технологий
БОЛГАРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ СЕТИ: УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛЕНИЕ, СВЯЗЬ (DCCN-2015)

МАТЕРИАЛЫ ВОСЕМНАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

(19–22 октября 2015 г., Москва, Россия)

Под общей редакцией д.т.н. В.М. Вишневского

Москва
ИПУ РАН
2015

УДК 004.7:004.4].001:621.391:007
ББК 32.973.202:32.968
Р 24

Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015) = Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2015) : материалы Восемнадцатой междунар. науч. конфер, 19–22 окт. 2015 г., Москва: / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук ; под общ. ред. В.М. Вишневского – М.: ИПУ РАН, 2015. – 656 с.
– ISBN 978-5-91450-170-6.

В научном издании представлены материалы Восемнадцатой международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» по следующим направлениям:

- Архитектура компьютерных и телекоммуникационных сетей.
- Управление в компьютерных и телекоммуникационных сетях.
- Оценка производительности беспроводных сетей трансляции мультимедийной информации.
- Аналитическое и имитационное моделирование сетевых протоколов.
- Теория очередей и теория надежности.
- Беспроводные сети IEEE 802.11, IEEE 802.15, IEEE 802.16 и UMTS (LTE).
- Технология RFID и ее применение в интеллектуальных транспортных системах.
- Проектирование протоколов (MAC-уровня) сантиметрового и миллиметрового диапазона радиоволн.
- Интернет, веб-приложения и услуги.
- Интеграция приложений в распределенных информационных системах.

В материалах конференции DCCN-2015, подготовленных к выпуску Козыревым Д.В. обсуждены перспективы развития и сотрудничества в этой сфере.

Сборник материалов конференции предназначен для научных работников и специалистов в области теории и практики построения компьютерных и телекоммуникационных сетей.

Текст воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами

Утверждено к печати Программным комитетом конференции

ISBN 978-5-91450-170-6

TANDEM INFINITE-SERVER QUEUEING SYSTEM WITH HIGH-RATE MARKOVIAN ARRIVAL PROCESS

A. Moiseev, A. Nazarov
Tomsk State University, Tomsk, Russia

We consider a tandem queueing system with infinite number of servers and Markovian arrival process. Service times at the system stages are i.i.d. and given by distribution functions individually for each stage. The study is performed under the asymptotic condition of the arrivals' rate growth. It is shown that multi-dimensional probability distribution of customers number at the system stages can be approximated by multi-dimensional Gaussian distribution which parameters are obtained in the paper.

АНАЛИЗ МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМ ВХОДЯЩИМ MAP-ПОТОКОМ

А. Моисеев, А. Назаров
Томский государственный университет, Томск, Россия
moiseev.tsu@gmail.com, nazarov.tsu@gmail.com

Аннотация

В работе представлено исследование многофазной системы массового обслуживания с входящим MAP-потоком, неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием на фазах системы. Показано, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования является асимптотически нормальным, получены параметры соответствующего многомерного нормального распределения.

Ключевые слова: Многофазная система массового обслуживания, MAP-поток, асимптотический анализ

1. Введение

В приложениях теории массового обслуживания очень часто применяются модели многофазных систем обслуживания [1, 2], предполагающих поэтапную обработку поступающих сообщений (заявок). Но обычно в литературе встречается исследование моделей с входящим пуассоновским потоком и/или экспоненциальным обслуживанием на фазах либо анализ многофазных систем специфической конфигурации (например, двухфазных систем [3]).

В настоящей работе представлено исследование многофазной системы обслуживания с входящим МАР-потоком [4], неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием на фазах системы. Показано, что в условии растущей интенсивности входящего потока многомерное распределение числа заявок на фазах системы в стационарном режиме может быть аппроксимировано многомерным нормальным распределением, параметры которого получены в работе.

Аналогичные исследования для многофазной системы с входящим рекуррентным потоком выполнено в [5].

2. Постановка задачи

Пусть имеется многофазная система массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе и входящим МАР-потоком. Система состоит из K фаз обслуживания. Время обслуживания на k-й фазе является случайной величиной с функцией распределения $B_k(x)$, $k=\overline{1,K}$. Заявка входящего потока поступает на первую фазу. По окончании обслуживания на k-й фазе, она переходит на следующую, $(k+1)$-ю фазу до тех пор, пока не получит обслуживания на последней K-й фазе, после чего покидает систему.

Входящий поток заявок является МАР-потоком [4], заданный представлением $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$. Здесь $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_1$ – матрицы порядка M. Матрица $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$ является генератором управляющей цепи Маркова $m(t)$. Обозначим ее стационарное распределение вероятностей через $\mathbf{r}$. Вектор-строка $\mathbf{r}$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{rD} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{re} = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{0}$ и $\mathbf{e}$ – вектор-строка из нулей и вектор-столбец из единиц соответственно. Величина

$$\lambda = \mathbf{rD}_1\mathbf{e} \tag{2}$$

называется интенсивностью МАР-потока (*fundamental rate*).

Обозначим $i_k(t)$ – число заявок, находящихся в момент времени t на обслуживании на k-й фазе системы. Ставится задача поиска многомерного стационарного распределения вероятностей вектора состояний $\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), \ldots, i_K(t)\}$ – числа заявок на фазах системы.

3. Метод многофазного динамического просеивания

Прямое исследование случайного процесса $\mathbf{i}(t)$ достаточно затруднено. Поэтому для решения поставленной задачи воспользуемся методом многофазного динамического просеивания, подробно представленного в [5]. Кратко опишем его здесь.

Зафиксируем некоторый момент времени T. Обозначим через $S_k(t)$, $k = \overline{1, K}$, вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $t < T$, в момент T будет обслуживаться на k-й фазе системы. Через

$$S_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{K} S_k(t) \tag{3}$$

обозначим вероятность того, что указанная заявка покинет систему до момента T.

Определим K так называемых просеянных потоков событий. Будем считать, что заявка входящего потока, поступающая в систему в момент времени t, с вероятностью $S_k(t)$ генерирует событие в k-м просеянном потоке, а с вероятностью $S_0(t)$ – не генерирует события ни в одном из потоков.

Пусть в начальный момент времени $t_0 < T$ система пуста. Обозначим $n_k(t)$ – число событий, наступивших в k-м просеянном потоке до момента времени t. Тогда для вектора $\mathbf{n}(t) = \{n_1(t), \ldots, n_K(t)\}$ в момент времени $t = T$ имеем равенства

$$\mathrm{P}\{\mathbf{i}(T) = \mathbf{i}\} = \mathrm{P}\{\mathbf{n}(T) = \mathbf{i}\} \tag{4}$$

для любых значений $\mathbf{i}$, то есть распределения вероятностей значений случайных процессов $\mathbf{i}(t)$ и $\mathbf{n}(t)$ в этот момент времени совпадают. Таким образом, получив выражение для распределения вероятностей многомерного процесса $\mathbf{n}(t)$ и подставив $t = T$, получим распределение вероятностей значений исследуемого процесса $\mathbf{i}(t)$ в момент времени T, который, вообще говоря, выбран произвольно.

В работе [5] получены следующие выражения для вероятностей $S_k(t)$:

$$S_k(t) = B^*_{k-1}(T - t) - B^*_k(T - t), \tag{5}$$

где $B^*_k(x) = (B_1 * \cdots * B_k)(x)$ есть свертка функций $B_1(x), \ldots, B_k(x)$ для значений $k = \overline{2, K}$ и $B^*_0(x) \equiv 1$, $B^*_1(x) = B_1(x)$.

4. Уравнения Колмогорова

Очевидно, что процесс $\{\mathbf{n}(t), m(t)\}$ является марковским (здесь $m(t)$ – состояние управляющей входящим MAP-потоком цепи Маркова), и для его распределения вероятностей $P(\mathbf{n}, m, t) = \mathrm{P}\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}, m(t) = m\}$ можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(\mathbf{n}, m, t)}{\partial t} = \sum_{\eta=1}^{M} P(\mathbf{n}, \eta, t)(\mathbf{D}_0)_{\eta m} +$$

$$+\sum_{\eta=1}^{M}\left[P(\mathbf{n},\eta,t)(\mathbf{D}_1)_{\eta m}S_0(t)+\sum_{k=1}^{K}P(\mathbf{n}-\mathbf{e}_k,\eta,t)(\mathbf{D}_1)_{\eta m}S_k(t)\right]$$

для всех значений $m=\overline{1,M}$ и неотрицательных $\mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{e}_k$ – вектор, все элементы которого равны 0 за исключением k-го, который равен 1.

С использованием векторных обозначений эта система перепишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{n},t)}{\partial t}=\mathbf{P}(\mathbf{n},t)\mathbf{D}_0+\mathbf{P}(\mathbf{n},t)\mathbf{D}_1S_0(t)+\sum_{k=1}^{K}\mathbf{P}(\mathbf{n}-\mathbf{e}_k,t)\mathbf{D}_1S_k(t), \tag{6}$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{n},t)=\{P(\mathbf{n},1,t),\ldots,P(\mathbf{n},M,t)\}$, причем $P(\mathbf{n},t)=0$, если хотя бы один элемент вектора $\mathbf{n}$ меньше нуля.

Рассмотрим векторную характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},t)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_K=0}^{\infty}e^{ju_1n_1+\cdots+ju_Kn_K}\mathbf{P}(\mathbf{n},t).$$

Для нее система (6) с учетом (3) перепишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},t)}{\partial t}=\mathbf{H}(\mathbf{u},t)\left[\mathbf{D}+\mathbf{D}_1\sum_{k=1}^{K}\left(e^{ju_k}-1\right)S_k(t)\right] \tag{7}$$

Начальное условие для уравнения (7) имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},t_0)=\mathbf{r}. \tag{8}$$

Прямое решение задачи Коши (7), (8) с использованием матричной экспоненты не представляется возможным, так как матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}_1$ не перестановочны. В связи с этим в настоящей работе выполнено исследование свойств его решения в асимптотическом условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока, которое мы называем условием высокой интенсивности входящего потока. Для этого в уравнении (7) выполним следующие подстановки: $N\mathbf{D}_0$ вместо матрицы $\mathbf{D}_0$ и $N\mathbf{D}_1$ вместо $\mathbf{D}_1$, где N – большой по величине параметр (в теоретических исследованиях будем полагать $N\to\infty$). Получим:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{u},t)}{\partial t}=\mathbf{H}(\mathbf{u},t)\left[\mathbf{D}+\mathbf{D}_1\sum_{k=1}^{K}\left(e^{ju_k}-1\right)S_k(t)\right]. \tag{9}$$

Интенсивность входящего MAP-потока, заданного таким образом составляет $N\lambda$ и неограниченно растет при увеличении значения параметра N.

5. Асимптотика первого порядка

Рассматривая условие высокой интенсивности входящего потока $N \to \infty$, выполним в задаче (9), (8) следующие замены:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon). \tag{10}$$

С использоваием этих замен задача (9), (8) перепишется в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} = \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon) \left[\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \sum_{k=1}^{K} \left(e^{j\varepsilon w_k} - 1 \right) S_k(t) \right], \tag{11}$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \tag{12}$$

Относительно асимптотического решения $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$ этой задачи имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t)$ *задачи* (11)–(12) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ \lambda \sum_{k=1}^{K} j w_k \int_{t_0}^{t} S_k(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{13}$$

где $\mathbf{r}$ *и* λ *определяются выражениями* (1) *и* (2).

Доказательство. Доказательство выполним в два этапа.

Этап 1. Положим в выражении (11) $\varepsilon \to 0$. Получим:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t)\mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Сравнивая это уравнение с (1), можем сделать вывод, что функция $\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{w}, t) = \mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{w}, t), \tag{14}$$

где $\Phi_1(\mathbf{w}, t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_1(\mathbf{w}, t_0) = 1. \tag{15}$$

Этап 2. Умножим обе части матричного уравнения (11) справа на вектор $\mathbf{e}$, поделим на ε, подставим (14) и выполним предельный переход $\varepsilon \to 0$. Тогда с учетом того, что

$$\mathbf{D}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{16}$$

Получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w}, t)}{\partial t} \mathbf{r}\mathbf{e} = \Phi_1(\mathbf{w}, t)\mathbf{r}\mathbf{D}_1\mathbf{e} \sum_{k=1}^{K} j w_k S_k(t).$$

Учитывая (2) и $\mathbf{r}\mathbf{e} = 1$, получаем:

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{w},t)}{\partial t} = \Phi_1(\mathbf{w},t)\lambda \sum_{k=1}^{K} jw_k S_k(t).$$

С учетом начального условия (15) получаем следующее решение этого уравнения:

$$\Phi_1(\mathbf{w},t) = \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{K} jw_k \int_{t_0}^{t} S(\tau)\, d\tau\right\}.$$

Подставляя это выражение в (14), для функции $\mathbf{F}_1(\mathbf{w},t)$ получаем выражение (13). Теорема доказана. ■

6. Асимптотика второго порядка

Введем векторную функцию $\mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)$, удовлетворяющую равенству

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},t) = \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)\exp\left\{N\lambda \sum_{k=1}^{K} ju_k \int_{t_0}^{t} S_k(\tau)\, d\tau\right\}. \tag{17}$$

Подставляя это выражение в (9), (8), получим следующую задачу Коши относительно функции $\mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)}{\partial t} + \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)\lambda \displaystyle\sum_{k=1}^{K} ju_k S_k(t) = \\ \qquad = \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t)\left[\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\left(e^{ju_k} - 1\right) S_k(t)\right], \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t_0) = \mathbf{r}. \end{cases} \tag{18}$$

Выполним здесь следующие замены переменных:

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad \mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{w}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{u},t) = \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon). \tag{19}$$

Тогда задача (18) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon)\lambda \displaystyle\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) = \\ \qquad = \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon)\left[\mathbf{D} + \mathbf{D}_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\left(e^{j\varepsilon w_k} - 1\right) S_k(t)\right], \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t_0,\varepsilon) = \mathbf{r}. \end{cases} \tag{20}$$

Обозначим

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon). \tag{21}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Асимптотическое решение* $\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t)$ *задачи* (20) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t) = \mathbf{r}\exp\left\{\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t}S_k(\tau)\,d\tau + \kappa\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{jw_kjw_\nu}{2}\int\limits_{t_0}^{t}S_k(\tau)S_\nu(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{22}$$

где

$$\kappa = 2\mathbf{g}(\mathbf{D}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}, \tag{23}$$

а вектор-строка $\mathbf{g}$ *удовлетворяет следующей системе линейных алгебраических уравнений:*

$$\mathbf{gD} = \mathbf{r}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1). \tag{24}$$

Доказательство. Доказательство выполним в три этапа.

Этап 1. Выполним в (20) предельный переход $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t)\mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{w},t_0) = \mathbf{r}. \end{cases}$$

Сравнивая этот результат с (1), можно сделать вывод о том, что функция $\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t)$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t) = \mathbf{r}\Phi_2(\mathbf{w},t), \tag{25}$$

где $\Phi_2(\mathbf{w},t)$ – некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_2(\mathbf{w},t_0) = 1. \tag{26}$$

Этап 2. Учитывая (25) и (21), функцию $\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon)$ можно представить в виде разложения

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{w},t,\varepsilon) = \Phi_2(\mathbf{w},t)\left[\mathbf{r} + \mathbf{g}\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_kS_k(t)\right] + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \tag{27}$$

где $\mathbf{g}$ – некоторая вектор-строка.

Подставим (27) и разложение $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + O\left(\varepsilon^2\right)$ в уравнение задачи (20), получим равенство:

$$\mathbf{r}\lambda\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_kS_k(t) = \mathbf{rD} + \mathbf{rD}_1\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_kS_k(t) + \mathbf{gD}\sum_{k=1}^{K}j\varepsilon w_kS_k(t) + \mathbf{O}(\varepsilon^2).$$

Выполнив здесь предельный переход $\varepsilon \to 0$, с учетом (1)получаем следующее матричное уравнение относительно неизвестного вектора $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{gD} = \mathbf{r}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{D}_1),$$

которое совпадает с (24).

Этап 3. Умножим обе части дифференциального уравнения задачи (20) справа на вектор e. Используя разложение $e^{j\varepsilon w_k} = 1 + j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} + O(\varepsilon^3)$, учитывая свойства (1), (16) и обозначения (2), (23), выполним в этом уравнении предельный переход при $\varepsilon \to 0$. В результате получим следующее линейное дифференциальное однородное по t уравнение относительно функции $\Phi_2(\mathbf{w}, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{w},t)}{\partial t} = \Phi_2(\mathbf{w},t)\left[\lambda \sum_{k=1}^{K} \frac{(jw_k)^2}{2} S_k(t) + \kappa \sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} \frac{jw_k jw_\nu}{2} S_k(t) S_\nu(t)\right],$$

где величина κ определяется выражением (23). С учетом начального условия (26) получаем следующее решение этого уравнения:

$$\Phi_2(\mathbf{w},t) = \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{K} \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{t_0}^{t} S_k(\tau)d\tau + \kappa \sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} \frac{jw_k jw_\nu}{2} \int_{t_0}^{t} S_k(\tau)S_\nu(\tau)d\tau\right\}.$$

Подставляя полученное решение в (25), получаем окончательное выражение для функции $\mathbf{F}_2(\mathbf{w}, t)$ в виде (22). Теорема доказана. ■

7. Стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе

Выполним в (22) замены, обратные к (19). Учитывая (17), получаем следующее выражение для векторной характеристической функции $\mathbf{H}(\mathbf{u}, t)$ многомерного распределения числа событий в просеянных потоках, наступивших до момента времени t (см. раздел 3):

$$\mathbf{H}(\mathbf{u},t) = \mathbf{r}\exp\left\{N\lambda \sum_{k=1}^{K}\left[ju_k + \frac{(ju_k)^2}{2}\right]\int_{t_0}^{t} S_k(\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + N\kappa \sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} \frac{ju_k ju_\nu}{2} \int_{t_0}^{t} S_k(\tau)S_\nu(\tau)d\tau\right\}.$$

Вернемся к исследуемому процессу $\mathbf{i}(t)$, который представляет число заявок на фазах рассматриваемой многофазной системы массового обслуживания. С помощью $h(\mathbf{u})$ обозначим характеристическую функцию сечения этого процесса в момент времени T. Применяя основную формулу (4) многофазного динамического просеивания, получаем следующую аппроксимацию $h^{(2)}(\mathbf{u})$ для характеристической функции $h(\mathbf{u})$ при условии достаточно больших значений параметра N:

$$h(\mathbf{u}) \approx h^{(2)}(\mathbf{u}) = \exp\left\{N\lambda \sum_{k=1}^{K}\left[ju_k + \frac{(ju_k)^2}{2}\right]\int_{t_0}^{T} S_k(\tau)d\tau + \right.$$

$$+N\kappa\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{ju_kju_\nu}{2}\int_{t_0}^{T}S_k(\tau)S_\nu(\tau)d\tau\Bigg\}.$$

Рассматривая начальный момент $t_0 \to -\infty$ и выполнив в интегралах замену $t = T - \tau$, получаем следующую аппроксимацию для характеристической функции $h(\mathbf{u})$ числа заявок на фазах системы в стационарном режиме функционирования:

$$h(\mathbf{u}) \approx h^{(2)}(\mathbf{u}) = \exp\left\{j\mathbf{u}N\lambda\mathbf{S}\mathbf{e} + \frac{1}{2}j\mathbf{u}\left[N\lambda\mathbf{S} + N\kappa\mathbf{V}\right]j\mathbf{u}^T\right\}, \qquad (28)$$

где $\mathbf{S}$ – диагональная матрица с элементами главной диагонали, равными средним временам обслуживания на соответствующих фазах, а матрица $\mathbf{V}$ составлена из элементов $V_{k\nu} = \int\limits_0^\infty \left[B^*_{k-1}(t) - B^*_k(t)\right]\left[B^*_{\nu-1}(t) - B^*_\nu(t)\right]dt$, $k, \nu = \overline{1, K}$.

Таким образом, многомерное стационарное распределение числа заявок на фазах многофазной системы обслуживания с входящим MAP-потоком, неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием на фазах системы при достаточно большой интенсивности входящего потока может быть аппроксимировано многомерным нормальным распределением с вектором средних $N\lambda\mathbf{S}\mathbf{e}$ и матрицей ковариаций $N\left[\lambda\mathbf{S} + \kappa\mathbf{V}\right]$.

Для определения точности полученной гауссовской аппроксимации проведен ряд численных экспериментов, в каждом из которых для маргинальных стационарных распределений вероятностей числа заявок на фазах системы закон, составленный на основе нормального распределения с соответствующими параметрами, сравнивался с эмпирическим распределением, построенным на основе результатов имитационного моделирования. Для проведения сравнения использовалось расстояние Колмогорова [6], которое для дискретных распределений имеет вид

$$d = \max_{i\geq 0}\left|\sum_{l=0}^{i}\left[\tilde{P}(l) - P(l)\right]\right|,$$

где $P(l)$ – маргинальное стационарное распределение числа заявок на одной фазе системы, вычисленное на основе аппроксимации (28), $\tilde{P}(l)$ – маргинальное эмпирическое распределение числа заявок на соответствующей фазе, построенное на основе результатов имитационного моделирования.

Установлено, что полученная аппроксимация дает хорошие результаты (расстояние Колмогорова $d < 0,05$) при значениях параметра $N \geq 30$.

8. Заключение

В работе представлено исследование многофазной системы массового обслуживания с входящим MAP-потоком, неограниченным числом приборов и произвольным обслуживанием на фазах. Исследование выполнено в асимптотическом условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока. Показано, что при достаточно большой интенсивности входящего МАР-потока многомерное распределение вероятностей числа заявок на фазах системы в стационарном режиме с достаточной точностью может быть аппроксимировано многомерным нормальным распределением. В работе получены значения вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций для этой гауссовской аппроксимации. Численные эксперименты с применением имитационного моделирования позволяют определить область применимости полученной аппроксимации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания: Учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995.
2. Грачев В. В., Моисеев А. Н., Назаров А. А., Ямпольский В. З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады ТУСУРа. 2012. № 2 (26), часть 2. С. 248–251.
3. Genadis T. The distribution of the passage time in a twoЦstation reliable production line: an exact analytic solution // International Journal of Quality and Reliability Management. 1997. V. 14, Iss. 9. P. 929–935.
4. Chakravarthy, S. R. Markovian arrival processes. Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, 2010.
5. Моисеев А. Н., Назаров А. А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. 2014. Т. 50, № 2. С. 67–76.
6. Рыков В. В., Иткин В. Ю. Математическая статистика и планирование эксперимента: уч. пособие. М.: МАКС Пресс, 2010.

Научное издание

Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление (DCCN-2015)

МАТЕРИАЛЫ ВОСЕМНАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

19-22 октября 2015 г., Москва, Россия

Подписано в печать: 09.10.2015.
Формат 70×100/16. Усл. печ. л. 52,97.
Тираж 200 экз. Заказ № 94

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук
ул. Профсоюзная, д. 65
Москва, 117997
http://www.ipu.ru