УДК 510.2
DOI: 10.17223/1998863Х/34/19

П.И. Олейник

«ИЗМЕРЕНИЕ» НЕОЛОГИЦИЗМА: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

Рассматриваются основные доводы, приписываемые Г. Фреге при построении программы логицизма. Приводится краткая характеристика этих доводов. Анализируются математические доводы: проблематизируются аспекты неологицизма, ставящие под сомнение выполнимость в рамках данной программы математических задач Г. Фреге. Делается вывод о решении этой задачи в рамках проекта неологицизма К. Райта и Б. Хейла.
Ключевые слова: *логицизм, неологицизм, принцип Юма.*

Одним из новых направлений философии математики является неологицизм, апологеты которого стремятся переосмыслить логицизм Г. Фреге и построить на его основных постулатах новую программу философии математики. Эта новая ветвь получила развитие благодаря работам шотландского философа К. Райта (в первую очередь, написанной в 1983 году «Frege's conception of numbers as objects» [1]) и его соавторов, в первую очередь Б. Хейла. Неологицизм в современной философии математики является одним из самых обсуждаемых проектов. Критика данного направления широко представлена в западной литературе и касается многих его аспектов. Одним из дискуссионных вопросов является вопрос о том, отвечает ли программа неологицизма исходным целям самого Г. Фреге, решает ли она задачи, которые он поставил. Мы рассмотрим, как проект неологицизма решает задачи самого Г. Фреге в контексте вопроса о том, насколько в действительности задачи этих двух философско-математических проектов совпадают. В этом анализе мы будем в первую очередь отталкиваться от позиции по этому вопросу С. Шапиро (*Stewart Shapiro*), влиятельного исследователя в области философии математики, в его работе «Измерение Шотландского неологицизма» [2].

Целью этой работы является оценка неологицизма в различных направлениях, в первую очередь – сопоставление проекта неологицизма с изначальной задумкой Г. Фреге. С. Шапиро анализирует программу неологицизма и обозначает различные критерии (или, как выражается С. Шапиро, мерные палочки (*meter sticks*)), которые он предлагает использовать для «измерения» программы.

Мерные палочки

Для того, чтобы определить мерные палочки, обратимся к самому Г. Фреге. Г. Фреге отмечает, что «к сущности математики относится то, что она всюду, где возможно доказательство, предпочитает доказательство. <…> Евклид доказывает многое из того, с чем и без этого с ним согласился бы каждый» [3. С. 140]. Он ставит перед собой задачу предоставления доказательств таких базовых арифметических суждений, как «за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число», принципа индукции и простых арифметических тождеств, таких как «1 + 1 = 2».

Исследователи значительно расходятся в вопросах о том, *почему* мы предпочитаем доказательство и почему Г. Фреге думал, что мы предпочитаем доказательство везде, где доказательство возможно. Каковы были цели логицизма Г. Фреге? Робин Джешон (*Robin Jeshion*) [4. P. 939–940] обобщает различные цели, которые были приписаны Г. Фреге различными учеными, и выделяет следующие доводы, которыми руководствовался Г. Фреге при построении программы неологицизма:

- *Математические доводы* (*Mathematical Rationale*): мотивы Г. Фреге являются математическими. Он действительно хотел доказать некоторые теоремы. Он верил, что все, что может быть доказано, должно быть доказано, и он думал, что предложения арифметики, доселе не доказанные, могут быть доказаны, а значит, они должны быть доказаны.
- *Логико-картезианские доводы (Logico-Cartesian Rationale):* Г. Фреге являлся реформатором, который стремился совершенствовать арифметическое знание. Он думал, что на основе одной только логики можно производить знания, обладающие абсолютной самоочевидностью, определенностью и ясностью. Он также думал, что фактические арифметические знания омрачаются сомнениями, неопределенностью и неясностью. И создание логицизма было необходимо Г. Фреге для демонстрации эпистемологического превосходства арифметического знания.
- *Доводы от знания источников (Knowledge-of-Sources Rationale):* Г. Фреге хотел понять философский статус нашего арифметического знания, т.е. определить, является ли арифметика аналитической или синтетической, априорной или апостериорной. Развитие логицизма было мотивировано тем, что Г. Фреге полагал, что доказательство предложений арифметики необходимо для определения эпистемологического источника нашего арифметического знания.

Р. Джешон отмечает, что эти доводы совместимы друг с другом и, кроме того, выделяет четвертый вид доводов, для формулирования которого необходимо обратиться к рационализму Г. Фреге.

В одном месте Г. Фреге [3. С. 141] говорит нам, почему математики «предпочитают доказательство везде, где доказательство возможно», по крайней мере метафорически:

«Доказательство как раз имеет целью не только поставить истинность предложений вне всяких сомнений, но также и просмотреть зависимость истин друг от друга. Убедившись в непоколебимости каменной глыбы в тщетных попытках её передвинуть, можно далее задаться вопросом, что же её так надёжно удерживает?».

Таким образом, Г. Фреге считал, что суждения находятся в отношении зависимости. Отношения зависимости являются объективными в том смысле, что речь не идет о том, как какой-то человек или любой другой приходит к убеждению в данном предложении. Скорее, некоторые предложения объективно следуют из других.

Понимание Г. Фреге понятия аналитичности и априорности сформулировано в условиях отношения зависимости (см. [3. С. 141–142]). Г. Фреге выделяет и определяет аналитические и синтетические, а также апостериорные и априорные суждения. Он полагает, что некоторые истинные предложения являются обоснованно надежными и не зиждутся на других предложениях. Термин Г. Фреге для таких предложений – *selbstverstandlich*. Следуя Р. Джешон, оставим его на немецком языке. В терминологии современной философии этому термину соответствуют «примитивные» или «первичные истины». *Selbstverstandlich*-предложения не требуют никаких доказательств, и, действительно, их (нетривиальные) доказательства невозможны. Все остальные известные суждения основаны на *selbstverstandlich*-предложениях. Поэтому надлежащие аксиомы являются *selbstverstandlich*.

Как же тогда *selbstverstandlich*-истины познаваемы? По определению, такие предложения не могут быть доказаны. Они не известны на основе чего-либо другого. Г. Фреге определил, что надлежащие аксиомы имеют эпистемологическое свойство, которое он называет *einleuchten*, самоочевидность. Р. Джешон поясняет это свойство следующим образом: «(*einleuchten*)-предложение *p* является самоочевидным, если и только если ясное схватывание *p* – достаточное и убедительное основание для признания истинности *p*» [4. P. 953]. По словам Тайлера Берджа (*Tyler Burge*), эпистемологически-метафизический статус, которым пользуются такие предложения, – это «что-то несомненно разумное для того, кто полностью понимает соответствующее предложение» [5. P. 312].

Так, Р. Джешон отмечает еще одну цель логицизма Г. Фреге:

• *Евклидовы доводы (Euclidean rationale)*: позиция Г. Фреге заключается в том, что примитивные истины математики имеют два свойства. (1) Они *selbstverstandlich*: надежные, пока не основаны на какой-либо другой истине и, как таковые, не нуждаются в доказательстве и (2) они самоочевидны: их ясное схватывание является достаточным и убедительным основанием для признания их истинности. Он также думал, что отношения эпистемологического обоснования в науке отражает естественный порядок истин: в частности, что является самоочевидным, является и *selbstverstandlich*. Обнаружение множества предложений арифметики не самоочевидно, и Г. Фреге заключает, что они (предложения арифметики) нуждаются в доказательстве.

Нас интересует здесь, конечно, не логицизм Г. Фреге, но шотландский неологицизм К. Райта и Б. Хейла, программа создания разделов математики из принципов абстракции и, в частности, обоснование арифметики на *принципе Юма*. И задумка С. Шапиро заключается в том, чтобы увидеть, насколько хорошо программа продвинулась в направлении четырех доводов, предложенных Р. Джешон. Эти четыре довода и станут «мерными палочками» для измерения результатов неологицизма. В данной статье мы остановимся на рассмотрении математических доводов.

Математические доводы

Тезис заключается в том, что Г. Фреге увидел, что принцип последовательности натуральных чисел и принцип индукции (возьмем эти два примера) еще не доказаны. По математическим причинам – так как математика требует доказательства везде, где доказательство возможно – Г. Фреге задался целью доказать эти предложения. Это могло бы объяснить его недовольство выводом этих предложений из *принципа Юма* (абстрактный принцип, согласно которому два понятия F и G имеют одно и то же кардинальное число, если они равночисленны, т.е. если имеется взаимно однозначное соответствие между объектами, подпадающими под F, и объектами, подпадающими под G; символически: (HP) $\forall F \forall G\ [NxFx = NxGx \leftrightarrow F \approx G]$. Проект неологицизма выводит математику из этого принципа). Дело не в том, что есть что-то неверное в этом выводе. Скорее, быть может, Г. Фреге думал, что он обнаружил, что сам *принцип Юма* может быть доказан, как только будут предоставлены правильные эксплицитные определения кардинальных чисел (хотя, следует отметить, Г. Фреге не указывал это в качестве причины, почему он не был удовлетворен *принципом Юма* и почему он перешел к эксплицитным определениям чисел в терминах объема). Мало кто сомневается, что *Теорема Фреге* (согласно которой аксиомы второго порядка Пеано можно вывести в логике второго порядка из *принципа Юма*) является значительным математическим достижением. Кто бы мог подумать, что столько может быть получено из такого простого и более или менее очевидного факта о численности? Однако, как оказалось, одного этого недостаточно, чтобы удовлетворить математические доводы, по крайней мере, как они сформулированы здесь. Согласно им, Г. Фреге пришел к пониманию того, что основные положения арифметики были доселе не доказанными, и он предложил то, что было, в сущности, первым доказательством этих предложений.

Аналогичным притязанием со стороны шотландского неологицизма является то, что при выводе аксиом Пеано – Дедекинда из *принципа Юма* мы получаем, по сути, доказательства этих предложений.

Однако существуют вопросы, касающиеся удовлетворения математических доводов. Дело в том, что мы не можем знать, удовлетворены ли математические доводы, пока мы не определили, что подразумевается под математикой (арифметикой) и какие доказательства будут считаться приемлемыми. Нам необходимо знать, что такое арифметика и что нужно, чтобы доказать что-то в арифметике. Рассмотрим, например, утверждение *S*, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число. Г. Фреге и сторонники неологицизма предоставляют действующий вывод, последняя строка которого имеет те же слова, что и предложение, которое выражает *S*. Вывод неологицизма имеет преимущество перед Г. Фреге в том, что, возможно, его посылки истинны. Но этого, конечно, не достаточно, чтобы представить доказательство. То, что из *S&S* вытекает *S*, не является доказательством *S*.

Другой вопрос касается содержания предложений в выводе *Теоремы Фреге*: действительно ли последняя строка в неофрегеанском выводе является такой, как и *S*, предложением о том, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число? Это должно быть именно так, если мы хотим утверждать, что мы имеем доказательство *S*. Логицизм и неологицизм не должны менять субъект (не должно быть подмены понятия). С. Шапиро предлагает использовать следующий «глупый» пример: предположим, что я определяю «натуральное число» как «ребенок» и определяю «последующий элемент» как «родитель». Тогда я докажу с помощью аналитической рефлексии предложение «за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число». Можно взять менее глупый пример, предположим, что я определяю «натуральное число» конечным ординалом фон Неймана и определяю «последующий элемент “натурального числа”» x как $x \cup \{x\}$. Тогда я докажу из аксиомы пары и объединения, что «за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число».

Ни в одном случае мы не доказали *S*, предположение, что за каждым натуральным числом следует (непосредственно) другое натуральное число. Как говорится, названный лапой хвост – ещё не лапа. Называя натуральное число ребенком или ординалом фон Неймана, мы не делаем натуральное число ребенком или ординалом фон Неймана.

С. Шапиро приводит столь абсурдный пример для того, чтобы более наглядно показать, насколько «просто» может быть произведена подмена понятий. Дело в том, что в качестве критики программе неологицизма предъявляется то, что выводимая ими из *принципа Юма* математика не является математикой в общепринятом смысле этого понятия. А потому, представляя доказательства математических предложений, они доказывают «свою математику», и подмена понятий все-таки имеет место.

Для Г. Фреге толкование принципа последовательности натуральных чисел *S* – это что-то вроде следующего:

Пусть *x* – объем понятия формы «равночисленен *C*», и предположим, что есть только конечное число объектов, подпадающих под *C*. То есть что есть *x’* и понятие *D* такое, что (1) существует *z* такое, что *Dz* и *C* равночисленны понятию «подпадающие под *D*, но отличные от *z*», и (2) *x’* является объемом понятия «равночисленно *D*».

Это можно принять в качестве принципа последовательности натуральных чисел *S* только в том случае, если эксплицитные определения Г. Фреге верны. То есть Г. Фреге обеспечивает доказательство принципа последовательности натуральных чисел, только если натуральные числа, о которых говорят математики и обычные люди, от Античности и до 1884 года, по сути, – объемы, которыми их считает Г. Фреге. С. Шапиро пишет: «Мне кажется, что неологицизм находится здесь в более выгодном положении. Не беря во внимание их концептуальный анализ, действительно кажется правдоподобным, что натуральные числа – это просто кардинальные числа конечных понятий. <…> Интуитивно, ноль – это просто кардинальное число понятия, под которое ничего не подпадает, один – это кардинальное число одноэлементных понятий, и т.д. Кроме того, *принцип Юма* является довольно очевидной и простой истиной о кардинальных числах, или, по крайней мере, это так, если кто-то думает, что кардинальные числа существуют и что каждое понятие имеет кардинальное число» [2. P. 77]. *Теорема Фреге* включает вывод принципа последовательности натуральных чисел *S* из этой более или менее очевидной истины. И можно полагать это доказательством *S*.

Однако обратимся к еще одному видному немецкому математику Р. Дедекинду, который, в некоторой степени, сделал обратное тому, что предлагают Г. Фреге и представители неологицизма. И Г. Фреге, и шотландские неологицисты выводят структуру натуральных чисел – конечных кардинальных чисел – из *принципа Юма*. Р. Дедекинд, напротив, определяет *бесконечную систему* как множество с необходимой структурой, а затем определяет «натуральные числа» в качестве такой системы. Затем он задает процедуру установления натурального числа для каждого конечного множества. Так мы получаем версию *принципа Юма*, ограниченную конечными понятиями. В соответствии с общим математическим обоснованием мы, таким образом, получаем доказательство этой ограниченной версии *принципа Юма* из структурных принципов натуральных чисел – в том числе принципа последовательности натуральных чисел *S* – и определений.

Г. Фреге полагал, что правильное определение математических объектов должно вытекать из их (основного) применения, и в силу этого его теория дала правильное определение натуральных чисел и, таким образом, правильное доказательство *S*. Р. Дедекинд, наряду со структуралистами не согласен с этим, полагая структуру в качестве сущности натуральных чисел. Применение чисел добавляется позже, и соответствующая теорема – *принцип Юма* – тогда доказывается. Поэтому стороны расходятся во взглядах на математическое обоснование: одна сторона берет на себя доказательство *S* и других особенностей строения натурального ряда чисел из *принципа Юма* (плюс определения); другая берет на себя доказательство ограниченной версии *принципа Юма* из структуры (плюс определения). Вопрос в том, какое из них является реальным доказательством?

Возможно, представители неологицизма могут рассуждать следующим образом: понимание арифметики мы получаем из *принципа Юма*, который имеет правильную структуру, и это понимание приводит нас к стандартному применению (чисел). Так теория, основанная на *принципе Юма*, может играть ту роль, которую арифметика играет в нашей концептуальной схеме. Пожалуй, это все, что имеет значение для математического обоснования. Метафорически, если что-то ходит, как утка, звучит, как утка, выглядит, как утка, и делает все то, что делает утка, – «то, возможно, это и есть утка». В таком случае, возможно, не стоит рассматривать две эти позиции как конкурирующие (как предлагает сам С. Шапиро).

В любом случае, все стороны метафизического спора могут сойтись на том, что ограниченная версия *принципа Юма* плюс определения является эквивалентом аксиом Пеано – Дедекинда плюс определения. И, заключает С. Шапиро, «кажется разумным, и не вызывает никаких споров, считать это как подпадающее под нечто в пределах математических доводов» [2. P. 78].

Таким образом, был рассмотрен один из доводов, которым руководствовался Фреге при построении своей программы логицизма, или, по крайней мере, задача, которую ему приписывает ряд мыслителей, и остановились на том, выполняет ли эту задачу проект неологицизма. Как бы то ни было, собственные мотивы К. Райта и Б. Хейла явно философские (о чем свидетельствует название работы К. Райта [6] «О философском значении Теоремы Фреге»). Наше внимание, однако, было сконцентрировано на том, насколько проект неологицизма успешен в решении различных вопросов математического обоснования. Действительно, в рамках проекта предпринимается попытка решить поставленную Г. Фреге математическую задачу по установлению доказательства базовых предложений арифметики, и эта попытка может считаться состоятельной. Вместе с тем существует ряд трудностей в рамках проекта, без преодоления которых эта задача не может считаться полностью выполненной. Программа К. Райта и Б. Хейла находится в постоянном развитии, предлагая новые решения для проблем в рамках философии математики неологицизма, и дискуссии вокруг нее в западной литературе не прекращаются. Сами представители этой концепции продолжают исследование для преодоления имеющихся недостатков. Также предстоит рассмотреть связь задач логицизма Г. Фреге и неологицизма К. Райта и Б. Хейла с позиции остальных доводов, которые приписываются самому Г. Фреге рядом исследователей, – логико-картезианских, доводов от знания источников и Евклидовых доводов.

Литература

1. *Wright C.* Frege's conception of numbers as objects. Aberdeen University Press, 1983. 194 p.

2. *Shapiro S.* The Measure of Scottish Neo-Logicism // Logicism, Intuitionism, and Formalism, edited by Linström et al. Springer Dordrecht; London, 2009. Vol. 341. P. 69–90.

3. *Фреге Г.* Логико-философские труды // Готлоб Фреге / пер. с англ., нем., фр. В.А. Суровцева. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2008. 283 с. (Пути философии).

4. *Jeshion R.* Frege's notions of self-evidence // Mind. 2001. № 110. P. 937–976.

5. *Burge T.* Frege on knowing the foundation // Mind. 1998. № 107. P. 305–347.

6. *Wright C.* On the philosophical significance of Frege's theorem // Language, thought, and logic, edited by Richard Heck, Jr., Oxford: Oxford University Press, 1997. P. 201–244.

Oleinik Polina I. Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation)
DOI: 10.17223/1998863X/34/19

«THE MEASURE» OF NEO-LOGICISM: MATHEMATICAL ASPECT

Keywords: logicism, neo-logicism, Hume's principle

The paper analyzes G. Frege's logicism and neo-logicism of C. Wright and B. Hale. The main aims that have been attributed to Frege's logicism by different scholars are considered. A brief description of these aims is given. The paper is concerned with the mathematical rationale. According to the mathematical rationale, G. Frege believed that whatever admits to proof ought to be proved. And he thought that the propositions of arithmetic, hitherto unproved, admit of proof and should be proved. Aspects of neo-logicism, questioning the feasibility of mathematical aims of G. Frege in the framework of the program, are problematized. It is concluded about the solution of this problem in the framework of the project of neo-logicism of C. Wright and B. Hale.

References

1. Wright, C. (1983) *Frege's conception of numbers as objects*. Aberdeen University Press.

2. Shapiro, S. (2009) The Measure of Scottish Neo-Logicism. In: Lindström, S., Palmgren, E., Segerberg, K. & Stoltenberg-Hansen, V. (eds) *Logicism, Intuitionism, and Formalism*. Springer. pp. 69–90. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-8926-8_4

3. Frege, G. (2008) *Logiko-filosofskie trudy* [Logico-philosophical works]. Translated from English, German and French by V.A. Surovtsev. Novosibirsk: Siverian University Publ.

4. Jeshion, R. (2001) Frege's notions of self-evidence. *Mind*. 110. pp. 937–976. DOI: 10.1093/mind/110.440.937

5. Burge, T. (1998) Frege on knowing the foundation. *Mind*. 107. pp. 305–347. DOI: 10.1093/mind/107.426.305

6. Wright, C. (1997) On the philosophical significance of Frege's theorem. In: Heck, R. (ed.) *Language, thought, and logic*. Oxford: Oxford University Press. pp. 201–244.