МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

**Методические указания
для выполнения лабораторной работы**

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

РАССМОТРЕНО И УТВЕРЖДЕНО методической комиссией физического факультета

Председатель комиссии В. М. Вымятнин

Работа посвящена изучению вращательного движения твердых тел.. Даются описания способа определения момента инерции твердых тел методом крутильных колебаний с помощью трифилярного подвеса и экспериментальной проверки теоремы Штейнера.

Методические указания рассчитаны на студентов нефизических специальностей очной и заочной форм обучения.

Составитель: доцент **В.Ф. Нявро**

© Томский государственный университет, 2016

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Цель работы: изучение вращательного движения твердых тел: определение момента инерции твердых тел методом крутильных колебаний с помощью трифилярного подвеса; экспериментальная проверка теоремы Штейнера.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Тело, расстояние между любыми двумя точками которого неизменно, называется абсолютно твердым телом, то есть размеры и форма абсолютно твердого тела не изменяются под действием приложенных сил. Представление об абсолютно твердом теле является абстракцией. Реальное твердое тело можно считать абсолютно твердым, если изменение размеров и формы тела под действием силы ничтожно мало.

Движение твердого тела называется **поступательным**, если отрезок прямой, соединяющий любые две точки тела, сохраняет неизменное направление в пространстве. Следовательно, все точки тела движутся одинаково, то есть имеют одинаковые скорости и ускорения.

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называют такое движение, при котором все точки тела, не лежащие на оси, описывают окружности. При вращении тела вокруг неподвижной оси в любой момент времени линейные скорости материальных точек, лежащих на разных расстояниях от оси вращения, различны.

Разобьем твердое тело на элементарные участки массы m_i, каждый из которых можно считать материальной точкой,то есть линейные размеры участка много меньше расстояния до оси вращения.

Кинетическая энергия тела находится как сумма кинетических энергий всех составляющих его материальных точек:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (1)$$

Учитывая связь линейной скорости с угловой $v_i = \omega r_i$ (r_i – расстояние i–той материальной точки до оси вращения; ω – угловая скорость, одинаковая для всех точек тела), кинетическую энергию тела (1) запишем в виде

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (2)$$

Произведение массы m_i материальной точки на квадрат её расстояния r_i от оси вращения называется моментом инерции материальной точки относительно данной оси

$$I_i = m_i r_i^2 \qquad (3)$$

Момент инерции тела относительно данной оси вращения равен сумме моментов инерции всех материальных точек

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (4)$$

Момент инерции – скалярная величина, зависящая от массы тела и её распределения относительно оси вращения. Момент инерции **характеризует инертные свойства тела при вращении: чем больше эта величина, тем большую энергию надо затратить для сообщения телу заданной угловой скорости.** Единицей измерения момента инерции является в системе СИ 1 $кг \cdot м^2$ и $1\ г \cdot см^2$ в системе СГС.

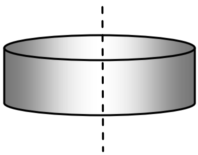
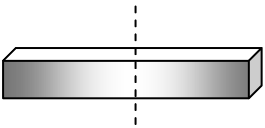
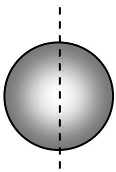
Движение вращающегося вокруг неподвижной оси тела подчиняется основному **закону динамики вращательного движения**

$$M = I\varepsilon ,$$

где M - результирующий момент сил; I - момент инерции тела и ε - угловое ускорение.

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Наиболее просто рассчитываются моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс. В таблице приведены моменты инерции некоторых тел

Форма тела	Положение оси вращения	Момент инерции тела
 Диск	Совпадает с осью симметрии	$I = \frac{1}{2} mR^2$ m -масса диска, R -радиус диска.
 Брусок	Проходит через центр масс перпендикулярно грани.	$I = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$ a -длина бруска, b - ширина бруска
 Сплошной шар	Проходит через центр масс	$I = \frac{2}{5} mR^2$ m -масса шара, R -радиус шара.

Если тело вращается относительно оси, не проходящей через центр масс, то момент инерции в этом случае можно найти с помощью теоремы Штейнера: ***момент инерции тела I относительно произвольной оси, равен сумме момента***

инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a^2 между осями:

$$I = I_0 + ma^2 \tag{6}$$

Например, момент инерции диска относительно оси $O'O'$ (рис.1) равен:

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

Приведенный пример показывает, что с удалением центра масс от оси вращения момент инерции тела относительно этой оси возрастает.

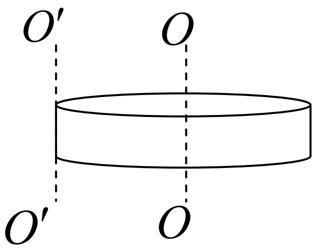


Рис. 1

ТРИФИЛЯРНЫЙ ПОДВЕС

Для экспериментального определения момента инерции тел можно использовать трифилярный подвес. Трифилярный подвес представляет собой две платформы, связанные тремя симметрично расположенными нитями. Платформа меньшего радиуса r укреплена на кронштейне и неподвижна, а платформа большего радиуса R может совершать **крутильные колебания** вокруг оси, проходящей через центр платформы перпендикулярно к её плоскости (**гармоническими крутильными колебаниями тела называются периодические движения относительно оси, проходящей через центр масс тела, когда угол отклонения от положения равновесия изменяется по закону синуса или**

косинуса). Период крутильных колебаний платформы зависит от момента инерции платформы, который изменяется, если платформу нагрузить каким-либо телом. Этим пользуются в настоящей работе.

Выведем платформу массой M из состояния равновесия, повернув её вокруг оси на **небольшой** угол, при этом центр масс приподнимется на высоту h (рис.2). Если пренебречь силами трения, то при крутильных колебаниях платформы будет выполняться закон сохранения механической энергии. Будем полагать потенциальную энергию платформы в положении равновесия равной нулю, тогда

$$Mgh = \frac{I\omega_0^2}{2}, \qquad (7)$$

где M – масса платформы, $\frac{I\omega_0^2}{2}$ - кинетическая энергия платформы при прохождении положения равновесия.

Математические расчеты, которые мы не приводим, позволяют сделать вывод, что при малых углах отклонения от положения равновесия колебания, совершаемые платформой, можно считать гармоническими, то есть угловое смещение платформы φ будет меняться по закону:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad (8)$$

где φ_0- амплитуда углового смещения, T – период колебания платформы.

Угловая скорость платформы равна производной по времени от φ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} cos\frac{2\pi}{T}t \qquad (9)$$

В момент прохождения платформой положения равновесия

$$(t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T)$$

максимальное значение угловой скорости будет:

$$\omega_0 = \frac{2\pi\varphi_0}{T} \qquad (10)$$

Тогда выражение (7) можно записать так:

$$Mgh = \frac{I}{2}\left(\frac{2\pi\varphi_0}{T}\right)^2 \qquad (11)$$

Высота, на которую поднимается центр массы платформы при малых колебаниях, как следует из рис2, равна:

$$h = h_1 - h_2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2} \approx \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\ell} \qquad (12)$$

Из рис.2 найдем h_1 и h_2

$$h_1^2 = \ell^2 - \left(R - r\right)^2$$

$$h_2^2 = \ell^2 - \left(BC\right)^2 = \ell^2 - \left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi_0\right)$$

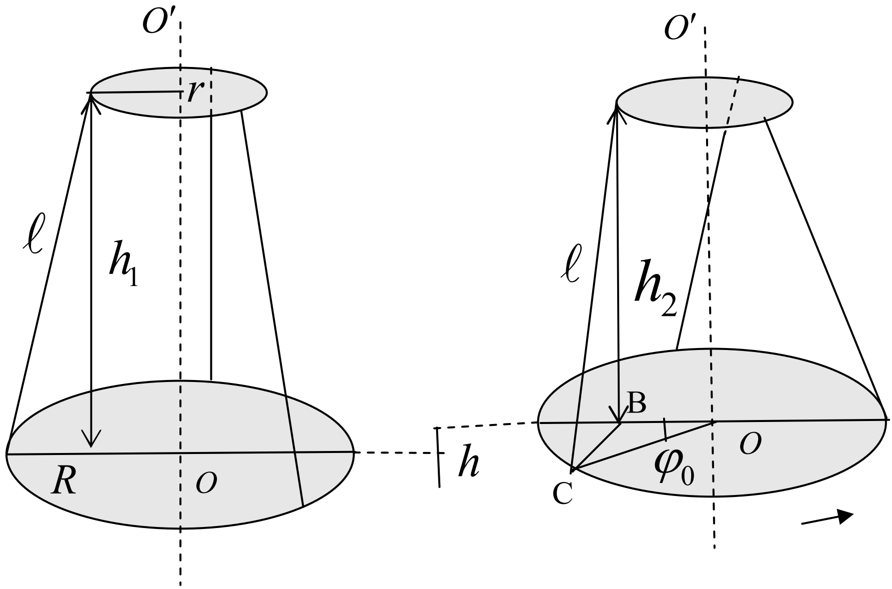


Рис. 2

Полученные значения h_1^2 и h_2^2 подставим в (12), после простых преобразований получим:

$$h = \frac{2Rr\left(1-\cos\varphi_0\right)}{2\ell} = \frac{2Rr2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{2\ell} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{2\ell}$$

При малых углах отклонения. $\sin^2\frac{\varphi_0}{2} \approx \left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2$, тогда

$$h = \frac{4Rr\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}{2\ell} = \frac{Rr\varphi_0^2}{2\ell} \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (11), получим :

$$Mg\frac{Rr\varphi_0^2}{2\ell} = \frac{I}{2}\left(\frac{2\pi\varphi_0}{T}\right)^2$$

Это выражение позволяет рассчитать момент инерции платформы, совершающей крутильные колебания, если известны параметры трифилярного подвеса M, R, r, ℓ и период её малых колебаний T :

$$I = Mg\frac{RrT^2}{4\pi^2\ell} \qquad (14)$$

МЕТОДИКА РАБОТЫ

1 Определение момента инерции ненагруженной платформы.

Осторожно выведите платформу из положения равновесия, поворачивая её на **малый угол** $3^\circ - 5^\circ$. Измерьте секундомером время t, за которое платформа совершит n полных колебаний и вычислите период колебаний:

$$T = \frac{t}{n}$$

Измерения времени колебаний следует провести не менее пяти раз. Результаты занесите в таблицу 1.

Таблица 1

№ п/п	Число колебаний n	Время t (c)	Период T (c)	$T_{ср}\left(c\right)$
1. 2. 3. 4. 5				

Найдите среднее значение периода колебаний $T_{ср}\left(c\right)$ и, используя выражение (14), вычислите момент инерции ненагруженной платформы I .

2 Определение момента инерции платформы, нагруженной исследуемым телом.

Положите исследуемое тело в центр платформы, сообщите ей малые крутильные колебания. Повторите измерения п.1 и определите период этих колебаний. Результаты занесите в таблицу 2.

Таблица 2

№ п/п	Число колебаний n	Время t (c)	Период T (c)	$T_{ср}\left(c\right)$
1. 2. 3. 4. 5				

Используя выражение (14), рассчитайте суммарный момент инерции платформы вместе с телом $I_{гр}$. Так как момент инерции – величина аддитивная, то есть момент инерции системы, состоящей из нескольких тел, равен сумме моментов инерции тел, входящих в систему, то

$$I_{гр} = I + I_{тела}$$

Отсюда

$$I_{тела} = I_{гр} - I$$

3 Определите при помощи измерительного прибора размеры исследуемого тела.

Посчитайте теоретически значение момента инерции исследуемого тела и сравните его с экспериментально полученным значением. Результаты занесите в таблицу 3.

Таблица 3

Момент инерции ненагруженной платформы I	Момент инерции нагруженной платформы $I_{гр}$	Момент инерции тела $I_{тело}$	Значение момента инерции, рассчитанное теоретически

4 Экспериментальная проверка теоремы Штейнера

Экспериментальная проверка теоремы Штейнера сводится к определению момента инерции диска относительно оси вращения, **не проходящей через ось симметрии диска**. Для этого исследуемое тело помещают не в центр платформы. Чтобы избежать дополнительные боковые колебания, вызванные смещением центра масс системы, симметрично относительно оси вращения помещают на платформу второй диск.

Сообщите платформе, нагруженной **двумя дисками**, малые крутильные колебания. Повторите измерения п.1 и определите период этих колебаний. Результаты занесите в таблицу 4.

Таблица 4

№ п/п	Число колебаний n	Время t (c)	Период T (c)	$T_{cp}(c)$
1. 2. 3. 4. 5				

Вычислите момент инерции платформы **с двумя дисками,** используя выражение (14).
Вычитая момент инерции ненагруженной платформы, который был найден ранее в п.1, **найдите момент инерции двух дисков**.
Разделив полученное значение на два, определите момент инерции одного диска I_d относительно оси, не проходящей через ось симметрии. Полученное экспериментальное значение сравните со значением , рассчитанным теоретически по теореме Штейнера:

$$I_d = I_0 + ma^2,$$

где I_0 - момент инерции диска относительно оси симметрии (был определен ранее в п 2), m- масса диска, a - расстояние от оси вращения до центра диска.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешность измерения момента инерции тела вычисляется по формуле

$$\Delta I_{тело} = \sqrt{\left(\Delta I_{гр}\right)^2 + \left(\Delta I\right)^2}, \qquad (15)$$

где $\Delta I_{гр}$ - погрешность измерения нагруженной платформы, ΔI - погрешность измерения в случае ненагруженной платформы.

Для вычисления величины $\vartriangle I_{гр}, \vartriangle I$ используется формула:

$$\left(\frac{\vartriangle I}{I}\right)^2 = \left(\frac{\vartriangle M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\vartriangle R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\vartriangle r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\vartriangle T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\vartriangle Z_0}{Z_0}\right)^2 \qquad (16)$$

где $\vartriangle R, \vartriangle r, \vartriangle Z_0, \vartriangle M$ -погрешности измерения параметров трифилярного подвеса. При вычислении погрешности измерения периода колебаний $\vartriangle T$ необходимо учесть систематическую ($\vartriangle t_{сист}$) и случайную ($\vartriangle t_{сл}$) погрешности измерения времени. Случайная погрешность вычисляется по формуле Стьюдента:

$$\vartriangle t_{сл} = t_{\alpha n}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{ср})^2}{n(n-1)}}, \qquad (17)$$

где $t_{\alpha n}$ - коэффициент Стьюдента, его значение берется из таблицы для данного числа измерений n и доверительной вероятности α, которая в студенческом практикуме обычно полагается равной $\alpha = 0,95$.

Тогда погрешность измерения времени определится так:

$\vartriangle t = \sqrt{(\vartriangle t_{сл})^2 + (\vartriangle t_{сист})^2}$, следовательно, погрешность измерения периода колебаний

$$\vartriangle T = \frac{\vartriangle t}{n}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Какое тело называется абсолютно твердым?

2.Назовите виды движения абсолютно твердого тела.

3.Что называется моментом инерции материальной точки? Системы материальных точек?

4. Объясните физический смысл момента инерции тела.

5.Сформулируйте теорему Штейнера

6.Что собой представляет трифилярный подвес? Как с его помощью определить момент инерции тела?

7.Опишите методику экспериментальной проверки теоремы Штейнера.

ЛИТЕРАТУРА

1.Савельев И.В. Курс общей физики. – М.:Астрель. АСТ,2004

2.Большова К.М., Пустовалов Г.Е. Краткий курс общей физики. М.: изд.МГУ,1982 ч.1.Механика

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1906 от «6» мая 2016 г. Тираж 100 экз.