

ISSN 0134—8817

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 25

Томск — 1985

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 25



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ТОМСК — 1985

УДК 514.

Геометрический сборник, 25/Под ред. Р. Н. Щербак ова.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985.— 10,2 л.— 1 р. 60 к. 500 экз. 1702040000.

Работы данного выпуска посвящены различным вопросам дифференциальной геометрии: римановым многообразиям, комплексам прямых и плоскостей в проективном, аффинном и центроаффинном пространствах, поверхностям в неевклидовых пространствах, а также применению эллиптической геометрии к кристаллографии.

Для специалистов-геометров, а также аспирантов и студентов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

акад. А. Д. Александров, проф. Р. Н. Щерб аков (гл. редактор),
доктор физ.-мат. наук Ю. Е. Боровский, доц. В. К. Ионин, канд.
физ.-мат. наук В. В. Кайзер, доц. Л. З. Кругляков (зам. гл. редактора), доц. В. В. Слу х а е в (уч. секретарь)

Г $\frac{1702040000}{177(012)-84}$ 62—84

© Издательство Томского университета, 1985 г.

А. Ф. СОЛОВЬЕВ

ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОГО КРУЧЕНИЯ

Вводится понятие гиперраспределения постоянного кручения на римановом многообразии. Структура, определяемая таким распределением, аналогична контактной метрической структуре. Изучается строение гиперраспределений постоянного кручения, обладающих постоянной L^- -секционной кривизной (они аналогичны контактным гиперраспределениям на контактных метрических многообразиях постоянной ϕ -голоморфной секционной кривизны). Доказан аналог теоремы Шура из кэлеровой геометрии. На основе классификации Танно [9] полных односвязных многообразий Сасаки постоянной ϕ -голоморфной секционной кривизны получена частичная классификация полных связных односвязных римановых многообразий, допускающих нормальные гиперраспределения постоянного кручения и постоянной L^- -секционной кривизны.

§ 1. Предварительные сведения

1. Вторая фундаментальная форма. Рассмотрим риманово многообразие M с метрическим тензором $\langle, \rangle$ и связностью Леви-Чивита ∇ . Пусть Δ — дифференцируемое распределение без особенностей на M , $\Delta^\perp$ — его ортогональное дополнение, V и $V^\perp$ — ортогональные проекторы на Δ и $\Delta^\perp$ соответственно. В случае $\text{codim } \Delta = 1$ будем предполагать, что M допускает единичное векторное поле $\zeta \perp \Delta$ (локально такое векторное поле существует всегда). Пусть $Q(M)$ есть множество дифференцируемых векторных полей на M . Все рассматриваемые ниже дифференцируемые объекты принадлежат классу C^∞ .

Рассмотрим индуцированную связность $\bar{\nabla}_X Y = V \nabla_X VY + V^\perp \nabla_X V^\perp Y$, $X, Y \in Q(M)$, распределения Δ и его вторую фундаментальную форму [5], [6] $h = \nabla - \bar{\nabla}$. Для гиперраспределения $\Delta \perp \zeta$ определим поле аффинора L , полагая $\langle LX, Y \rangle = \langle h(X, Y), \zeta \rangle$ для любых $X, Y \in Q(M)$. Пусть L^+ и L^- — его симметричная и кососимметричная части.

Предложение 1.1. 1) $V \circ L^+ \circ V = 0$ тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ вполне геодезично; 2) $L^+ = 0$ тогда и только тогда, когда векторное поле $\zeta \perp \Delta$ киллингово; 3) $V \circ L^- \circ V = 0$ тогда и только тогда, когда Δ интегрируемое; 4) пусть η есть 1-форма на M , сопряженная ζ относительно $\langle, \rangle$ ($\eta(X) = \langle \zeta, X \rangle$ для любого $X \in Q(M)$). Тогда $L^- = 0$ в том и только том случае, когда форма η замкнута.

Доказательство. В [6] показано, что распределение Δ вполне геодезично (соотв. интегрируемо) тогда и только тогда, когда $h^+(VX,$

$VY)=0$ (соотв. $h^-(VX, VY)=0$) для любых $X, Y \in Q(M)$, где h^+ и h^- — симметричная и кососимметричная части его второй фундаментальной формы h . Отсюда следуют утверждения 1) и 3). Так как

$$LX = -\nabla_X \zeta, \quad X \in Q(M),$$

то значение производной Ли поля метрического тензора вдоль ζ для любых $X, Y \in Q(M)$ равно $\zeta \langle X, Y \rangle - \langle [\zeta, X], Y \rangle - \langle X, [\zeta, Y] \rangle = \langle \Delta_X \zeta, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \zeta \rangle = -2 \langle L^+ X, Y \rangle$. Это доказывает утверждение 2). Наконец, утверждение 4) получаем из тождества

$$d\eta(X, Y) = \langle X, L^- Y \rangle, \quad X, Y \in Q(M).$$

Предложение 1.1 доказано.

Рассмотрим в точке $p \in M$ экспоненциальное отображение $\bar{\exp}$ индуцированной связности $\bar{\nabla}$ и его область определения $U \subset M_p$. Подмногообразие $\delta(p) = \bar{\exp}(U \cap \Delta_p)$ называется соприкасающейся геодезической поверхностью [5] распределения Δ в точке p (в работе [5] формулировка определения этой поверхности содержит опечатку). В [5] показано, что если $\bar{h}$ — вторая фундаментальная форма подмногообразия $\delta(p)$, то $h^+(x, y) = \bar{h}(x, y)$ для любых касательных векторов $x, y \in \Delta_p$. Поэтому $(V \circ L^+ \circ V)_p$ есть преобразование Вейнгартена гиперповерхности $\delta(p)$.

Назовем L^+ и L^- преобразованиями Вейнгартена и неголономности гиперраспределения Δ (по отношению к единичной нормали ζ). Тензоры h и L взаимно определяют друг друга, поскольку

$$h(X, Y) = -\langle Y, \zeta \rangle LX + \langle LX, Y \rangle \zeta. \quad (1.1)$$

Всюду ниже под второй фундаментальной формой гиперраспределения Δ (по отношению к единичной нормали ζ) будем понимать L .

Заметим, что $L^\pm \zeta = \frac{1}{2} L\zeta$. Поэтому $\langle L^\pm X, \zeta \rangle = \pm \frac{1}{2} \langle X, L\zeta \rangle$ и, следовательно, $L^\pm X \in \Delta$ для любого $X \in Q(M)$ тогда и только тогда, когда $L\zeta = 0$, в то время как всегда $LX \in \Delta$. Эквивалентны следующие три утверждения: 1) $L\zeta = 0$; 2) ортогональные траектории гиперраспределения Δ суть геодезические риманова многообразия; 3) локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований многообразия M , порожденная векторным полем ζ , сохраняет гиперраспределение Δ . Утверждения 1) и 2) эквивалентны в силу того, что $-L\zeta = \nabla_\zeta \zeta$ есть поле векторов кривизны рассматриваемых траекторий. Равносильность 1) и 3) получаем из равенства $\langle [\zeta, VX], \zeta \rangle = \langle L\zeta, X \rangle$, $X \in Q(M)$.

Лемма 1.2. Для преобразования неголономности L^- любого гиперраспределения $\Delta \perp \zeta$ на римановом многообразии M выполнено тождество

$$\Sigma \langle (\bar{\nabla}_X L^-) Y, Z \rangle = \Sigma \{ \langle L^- X, Y \rangle \langle L\zeta, Z \rangle + \langle \zeta, X \rangle \langle L^+ \circ L^- + L^- \circ L^+ \rangle Y, Z \},$$

где Σ — знак циклической суммы по $X, Y, Z \in Q(M)$. Если $L\zeta = 0$, то

$$\bar{\nabla}_\zeta L^- = \nabla_\zeta L^- = L^+ \circ L^- + L^- \circ L^+.$$

Доказательство. Рассмотрим на M 2-форму $d\eta$ и тождество

$$3(d\Phi)(X, Y, Z) = \Sigma \{ X\Phi(Y, Z) - \Phi([X, Y], Z) \},$$

справедливое для любой 2-формы Φ . Так как $d^2\eta = 0$, то $0 = \Sigma \{ X \langle Y, L^- Z \rangle - \langle [X, Y], L^- Z \rangle \} = \Sigma \{ \langle Y, \nabla_X L^- Z \rangle - \langle Y, L^- \nabla_X Z \rangle \} = \Sigma \langle (\nabla_X L^-) Y, Z \rangle$. Отсюда переходя к ковариантной производной $\bar{\nabla} = \nabla - h$ и учитывая равенство (1.1), получаем искомое тождество. Полагая в нем $X = \zeta$, для любых $Y, Z \in Q(M)$ находим $\langle (\bar{\nabla}_\zeta L^-) Y, Z \rangle = \langle (L^+ \circ L^- +$

$+L^{-}\circ L^{+})Y, Z>$ при условии $L\zeta=0$. Следовательно $\bar{\nabla}_{\zeta}L^{-}=L^{+}\circ L^{-}+L^{-}\circ L^{+}$. Кроме того, $(\bar{\nabla}_{\zeta}L^{-})Y=(\nabla_{\zeta}L^{-})Y-h(\zeta, L^{-}Y)+h(\zeta, Y)==(\nabla_{\zeta}L^{-})Y$ для любого $Y\in Q(M)$. Лемма 1.2 доказана.

2. Кручение. Пусть T — тензор кручения связности $\bar{\nabla}$. Рассмотрим в точке $p\in M$ двумерную плоскость $x\wedge y\subset\Delta_p$. Величина $t_{xy}=||T(x, y)||^2||x\wedge y||^{-2}$, где $||x\wedge y||^2=||x||^2||y||^2-\langle x, y\rangle^2$, называется секционным кручением [5] распределения Δ в точке p . Кручением распределения Δ в направлении $x\in\Delta_p$ назовем сумму $\kappa_x=\sum_a t_{x e_a}$, которая, очевидно, не зависит от выбора векторов e_a , образующих вместе с x ортогональный базис подпространства $\Delta_p\subset M_p$. Так как

$$T(X, Y)=\langle Y, \zeta\rangle LX-\langle X, \zeta\rangle LY-2\langle L^{-}X, Y\rangle\zeta$$

для любых $X, Y\in Q(M)$, то по определению

$$t_{xy}=4\langle L^{-}X, Y\rangle^2||X\wedge Y||^{-2}, X\wedge Y\subset\Delta,$$

$$\kappa_x=4||VL^{-}X||^2||X||^{-2}, X\in\Delta.$$

Будем говорить, что гиперраспределение Δ на римановом многообразии M имеет постоянное кручение, если его кручение в одномерном направлении постоянно в каждой точке $p\in M$ и не зависит от этой точки. Гиперраспределение Δ имеет постоянное кручение a тогда и только тогда, когда $(V\circ L^{-}\circ V)^2=-\frac{a}{4}V$, где $a=\text{const}$. Если $L\zeta=0$, то

$$L^{-2}=-\frac{a}{4}V, a=\text{const}. \quad (1.2)$$

Следствиями этого условия являются равенства $L^{-}\zeta=0$, $V\perp\circ L^{-}=0$. Если $a=0$, то $L^{-}=0$, и гиперраспределение Δ интегрируемо согласно предложению 1.1. Если же $a\neq 0$, то $a>0$, $\text{rang } L^{-}=\dim M-1$ и, следовательно, размерность M нечетная. Гиперраспределение, характеризующееся условием (1.2), где $a\neq 0$, обозначим через $\Delta(a)$.

Предложение 1.3. Преобразования Вейнгартена и неголономности любого гиперраспределения $\Delta(a)$ обладают свойствами $L^{+}\circ L^{-}+L^{-}\circ L^{+}=0$ и $\text{trace } L^{+}=0$.

Доказательство. В силу (1.2) имеем $(\bar{\nabla}_X L^{-})L^{-}Y=\bar{\nabla}_X L^{-2}Y-L^{-}\bar{\nabla}_X L^{-}Y=L^{-2}\bar{\nabla}_X Y-L^{-}\bar{\nabla}_X L^{-}Y=-L^{-}(\bar{\nabla}_X L^{-})Y$ для любых $X, Y\in Q(M)$. Поэтому с помощью леммы 1.2 получаем $0=(\bar{\nabla}_{\zeta}L^{-})L^{-}Y+L^{-}(\bar{\nabla}_{\zeta}L^{-})Y=(L^{+}\circ L^{-}+L^{-}\circ L^{+})L^{-}Y+L^{-}(L^{+}\circ L^{-}+L^{-}\circ L^{+})Y=2L^{-}(L^{+}\circ L^{-}+L^{-}\circ L^{+})Y$ для любого $Y\in Q(M)$. Следовательно, $L^{+}\circ L^{-}+L^{-}\circ L^{+}=0$, ведь $L^{-}X\neq 0$ ни для одного ненулевого $X\in\Delta(a)$ и $L^{\pm}X\in\Delta(a)$ для любого $X\in Q(M)$. Далее, так как $L^{+}\circ L^{-}=-L^{-}\circ L^{+}$, то для каждого собственного направления X аффинора L^{+} направление $L^{-}X$ также является его собственным, причем соответствующие собственные значения отличаются лишь знаком. Поэтому $\text{trace } L^{+}=0$. Предложение 1.3 доказано.

Замечание 1.1. Для произвольного гиперраспределения Δ имеем $\kappa_x=t_{xvL^{-}x}$ при условии $VL^{-}X\neq 0$, поскольку $t_{xy}=0$ для любого Y , ортогонального X и $VL^{-}X$ (последнее означает, что на римановом многообразии размерности >3 не существует гиперраспределений постоянного ненулевого секционного кручения). В случае гиперраспределения $\Delta(a)$ справедливо равенство $t_{xL^{-}x}=a$ для любого $X\in\Delta(a)$.

3. Уравнения Гаусса и Кодаши. Пусть $X, Y\in Q(M)$. Определим на M тензорное поле $X\wedge Y$ типа (1.1), полагая $(X\wedge Y)Z=\langle Y, Z\rangle X-\langle X, Z\rangle Y$.

Предложение 1.4. Пусть R — тензор кривизны риманова много

образия M и $\bar{R}$ — тензор кривизны индуцированной связности $\bar{\nabla}$ гиперраспределения $\Delta \perp \zeta$ на M . Имеют место тождества:

$$V \circ R(X, Y) \circ V = \bar{R}(X, Y) - LX \wedge LY;$$

$$R(X, Y)\zeta = -(\bar{\nabla}_X L)Y + (\bar{\nabla}_Y L)X + 2\langle L^*X, Y \rangle L\zeta - L^2(X \wedge Y)\zeta.$$

По аналогии с геометрией подмногообразий назовем эти тождества уравнениями Гаусса и Кодаци гиперраспределения Δ .

Доказательство. Рассматривая значение тензора кривизны $\bar{R}(X, Y)Z = [[\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y] - \bar{\nabla}_{[X, Y]}]Z$ связности $\bar{\nabla}$ и переходя к $\nabla = \bar{\nabla} + h$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - (\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) + (\bar{\nabla}_Y h)(X, Z) - \\ &- h(X, h(Y, Z)) + h(Y, h(X, Z)) - h(T(X, Y), Z). \end{aligned}$$

Так как $\bar{R}(X, Y)VZ, h(X, h(Y, VZ)) \in \Delta$ и $h(X, VZ), (\bar{\nabla}_X h)(Y, VZ) \perp \Delta$, то

$$\begin{aligned} VR(X, Y)VZ &= \bar{R}(X, Y)VZ + h(X, h(Y, VZ)) - h(Y, h(X, VZ)), \\ \langle R(X, Y)VZ, \zeta \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X h(Y, VZ) - \bar{\nabla}_Y h(X, VZ) + h(T(X, Y), VZ) \rangle \end{aligned}$$

для любых $X, Y, Z \in Q(M)$. Первое из этих равенств дает уравнение Гаусса, поскольку $\bar{R}(X, Y)\zeta = 0$ и $h(X, h(Y, VZ)) = -\langle LY, Z \rangle LX$, а второе уравнение Кодаци в силу того, что $\langle R(X, Y)VZ, \zeta \rangle = -\langle R(X, Y)\zeta, Z \rangle$, $\langle \bar{\nabla}_X h(Y, VZ), \zeta \rangle = \langle (\bar{\nabla}_X L)Y, Z \rangle$ и $\langle h(T(X, Y), VZ), \zeta \rangle = \langle LT(X, Y), Z \rangle = \langle L^2(X \wedge Y)\zeta - 2\langle L^*X, Y \rangle L\zeta, Z \rangle$ для любых $X, Y, Z \in Q(M)$. Предложение 1.4 доказано.

Следствие 1.5. Пусть ζ — единичное киллингово векторное поле на римановом многообразии M , L^* и κ — преобразование неголономности и кручение гиперраспределения $\Delta \perp \zeta$. Тогда тензор кривизны и секционная кривизна многообразия M обладают свойствами

$$R(X, \zeta)\zeta = -L^*X, R_{X\zeta} = \frac{1}{4}\kappa_X, X \in \Delta.$$

Доказательство следует из уравнения Кодаци.

4. Кривизна. Диффеоморфизм $f: M \rightarrow M^*$ римановых многообразий называется Δ -изометрией [5], [6], где Δ — некоторое распределение на M , если $\langle f_*X, f_*Y \rangle_{f_*\Delta} = \langle X, Y \rangle$ для любых векторных полей $X, Y \in \Delta$ и $f_*(\Delta^\perp) = (f_*\Delta)^\perp$. Положим $W_* = f_*W$ для любого $W \in Q(M)$.

Лемма 1.6. Пусть $f: M \rightarrow M^*$ есть Δ -изометрия, $\text{codim } \Delta = 1$, L^* и L^* — преобразования неголономности гиперраспределений Δ и $f_*\Delta$ по отношению к единичным нормальным $\zeta \perp \Delta$ и $\zeta^* \perp f_*\Delta$, ∇ и ∇^* — связности Леви-Чивита римановых метрик $\langle, \rangle$ и $\langle, \rangle^*$ на M и M^* соответственно. Тогда для любых $X, Y, Z \in Q(M)$ имеем

$$\begin{aligned} &(\langle \nabla_{X_*}^* Y_*, V^* Z_* \rangle^* + \langle X_*, \zeta^* \rangle^* \langle L^* Y_*, V^* Z_* \rangle^* + \\ &+ \langle Y_*, \zeta^* \rangle^* \langle L^* X_*, V^* Z_* \rangle^*) \circ f = \\ &= \langle \nabla_X Y, VZ \rangle + \langle X, \zeta \rangle \langle L^* Y, VZ \rangle + \langle Y, \zeta \rangle \langle L^* X, VZ \rangle, \end{aligned}$$

где V^* — ортогональный проектор на $f_*\Delta$. В частности

$$f_*[\bar{\nabla}_X Y + \langle X, \zeta \rangle VL^*Y] = \bar{\nabla}_{X_*}^* Y_* + \langle X_*, \zeta^* \rangle^* V^* L^* Y_*$$

для любых векторных полей $Y \in \Delta$ и X на M , где $\bar{\nabla}$ и $\bar{\nabla}^*$ — индуцированные связности гиперраспределений Δ и $f_*\Delta$ соответственно.

Доказательство следует из [5] (см. теорему 5.1 и следствие 5.2).

Определим на римановом многообразии M с заданным на нем гиперраспределением $\Delta \perp \zeta$ новую линейную связность $\hat{\nabla}$, полагая

$$\hat{\nabla}_X VY = \bar{\nabla}_X VY + \langle X, \zeta \rangle VL^*VY$$

и $\hat{\nabla}_X V^\perp Y$ произвольно.

Пусть R — тензор кривизны этой связности. Тогда $K = R(\cdot) \circ V$ назовем тензором кривизны гиперраспределения Δ . В силу леммы 1.6, какова бы ни была задана Δ -изометрия f , тензоры кривизны гиперраспределений Δ и $f_*\Delta$ соответствуют. Так как $\langle [VX, VY], \zeta \rangle = 2\langle L - VX, VY \rangle$, то по определению для любых $X, Y, Z \in \Delta$ имеем

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - 2\langle L - X, Y \rangle VL - Z \quad (1.3)$$

или согласно уравнению Гаусса

$$K(X, Y)Z = VR(X, Y)Z + (LX \wedge LY)Z - 2\langle L - X, Y \rangle VL - Z. \quad (1.4)$$

Рассмотрим в точке $p \in M$ двумерную плоскость $x \wedge y \subset \Delta_p$. Величина $K_{xy} = \langle K(x, y)y, x \rangle \|x \wedge y\|^{-2}$ не зависит от выбора базиса $\{x, y\}$ этой площадки. Назовем ее секционной кривизной распределения Δ в точке p . Сумму $k_x = \sum_a K_{x e_a}$, не зависящую от выбора касательных векторов e_a , образующих вместе с x ортогональный базис подпространства $\Delta_p \subset M_p$, назовем кривизной Риччи распределения Δ в точке p . Аналогично, число $S = \sum_a k_{e_a}$ не зависит от выбора ортогонального базиса $\{e_a\}$ подпространства Δ_p . Назовем S скалярной кривизной распределения Δ в точке p . По определению секционная, Риччи и скалярная кривизны распределения Δ инвариантны относительно любой Δ -изометрии. Следующая теорема дает геометрическую характеристику кривизне гиперраспределения.

Теорема 1.7. Пусть K и t — секционная кривизна и кручение гиперраспределения Δ и R — секционная кривизна его сопрягающейся геодезической гиперповерхности $\delta(p)$. Тогда для любой площадки $x \wedge y \subset \Delta_p$ имеем $K_{xy} = R_{xy} + \frac{3}{4} t_{xy}$.

Доказательство. Так как $(V \circ L^+ \circ V)_p$ — преобразование Вайнгартена гиперповерхности $\delta(p)$, то, как следует из уравнения Гаусса этого подмногообразия (см., например, [3]):

$$R_{xy} = R_{xy} + \{ \langle L^+ x, x \rangle \langle L^+ y, y \rangle - \langle L^+ x, y \rangle^2 \} \|x \wedge y\|^{-2}, \quad (1.5)$$

где $x \wedge y \subset \Delta_p$ и R_{xy} — секционная кривизна риманова многообразия. С другой стороны, в силу (1.4)

$$K_{xy} = R_{xy} + \{ \langle Lx, x \rangle \langle Ly, y \rangle - \langle Lx, y \rangle \langle x, Ly \rangle + 2\langle L - x, y \rangle^2 \} \|x \wedge y\|^{-2}.$$

Следовательно, $K_{xy} = R_{xy} + 3\langle L - x, y \rangle^2 \|x \wedge y\|^{-2} = R_{xy} + \frac{3}{4} t_{xy}$. Теорема 1.7 доказана.

§ 2. Гиперраспределения постоянного кручения

В данном параграфе рассматриваются свойства кривизны гиперраспределений $\Delta(a)$. Через R_{XY} , ρ_X и σ будем обозначать секционную, Риччи и скалярную кривизны риманова многообразия.

Предложение 2.1. Секционная, Риччи и скалярная кривизны гиперраспределения $\Delta(a) \perp \zeta$ на римановом многообразии M^{2n+1} обладают свойствами:

$$K_{XL-X} = R_{XL-X} - \{ \langle L^+ X, X \rangle^2 + \frac{4}{a} \langle L^+ X, L^+ X \rangle^2 \} \|X\|^{-4} + \frac{3}{4} a;$$

$$k_X = \rho_X + \frac{1}{2} (R_{L-X} - R_{\zeta X}) + \frac{1}{2} a, \quad X \in \Delta(a);$$

$$S = \sigma - \rho_\zeta + na.$$

Доказательство. Первое соотношение следует из теоремы 1.7 и равенства (1.5), поскольку $\langle L^+ L^- X, L^- X \rangle = -\langle L^- L^+ X, L^- X \rangle = -\frac{a}{4} \langle L^+ X, X \rangle$ в силу предложения 1.3, $\|X \wedge L^- X\|^2 = \frac{a}{4} \|X\|^4$ и $t_{X L^- X} = a$ согласно замечанию 1.1. Из (1.4) по определению кривизны Риччи k получаем

$$k_X = \rho_X - R_{\zeta X} + \{ \langle L^+ X, X \rangle \text{trace } L^+ - \langle L^2 X, X \rangle \} \|X\|^{-2} + \frac{1}{2} \kappa_X.$$

Так как в рассматриваемом случае $\text{trace } L^+ = 0$ и $\kappa_X = a$, то

$$k_X = \rho_X - R_{\zeta X} - \langle L^2 X, X \rangle \|X\|^{-2} + \frac{1}{2} a. \quad (2.1)$$

Используя соотношения $L^+ \circ L^- = -L^- \circ L^+$ и $\bar{\nabla}_\zeta L^- = 0$ (см. предложение 1.3 и лемму 1.2), с помощью уравнения Кодаци находим

$$\frac{1}{2} (R_{\zeta X} + R_{\zeta L^- X}) = -\langle L^2 X, X \rangle \|X\|^{-2}. \quad (2.2)$$

Второе искомое равенство следует теперь из (2.1). Оно, в свою очередь, для произвольного ортогонального базиса $\{e_a\}$ подпространства $\Delta(a)_p$ ($\{L^- e_a\}$ тогда также является ортогональным базисом этого подпространства) дает $S = \sum_a k_{e_a} = \sigma - \rho_\zeta + \frac{1}{2} (\rho_\zeta - \rho_\zeta) + na = \sigma - \rho_\zeta + na$

Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. Пусть риманово многообразие M^{2n+1} допускает гиперраспределение $\Delta(a)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\Delta(a)$ вполне геодезично;
- 2) $K_{X L^- X} = R_{X L^- X} + \frac{3}{4} a$ для любого $X \in \Delta(a)$;
- 3) $S = \sigma + \frac{1}{2} na$.

Далее, следующее утверждение является следствием каждого из утверждений 1), 2), 3): $k_X = \rho_X + \frac{a}{2}$ для любого $X \in \Delta(a)$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) следует из предложения 2.1. Для доказательства эквивалентности 1) и 3) в силу того же предложения достаточно показать, что

$$\rho_\zeta = \frac{1}{2} na - \text{trace } (L^{+2}) \quad (2.3)$$

для любого гиперраспределения $\Delta(a)$. Но это следует из (2.2). Действительно, $\rho_\zeta = \frac{1}{2} \sum_a (R_{\zeta e_a} + R_{\zeta L^- e_a}) = -\sum_a \langle L^2 e_a, e_a \rangle = -\sum_a [\langle L^{-2} e_a, e_a \rangle + \langle L^{+2} e_a, e_a \rangle] = 2n \frac{a}{4} - \text{trace } (L^{+2})$, где $\{e_a\}$ — некоторый ортонормированный базис подпространства $\Delta(a)_p$. Наконец, пусть $\Delta(a)$ вполне геодезично. Тогда векторное поле $\zeta \perp \Delta(a)$ киллингово и согласно следствию 1.5 $R_{\lambda \zeta} = \frac{a}{4}$. Поэтому $k_X = \rho_X - \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \rho_X + \frac{a}{2}$ для любого $X \in \Delta(a)$ в силу (2.1). Предложение 2.2 доказано.

Если секционная кривизна гиперраспределения $\Delta(a)$ (соотв. рима-

нова многообразия M^{2n+1}) постоянна для всех инвариантных относительно L^- плоскостей $x \wedge y$ из $\Delta(a)_p$ и для любой точки $p \in M^{2n+1}$, то $\Delta(a)$ (соотв. M^{2n+1}) назовем гиперраспределением (соотв. многообразием) постоянной L^- -секционной кривизны. Заметим, что всякая инвариантная относительно L^- площадка имеет вид $x \wedge L^- x$. Гиперраспределением Эйнштейна назовем такое, кривизна Риччи которого постоянна в каждой точке и не зависит от этой точки.

Теорема 2.3. Пусть многообразие M^{2n+1} постоянной кривизны c допускает вполне геодезическое гиперраспределение $\Delta(a)$. Тогда $c = \frac{a}{4}$. Гиперраспределение $\Delta(a)$ имеет постоянную L^- -секционную кривизну, равную a , и является гиперраспределением Эйнштейна с кривизной Риччи $\frac{1}{2}(n+1)a$.

Доказательство первого утверждения получаем из следствия 1.5, а второго — с помощью предложения 2.2. Можно (однако непросто) показать, что в этой теореме условие вполне геодезичности $\Delta(a)$ является лишним.

Рассмотрим теперь гиперраспределения $\Delta(a)$ постоянной L^- -секционной кривизны на произвольных римановых многообразиях. Для этого нам понадобится понятие нормального гиперраспределения $\Delta(a)$, т. е. вполне геодезического $\Delta(a)$ с параллельной второй фундаментальной формой. Последнее означает $\bar{\nabla}L=0$.

Предложение 2.4. Гиперраспределение $\Delta(a) \perp \zeta$ на римановом многообразии M^{2n+1} является нормальным тогда и только тогда, когда тензор кривизны этого многообразия обладает свойством $R(X, Y)\zeta = \frac{a}{4}(X \wedge Y)\zeta$ для любых $X, Y \in Q(M^{2n+1})$.

Доказательство. Пусть $L^+=0$ и $\bar{\nabla}L=0$. Тогда уравнение Кодаци гиперраспределения $\Delta(a)$ принимает вид $R(X, Y)\zeta = -L^{-2}(X \wedge Y)\zeta = \frac{a}{4}(X \wedge Y)\zeta$. Обратно, пусть $R(X, Y)\zeta = \frac{a}{4}(X \wedge Y)\zeta$ для любых $X, Y \in Q(M^{2n+1})$. Тогда, в частности, $\rho_\zeta = \frac{a}{2}na$ и из (2.3) следует $\text{tr} \text{sc}(L^+)=0$, откуда $L^+=0$. Теперь, снова используя уравнение Кодаци, получаем $(\bar{\nabla}_X L^-)Y - (\bar{\nabla}_Y L^-)X = 0$ для любых $X, Y \in Q(M^{2n+1})$. Наконец, с помощью тождества из леммы 1.2 (оно в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Sigma \langle (\bar{\nabla}_X L^-)Y, Z \rangle = 0$$

согласно предложению 1.3) находим $0 = \langle (\bar{\nabla}_X L^-)Y - (\bar{\nabla}_Y L^-)X, Z \rangle = \langle (\bar{\nabla}_X L^-)Y, Z \rangle + \langle (\bar{\nabla}_Y L^-)Z, X \rangle = -\langle (\bar{\nabla}_Z L^-)X, Y \rangle$ для любых $X, Y, Z \in Q(M^{2n+1})$, т. е. $\bar{\nabla}L^-=0$. Итак, $L^+=0$, $\bar{\nabla}L=\bar{\nabla}L^-=0$ и $\Delta(a)$ нормальное. Предложение 2.4 доказано.

Предложение 2.5. Пусть ζ — единичное киллингово векторное поле на римановом многообразии такое, что $R(X, Y)\zeta = \frac{a}{4}(X \wedge Y)\zeta$, где $a \neq 0$ — константа. Тогда гиперраспределение $\Delta \perp \zeta$ имеет постоянное кручение a и является нормальным.

Действительно, согласно следствию 1.5 $a > 0$ и Δ есть гиперраспределение $\Delta(a)$. Оно нормальное в силу предложения 2.4.

Теорема 2.6. Пусть M^{2n+1} — связное риманово многообразие $n > 1$ и $\Delta(a)$ — нормальное гиперраспределение на M^{2n+1} . Если секционная кривизна K_{xL^-x} этого гиперраспределения зависит только от точки $p \in M^{2n+1}$, то $\Delta(a)$ есть гиперраспределение постоянной L^- -секционной кривизны и его тензор кривизны имеет такое строение:

$$K(X, Y)Z = \frac{\lambda}{4} \left\{ X \wedge Y + \frac{4}{a} [L - X \wedge L - Y + 2 \langle X, L - Y \rangle L] \right\} Z, \quad (2.4)$$

$X, Y, Z \in \Delta(a)$, где λ есть L^- -секционная кривизна.

Лемма 2.7. Тензор кривизны вполне геодезического гиперраспределения $\Delta(a)$ удовлетворяет тождествам:

$$\langle K(X, Y)Z, W \rangle = -\langle K(Y, X)Z, W \rangle = -\langle K(X, Y)W, Z \rangle = \\ = \langle K(Z, W)X, Y \rangle;$$

$$K(X, Y)Z + K(Y, Z)X + K(Z, X)Y = 0, \quad (2.5)$$

где $X, Y, Z, W \in \Delta(a)$. Если $\Delta(a)$ нормальное, то для любых $X, Y, Z, W \in \Delta(a)$

$$\langle K(L - X, L - Y)Z, W \rangle = \langle K(X, Y)L - Z, L - W \rangle = \\ = \langle L - K(X, Y)Z, L - W \rangle, \quad (2.6)$$

$$(\bar{\nabla}_X K)(Y, Z, W) + (\bar{\nabla}_Y K)(Z, X, W) + (\bar{\nabla}_Z K)(X, Y, W) = 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Тождества (2.5) получаем непосредственно из (1.4) и соответствующих тождеств для тензора кривизны R риманова многообразия. Пусть $L^+ = 0$ и $\bar{\nabla}L = 0$. Так как $\bar{\nabla}L = 0$, то $\bar{R}(X, Y)L - Z = L - \bar{R}(X, Y)Z$ и согласно (1.3) $K(X, Y)L - Z = L - K(X, Y)Z$ для любых $X, Y, Z \in \Delta(a)$. Отсюда с помощью (2.5) получаем $\langle K(L - X, L - Y)Z, W \rangle =$

$$= \langle K(Z, W)L - X, L - Y \rangle = \langle L - K(Z, W)X, L - Y \rangle = \frac{a}{4} \langle K(Z, W)X, Y \rangle =$$

$$= \frac{a}{4} \langle K(X, Y)Z, W \rangle = \langle L - K(X, Y)Z, L - W \rangle = \langle K(X, Y)L - Z, L - W \rangle$$

и тождества (2.6) доказаны. Так как $L^+ = 0$ и $\bar{\nabla}L = 0$, то из (1.3) имеем $(\bar{\nabla}_X K)(Y, Z, W) = (\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z, W)$ для любых $X, Y, Z, W \in \Delta(a)$. Используя второе тождество Бьянки для тензора кривизны $\bar{R}$ связности $\bar{\nabla}$

$$\Sigma[(\bar{\nabla}_X \bar{R})(Y, Z) + \bar{R}(T(X, Y), Z)] = 0$$

(см. [2, с. 132]), в силу равенства $T(VX, VY) = -2 \langle L - VX, VY \rangle \zeta$ получаем

$$\Sigma[(\bar{\nabla}_X K)(Y, Z) - 2 \langle L - X, Y \rangle \bar{R}(\zeta, Z)] \cdot V = 0$$

для любых $X, Y, Z \in \Delta(a)$. Таким образом, для доказательства (2.7) достаточно показать, что $\bar{R}(\zeta, Z)W = 0$ для любых $Z, W \in \Delta(a)$. Но это следует из уравнений Гаусса и Кодаци. Действительно, $\langle \bar{R}(\zeta, Z)W, Y \rangle = \langle R(\zeta, Z)W, Y \rangle = \langle R(W, Y)\zeta, Z \rangle = 0$, $Y, Z, W \in \Delta(a)$, откуда $0 = V\bar{R}(\zeta, Z)W = \bar{R}(\zeta, Z)W$ для любых $Z, W \in \Delta(a)$. Лемма 2.7 доказана.

Доказательство теоремы 2.6. Пусть $\lambda(p)$ есть значение L^- -секционной кривизны гиперраспределения $\Delta(a)$ в точке p . Покажем сначала, что его тензор кривизны имеет указанное строение. Для этого

рассмотрим аффинор $I = \frac{2}{\sqrt{a}}L^-$, действующий в каждой гиперплоскости $\Delta(a)_p$ как оператор комплексной структуры. Тензор кривизны K нормального гиперраспределения $\Delta(a)$ помимо тождеств (2.5) в силу (2.6) удовлетворяет тождествам $\langle K(IX, IY)Z, W \rangle = \langle K(X, Y)IZ, IW \rangle = \langle K(X, Y)Z, W \rangle$, $X, Y, Z, W \in \Delta(a)$ и поэтому (см. [3, 156 – 158]) имеет такое строение:

$$K(X, Y)Z = \frac{\lambda}{4} [X \wedge Y + IX \wedge IY + 2 \langle X, IY \rangle I] Z,$$

$X, Y, Z \in \Delta a$. Заменяя здесь I на $\frac{2}{\sqrt{a}}L^-$, получаем (2.4). Покажем теперь, что функция λ постоянна на M^{2n+1} . Из (2.4) имеем

$$(\bar{\nabla}_W K)(X, Y, Z) = \frac{1}{4} (W\lambda) \left\{ X \wedge Y + \frac{4}{a} [L-X \wedge L-Y + 2\langle X, L-Y \rangle L] \right\} Z$$

для любых $X, Y, Z, W \in \Delta(a)$ поскольку $\bar{\nabla} L = 0$ и $\bar{\nabla} \langle, \rangle = 0$. Беря циклическую сумму по $W, X, Y \in \Delta(a)$, с помощью (2.7) получаем

$$0 = \Sigma (W\lambda) [X \wedge Y + \frac{4}{a} [L-X \wedge L-Y + 2\langle X, L-Y \rangle L]] Z$$

для любого $Z \in \Delta(a)$. Выберем здесь следующие значения аргументов: X ортогонально Y и $L-Y$ (тогда и $L-X$ ортогонально Y и $L-Y$; такой выбор возможен, поскольку $\dim \Delta(a) \geq 4$), а $W = Z = L-X$. Тогда

$$a(Y\lambda)X - \frac{a}{4} (X\lambda)Y + [(L-X)\lambda] L - Y = 0$$

и $Z\lambda = 0$ для любого $Z \in \Delta(a)$ в силу линейной независимости X, Y и $L-Y$. Следовательно, λ постоянна вдоль любой интегральной кривой гиперраспределения $\Delta(a)$. Так как $\Delta(a)$ неинтегрируемое и многообразие M^{2n+1} связное, то любые его две точки можно соединить кусочно-гладкой интегральной кривой этого гиперраспределения (см. [4]). Поэтому λ постоянна на M^{2n+1} и теорема 2.6 доказана.

Следствие 2.8. Нормальное гиперраспределение $\Delta(a)$ постоянной L -секционной кривизны λ на римановом многообразии M^{2n+1} является гиперраспределением Эйнштейна с кривизной Риччи $\frac{1}{2} (n+1)\lambda$.

В самом деле, по теореме 2.6 строение тензора кривизны рассматриваемого гиперраспределения имеет вид (2.4) (оно получено без условий связности многообразия M^{2n+1} и $n > 1$). Теперь остается использовать определение кривизны Риччи гиперраспределения.

Следствие 2.9. Если нормальное гиперраспределение $\Delta(a)$ имеет нулевую L -секционную кривизну, то оно является гиперраспределением нулевой кривизны.

Доказательство. очевидно в силу (2.4).

Теорема 2.10. Тензор кривизны риманова многообразия M^{2n+1} , допускающего нормальное гиперраспределение $\Delta(a) \perp \zeta$ постоянной L -секционной кривизны λ , характеризуется следующим строением:

$$R(X, Y)Z = \frac{\lambda}{4} (X \wedge Y) Z + \frac{\lambda - a}{4} [\langle Z, \zeta \rangle (Y \wedge X) \zeta + \\ + \langle (X \wedge Y) \zeta, Z \rangle \zeta + \frac{4}{a} [L-X \wedge L-Y + 2\langle X, L-Y \rangle L - Z]].$$

Доказательство. Пусть нормальное гиперраспределение $\Delta(a)$ имеет постоянную L -секционную кривизну λ . Тогда его тензор кривизны K имеет строение (2.4). Это дает возможность с помощью (1.4) вычислить значение $VR(VX, VY)VZ$ тензора кривизны риманова многообразия M^{2n+1} . Но $R(X, Y)Z = VR(VX, VY)VZ + \langle X, \zeta \rangle VR(\zeta, Y)Z + \langle Y, \zeta \rangle VR(X, \zeta)Z + \langle Z, \zeta \rangle R(VX, VY)\zeta - \langle R(X, Y)\zeta, Z \rangle \zeta$. Поэтому найденное значение $VR(VX, VY)VZ$ и уравнение Кодацци гиперраспределения $\Delta(a)$ (оно имеет вид $R(X, Y)\zeta = \frac{a}{4} (X \wedge Y)\zeta$ в силу предложения (2.4) позволяют найти требуемое значение $R(X, Y)Z$ для любых $X, Y, Z \in Q(M^{2n+1})$.

Обратно, пусть тензор кривизны R риманова многообразия M^{2n+1} имеет указанное строение, где $\lambda = \text{const}$. Тогда для любых $X, Y, Z \in$

$\in \Delta(a)$ имеем $R(X, Y)Z = \frac{\lambda}{4}(X \wedge Y)Z + \frac{\lambda-a}{a}[L-X \wedge L-Y + 2\langle X, L-Y \rangle L]Z$ и из (1.4) следует $K(X, Y)Z = \frac{\lambda}{4}(X \wedge Y)Z + \frac{\lambda}{a}[L-X \wedge L-Y + 2\langle X, L-Y \rangle L]Z$ для любых $X, Y, Z \in \Delta(a)$. Поэтому $\Delta(a)$ имеет постоянную L -секционную кривизну, равную λ . Теорема 2.10 доказана.

Теорема 2.11. Пусть риманово многообразие M^{2n+1} допускает нормальное гиперраспределение $\Delta(a)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\Delta(a)$ имеет постоянную L -секционную кривизну a ;
- 2) M^{2n+1} имеет постоянную L -секционную кривизну $\frac{a}{4}$;
- 3) M^{2n+1} есть многообразие постоянной кривизны (равной $\frac{a}{4}$).

Действительно, в силу предложения 2.2 для нормального гиперраспределения $\Delta(a)$ имеем $K_{X \perp X} = R_{X \perp X} + \frac{3}{4}a$. $X \in \Delta(a)$. Поэтому эквивалентны утверждения 1) и 2). Импликация 1) $\rightarrow$ 3) есть следствие теоремы 2.10, а 3) $\rightarrow$ 1) — следствие теоремы 2.3.

Теорема 2.12. Пусть риманово многообразие M^{2n+1} допускает нормальное гиперраспределение $\Delta(a)$ постоянной L -секционной кривизны. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\Delta(a)$ есть гиперраспределение Эйнштейна с кривизной Риччи $\frac{1}{2}(n+1)a$;

2) M^{2n+1} есть многообразие постоянной кривизны (равной $\frac{a}{4}$);

3) M^{2n+1} есть многообразие Эйнштейна (с кривизной Риччи $\frac{1}{2}na$).

Доказательство. Пусть L -секционная кривизна равна λ . Если имеет место утверждение 1), то из следствия 2.8 получаем $\lambda=a$ и по теореме 2.11 M^{2n+1} — многообразие постоянной кривизны (равной $\frac{a}{4}$), т. е. имеет место и 2). Импликация 2) $\rightarrow$ 3) очевидна. Далее, кривизна Риччи рассматриваемого риманова многообразия равна $\rho_X = \frac{1}{2}[\lambda(n+1)-a]$ для любого $X \in \Delta(a)$ в силу теоремы 2.10 и $\rho_X = \frac{1}{2}na$ согласно предложению 2.4. Если теперь справедливо 3), то $\lambda=a$ и имеет место 1) ввиду следствия 2.8. Теорема 2.12 доказана.

§ 3. Гиперраспределения $\Delta(a)$ постоянной положительной L -секционной кривизны

Лемма 3.1. Пусть $f: M \rightarrow M^*$ есть Δ -изометрия, $\text{codim } \Delta=1$, L и L^* — вторые фундаментальные формы гиперраспределений Δ и $f_*\Delta$ по отношению к единичным нормальным ζ и $\zeta^* = \frac{1}{\mu}\zeta_*$ ($\mu > 0$) на M и M^* соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} f_* \circ V \circ L \circ V &= \mu V^* \circ L^* \circ V^* \circ f_*; \\ f_* \circ V \circ L^* \circ V &= \mu^{-1} V^* \circ L^* \circ V^* \circ f_*; \\ f_* L \zeta &= L^* \zeta^* - V^* \text{grad}(\ln \mu). \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим первое равенство леммы 1.6. Полагая в нем $Y = \zeta$, получаем $\{\mu \langle L^{*+} X_*, Z_* \rangle^* \} \circ f = \langle L^+ X, Z \rangle$, где $X, Z \in \Delta$, и имеет место первое искомое равенство. Для доказательства остальных рассмотрим 1-формы η и η_* , сопряженные ζ и ζ^* относительно $\langle, \rangle$ и $\langle, \rangle^*$ на M и M^* соответственно, и 1-форму $\eta^* = \mu^{-1} \eta_*$ на M^* . Так как $f^* \eta^* = \eta$ и дифференциал f^* коммутирует с внешним дифференциалом d , то $\langle VX, L^- Y \rangle = d \eta(VX, Y) = d \eta^*(V^* X_*, Y_*) \circ f =$
 $= \{\mu^{-1} d \eta_*(V^* X_*, Y_*) - \frac{1}{2} \mu^{-2} ((V^* X_*) \mu) \eta_*(Y_*)\} \circ f$, т. е.

$$\langle VX, L^- Y \rangle = \{\mu^{-1} [\langle V^* X_*, L^- Y_* \rangle^* - \frac{1}{2} ((V^* X_*) \ln \mu) \langle Y_*, \zeta^* \rangle^*]\} \circ f \quad (3.1)$$

для любых $X, Y \in Q(M)$. Отсюда, в частности, получаем второе искомое равенство, ведь $\langle VX, L^- VY \rangle = \{\mu^{-1} \langle V^* X_*, L^- V^* Y_* \rangle^* \} \circ f$ для любых $X, Y \in Q(M)$. Кроме того, из (3.1) при $Y = \zeta$ следует $\langle X, L \zeta \rangle = \{\langle X_*, L^* \zeta^* \rangle^* - X_*(\ln \mu)\} \circ f$, $X \in \Delta$. Поэтому для некоторого ортонормированного базиса $\{e_a\}$ подпространства $\Delta_p \subset M_p$ имеем $f_*(L \zeta_p) = \sum \langle f_* L \zeta, f_* e_a \rangle^* f_* e_a = \sum \langle L \zeta, e_a \rangle^* f^{-1}(f_* e_a) = \sum \{\langle L^* \zeta^*, f_* e_a \rangle^* - (f_* e_a)(\ln \mu)\} f_* e_a = [L^* \zeta^* - V^* \text{grad}(\ln \mu)]_{f(p)}$. Лемма 3.1 доказана.

Предложение 3.2. На многообразии M с римановой метрикой $\langle, \rangle$ и с заданным на нем гиперраспределением $\Delta \perp \zeta$, $\|\zeta\| = 1$, перейдем к новой римановой метрике $\langle, \rangle^*$ такой, что

$$\langle X, Y \rangle^* = \langle VX, VY \rangle + \mu^2 \langle X, \zeta \rangle \langle Y, \zeta \rangle, \quad X, Y \in Q(M). \quad (3.2)$$

Тогда

1) свойство вполне геодезичности Δ сохраняется;
 2) кручение Δ в одномерном направлении изменяется следующим образом: $\kappa_X = \mu^2 \kappa_X$, $X \in \Delta$;

3) свойство ортогональных траекторий гиперраспределения Δ быть геодезическими риманова многообразия сохраняется тогда и только тогда, когда либо это гиперраспределение интегрируемое (и его максимальные интегральные многообразия суть поверхности уровня функции μ), либо μ постоянна на M в случае связного M ;

4) кривизна гиперраспределения Δ инвариантна.

Утверждения 1) – 3) очевидны в силу леммы 3.1, а 4) — по определению кривизны гиперраспределения.

Тривиальную Δ -изометрию $(M, \langle, \rangle) \rightarrow (M, \langle, \rangle^*)$, где риманова метрика $\langle, \rangle^*$ имеет вид (3.2) и $\mu = \text{const}$, назовем ζ -гомотетией с коэффициентом $\mu > 0$.

Предложение 3.3. Свойство нормальности гиперраспределения $\Delta(a) \perp \zeta$ сохраняется при ζ -гомотетии.

Доказательство. Пусть L и L^* — векторные фундаментальные формы гиперраспределения $\Delta(a)$ относительно римановых метрик $\langle, \rangle$ и $\langle, \rangle^*$ по отношению к единичным нормальям ζ и ζ^* соответственно. Пусть $\Delta(a)$ нормальное относительно $\langle, \rangle$, т. е. $L^+ = 0$ и $\bar{\nabla} L^- = 0$. Так как $L^{*+} = 0$ согласно предложениям 3.2 и 1.1, то остается доказать $\bar{\nabla}^* L^{*-} = 0$, где $\bar{\nabla}^*$ — индуцированная связность этого гиперраспределения относительно $\langle, \rangle^*$. Для этого из леммы 1.6 имеем $\bar{\nabla}_X^* VY + \langle X, \zeta^* \rangle^* L^* - VY = \bar{\nabla}_X VY + \langle X, \zeta \rangle L^- VY$ и в силу леммы 3.1 $(\bar{\nabla}_X^* L^{*-})Y = \bar{\nabla}_X^* L^* - Y - L^* - \bar{\nabla}_X^* Y = \bar{\nabla}_X L^* - Y + \langle X, \zeta \rangle L^- L^* - Y - \langle X, \zeta^* \rangle^* L^{*-2} Y - L^* - \bar{\nabla}_X Y - \langle X, \zeta \rangle L^* - L^- Y + \langle X, \zeta^* \rangle^* L^{*-2} Y = (\bar{\nabla}_X L^{*-})Y = \mu (\bar{\nabla} L^-)Y = 0$, $X, Y \in Q(M^{2n+1})$. Предложение 3.3 доказано.

Как показывает предложение 3.2, кручение гиперраспределения $\Delta(a) \perp \zeta$ путем подходящей ζ -гомотетии может быть сделано равным

любому наперед заданному положительному числу, в то время как его кривизна не изменится. Поэтому для изучения кривизны гиперраспределений $\Delta(a)$ достаточно рассматривать конкретные значения a . Следующие две теоремы и пример связаны с гиперраспределениями $\Delta(\lambda)$ постоянной L -секционной кривизны $\lambda > 0$. В § 4 рассматриваются гиперраспределения $\Delta(4)$ постоянной L -секционной кривизны.

Теорема 3.4. Всякое риманово многообразие, допускающее нормальное гиперраспределение $\Delta(a) \perp \zeta$ постоянной L -секционной кривизны $\lambda > 0$, ζ -гомотетично многообразию постоянной кривизны $\frac{\lambda}{4}$.

Доказательство. Рассмотрим ζ -гомотетию с коэффициентом $\sqrt{\frac{\lambda}{a}}$. Тогда из теоремы 2.10 с помощью предложений 3.2 и 3.3 получаем такое строение тензора кривизны новой римановой метрики: $R^*(X, Y)Z = \frac{\lambda}{4} (X \wedge Y)Z$, $X, Y, Z \in Q(M^{2n+1})$. Поэтому она имеет постоянную кривизну $\frac{\lambda}{4}$. Теорема 3.4 доказана.

Пример 3.1. Пусть $\lambda > 0$. Рассмотрим в $(n+1)$ -мерном комплексном евклидовом пространстве C^{n+1} гиперсферу S^{2n+1} радиуса $r = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$ внешнюю единичную нормаль $\tilde{\zeta}$ к S^{2n+1} и стандартную комплексную структуру I пространства C^{n+1} . На S^{2n+1} имеем единичное векторное поле $\zeta = I\tilde{\zeta}$ и индуцированную риманову метрику $\langle, \rangle$. Пусть ∇ — ее связность Леви-Чивита и $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивита евклидовой метрики пространства C^{n+1} . Тогда $\langle \nabla_X \zeta, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X I\tilde{\zeta}, Y \rangle = -\langle \tilde{\nabla} I\tilde{\zeta}, Y \rangle = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \langle \tilde{\nabla} I X, Y \rangle$ для любых $X, Y \in Q(S^{2n+1})$, где $\tilde{\nabla}$ — оператор ортогонального проектирования на S^{2n+1} . Отсюда, в частности, следует, что преобразование неголономности (канонического) гиперраспределения $\Delta^\circ \perp \zeta$ на S^{2n+1} равно $L^- = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2} I$, где $I = \tilde{\nabla} \circ I \circ \tilde{\nabla}$. Так как $I^2 = -V$, где V — ортогональный проектор на Δ° , то $L^- = -\frac{\lambda}{4} V$ и гиперраспределение Δ° имеет [постоянное кручение λ .

Оно нормальное согласно предложению 2.4 и по теореме 2.11 имеет постоянную L -секционную кривизну λ . Рассматриваемое риманово многообразие $(S^{2n+1}, \langle, \rangle)$ является полным, связным и односвязным. Обозначим его через $S^{2n+1}(\lambda)$.

Теорема 3.5. Всякое полное связное односвязное риманово многообразие M^{2n+1} , допускающее нормальное гиперраспределение $\Delta(a)$ постоянной положительной L -секционной кривизны λ , $\Delta(a)$ -изометрично многообразию $S^{2n+1}(\lambda)$.

Докажем предварительно одну лемму.

Если все геодезические риманова многообразия M , являющиеся интегральными кривыми киллингова векторного поля ζ (соотв. гиперраспределения $\Delta \perp \zeta$), суть полные, то M назовем ζ -полным (соотв. Δ -полным).

Лемма 3.6. Пусть полное связное односвязное риманово многообразие $(M^{2n+1}, \langle, \rangle)$ несет единичное киллингово векторное поле $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$ -гомотетично многообразию $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ постоянной положительной кривизны. Тогда последнее также является полным.

Доказательство. Пусть γ — геодезическая кривая метрики $\langle, \rangle^*$. Если она является интегральной кривой векторного поля $\tilde{\zeta}$ или гипер-

распределения $\bar{\Delta} \perp \bar{\zeta}$, то γ — геодезическая и метрики $\langle, \rangle$ согласно предложению 3.2. Так как всякая геодезическая полная по отношению к $\langle, \rangle$, то риманово многообразие $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ является $\bar{\zeta}$ -полным и $\bar{\Delta}$ -полным. Пусть теперь геодезическая $\gamma(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, метрики $\langle, \rangle^*$ не является интегральной кривой ни для $\bar{\zeta}$, ни для $\bar{\Delta}$. Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что $\gamma(t)$ можно продолжить на интервал $(\alpha\beta, +\epsilon)$ для некоторого $\epsilon > 0$. Мы можем предполагать, что $0 \in (\alpha, \beta)$.

Пусть $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ имеет постоянную кривизну $\frac{\lambda}{4} > 0$. Рассмотрим $S^{2n+1}(\lambda)$ (см. пример 3.1) и точку $p_0 \in S^{2n+1}$. Определим линейную изометрию $F: (S^{2n+1})_{p_0} \rightarrow (M^{2n+1})_{\gamma(0)}$ так, чтобы $F\zeta_{p_0} = \bar{\zeta}_{\gamma(0)}$, $F\Delta_{p_0}^0 = \bar{\Delta}_{\gamma(0)}$ и $F \circ L_{p_0}^- = \bar{L}_{\gamma(0)}^- \circ F$, где L^- — преобразование неголономности гиперраспределения Δ^0 на $S^{2n+1}(\lambda)$ по отношению к единичной нормали ζ и L^* — преобразование неголономности гиперраспределения $\bar{\Delta}$ по отношению к единичной нормали $\bar{\zeta}^*$ на $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ (последнее условие может быть обеспечено, поскольку рассматриваемые гиперраспределения имеют одинаковое постоянное кручение). Так как $S^{2n+1}(\lambda)$ и $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ имеют одинаковую постоянную кривизну, то существует локальная изометрия f такая, что $f(p_0) = \gamma(0)$ и $f_{*p_0} = F$ [1]. В рассматриваемой окрестности точки $\gamma(0)$ имеем $f_*\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^*$. Действительно, $\nabla_{f_*x}^*(f_*\zeta) = f_*\nabla_x\zeta = -FLx = -FL^-x = -L^*F_x = -\bar{L}^*F_x = -\bar{L}^*f_*x = \nabla_{f_*x}^*\bar{\zeta}$ для любого $x \in (S^{2n+1})_{p_0}$. Так как ζ киллингово и f — изометрия, то векторное поле $f_*\zeta$ также киллингово. Поэтому в силу $(f_*\zeta)_{\gamma(0)} = \bar{\zeta}_{\gamma(0)}$ и $(\nabla^*(f_*\zeta))_{\gamma(0)} = (\nabla^*\bar{\zeta}^*)_{\gamma(0)}$ имеем $f_*\zeta = \bar{\zeta}^*$.

Вернемся к рассмотрению геодезической $\gamma(t)$. Возьмем такой касательный вектор $x \in (S^{2n+1})_{p_0}$, что $f_*x = \dot{\gamma}(0)$, и такую геодезическую $s(t)$ в $S^{2n+1}(\lambda)$, что $s(0) = p_0$ и $\dot{s}(0) = x$. Так как $S^{2n+1}(\lambda)$ полное, то мы можем продолжить $s(t)$ на $(-\infty, +\infty)$. Поэтому можно продолжить локальную изометрию f вдоль $s(t)$ для $t \in (\alpha, \beta)$, например, до f_1 . Лемма будет доказана, если мы покажем, что локальная изометрия f может быть продолжена вдоль $s(t)$ для $t \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим на $S^{2n+1}(\lambda)$ интегральную кривую σ поля ζ , проходящую через точку $p_2 = s(\beta)$, и в ее нормальной координатной окрестности выберем такую точку $q = s(t_1)$, $t_1 \in (0, \beta)$, чтобы пересечение σ с соприкасающейся геодезической поверхностью $\delta(q)$ гиперраспределения $\Delta^0 \perp \zeta$ было непустым. Пусть ν — геодезическая, соединяющая точки q и $p_1 = \sigma \cap \delta(q)$ (и являющаяся интегральной для Δ^0). Так как $f_{1*}\Delta^0 = \bar{\Delta}$ и многообразие $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ является $\bar{\Delta}$ -полным, то локальную изометрию f_1 можно так продолжить вдоль ν , например, до f_2 , что область определения f_2 будет содержать окрестность точки p_1 . Так как $f_{2*}\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^*$ и $(M^{2n+1}, \langle, \rangle^*)$ является $\bar{\zeta}^*$ -полным, то f_2 можно продолжить вдоль σ , например, до f_3 так, что область определения f_3 будет содержать окрестность точки p_2 . Таким образом, локальная изометрия f продолжима вдоль $s(t)$ для $t \in (\alpha, \beta)$. А поскольку многообразия S^{2n+1} и M^{2n+1} связны и односвязны, то это продолжение единственно [1]. Лемма 3.6 доказана.

Доказательство теоремы 3.5. Выполним ζ -гомотетию рассматриваемого полного риманова многообразия, о которой идет речь в теореме 3.4. Полученное связное односвязное многообразие постоянной кривизны $\frac{\lambda}{2}$ также является полным согласно лемме 3.6. Поэтому оно изометрично гиперсфере $S^{2n+1}(\lambda)$ [1]. Композиция этих ζ -гомотетии и изометрии дает искомую $\Delta(a)$ -изометрию (из доказательства леммы 3.6 следует, что образом гиперраспределения $\Delta(a)$ при этом отобра-

жении является каноническое гиперраспределение Δ° на $S^{2n+1}(\lambda)$. Теорема 3.5 доказана.

§ 4. Контактные метрические многообразия

Говорят, что связное многообразие M^{2n+1} несет контактную метрическую структуру $(\varphi, \zeta, \eta, \langle, \rangle)$, а само M^{2n+1} называется контактным метрическим многообразием [7], если оно допускает такие поле аффинора φ , векторное поле ζ , 1-форму η и риманову метрику $\langle, \rangle$, что

$$\begin{aligned}\eta(\zeta) &= 1, \quad \langle \zeta, \zeta \rangle = 1; \\ \varphi^2 &= -\text{id} + \eta \otimes \zeta; \\ d\eta(X, Y) &= \langle X, \varphi Y \rangle, \quad X, Y \in Q(M^{2n+1}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Следствием этих условий является соотношение

$$\eta(X) = \langle X, \zeta \rangle, \quad X \in Q(M^{2n+1}).\tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что поле аффинора φ и 1-форма η вполне определяются векторным полем ζ и римановой метрикой $\langle, \rangle$, причем φ есть преобразование неголономности контактного гиперраспределения $\Delta \perp \zeta$ по отношению к ζ , подчиненное условию $\varphi^2 = -V$, где V — ортогональный проектор на Δ . Поэтому контактное метрическое многообразие — это связное риманово многообразие $(M^{2n+1}, \langle, \rangle)$, допускающее такое единичное векторное поле ζ , что $\zeta \perp \Delta(4)$.

Контактное метрическое многообразие $M^{2n+1}(\varphi, \zeta, \eta, \langle, \rangle)$ называется K -контактным многообразием (соотв. многообразием Сасаки [7]), если ζ — киллингово векторное поле (соотв. $(\nabla_X \varphi)Y = \langle X, Y \rangle \zeta - \eta(Y)X$ для любых $X, Y \in Q(M^{2n+1})$).

Предложение 4.1. Контактное метрическое многообразие является K -контактным (соотв. многообразием Сасаки) тогда и только тогда, когда его контактное гиперраспределение вполне геодезично (соотв. нормально).

Доказательство. Так как $L^+ \zeta = \varphi \zeta = 0$, то вполне геодезичность контактного гиперраспределения $\Delta(4)$ равносильна киллинговости ζ согласно предложению 1.1. Пусть контактное метрическое многообразие является многообразием Сасаки. Тогда ζ киллингово [7], т. е. $L^+ = 0$, и

$$(\bar{\nabla}_X \alpha)Y = (\nabla_X \varphi)Y - \langle X, Y \rangle \zeta + \eta(Y)X\tag{4.3}$$

для любых $X, Y \in Q(M^{2n+1})$. Следовательно, $\bar{\nabla} L = \bar{\nabla} \varphi = 0$ и контактное гиперраспределение нормальное. Обратно, пусть $\Delta(4)$ — нормальное гиперраспределение. Тогда $L^+ = 0$, $\bar{\nabla} \varphi = \bar{\nabla} L = 0$ и в силу (4.3) $(\Delta_X \varphi)Y = \langle X, Y \rangle \zeta - \eta(Y)X$ для любых $X, Y \in Q(M^{2n+1})$, т. е. контактное метрическое многообразие есть многообразие Сасаки. Предложение 4.1 доказано.

Таким образом, на случай контактного метрического многообразия можно перенести все результаты §§ 2—3, связанные с гиперраспределениями $\Delta(a)$ постоянного кручения a , полагая лишь $a=4$, $L^-=\varphi$, считая риманово многообразие связным и заменяя условие вполне геодезичности (соотв. нормальности) гиперраспределения $\Delta(4)$ условием K -контактности (соотв. сасакиевости) этого контактного метрического многообразия.

Предложение 4.2. Всякое связное риманово многообразие M^{2n+1} , допускающее гиперраспределение $\Delta(a)$, несет контактную метрическую структуру $(\varphi^*, \zeta^*, \eta^*, \langle, \rangle^*)$, где

$$\varphi^* = \frac{2}{\sqrt{a}} L^-; \quad \zeta^* = \frac{\sqrt{a}}{2} \zeta; \quad \eta_* = \frac{2}{\sqrt{a}} \eta;$$

$$\langle X, Y \rangle^* = \langle VX, VY \rangle + \frac{4}{a} \langle X, \zeta \rangle \langle Y, \zeta \rangle,$$

которая является K -контактной или сасакиевой в зависимости от того, вполне геодезично или нормально это гиперраспределение.

Доказательство получаем из определения контактной метрической структуры, а также предложений 3.2, 3.3, 4.1.

Целью данного параграфа является дальнейшая классификация нормальных гиперраспределений $\Delta(a)$ постоянной L -секционной кривизны. Для этого используем классификацию Танно [9] многообразий Сасаки постоянной φ -голоморфной секционной (φ -секционной) кривизны, поскольку 1) структура, определяемая нормальным гиперраспределением $\Delta(a)$, может быть сведена к сасакиевой без изменения его кривизны (в силу предложений 4.2 и 3.2) и 2) контактное гиперраспределение любого многообразия Сасаки имеет постоянную φ -секционную кривизну λ тогда и только тогда, когда само это многообразие имеет постоянную φ -секционную кривизну $H = \lambda - 3$ (согласно предложению 2.2).

Рассмотрим модельные пространства из [9].

Пример 4.1. Продолжим рассмотрение примера 3.1. Положим теперь

$$\varphi^* = -I; \quad \zeta^* = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \zeta; \quad \eta_*(X) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \langle X, Y \rangle;$$

$$\langle X, Y \rangle^* = \langle VX, VY \rangle + \frac{4}{\lambda} \langle X, \zeta \rangle \langle Y, \zeta \rangle. \quad (4.4)$$

Структура $(\varphi^*, \zeta^*, \eta_*, \langle, \rangle)$ является сасакиевой вследствие предложения 4.2. Если исходное риманово многообразие $(S^{2n+1}, \langle, \rangle)$, очевидно, имело постоянную L -секционную кривизну $\frac{\lambda}{4}$, то построенное

многообразие Сасаки имеет постоянную φ^* -секционную кривизну $\lambda - 3 > -3$. Обозначим его через $S^{2n+1}[\lambda - 3]$. Заметим, что эта сасакиева структура получается в [9] из естественной сасакиевой структуры, возникающей на единичной гиперсфере (как в примере 3.1 при $\lambda = 4$), с помощью обычной гомотетии римановой метрики с коэффициентом $\frac{2}{\sqrt{\lambda}}$, т. е. перехода к гиперсфере радиуса $\frac{2}{\sqrt{\lambda}}$, и последующей ζ -гомотетии (4.4). Композиция этих обычной гомотетии и ζ -гомотетии называется в [9] D -гомотетией, где D — каноническое гиперраспределение на единичной гиперсфере.

Пример 4.2. Пусть (x^i, y^i, z) , $i \in (1, \dots, n)$, — обычная координатная система арифметического пространства E^{2n+1} . Тензорные поля φ , ζ , η и $\langle, \rangle$, определенные следующим образом:

$$\varphi: \begin{vmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{vmatrix}, \quad \langle, \rangle: \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\zeta = (0, \dots, 0, 2), \quad \eta = \frac{1}{2} (-y^1, \dots, -y^n, 0, \dots, 0, 1),$$

образуют на E^{2n+1} сасакиеву структуру. Соответствующее многообразие Сасаки имеет постоянную φ -секционную кривизну -3 и обозна-

чается через $E^{2n+1}[-3]$ ([9]). Ясно, что его контактное гиперраспределение имеет нулевую φ -секционную кривизну и, следовательно, нулевую кривизну согласно следствию 2.9.

Пример 4.3. Пусть CD^n — односвязная однородная комплексная область пространства C^n с кэлеровой структурой (I, g) постоянной голоморфной секционной кривизны $\lambda < 0$ и E — действительная прямая с координатой t . Пусть, далее, Ω — фундаментальная 2-форма этой кэлеровой структуры, 1-форма ω определяется равенством $\Omega = d\omega$, $\pi: E \times (CD^n) \rightarrow CD^n$ — каноническая проекция и $\eta = \pi^*\omega + dt$. Тогда на произведении $E \times (CD^n)$ риманова метрика $\langle, \rangle = \pi^*g + \eta \otimes \eta$ и векторное поле $\xi = \partial/\partial t$ задают сасакиеву структуру. Соответствующее многообразие Сасаки имеет постоянную φ -секционную кривизну $\lambda - 3 < -3$ и обозначается через $(E, CD^n) [\lambda - 3]$ [9]. Его же контактное гиперраспределение имеет постоянную φ -секционную кривизну $\lambda < 0$.

Рассмотренные многообразия Сасаки трех типов являются полными и односвязными.

Теорема 4.3 [9]. Всякое полное односвязное C^∞ -многообразие Сасаки M^{2n+1} постоянной φ -голоморфной секционной кривизны H изоморфно многообразию $S^{2n+1} [H]$, $E^{2n+1}[-3]$ или $(E, CD^n) [H]$ в зависимости от того, будет ли $H > -3$, $H = -3$ или $H < -3$.

Здесь изоморфизм означает изометрию класса C^∞ , которая переводит структурные тензоры в такие же тензоры. В терминах φ -секционной кривизны $\lambda = H + 3$ контактного гиперраспределения классификация Таино имеет более естественный с аналитической точки зрения вид: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$. Построенные в примерах 4.2 и 4.3 римановы многообразия обозначим через $E^{2n+1}(0)$ и $(E, CD^n)(\lambda)$.

Теорема 4.4. Пусть связное односвязное риманово многообразие M^{2n+1} допускает нормальное гиперраспределение $\Delta(a) \perp \xi$ постоянной L -секционной кривизны $\lambda \leq 0$ и ξ -гомотетично с коэффициентом $\frac{2}{\sqrt{a}}$ полному риманову многообразию. Тогда $M^{2n+1} \Delta(a)$ -изометрично многообразию $E^{2n+1}(0)$ или $(E, CD^n)(\lambda)$ в зависимости от того $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$.

Доказательство. Из предложения 4.2 следует, что в результате указанной ξ -гомотетии получаем на M^{2n+1} сасакиеву структуру. Поскольку постоянное полное односвязное многообразие Сасаки имеет постоянную φ^* -секционную кривизну $H = \lambda - 3 \leq -3$, то в силу теоремы 4.3 оно изоморфно $E^{2n+1}[-3]$ при $\lambda = 0$ и $(E, CD^n) [H]$ в случае $\lambda < 0$. Искомая $\Delta(a)$ -изометрия получается как композиция рассмотренных ξ -гомотетий и изоморфизма. Теорема 4.4 доказана.

Заметим, что классификация полных односвязных многообразий Сасаки с псевдоримановой метрикой постоянной φ -секционной кривизны $\neq -3$ дана в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1982. — 480 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981, т. 1. — 344 с.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981, т. 2. — 414 с.
4. Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией. — Уч. зап./Мооск. гос. пед. ин-т им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат., 1938, т. III, вып. II, с. 83—94.
5. Соловьев А. Ф. Изгибание гиперраспределений. — Геометр. сб., 20. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 101—112.

-
6. Соловьев А. Ф. Вторая фундаментальная форма распределения.— Мат. заметки, 1982, т. 31, с. 139—146.
 7. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1976.—146 p.
 8. Takahashi T. Sasakian manifold with pseudo—Riemannian metric.—Tohoku Math. J., 1969, v. 21, p. 271—290.
 9. Tanno S. Sasakian manifolds with constant φ -holomorphic sectional curvature.—Tohoku Math. J., 1969, v. 21, p. 501—507.
-

В. В. КАЙЗЕР

ГАУССОВА И СРЕДНЯЯ КРИВИЗНЫ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ МЕТРИК НА ДВУМЕРНЫХ ПОДГРУППАХ ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУПП ЛИ

В предлагаемой заметке дается ответ на вопрос: какими могут быть возможные значения гауссовой и средней кривизны двумерных аналитических подгрупп всех трехмерных связных неунимодулярных [1] групп Ли по отношению к произвольно заданным на них левоинвариантным римановым метрикам. Исследуется также существование омбилических подгрупп. Унимодулярный случай рассматривается в отдельной работе [6]. Определения всех используемых понятий могут быть найдены в [1, 2].

Хорошо известно [1], что связная группа Ли G тогда и только тогда унимодулярна, когда ее алгебра Ли g унимодулярна, т. е. обладает свойством: $\text{trace ad}(X) = 0$ для всех $X \in g$.

Пусть g — трехмерная неунимодулярная алгебра Ли. Ее унимодулярное ядро $h_0 = \{X \in g : \text{trace ad}(X) = 0\}$ является двумерным коммутативным идеалом в g . Следуя [1], выберем вектор $E \in g$ так, чтобы $\text{trace ad}(E) = 2$. В [1] доказано, что линейное преобразование $L = \text{ad}(E)/h_0 : h_0 \rightarrow h_0$ унимодулярного ядра h_0 со следом 2 не зависит от частного выбора элемента $E \in g$. Поэтому отображение L и его определитель $D = \det L$ являются инвариантами алгебры Ли g . В [1] доказано также, что, меняя инвариант D , можно получить все трехмерные неунимодулярные алгебры Ли за исключением одного специального случая, когда отображение L является тождественным. Такая специальная алгебра Ли g_0 является единственной трехмерной некоммутативной алгеброй Ли, обладающей тем свойством, что любое ее векторное подпространство является подалгеброй Ли.

Легко показать, что если трехмерная неунимодулярная алгебра Ли g имеет одномерные идеалы, то они принадлежат ее унимодулярному ядру h_0 и что этих идеалов не более двух, если g не является специальной алгеброй Ли g_0 . Легко убедиться также и в том, что в гиперболическом случае, когда этих идеалов в точности два, будет $D < 1$, в параболическом случае, когда имеется один такой идеал, будет $D = 1$ и в эллиптическом случае, когда алгебра g не имеет одномерных идеалов, будет $D > 1$. Каждое одномерное векторное подпространство унимодулярного ядра специальной алгебры Ли g_0 является в ней идеалом.

Существует единственная трехмерная неунимодулярная алгебра Ли g с одномерным производным идеалом $g' = [g, g]$. Для нее $D = 0$ и потому она является гиперболической. Эта особая гиперболическая алгебра Ли является алгеброй Ли прямого произведения коммутативной группы R вещественных чисел и группы аффинных преобразований прямой R .

Заметим, что алгебры Ли с $D=0$, $D=1$, специальная алгебра Ли g_0 , алгебры Ли с $D<1$ ($D\neq 0$) и, наконец, с $D>1$ являются соответственно алгебрами Ли III, IV, V, VI и VII типов в известной классификации Бианки трехмерных вещественных алгебр Ли (см., например, [3]). Можно показать, что двумерное векторное подпространство трехмерной неунимодулярной алгебры Ли g , не совпадающее с ее унимодулярным ядром h_0 , является ее подалгеброй Ли тогда и только тогда, когда оно содержит одномерный идеал алгебры g . Поэтому в гиперболическом случае (при $D<1$) двумерные подалгебры Ли образуют два линейных пучка векторных подпространств, осями которых являются одномерные идеалы, а общим элементом обоих пучков является унимодулярное ядро h_0 алгебры g . Параболическая неунимодулярная алгебра Ли ($D=1$) имеет линейный пучок двумерных подалгебр, осью которого является ее одномерный идеал. Каждое двумерное векторное подпространство специальной алгебры Ли g_0 является ее подалгеброй, которая не коммутативна, если не совпадает с унимодулярным ядром. Наконец, эллиптическая алгебра Ли ($D>1$) не имеет двумерных подалгебр, отличных от унимодулярного ядра.

Всюду ниже G означает произвольную связную неунимодулярную трехмерную группу Ли с ассоциированной неунимодулярной алгеброй Ли g . Под унимодулярным ядром группы G будем понимать ее двумерную аналитическую подгруппу [4] H_0 , алгеброй Ли которой является унимодулярное ядро h_0 алгебры Ли g . Неунимодулярную группу Ли G будем называть специальной, гиперболической, параболической или эллиптической, если таковой является ее алгебра Ли.

Каждая левоинвариантная риманова метрика на группе Ли G индуцирует левоинвариантную метрику на каждой двумерной аналитической [4] подгруппе H группы G , превращая H в риманово подмногообразие для G . Пусть $k=k(H)$ и $m=m(H)$ — гауссова и средняя кривизны подмногообразия H (см., например, [2, 5]) и пусть $k_0=k(H_0)$ и $m_0=m(H_0)$ означают гауссову и среднюю кривизны унимодулярного ядра H_0 группы G . Напомним, что, как показал Дж. Милнор в [1], в зависимости от выбора левоинвариантной метрики на трехмерной неунимодулярной группе Ли G возможны только три сигнатуры квадратичной формы Риччи: $(+, -, -)$, $(-, -, -)$ и $(0, -, -)$, как указано в таблице, приведенной в формулировке следующего утверждения.

Теорема 1. Унимодулярное ядро H_0 трехмерной неунимодулярной группы Ли G всегда имеет отличную от нуля среднюю кривизну. Оно может быть омбилическим только в специальном и эллиптическом случаях для метрик с сигнатурой формы Риччи $(-, -, -)$. В зависимости от выбора левоинвариантной метрики на G возможны следующие знаки гауссовой кривизны k_0 для H_0 , указанные в таблице.

Тип алгебры Ли	Специальная	$D<0$	$D=0$		$D>0$	
Возможные сигнатуры формы Риччи	$(-, -, -)$	$(+, -, -)$	$(+, -, -)$	$(0, -, -)$	$(+, -, -)$	$(0, -, -)$ $(-, -, -)$
Возможные знаки k_0	+	—	—	0	+, —, 0	+

Все возможные значения средней кривизны двумерных подгрупп в зависимости от выбора левоинвариантных метрик описываются в следующем утверждении, которое справедливо и в многомерном случае.

Теорема 2. Для любой фиксированной левоинвариантной метрики δ на неунимодулярной группе Ли G унимодулярное ядро H_0 обладает наибольшим абсолютным значением средней кривизны. Подгруппа $H \subset G$ по отношению к метрике δ имеет равную нулю среднюю кривизну тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{h}$ образует прямой угол с унимодулярным ядром $\mathfrak{h}_0$ в метрике δ .

Из теоремы 2 следует, что при $D < 1$ для каждой левоинвариантной метрики на G существует в точности две подгруппы нулевой средней кривизны, а при $D = 1$ — одна такая подгруппа. В специальном случае таких подгрупп бесконечно много для любой левоинвариантной метрики, а при $D > 1$ их не существует ни для какой метрики.

Омбилические и вполне геодезические подгруппы также не всегда существуют, как показывают следующие утверждения.

Теорема 3. При $D \geq 1$ ни для какой левоинвариантной метрики не существует вполне геодезических подгрупп, а при $D = 1$ не существует и омбилических подгрупп.

Теорема 4. Каждая двумерная аналитическая подгруппа H специальной трехмерной неунимодулярной группы G_0 омбилична по отношению к любой левоинвариантной метрике на G_0 .

Теорема 5. В гиперболическом случае ($D < 1$) двумерная аналитическая подгруппа H омбилична по отношению к некоторой левоинвариантной метрике δ тогда и только тогда, когда она вполне геодезична по отношению к δ . Такие подгруппы H существуют только для таких метрик δ , по отношению к которым одномерные идеалы ортогональны. Алгебры Ли таких подгрупп образуют прямой угол в метрике δ с унимодулярным ядром $\mathfrak{h}_0$ и потому таких подгрупп в точности две для любой метрики δ с указанным свойством ортогональности идеалов.

Мы исследуем теперь вопрос о возможных значениях гауссовых кривизн $k(H)$ подгрупп $H \subset G$ в зависимости от выбора левоинвариантной метрики на G . В эллиптическом случае ($D > 1$) ответ на этот вопрос дается теоремой 1, так как в этом случае не существует никаких двумерных подгрупп H , отличных от унимодулярного ядра H_0 .

Теорема 6. Для любой фиксированной левоинвариантной метрики на специальной группе G_0 неравенства $0 \leq k(H) < k_0$ справедливы для каждой подгруппы $H \neq H_0$. При этом $k(H) = 0$ тогда и только тогда, когда H вполне геодезична в G_0 .

Теорема 7. При $D < 0$ для каждой левоинвариантной метрики δ на группе Ли G для всех подгрупп $H \neq H_0$ справедливы неравенства $k < k(H) \leq 0$. Для каждой метрики δ на G существует в точности две подгруппы $H_1, H_2 \subset G$ максимальной гауссовой кривизны $k(H_1) = k(H_2) = \max_{H \subset G} k(H) \leq 0$. Алгебры Ли $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ этих подгрупп H_1, H_2 образуют прямой угол в метрике δ с унимодулярным ядром $\mathfrak{h}_0$ (и потому по теореме 2 подгруппы H_1, H_2 имеют равную нулю среднюю кривизну). Подгруппы H_1 и H_2 вполне геодезичны тогда и только тогда, когда по отношению к метрике δ одномерные идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G ортогональны.

Теорема 8. При $D = 0$ для любой левоинвариантной метрики гауссова кривизна $k(H)$ постоянна для всех подгрупп, $k(H) = k_0 \leq 0$. Существуют левоинвариантные метрики, по отношению к которым гауссовы кривизны всех подгрупп равны нулю. По отношению к любой такой метрике одномерные идеалы ортогональны, а квадратичная форма Риччи имеет сигнатуру $(0, -, -)$.

Теорема 9. При $0 < D \leq 1$ для любой левоинвариантной метрики δ на группе G унимодулярное ядро H_0 имеет наибольшую гауссову кривизну $k_0 = \max_{H \subset G} k(H)$. Для каждой метрики δ на G существует при $0 < D < 1$ в точности две подгруппы, а при $D = 1$ — одна подгруппа ми-

нимальной гауссовой кривизны $k_{\min}$. Алгебры Ли этих подгрупп образуют прямой угол в метрике δ с унимодулярным ядром h_0 (и потому по теореме 2 эти подгруппы имеют равную нулю среднюю кривизну). При $D=1$ всегда $k_{\min} < 0$, а при $0 < D < 1$ будет $k_{\min} \leq 0$, причем указанные выше две подгруппы минимальной гауссовой кривизны вполне геодезичны тогда и только тогда, когда одномерные идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G ортогональны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. — Adv. in Math., 1976, v. 21, p. 293—329.
2. Громов Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. — М., 1971. — 343 с.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М., 1979. — 759 с.
4. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М., 1964. — 533 с.
5. Chen B. Y. Geometry of submanifolds. — New York, 1973. — 298 p.
6. Кайзер В. В. Гауссовы кривизны индуцированных левосинвариантных метрик на двумерных подгруппах трехмерных унимодулярных групп Ли. — Новосибирск, 1982. — 24 с. — Рукопись представлена редакцией Сиб. мат. ж. Деп. в ВИНТИ 12 марта 1982, № 1061—82.

Е. Е. КОРЯКИНА

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА В ПОДВИЖНОМ РЕПЕРЕ

Пусть M_3 — риманово многообразие с метрическим тензором $g = \{g_{ij}\} (i, j = 1, 2, \dots, n)$. В каждой точке M_3 можно задать подвижной репер, состоящий из касательных векторов X_i . Формы ω^j будут образовывать дуальный базис.

Пусть P и Q достаточно близкие точки. Рассмотрим всевозможные гладкие кривые $\gamma: \omega^i = \eta^i(t) dt$, соединяющие эти точки. Длина этих кривых определится функционалом

$$S[\gamma] = \int_P^Q L dt,$$

$$\text{где } L dt = \sqrt{g_{ij} \omega^i \omega^j} = \sqrt{g_{ij} \eta^i \eta^j} dt.$$

Минимум этого функционала будет достигаться на некоторой кривой, вдоль которой выполняются уравнения Эйлера — Лагранжа, записанные в криволинейных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0.$$

Запишем эти уравнения в подвижном репере. Пусть $\omega^i = a_i^j dx^j$, тогда $dx^j = \dot{a}_k^j \omega^k$, где $\{\dot{a}_k^j\}$ — матрица, обратная к матрице $\{a_j^i\}$. Вдоль кривой $\gamma: \eta^i = a_i^j \dot{x}^j$; $\dot{x}^j = \dot{a}_k^j \eta^k$ имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial (g_{ij} \eta^i \eta^j)}{\partial \dot{x}^k} / 2 \sqrt{g_{ij} \eta^i \eta^j}; \quad \frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial (g_{ij} \eta^i \eta^j)}{\partial x^k} / 2 \sqrt{g_{ij} \eta^i \eta^j}.$$

При условии, что кривая отнесена к натуральному параметру, для которого $\sqrt{g_{ij} \eta^i \eta^j} = \text{const}$, получаем уравнения Эйлера — Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (g_{ij} \eta^i \eta^j)}{\partial \dot{x}^k} \right) = \frac{\partial (g_{ij} \eta^i \eta^j)}{\partial x^k}.$$

Здесь

$$\frac{\partial (g_{ij} \eta^i \eta^j)}{\partial \dot{x}^k} = 2 g_{ij} \eta^i a_k^j,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (g_{ij} \eta^i \eta^j)}{\partial \dot{x}^k} \right) = 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \eta^i a_k^l \dot{x}^l + 2 g_{ij} \frac{d \eta^j}{dt} a_k^j + 2 g_{ij} \eta^j \frac{\partial a_k^j}{\partial x^l} \dot{x}^l,$$

$$\frac{\partial(g_{ij}\eta^i\eta^j)}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\eta^i\eta^j + 2g_{ij}\eta^j\frac{\partial a_i^l}{\partial x^k}\dot{x}^l.$$

Теперь уравнения запишутся в виде

$$2g_{ij}a_j\frac{d\eta^j}{dt} + 2\frac{\partial g_i}{\partial x^l}\eta^l a_k^l \dot{x}^l - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\eta^i\eta^j + \\ + 2g_{ij}\eta^j\dot{x}^l\left(\frac{\partial a_k^l}{\partial x^l} - \frac{\partial a_l^i}{\partial x^k}\right) = 0.$$

Так как

$$a_m^k \cdot a_k^l = \delta_m^l, \quad (1)$$

получаем

$$2g_{mi}\frac{d\eta^j}{dt} + 2\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^l}a_i^l\eta^i\eta^j - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}a_m^k\eta^i\eta^j + \\ + 2g_{ij}\eta^j\dot{x}^l\left(a_m^k\frac{\partial a_k^l}{\partial x^l} - a_m^k\frac{\partial a_l^i}{\partial x^k}\right) = 0.$$

Дифференцирование тождества (1) по x^l приводит к тождеству

$$-\frac{\partial a_m^k}{\partial x^l}a_k^l = a_m^k\frac{\partial a_k^l}{\partial x^l}. \quad (2)$$

Векторы подвижного репера можно записать в виде

$$X_j = a_j^l\frac{\partial}{\partial x^l}. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) уравнения Эйлера—Лагранжа запишутся в виде

$$2g_{mj}\frac{d\eta^j}{dt} + \{X_i(g_{mj}) + X_j(g_{mi}) - X_m(g_{ij})\}\eta^i\eta^j - \\ - 2g_{ij}\eta^j\left(a_m^k\frac{\partial a_k^l}{\partial x^k} + \frac{\partial a_m^k}{\partial x^l}a_k^l\right)\dot{x}^l = 0.$$

Нетрудно получить (см. [1]), что

$$\left(a_m^k\frac{\partial a_k^l}{\partial x^k} + \frac{\partial a_m^k}{\partial x^l}a_k^l\right)\dot{x}^l = \frac{L_{X_m}\omega^l}{dt}. \quad (4)$$

Используя (4) и то, что $g^{pm} \cdot g_{mj} = \delta_j^p$, получаем окончательную запись уравнений Эйлера—Лагранжа в подвижном репере

$$\frac{d\left(\frac{\omega^p}{dt}\right)}{dt} + \frac{1}{2}g^{pm}\{X_i(g_{mj}) + X_j(g_{mi}) - X_m(g_{ij})\}\frac{\omega^l}{dt} \cdot \frac{\omega^j}{dt} - \\ - g^{pm} \cdot g_{ij}\frac{L_{X_m}\omega^l}{dt} \cdot \frac{\omega^j}{dt} = 0.$$

В ортонормированном репере уравнения Эйлера—Лагранжа примут более простой вид

$$\frac{d\left(\frac{\omega^l}{dt}\right)}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{\omega^k}{dt} \sum_{l=1}^n \Lambda_{ik}^l \frac{\omega^l}{dt} = 0,$$

где Λ_{ij}^l — коэффициенты разложения скобок базисных полей

$$[X_i, X_j] = \Lambda_{ij}^k X_k.$$

Левая часть уравнений Эйлера—Лагранжа представляет собой произвольную Лагранжа [2], записанную в подвижном репере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970. — 412 с.
2. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука, 1965. — 456 с.

В. А. ПАНЧИЩИНА

О КОМПЛЕКСАХ K_b ПРЯМЫХ В ПРОЕКТИВНОМ $2b$ -ПРОСТРАНСТВЕ

Комплексом K_b прямых в проективном n -пространстве P_n называется a -семейство прямых при $a=n-1+b$. Через каждую точку X прямой l комплекса K_b проходит b -подсемейство (b -конус) прямых этого комплекса. Касательные $(b+1)$ -плоскости $l_{b+1}(X)$ к этим конусам во всех точках прямой l пересекаются по плоскости, которая называется ассоциированной с прямой l комплекса K_b [1]. В общем случае при $a=2b+2-n>1$ комплекс K_b имеет ассоциированные σ -плоскости l^*_σ . В данной статье, в терминах работ [1–2] рассматриваются комплексы K_b , обладающие в общем случае двумерными ассоциированными плоскостями, т. е. $n=2b$, причем $b\geq 4$. Комплексы K_2, K_3 изучались в работах [3–5].

1. Отнесем комплекс K_b прямых к подвижному реперу $\{A_I\}$ ($I, J=0, \dots, 2b$), построенному в [1], деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J,$$

вершины A_0, A_1 помещены на прямую l , формы

$$\omega_1^p = \theta^{p-1}, \omega_0^{b+1} = \theta^{2b}, \omega_0^v = \theta^{v+2b-1} (p=2, \dots, 2b; v=2, \dots, b) \quad (1)$$

выбраны за базисные, а основные соотношения [6] приведены к виду

$$\omega_0^v + \omega_1^{b+v} = 0. \quad (2)$$

В этом случае каждой точке $X=A_0 + \rho A_1$ в основном соответствии [2] комплекса K_b отвечает $b+1$ -плоскость

$$l_{b+1}(X) = (l, A_{b+1}, A_v + \rho A_{v+b}), \quad (3)$$

а плоскость $l^*_2 = (l, A_{b+1})$ является ассоциированной с прямой l .

Все 1-подсемейства комплекса K_b , имеющие фокус в точке $X=A_0 + \rho A_1$ прямой l , задаются системой Пфаффа:

$$\begin{aligned} \theta^{v+b-1} - \rho \theta^{v-1} &= 0; \quad \theta^{2b} + \rho \theta^b = 0; \\ \theta^{v+2b-1} &= -\rho \theta^{v+b-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Продолжение [6] системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_0^1 + \omega_v^{v+b} &= c_{v-1,x}^v \theta^x; \quad -\omega_u^{v+b} = c_{u-1,x}^v \theta^x; \\ -\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_v^v - \omega_{v+b}^{v+b} &= c_{v+b-1,x}^v \theta^x; \\ \omega_u^v - \omega_{u+b}^{v+b} &= c_{u+b-1,x}^v \theta^x; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\omega_1^0 - \omega_{v+b}^v &= c_{v+2b-1,x}^v \theta^x; \\ -\omega_{u+b}^v &= c_{u+2b-1,x}^v \theta^x; \\ -\omega_{b+1}^{v+b} &= c_{b,x}^v \theta^x; \quad -\omega_{b+1}^v = c_{2b,x}^v \theta^x,\end{aligned}\quad (5_1)$$

где

$$c_{[x,x']}^v = 0 \quad (x, x' = 1, \dots, 3b-1; u, v = 2, \dots, b, u \neq v).$$

Распределение Δ_2^* на комплексе K_b , интегральные 1-подсемейства которого касаются ассоциированных плоскостей l_2^* , задается системой

$$\theta^v = 0 \quad (v = 1, \dots, b-1, b+1, \dots, 2b-1, 2b+1, \dots, 3b-1). \quad (6)$$

Обозначим совокупность этих 1-подсемейств через $l(\Psi_2^*)$.

В общем случае касательное подпространство $TL_2^*(\Psi_2^*)$ есть 4-плоскость

$$l_4^* = (l, A_{b+1}, c_{2b,b}^v A_v + c_{b,b}^v A_{v+b}, c_{2b,2b}^v A_v + c_{b,2b}^v A_{v+b}) \quad (7)$$

(случаи, когда это подпространство трехмерно и двумерно, рассматриваются ниже).

Найдем распределение на комплексе, интегральные 1-подсемейства которого касаются плоскости l_4^* . Требование $TL(\Psi_1) \subset l_4^*$ приводит к системе уравнений Пфаффа, ранг которой равен $3b-4$, т. е. она задает на комплексе K_b распределение Δ_3^* . Независимые уравнения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned}c_{b,2b}^b \theta^{v-1} &= c_{2b,2b}^v \theta^{2b-1}; \quad c_{b,2b}^b \theta^{v+b-1} - \\ - c_{b,2b}^v \theta^{2b-1} &= 0; \quad c_{b,2b}^b \theta^{v+2b-1} + c_{b,b}^v \theta^{2b-1} = 0,\end{aligned}\quad (8)$$

причем

$$c_{b,2b}^b [(c_{b,2b}^b)^2 - c_{b,b}^v c_{2b,2b}^v] \neq 0, \quad (9)$$

хотя бы при одном $v = 2, \dots, b$.

Вдоль распределения Δ_3^* подпространство $TL_2^*(\Psi_3^*)$ пятимерно и имеет вид

$$\begin{aligned}l_5^* &= (l, A_{b+1}, c_{2b,b}^v A_v + c_{b,b}^v A_{v+b}, c_{2b,2b}^v A_v + \\ &+ c_{b,2b}^v A_{v+b}, n^v A_v + n^{v+b} A_{v+b}),\end{aligned}\quad (10)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}n^v &= c_{2b,2b}^t c_{2b,t-1}^v + c_{b,2b}^t c_{2b,t+b-1}^v - c_{b,b}^t c_{2b,t+2b-1}^v; \\ n^{v+b} &= c_{2b,2b}^t c_{b,t-1}^v + c_{b,2b}^t c_{b,t+b-1}^v - c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^v.\end{aligned}$$

Требование $TL(\Psi_1) \subset l_5^*$ приводит к системе ранга $3b-5$ уравнений Пфаффа, которая задает на комплексе распределение Δ_4^* . Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных распределений $\Delta_5^* \subset \dots \subset \Delta_{b-1}^*$, интегральные 1-подсемейства которых удовлетворяют условиям:

$$l_{\tau+1}^* \equiv TL_2^*(\Psi_{\tau-1}^*) = TL(\Psi_\tau^*) \quad (\tau = 5, \dots, b-1). \quad (11)$$

Касательное подпространство $TL_2^*(\Psi_{b-1}^*)$ будет $(b+1)$ -мерно, обозначим его через l_{b+1}^* .

2. Найдем инвариантные точки на прямой l комплекса K_b .

В общем случае линейная оболочка плоскостей $l_{b+1}(X)$ и l_{b+1}^* совпадает со всем пространством P_{2b} .

Определение 1. Точки прямой l , в которых линейная оболочка плоскостей $l_{b+1}(X)$ и l_{b+1}^* имеет размерность не более $2b-1$, назовем основными точками прямой l комплекса K_b .

Теорема. На прямой l комплекса K_b имеется не более $b-1$ основных точек.

Доказательство. Плоскость l_{b+1}^* задается уравнениями в тангенциальных координатах:

$$x_i = x_{b+1} = 0; \quad n_i^v x_v + n_i^{v+b} x_{v+b} = 0, \quad (12)$$

где n_i^v, n_i^{v+b} — некоторые комбинации коэффициентов $c_{i,v}^v$ из (5).

Плоскость l_2^* принадлежит пересечению $l_{b+1}^* \cap l_{b+1}(X)$. Линейная оболочка плоскостей $l_{b+1}^*, l_{b+1}(X)$ имеет размерность $2b-1$, если $\text{rang } \Lambda = 2b-3$, где Λ — матрица, составленная из координат точек $n_i^v A_v + n_i^{v+b} A_{v+b}$, $A_v + \rho A_{v+b}$ и имеющая тип $(2b-2) \times (2b-2)$.

Поэтому для основных точек имеем

$$\det \| -\rho n_i^v + n_i^{v+b} \| = 0 \quad (t, v = 2, \dots, b). \quad (13)$$

Раскрывая (13), получаем уравнение степени $b-1$ относительно ρ .

Теорема 2. Если распределение Δ_3^* комплекса K_b инволютивно, то плоскость $l_4^*(\Psi_2^*)$ совпадает с плоскостью l_5^* .

Доказательство. Условия инволютивности распределения Δ_3^* имеют вид

$$\begin{aligned} & c_{2b,2b}^v (-\Gamma_{b,2b}^b + c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^b) + \\ & + c_{b,2b}^b (\bar{\Gamma}_{2b,2b}^v - c_{b,2b}^t c_{2b,t+2b-1}^v) = 0; \\ & c_{b,2b}^v (\Gamma_{2b,2b}^b - c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^b) + \\ & + c_{b,2b}^b (-\Gamma_{2b,2b}^v + c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^v) = 0; \\ & c_{b,2b}^v (n^{2b} + \Gamma_{b,2b}^b - c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^b) + \\ & + c_{b,2b}^b (-n^{v+b} - \Gamma_{b,2b}^v + c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^v) = 0; \\ & c_{2b,2b}^v (n^{2b} + \Gamma_{b,2b}^b - c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^b) + \\ & + c_{b,2b}^b (-3n^v - \Gamma_{2b,2b}^v + c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^v) = 0; \\ & c_{b,b}^v (\Gamma_{2b,2b}^b - c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^b) + \\ & + c_{b,2b}^b (2n^{v+b} - \Gamma_{b,2b}^v + c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^v) = 0; \\ & c_{b,b}^v (\Gamma_{b,2b}^b + n^{2b} - c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^b) + \\ & + c_{b,2b}^b (-\Gamma_{b,b}^v + c_{b,b}^t c_{b,t+b-1}^v + c_{b,2b}^t c_{b,t-1}^v) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Gamma_{2b,2b}^v, \Gamma_{b,b}^v, \Gamma_{b,2b}^v, \bar{\Gamma}_{2b,2b}^v$ — коэффициенты, получаемые при продолжении уравнений (5).

Касательным подпространством $l_4^*(\Psi_2^*)$ является плоскость $(l_4^*, B_1, B_2, B_3, B_4)$, где в силу (14)

$$\begin{aligned} B_1 &= (c_{b,2b}^b)^{-1} \cdot (\Gamma_{b,2b}^b - c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^b) \cdot (c_{2b,2b}^v A_v + \\ & + c_{b,2b}^v A_{v+b}); \\ B_2 &= (c_{b,2b}^b)^{-1} \cdot (\Gamma_{b,2b}^b + n^{2b} - c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^b) \cdot (c_{2b,2b}^v A_v + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c_{b,2b}^v A_{v+b}) - (n^v A_v + n^{v+b} A_{v+b}); \\
 B_3 &= (c_{b,2b}^b)^{-1} (\Gamma_{b,2b}^b - c_{b,b}^t c_{b,t+2b-1}^b + \\
 & + n^{2b}) \cdot (c_{b,2b}^v A_v + c_{b,b}^v A_{v+b}); \\
 B_4 &= (c_{b,2b}^b)^{-1} \cdot (\Gamma_{b,2b}^b - c_{b,2b}^t c_{b,t+2b-1}^b) \cdot (c_{b,2b}^v A_v + \\
 & + c_{b,b}^v A_{v+b}) + (n^v A_v + n^{v+b} A_{v+b}).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) видно, что точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат в плоскости l_5^* .

3. Построим оснащение Картана комплекса K_b , т. е. поле $(2b-2)$ -мерных плоскостей, каждая из которых не пересекает прямую l комплекса K_b .

Точка A_0 и A_1 поместим в две основные точки прямой, тогда

$$\omega_1^0 = \Gamma_{1,x}^0 \theta^x; \quad \omega_0^1 = \Gamma_{0,x}^1 \theta^x, \tag{16}$$

обозначим $l(\Psi_1^i)$ ($i=0,1$) торсы из совокупности $l(\Psi_2^*)$ с фокусами A_i . Поместим вершину A_{b+1} в точку пересечения прямых $TA_0(\Psi_1^0)$ и $TA_1(\Psi_1^0)$, лежащих в l_2^* . Вершины A_v репера помещаем в плоскость $TA_1(\Psi_b^0)$, а $A_{v+b} - TA_0(\Psi_b^1)$, где Δ_b^i — распределение, задаваемое системой (4). Тогда

$$\Gamma_{0,2b}^1 = \Gamma_{1,b}^0 = \Gamma_{0,v+2b-1}^1 = \Gamma_{1,v-1}^0 = 0. \tag{17}$$

Фиксации (17) возможны без исключений и при этом получаем

$$\omega_{b+1}^i = \Lambda_{b+1,x}^i \theta^x; \quad \omega_v^0 = \Lambda_{v,x}^0 \theta^x; \quad \omega_{b+v}^1 = \Lambda_{v+b,x}^1 \theta^x. \tag{18}$$

Линейная оболочка плоскостей l_b^* и $l_{b+1}(X)$ в общем случае есть гиперплоскость $\Gamma(X)$. Гиперплоскости $\Gamma(A_0)$ и $\Gamma(A_1)$ зададим соответственно уравнениями:

$$x^{b+2}=0; \quad x^{b-1}=0.$$

Найдем распределение Δ_b^{01} , интегральные 1-подсемейства которого касаются $(2b-2)$ -плоскости $\Gamma(A_1) \cap l_{b+1}(A_0)$. Оно задается уравнениями:

$$\theta^{b-2} = \theta^{v+b-1} = \theta^{v+2b-1} = 0.$$

Общая часть распределений Δ_b^{01} и Δ_b^0 является распределением Δ_{b-1}^0 .

Линейная оболочка плоскостей $TA_{b+1}(\Psi_{b-1}^0)$ и $TA_1(\Psi_b^0)$ есть гиперплоскость

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= (A_1, A_{b+1}, A_v, \Lambda_{b+1,\beta}^0 A_0 - c_{b,\beta}^v A_{v+b}) \\
 & (\beta=1, \dots, b-3, b-1, b),
 \end{aligned} \tag{19}$$

причем, как и выше, через $l(\Psi_b)$ обозначаем совокупность интегральных подсемейств распределения Δ_b .

Аналогично, по $(2b-2)$ -плоскости $\Gamma(A_0) \cap l_{b+1}(A_1)$ находится распределение Δ_b^{10} , затем рассматривается Δ_{b-1}^1 . Линейной оболочкой плоскостей $TA_{b+1}(\Psi_{b-1}^1)$ и $TA_0(\Psi_b^1)$ является гиперплоскость

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= (A_0, A_{b+1}, A_{v+b}, \Lambda_{b+1,\gamma}^1 A_1 - c_{b,\gamma}^v A_v) \\
 & (\gamma=2b, 2b+2, \dots, 3b-1).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Зададим гиперплоскость Γ_i уравнением $x^i=0$, тогда

$$\Lambda_{b+1,\beta}^0 = \Lambda_{b+1,\gamma}^1 = 0. \tag{21}$$

Фиксации (21) возможны, если

$$\det \| c_{2b,\gamma}^v \| \cdot \det \| c_{b,\beta}^v \| \neq 0,$$

и тогда имеем

$$\omega_v^1 = B_{v,x}^1 \theta^x; \quad \omega_{v+b}^0 = B_{v+b,x}^0 \theta^x.$$

Пересечение гиперплоскостей Γ_i есть $(2b-2)$ -плоскость, которая не содержит прямой l комплекса K_b . Поле таких $(2b-2)$ -плоскостей является оснащением Картана комплекса K_b .

4. Найдем инвариантные точки на прямой l комплекса K_b с инволютивным распределением Δ_2^* . Известно [2], что такой комплекс расщепляется на грасмановы многообразия $Gr(1,2)$ всех прямых l плоскостей l_2^* и для него подпространство $TI_2^*(\Psi_2)$ совпадает с l_2^* . Поэтому

$$c_{b,b}^v = c_{b,2b}^v = c_{2b,2b}^v = 0.$$

Теорема 3. На прямой l комплекса K_b с инволютивным распределением Δ_2 имеется не более 3 $(b-1)$ таких точек и торсов с фокусами в них, что для каждого торса $l(\Psi_1)$ плоскость $TI_2^*(\Psi_1)$ принадлежит $l_{b+1}(X)$.

Доказательство. Зададим семейство $l(\Psi_1)$ уравнениями (4) и $\theta^1; \dots; \theta^b = \lambda^1; \dots; \lambda^b$. Для комплексов с инволютивным распределением Δ_2^* условие $TI_2^*(\Psi_1) \subset l_{b+1}(X)$ примет вид

$$\begin{aligned} & \{\rho^3 c_{2b,t+2b-1}^v + \rho^2 (-c_{2b,t+b-1}^v - c_{b,t+2b-1}^v) + \\ & + \rho (c_{b,t+b-1}^v - c_{2b,t-1}^v) + c_{b,t-1}^v\} \lambda^{t-1} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Система (23) состоит из $b-1$ однородных уравнений относительно $b-1$ неизвестных λ^{t-1} , поэтому она имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая этот определитель, получаем уравнение степени $3(b-1)$ относительно ρ , определяющее искомые точки на прямой l . Для них система (23) задает соответствующие торсы.

5. Рассмотрим теперь частный класс комплексов K_b , для комплексов K_b^* пространство $TI_2^*(\Psi_2)$ трехмерно. Это 3-пространство обозначим через l_3^* . Тогда в силу (7) для комплекса K_b^* имеем

$$\mu_2 c_{b,2b}^v + \mu_1 c_{2b,2b}^v = 0; \quad \mu_2 c_{2b,b}^v + \mu_1 c_{b,2b}^v = 0, \quad (24)$$

причем μ_i одновременно не равны нулю.

Теорема 4. На прямой l комплекса K_b^* имеется одна точка, в которой плоскость $l_{b+1}(X)$ содержит плоскость l_3^* .

Доказательство. Пересечение плоскостей l_3^* , $l_{b+1}(X)$ задается системой уравнений:

$$\begin{aligned} & -\rho x^v + x^{v+b} = 0; \quad \mu_1 c_{b,b}^2 x^q + \mu_2 c_{b,b}^q x^2 = 0; \\ & (\mu_1 + \rho \mu_2) c_{b,b}^2 x^2 = 0; \quad \rho c_{b,b}^2 c_{b,b}^q (\mu_1 + \rho \mu_2) x^2 = 0 \\ & (q=3, \dots, b). \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует, что только в точке $X_1 = \mu_2 A_0 - \mu_1 A_1$ плоскость $l_{b+1}(X)$ содержит l_3^* .

Поместим вершину A_1 в точку $X_1 = \mu_2 A_0 - \mu_1 A_1$, тогда

$$\mu_2 = 0; \quad \mu_1 \neq 0. \quad (26)$$

и из условий (24) получаем

$$c_{2b,2b}^v = c_{b,2b}^v = 0. \quad (27)$$

Поместим еще вершину A_{b+2} в плоскость l_3^* , тогда

$$c_{b,b}^q = 0 \quad (q=3, \dots, b). \quad (28)$$

Обычным путем проверяем, что фиксации (27)–(28) возможны, если $c_{b,b}^2 \neq 0$ и при этом имеем

$$\omega_1^0 = \Gamma_{1,x}^0 \theta^x; \quad \omega_2^q = \Gamma_{2,x}^q \theta^x. \quad (29)$$

Случай комплексов K_b^* с инволютивным распределением Δ_2^* здесь исключается. Для комплекса K_b^* коэффициенты $c_{x,x'}^v$, $\Gamma_{1,x}^0$, $\Gamma_{2,x}^q$ удовлетворяют еще системе уравнений:

$$c_{2b,2b+1}^q = \Gamma_{1,2b}^0 + 2c_{2b,2b+1}^2 = c_{b,2b+1}^q - \Gamma_{2,2b}^q + c_{2b,b+1}^q = 0. \quad (30)$$

Теорема 5. Плоскости l_2^* , ассоциированные с прямой l комплекса K_b^* , образуют $(3b-2)$ -семейство.

Доказательство. Из равенств (27), (28), (30) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_{b+1}^2 &= -c_{2b,v}^2 \theta^v; \quad \omega_{b+1}^{b+2} = -c_{b,b}^2 \theta^b - c_{b,v}^2 \theta^v; \\ \omega_{b+1}^{b+q} &= -c_{b,v}^q \theta^v; \quad \omega_{b+1}^q = -c_{2b,\mu}^q \theta^\mu \\ (\nu &= 1, \dots, b-1, b+1, \dots, 2b-1, 2b+1, \dots, 3b-1); \\ \mu &= 1, \dots, b-1, b+1, \dots, 2b-1, 2b+2, \dots, 3b-1). \end{aligned} \quad (31)$$

Поэтому дифференциал плоскости l_2^* зависит только от базисных форм θ^v , θ^b .

Распределение Δ_3^* на комплексе K_b^* , интегральные 1-подсемейства которого касаются плоскости l_3^* , определяется системой:

$$\theta^\mu = 0. \quad (32)$$

Теорема 6. Распределение Δ_3^* инволютивно тогда и только тогда, когда плоскость l_3^* неподвижна вдоль его интегральных 1-подсемейств.

Доказательство. Условия инволютивности Δ_3^* в силу соотношений (30) имеют вид

$$\begin{aligned} c_{2b,2b+1}^2 &= 0; \quad \Gamma_{1,b}^0 - c_{b,2b+1}^2 = 0; \\ c_{b,2b+1}^q &= 0; \quad \Gamma_{2,b}^q - c_{b+1,b}^q = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Внося равенства (33) в замыкание системы (5₁) для этого класса получаем еще

$$c_{2b+1,2b+1}^q = \Gamma_{2,2b+1}^q - c_{b+1,2b+1}^q = c_{2b,2b+1}^2 - \Gamma_{1,2b+1}^0 = 0. \quad (34)$$

Равенства (33)–(34) означают, что плоскость l_3^* неподвижна вдоль интегральных 1-семейств распределения Δ_3^* . Обратное утверждение очевидно.

Следствие 1. Плоскости l_3^* комплекса K_b^* с инволютивным распределением Δ_3^* образуют $(3b-4)$ -семейство.

6. Покажем, как построить комплекс K_b^* , имеющий инволютивное распределение Δ_3^* . Присоединим к каждой плоскости l_3 произвольного $(3b-4)$ -семейства подвижной репер так, чтобы $l_3 = (A_0, A_1, A_{b+1}, A_{b+2})$. Пусть θ^a — базисные формы этого семейства, тогда

$$\begin{aligned}\omega_k^v &= a_{k,\mu}^v \theta^\mu; \quad \omega_{b+2}^v = a_{b+2,\mu}^v \theta^\mu; \\ \omega_k^{b+q} &= a_{k,\mu}^{b+q} \theta^\mu; \quad \omega_{b+2}^{b+q} = a_{b+2,\mu}^{b+q} \theta^\mu \quad (k=0,1, b+1).\end{aligned}\quad (35)$$

Зададим в каждой плоскости l_3 специальный комплекс прямых $l=(A_0, A_1)$, причем пусть вершина A_1 описывает 2-поверхность, а плоскость $l_2=(l, A_{b+1})$ —касательная к ней в точке A_1 . Тогда

$$\omega_1^{b+2} = 0 \pmod{\theta^\mu}. \quad (36)$$

Продолжение [6] уравнения (36) имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_0^{b+2} &= a \omega_1^0 + b \omega_1^{b+1} \pmod{\theta^\mu}; \\ \omega_{b+1}^{b+2} &= b \omega_1^0 + c \omega_1^{b+1} \pmod{\theta^\mu}.\end{aligned}\quad (37)$$

Рассмотрим в l_2 связку прямых $l=(A_0, A_1)$ с центром A_1 , выберем θ^{2b} за базисную форму связки. Рассмотрим комплекс, образованный всеми специальными комплексами семейства $l_3(3b-4)$. В силу (35), (36) формы, которые фиксируют прямую l в пространстве P_{2b} , связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}\omega_i^v &= a_{i,\mu}^v \theta^\mu; \quad \omega_i^{b+q} = a_{i,\mu}^{b+q} \theta^\mu; \\ \omega_1^{b+2} &= a_{1,\mu}^{b+2} \theta^\mu.\end{aligned}\quad (38)$$

Выберем формы

$$\omega_1^p = \theta^{p-1}; \quad \omega_0^{b+1} = \theta^{2b}; \quad \omega_0^{b+v} = \theta^{v+2b-1} \quad (39)$$

за базисные, тогда соотношения (38) можно привести к виду (2). Их продолжение совпадает с (5), причем в силу равенств (35)—(37) коэффициенты продолжения удовлетворяют требованиям:

$$\begin{aligned}c_{2b,\alpha}^v &= c_{2b,2b+1}^2 = c_{b,\alpha}^q = c_{2b+1,\alpha}^q = 0 \quad (\alpha=b, 2b, 2b+1); \\ \Gamma_{1,b}^0 - c_{2b+1,b}^2 &= 0; \quad \Gamma_{1,2b+1}^0 - c_{2b+1,2b+1}^2 = 0.\end{aligned}\quad (40)$$

Так как формы ω_{b+2}^{b+q} — главные для семейства $l_3(3b-4)$, то из (5) следует, что формы ω_2^q тоже главные, т. е.

$$\omega_2^q = \Gamma_{2,\alpha}^q \theta^\alpha. \quad (41)$$

Из равенств (36) получаем, что

$$\Gamma_{2,\alpha}^q - c_{b+1,\alpha}^q = 0. \quad (42)$$

Соотношения (40), (42) совпадают с соотношениями (33), (34) (30).

Результаты пунктов 5 и 6 объединяет

Теорема 7. Комплекс K_b^* с инволютивным распределением Δ_3 представляет собой $(3b-4)$ -семейство специальных комплексов, каждый из которых принадлежит 3-плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Л. З., Приходько В. А., Романькова Т. П. О некоторых свойствах линейчатых комплексов в многомерном проективном пространстве.— Геометр. сб., 19. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978, с. 42—47.
2. Кругляков Л. З. К дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей в проективном пространстве. 1.— Сибирск. матем. ж., 1976, т. 17, вып. 6, с. 1295—1307.

3. Гербсоммер Л. Э., Кругляков Л. З. О комплексах K_3 прямых в пространстве P_6 .— Геометр. сб., 20. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 40—43.
 4. Карпенко В. Л. Гиперкомплексы прямых с совпадающими основными точками и с точками совмещения в четырехмерном проективном пространстве.— Украинский геометр. сб., 1968, вып. 5—6, с. 85—92.
 5. Гринцевичюс К. И. О гиперкомплексе прямых в проективном пространстве P_4 .— ДАН, 1956, № 6, т. 107, с. 785.
 6. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973.— 236 с.
-

Г. П. БОЧИЛЛО

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ m -РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n -МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. В работе изучаются m -распределения Δ_m на дифференцируемом многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства $P_n (m < n)$ [1]. Гиперплоским элементом $\{A, \alpha\}$ названа пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости σ пространства P_n [2].

С помощью компонент внутреннего геометрического объекта второго порядка [3] строится и геометрически характеризуется инвариантное оснащение распределения Δ_m . При этом не исключается случай инволютивности Δ_m (см. [4]). Найденное оснащение индуцирует на M_{2n-1} аффинную связность с кручением. Распределение Δ_m порождает на M_{2n-1} подраспределение Δ_{m-1}^* , а также несколько $(m-1)$ -распределений, которые используются для геометрической характеристики построенных оснащений.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, K = \overline{0, 1, n}; \quad i, j, k = \overline{1, n}; \quad p, q, r = \overline{1, n-1};$$

$$u, v, w = \overline{1, m-1}; \quad \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{w}_1 = \overline{m, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m-1}, n.$$

2. Присоединим к каждому гиперплоскому элементу $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечный $R_0 = \{A_I\}$ и тангенциальный $r^0 = \{\alpha^I\}$ подвижные реперы, полагая $A = A_0$, $\alpha = \alpha^n$, причем

$$dA_I = \omega_I^J A_J; \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J, \quad (1)$$

где 1-формы ω_I^J удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\omega_I^J = \omega_K^J \wedge \omega_I^K \quad (2)$$

и соотношению

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \dots + \omega_n^n = 0.$$

Базовые формы многообразия M_{2n-1} $\omega_0^p, \omega_n^n, \omega_p^n$ удовлетворяют в силу (2) уравнениям:

$$\begin{aligned} d\omega_0^p &= \omega_0^q \wedge (\omega_q^p - \delta_q^p \omega_0^0) + \omega_0^n \wedge \omega_n^p; \\ d\omega_0^n &= \omega_0^q \wedge \omega_q^n + \omega_0^n \wedge (\omega_n^n - \omega_0^0); \\ d\omega_p^n &= \omega_0^n \wedge (-\omega_p^0) + \omega_q^n \wedge \{\delta_p^q (\omega_n^n - \omega_0^0) - (\omega_p^q - \delta_p^q \omega_0^0)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь мы имеем расслоение линейных реперов [5] $L(M_{2n-1})$ с базой

M_{2n-1} и типовым слоем—подгруппой стационарности гиперплоского элемента $\{A, \alpha\}$.

Структурными уравнениями $L(M_{2n-1})$ являются (2), а также уравнения:

$$\begin{aligned} d(\omega_q^p - \delta_q^p \omega_0^0) &= (\omega_q^r - \delta_q^r \omega_0^0) \wedge (\omega_r^p - \delta_r^p \omega_0^0) + \omega_q^n \wedge \omega_n^p + \\ &\quad + \delta_q^p \omega_n^0 \wedge \omega_0^n; \\ d(\omega_n^n - \omega_0^0) &= -\omega_p^0 \wedge \omega_0^p + \omega_n^p \wedge \omega_p^n + 2\omega_n^0 \wedge \omega_0^n; \\ d\omega_n^p &= \omega_n^0 \wedge \omega_0^p + \omega_n^q \wedge (\omega_q^p - \delta_q^p \omega_0^0); \\ d\omega_p^0 &= (\omega_p^q - \delta_p^q \omega_0^0) \wedge \omega_q^0 + \omega_p^n \wedge \omega_n^0; \\ d\omega_n^0 &= \omega_n^0 \wedge (\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^p \wedge \omega_p^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из вида уравнений (3) и (4) заключаем, что структурные формы $L(M_{2n-1})$:

$$\omega_0^p; \omega_0^n; \omega_p^n; \omega_q^p - \delta_q^p \omega_0^0; \omega_n^n - \omega_0^0; \omega_n^p; \omega_p^0; \omega_n^0$$

не удовлетворяют теореме Картана-Лаптева [5] и, следовательно, не определяют на $L(M_{2n-1})$ фундаментально-групповой связности.

Обозначим $\{N, \nu\}$ гиперплоский элемент из точки N , не инцидентной гиперплоскости σ и гиперплоскости ν , не содержащей точку A .

Имеет место следующая

Теорема 1. Оснащение M_{2n-1} полем гиперплоских элементов $\{N, \nu\}$ означает задание аффинной связности на расслоении $L(M_{2n-1})$.

Доказательство. Пусть к каждому $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} присоединен гиперплоский элемент $\{N, \nu\}$ так, что

$$\begin{aligned} N &= A_n + a_n^p A_p + a_n^0 A_0; \\ \nu &= \alpha^0 + b_p^0 \alpha^p + b_n^0 \alpha^n; \quad b_n^0 = -(a_n^p b_p^0 + a_n^0), \end{aligned} \quad (5)$$

причем совокупности величин $\{a_n^p, a_n^0\}$, $\{b_p^0, b_n^0\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla a_n^p + \omega_n^p &= a_{ni}^p \omega^i + a_n^{pq} \omega_q^n; \\ \nabla a_n^0 + \omega_n^0 &= a_{ni}^0 \omega^i + a_n^{0q} \omega_q^n; \\ \nabla b_p^0 - \omega_p^0 &= b_{pi}^0 \omega^i - b_p^{0q} \omega_q^n; \\ \nabla b_n^0 - \omega_n^0 &= b_{ni}^0 \omega^i + b_n^{0q} \omega_q^n, \end{aligned} \quad (6)$$

где ∇ —известный оператор дифференцирования [5]. Перейдем к новому точечному реперу $\{B_I\}$, полагая

$$B_0 = A_0; \quad B_p = A_p - b_p^0 A_0; \quad B_n = N.$$

Деривационные формулы этого репера будем писать в виде

$$dB_I = \Omega_I^J B_J,$$

причем 1-формы Ω_I^J удовлетворяют условиям

$$d\Omega_I^J = \Omega_I^K \wedge \Omega_K^J; \quad \Omega_0^0 + \Omega_1^1 + \dots + \Omega_n^n = 0$$

и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Omega_0^p &= \omega_0^p - a_n^p \omega_n^0, \quad \Omega_0^n = \omega_0^n; \quad \Omega_p^n = \omega_p^n - b_p^0 \omega_n^0; \\ \Omega_p^q &= \omega_p^q - a_n^q \omega_n^0 - b_p^0 \omega_0^q; \quad \Omega_n^n = \omega_n^n + a_n^p \omega_p^0 + a_n^0 \omega_0^n; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Omega_0^0 = \omega_0^0 + b_p^0 \Omega_0^p + b_n^0 \omega_n^0.$$

При этом формы Ω_p^0 , Ω_n^p , Ω_n^0 выражаются лишь через базовые формы расслоения $L(M_{2n-1})$. Дифференцируя внешним образом (7), получаем, что система форм:

$$\Omega_0^p; \Omega_0^n; \Omega_p^n; \Omega_p^q - \delta_p^q \Omega_0^0; \Omega_n^n - \Omega_0^0 \quad (8)$$

удовлетворяет условиям теоремы Картана—Лаптева.

Следовательно, система форм (8) определяет на $L(M_{2n-1})$ аффинную связность. Из уравнений структуры для форм (8) заключаем, что это связность с кручением.

3. Рассмотрим распределение Δ_m на M_{2n-1} ($m < n$). Покажем, как в этом случае может быть внутренним образом определено поле оснащающих гиперплоских элементов. Аналогичные распределения изучались в центроаффинном пространстве [2], где оснащение существует в силу наличия центра пространства (когда гиперплоские элементы ему не инцидентны).

Система уравнений Пфаффа, определяющая распределение Δ_m , представляет собой $(2n-1-m)$ линейных соотношений на базовые формы. Переходя к реперу первого порядка R_1 , можем записать ее в виде

$$\bar{\omega}_0^u = 0; \omega_u^n = 0; \quad \omega_u^n = \Lambda_{uv}^n \omega^v. \quad (9)$$

Используя (9), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\alpha^u &= \Lambda_{0\alpha}^u \omega^l + \Lambda_{\alpha}^{up} \omega_p^n; \\ \Lambda_{uv}^n \omega_u^u &= \Lambda_{uv}^n \omega^l + \Lambda_{uv}^{np} \omega_p^n; \\ \omega_u^0 &= \Lambda_{un}^0 \omega^l + \Lambda_{un}^{np} \omega_p^n; \\ \nabla \Lambda_{uv}^n + \Lambda_{uv}^n \omega_0^0 &= \Lambda_{uvi}^n \omega^l + \Lambda_{uv}^{np} \omega_p^n; \\ \Lambda_{uv}^n \omega_v^n + \omega_u^0 &= \Lambda_{un}^n \omega^l + \Lambda_{un}^{np} \omega_p^n (\omega_0^l \equiv \omega^l). \end{aligned} \quad (10)$$

Задание распределения Δ_m на M_{2n-1} эквивалентно задачку на M_{2n-1} поля m -пар $\{L_m, l_{n-m-1}\}$, $-u$ соответствия между прямыми в L_m , инцидентными A_0 (направлениями в L_m) и $(n-2)$ -плоскостями в l_{n-1} , инцидентными l_{n-m-1} .

Распределение Δ_m порождает на M_{2n-1} несколько новых распределений. Отметим те из них, которые используются при построении оснащений.

С распределением Δ_m ассоциируется поле $(m-1)$ -пар $\{L_{m-1}^*, l_{n-m}^*\}$, где

$$L_{m-1}^* = L_m \cap \sigma^n; \quad l_{n-m}^* = [A_0 l_{n-m-1}^*],$$

а также следующие четыре соответствия между направлениями в L_{m-1}^* и $(n-2)$ -плоскостями в l_{n-1} , инцидентными l_{n-m}^* :

$$\begin{aligned} [A_0, t^u A_u] & \begin{cases} \nearrow [\alpha^n, \Lambda_{uv}^n t^v \sigma^u] \\ \rightarrow [\alpha^n, \Lambda_{vu}^n t^v \alpha^u] \\ \rightarrow [\alpha^n, \Lambda_{(uv)}^n t^v \alpha^u] \\ \searrow [\sigma^n, \Lambda_{uv}^n t^v \alpha^u]. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, Δ_m порождает на M_{2m-1} четыре $(m-1)$ -распределения: $\Delta_{m-1}^* = \Delta_{m-1}^{*L}$ (подраспределение Δ_m), а также $\Delta_{m-1}^{*R}, \Delta_{m-1}^{*H}, \Delta_{m-1}^{*B}$ (использованы обозначения из [6]), которые задаются системами:

$$\omega^{\bar{u}} = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = \Lambda_{uv}^n \omega^v, \quad \omega^n = 0; \quad (12)$$

$$\omega^{\bar{u}} = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = \Lambda_{vu}^n \omega^v, \quad \omega^n = 0; \quad (13)$$

$$\omega^{\bar{u}} = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = \Lambda_{(uv)}^n \omega^v, \quad \omega^n = 0; \quad (14)$$

$$\omega^{\bar{u}} = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = 0, \quad \omega_{\bar{u}}^n = \Lambda_{[uv]}^n \omega^v, \quad \omega^n = 0. \quad (15)$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Оснащения распределения Δ_m полем гиперплоских элементов $\{N, \nu\}$ могут быть построены с использованием лишь компонент внутреннего геометрического объекта второго порядка распределения Δ_m .

Доказательство. Используя уравнения (10), их дифференциальные продолжения, получаем, что система величин:

$$\gamma_1 = \{\Lambda_{uv}^n, \Gamma_{0\alpha\beta}^{\bar{u}}, \Gamma_{u\alpha\beta}^n \Gamma_{u\alpha\beta}^n\},$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\alpha\beta}^{\bar{u}} &= \Lambda_{0\alpha\beta}^{\bar{u}} + \Lambda_{0\alpha}^{\bar{u}v} \Lambda_{v\beta}^n; \quad \Gamma_{u\alpha\beta}^n = \Lambda_{u\alpha\beta}^n + \Lambda_{u\alpha}^{nv} \Lambda_{v\beta}^n; \\ \Gamma_{u\alpha\beta}^n &= \Lambda_{u\alpha\beta}^n + \Lambda_{u\alpha}^{nv} \Lambda_{v\beta}^n \end{aligned} \quad (16)$$

образует самостоятельный объект, который является подобъектом фундаментального объекта первого порядка

$$\Gamma_1 = \{\Lambda_{uv}^n; \Lambda_{0\alpha l}^{\bar{u}}; \Lambda_{0\alpha}^{\bar{u}p}; \Lambda_{u\alpha l}^n, \Lambda_{u\alpha}^{np}; \Lambda_{u\alpha l}^n, \Lambda_{u\alpha}^{np}\}$$

распределения Δ_m . Согласно [3] γ_1 — внутренний геометрический объект первого порядка распределения Δ_n . Аналогично строится внутренний геометрический объект второго порядка распределения

$$\gamma_2 = \{\gamma_1, \Gamma_{0\alpha\beta\gamma}^{\bar{u}}, \Gamma_{u\alpha\beta\gamma}^n, \Gamma_{u\alpha\beta\gamma}^n\}.$$

Используя теперь лишь компоненты γ_1 и γ_2 , выберем точку N и гиперплоскость ν так, что

$$\begin{aligned} a_n^u &= -A_{nw} A^{wu}; \quad a_n^{\bar{u}} = 0, \\ a_n^0 &= -\frac{1}{m-1} (a_{nu}^u + a_n^v a_{nu}^u \Lambda_{vu}^n + a_n^{uv} \Lambda_{vu}^n); \\ b_u^0 &= \Lambda_{uv}^n a_n^v; \quad b_u^0 = 0; \\ b_n^0 &= -(a_n^u b_u^0 + a_n^0), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \Lambda_{uv}^n \Gamma_{u(\alpha}^{\bar{u}} \Gamma_{|\bar{u}| \beta)}^n; \quad A^{uw} A_{wv} = \delta_{uv}^v; \\ \Lambda_{uv}^w \Lambda_{uw}^v &= \Lambda_{uv}^w \Lambda_{uw}^v = \delta_{uv}^v; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\det \| A_{\alpha\beta} \| \neq 0; \quad A_{nn} - A_{vn} A_{nu} A^{uv} \neq 0,$$

причем

$$\nabla A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} (\omega_0^0 + \omega_n^n) = A_{\alpha\beta i} \omega^i + A_{\alpha\beta}^p \omega_p^n. \quad (19)$$

Коэффициенты в разложениях (19) находятся с использованием урав-

нений (10), (16), (17), (18) и их дифференциальных продолжений, то есть в терминах объекта второго порядка.

4. Найдем геометрический смысл построенного оснащения.

Для этого сначала укажем геометрическую характеристику порождаемого им поля 1-пар $\{L_1, l_{n-2}\}$, где

$$L_1 = [A_0 N]; \quad l_{n-2} = [\sigma^n v].$$

Рассмотрим линейные преобразования m -пары подпространств L_m и l_{n-m-1} в себя, известные из геометрии распределений на многообразии невырожденных нуль-пар [7].

Будем задавать 1-семейство гиперплоских элементов M_1 многообразия M_{2n-1} уравнениями:

$$\omega^t = t^i \theta, \quad \omega_p^n = t_p \theta. \quad (20)$$

Величины $\{t^i, t_p\}$ образуют геометрический объект.

Рассмотрим точку

$$X = x^0 A_0 + x^z A_z$$

плоскости L_m . Используя (1) и (20), находим

$$dX = \theta^0 A_0 + \theta^z A_z + (x^0 \bar{\omega}_0^u + x^z \bar{\omega}_z^u) A_{\bar{u}}$$

и точку

$$Y = y^{\bar{u}} A_{\bar{u}} \quad (y^{\bar{u}} = x^0 \bar{\omega}_0^{\bar{u}} + x^z \bar{\omega}_z^{\bar{u}}),$$

пересечения подпространств $[L_m TX(t^i, t_p)]$ и l_{n-m-1} . Находя затем

$$dY = \theta^{\bar{u}} A_{\bar{u}} + y^{\bar{v}} (\omega_v^0 A_0 + \omega_v^z A_z)$$

при условии (20), получаем точку

$$X^* = y^{\bar{u}} (\omega_{\bar{u}}^0 A_0 + \omega_{\bar{u}}^z A_z)$$

пересечения подпространств $[l_{n-m-1} TY(t^i, t_p)]$ и L_m . Здесь $\theta^0, \theta^z, \theta^{\bar{u}}$ — некоторые 1-формы, вид которых несуществен. Обозначая

$$\dot{X} = \dot{x}^0 A_0 + \dot{x}^z A_z,$$

получаем линейное преобразование L_m в себя, отвечающее заданному $M_1(X \rightarrow X^*)$, которое описывается формулами:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= x^0 \bar{\omega}_0^0 \omega_{\bar{u}}^0 + x^z \bar{\omega}_z^0 \omega_{\bar{u}}^0; \\ \dot{x}^z &= x^0 \bar{\omega}_0^z \omega_{\bar{u}}^z + x^z \bar{\omega}_z^z \omega_{\bar{u}}^z. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично получаем формулы

$$\dot{y}^{\bar{v}} = y^{\bar{u}} (\omega_{\bar{u}}^0 \omega_v^0 + \omega_{\bar{u}}^z \omega_v^z) \quad (22)$$

линейного преобразования l_{n-m-1} в себя:

$$Y = y^{\bar{u}} A_{\bar{u}} \rightarrow \dot{Y} = \dot{y}^{\bar{u}} A_{\bar{u}},$$

отвечающее тому же 1-семейству (20). Заметим, что матрицы преобразований (21), (22) имеют одинаковый след. Формулы (21) и (22) определяют преобразования W (в смысле [8]) подпространств L_m и l_{n-m-1} в себя, если след матриц преобразований обращается в нуль.

Таким образом, совокупность всех 1-семейств многообразия M_{2n-1} , вдоль которых линейные преобразования L_m и l_{n-m-1} в себя являются преобразованиями W , определяется уравнением

$$\bar{\omega}_0^0 \bar{\omega}_a^0 + \bar{\omega}_a^0 \bar{\omega}_a^0 = 0. \quad (23)$$

Используя уравнения (10) и (20), представим (23) в виде

$$a_{(ij)} t^i t^j + c_i^p t^i t_p + b^{(pq)} t_p t_q = 0, \quad (23')$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_j^{\bar{u}} \Lambda_{unl}^n + \Lambda_n^{uv} \Lambda_{0ul}^{\bar{u}} \Lambda_{uvj}^n; \\ c_j^p &= \delta_j^{\bar{u}} \Lambda_{un}^{np} + \Lambda_n^{uv} (\Lambda_{0uj}^{\bar{u}} \Lambda_{uv}^{np} + \Lambda_{0u}^{\bar{u}p} \Lambda_{uv}^n) - \delta_u^p \Lambda_{0nj}^{\bar{u}}; \\ b^{pq} &= \Lambda_n^{uv} \Lambda_{0u}^{\bar{u}p} \Lambda_{uv}^{nq} - \delta_u^q \Lambda_{0n}^{\bar{u}p}. \end{aligned}$$

Рассмотрим те M_1 из совокупности, определяемой уравнением (23'), которые являются интегральными 1-семействами распределения Δ_m [2]. Тогда в (20) надо положить в силу системы (9):

$$\bar{t}^u = 0; \bar{t}_u = 0; t_u = \Lambda_{uv}^n t^v; (t^v = \Lambda_n^{uv} t_u). \quad (24)$$

Из геометрической характеристики распределения Δ_m вытекает, что интегральному 1-семейству распределения Δ_m соответствует 1-пара подпространств

$$[A_0, t^u A_u + t^n A_n] = [A_0 dA_0]; \quad (25)$$

$$[\alpha^n, t_u \alpha^u + t^n \alpha^0] = [\alpha^n d\sigma^n], \quad (26)$$

связанных соответствием по формулам из (24).

Координаты $x^0, x^u, x^{\bar{u}}, x^n$ точек тех прямых (25) и координаты $x_0, x_u, x_{\bar{u}}, x_n$ тех гиперплоскостей, инцидентных $(n-2)$ -плоскостям (26), которые отвечают интегральным 1-семействам распределения Δ_m из совокупности (23'), удовлетворяют в P_n уравнениям соответственно поверхности второго порядка

$$x^{\bar{u}} = 0, \quad A_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \quad (27)$$

и поверхности второго класса

$$x^{\bar{u}} = 0, \quad A_{uv} \Lambda_n^{wu} \Lambda_n^{wv} x_w x_u + 2 A_{un} \Lambda_n^{wu} x_u x_0 + A_{nn} (x_0)^2 = 0. \quad (28)$$

В уравнениях (27), (28), которые получены из (23') с учетом (16), (24), $A_{\alpha\beta}$ имеют вид (18). В силу (18), (27) имеет место следующее утверждение.

Прямая $L_1 = [A_0, A_n + a_n^u A_u]$ полярно сопряжена L_{m-1}^* относительно коуса (27).

Аналогично проверяется утверждение двойственного характера:

$(n-2)$ -плоскость $l_{n-2} = [\sigma^n, \alpha^0 + b_u^0 \alpha^u]$, соответствующая L_1 в извес-
тном проективите Бомпьяни—Пантази [9], полярно сопряжена l_{n-m}^* относительно поверхности (28).

Имея в виду выражения величин a_n^p, b_p^0 по формулам (17)—(18), получаем следующее утверждение.

Поле 1-пар $\{L_1, l_{n-2}\}$, внутренним образом связанное с распределением Δ_m , определяется с использованием компонент внутреннего геометрического объекта первого порядка этого распределения.

Укажем далее геометрическую характеристику точки N на прямой L_1 и гиперплоскости v , инцидентной l_{n-2} , оснащающего гиперплоского элемента $\{N, v\}$.

Построенная выше 1-пара подпространств порождает пару:

$$L_{m-2} = l_{n-2} \cap L_{m-1}^*; \quad l_{n-m+1} = [L_1, l_{n-m}^*],$$

где

$$L_{m-2} = [\alpha^n, \alpha^0 + b_u^0 \alpha^u, \alpha^{\bar{u}}]; \quad l_{n-m+1} = [A_0, A_n + a_n^u A_u, A_{\bar{u}}].$$

Находя обычным образом [5] фокусы

$$F = x^0 A_0 + \bar{x}^n (A_n + a_n^u A_u) + x^{\bar{u}} A_{\bar{u}}$$

плоскости l_{n-m+1} , отвечающие интегральным 1-семействам распределения Δ_m , получаем уравнения фокусной поверхности в l_{n-m+1} :

$$x^v - a_n^v x^n = 0; \quad \det \| x^0 \delta_w^u + \bar{x}^n A_{nw}^u + x^{\bar{u}} \Lambda_n^{uv} \Lambda_{uvn}^n \| = 0, \quad (29)$$

где

$$A_{nw}^u = a_{nw}^u + a_n^u a_n^v \Lambda_{vw}^n + a_n^{uv} \Lambda_{vw}^n. \quad (30)$$

Гармоническая поляра [10] точки A_0 относительно поверхности (30) пересекает L_1 в точке

$$N = A_n + a_n^u A_u + a_n^0 A_0, \quad (31)$$

где a_n^u, a_n^0 выражаются по формулам (17), (18).

Таким образом, оснащающий гиперплоский элемент $\{N, \nu\}$ из точки N и гиперплоскости $\nu = [Nl_{n-2}]$ полностью геометрически охарактеризован.

Используя (17), (18), представим точку N в виде

$$N = \bar{A}_n + \bar{a}_n^{uv} \Lambda_{uv}^n A_0, \quad (32)$$

где

$$\bar{A}_n = A_n + a_n^u A_u - \frac{1}{m-1} a_{nu}^u A_0, \quad \bar{a}_n^{uv} = -\frac{1}{m-1} (a_n^u a_n^v + a_n^{uv}). \quad (33)$$

Замечание 1. Если в геометрических построениях точки N использовать вместо Δ_{m-1}^* одно из $(m-1)$ -распределений $\Delta_{m-1}^R, \Delta_{m-1}^P, \Delta_{m-1}^B$, то получаются три другие (в общем случае) точки на прямой L_1 , которые обозначим $N^R, N^P, N^B, (N^x \equiv N)$. Выражения для них получаются из (32) после замены

$$\Lambda_{uv}^n \rightarrow \Lambda_{vu}^n; \quad \Lambda_{uv}^n \rightarrow \Lambda_{(uv)}^n; \quad \Lambda_{uv}^n \rightarrow \Lambda_{[uv]}^n.$$

Замечание 2. Построения, двойственные проведенным при нахождении точки N , дадут еще четыре гиперплоских элемента, отличных от предыдущих в общем случае.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Используя порождаемые Δ_m четыре $(m-1)$ -распределения, а также двойственность самому себе элемента распределения, можно построить восемь полей гиперплоских элементов, оснащающих распределение Δ_m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Лумисте Ю. Г. Распределения на однородных пространствах. — Проблемы геометрии, 1977, т. 8, с. 5—24.
2. Онищук Н. М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного центраффинного пространства ($m < n$). — Геометр. сб., 18. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 59—71.
3. Кайзер В. В., Кругляков Л. З. О касательных подпространствах и характеристиках высших порядков пфаффовых многообразий многомерных плоскостей. — Геометр. сб., 14. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1974, с. 47—81.

4. Бочилло Г. П. О многообразиях конусов в n -мерном проективном пространстве. — Геометр. сб., 7. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1968, с. 55—59.
 5. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия: Учебное пособие. — Калинин: КГУ, 1977. — 84 с.
 6. Кайзер В. В. Расширения, сужения и сопряженные направления дифференцируемых распределений в многомерных проективных пространствах. — Геометр. сб., 15. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975, с. 20—49.
 7. Ивлев Е. Т., Кондакова Э. М. К многомерной проективно-дифференциальной геометрии неголономных многообразий невырожденных нуль-пар. — Тр./СФТИ. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973, вып. 64, с. 232—262.
 8. Ивлев Е. Т., Исабеков М. Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. — Матер. 3-й научной конф. по матем. и мех. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973, т. 1, с. 50—52.
 9. Mihailescu T. Geometrie diferencială proiectivă București: Edd RPR, 1958. — 495 p.
 10. Casanova G. La notion de pôle harmonique. — Rev. math. spec., 1955, v. 65, № 6, p. 437—446.
-

Е. А. ГРИШАНОВ, Л. З. КРУГЛЯКОВ

О КОМПЛЕКСЕ K_2 ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ P_5

1. Комплексом K_2 прямых в проективном 5-пространстве P_5 называется [1] 6-параметрическое семейство l (6) прямых l . Все многообразие прямых в пространстве P_5 является восьмимерным, т. е. изучаемый комплекс K_2 имеет коразмерность два. Однако он исключен из рассмотрения в общей теории комплексов K_{n-3} коразмерности два в n -пространстве [2].

В данной работе рассматриваются комплексы K_2 , не обладающие ассоциированными плоскостями [1].

2. Отнесем комплекс K_2 к подвижному реперу первого порядка, построенному в [1]. Тогда основные соотношения [3] принимают вид

$$\omega_0^2 + \omega_1^4 = 0; \quad \omega_0^3 + \omega_1^5 = 0, \quad (1)$$

где ω_i^p ($i=0,1$; $p=2,3,4,5$) — главные формы из дериационных формул:

$$dA_i = \omega_i^K A_K (I, K=0,1, \dots, 5), \quad (2)$$

причем ω_i^K удовлетворяют уравнениям структуры и условию эквивариантности [3], а формы

$$\omega_0^p = \theta^{p-1}, \quad \omega_1^2 = \theta^5, \quad \omega_1^3 = \theta^6 \quad (3)$$

выбраны за базисные.

Через каждую точку $X = A_0 + \rho A_1$ прямой $l = A_0 A_1$ проходит 2-конус $K(X)$ прямых комплекса K_2 .

Дифференциальные уравнения этого конуса имеют вид (1) и

$$d\rho + \omega_0^1 + \rho(\omega_1^1 - \omega_0^0) - \rho^2 \omega_1^0 = 0; \quad (4)$$

$$\theta^1 + \rho \theta^5 = 0; \quad \theta^2 + \rho \theta^6 = 0;$$

$$\theta^3 - \rho \theta^1 = 0; \quad \theta^4 - \rho \theta^2 = 0. \quad (5)$$

Заметим, что подсистема (5) задает совокупность торсов $l(\Psi_2^X)$, для которых точка X является фокусом.

Касательное подпространство к конусу $K(X)$ для прямой l является 3-плоскостью $l_3(X)$. Таким образом, на прямой l возникает отображение $X \rightarrow l_3(X)$, которое называется основным соответствием комплекса [1].

Заметим, что плоскость $l_3(X)$ является касательным подпространством $Tl(\Psi_2^X)$ и имеет вид [1]

$$l_3(X) = (l, A_2 + \rho A_4, A_3 + \rho A_5). \quad (6)$$

Продолжение [3] системы (1) дает

$$\begin{aligned} \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4 &= \Lambda_{1x}^0 \theta^x; \\ \omega_5^4 - \omega_3^2 &= \Lambda_{2x}^0 \theta^x; \\ \omega_1^0 - \omega_4^2 &= \Lambda_{3x}^0 \theta^x; \\ -\omega_5^2 &= \Lambda_{4x}^0 \theta^x; \\ \omega_0^1 - \omega_2^4 &= \Lambda_{5x}^0 \theta^x; \\ -\omega_3^4 &= \Lambda_{6x}^0 \theta^x; \\ \omega_4^5 - \omega_2^3 &= \Lambda_{1x}^1 \theta^x; \\ \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_5^5 &= \Lambda_{2x}^1 \theta^x; \\ -\omega_4^3 &= \Lambda_{3x}^1 \theta^x; \\ \omega_1^0 - \omega_5^3 &= \Lambda_{4x}^1 \theta^x; \\ -\omega_2^5 &= \Lambda_{5x}^1 \theta^x; \\ \omega_0^1 - \omega_3^5 &= \Lambda_{6x}^1 \theta^x, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Lambda_{\mu x}^i = \Lambda_{ix}^i (i=0,1; \mu, x=1,2,\dots,6).$$

3. Найдем инвариантные точки на прямой l , являющиеся некоторым обобщением инфлекционных центров прямой комплекса 3-пространства P_3 [3].

Пусть $k(X)$ — некоторый подконус конуса $K(X)$, т. е. 1-подсемейство прямых комплекса K_2 , проходящих через точку X .

Определение. Точку X прямой l комплекса K_2 в P_5 назовем инфлекционным центром относительно подконуса $k(X)$, если плоскость $l_3(X)$ имеет касание второго порядка вдоль образующей l подконуса $k(X)$. Сам подконус будем также называть инфлекционным.

Теорема. На прямой l комплекса K_2 в общем случае имеется не более 16 инфлекционных центров относительно соответствующих подконусов.

Доказательство. Будем искать подконус $k(X)$ на конусе $K(X)$, определяя его уравнениями (1), (4), (5) и

$$\theta^3 : \theta^4 = \theta^5 : \theta^6 = \lambda_5 : \lambda_6 = \lambda, \quad (8)$$

где λ искомая функция. Касательная плоскость для прямой l подконуса $k(X)$ имеет вид

$$l_2(X) = (l, \lambda[A_2 + \rho A_4] + A_3 + \rho A_5),$$

а соприкасающаяся плоскость второго порядка — вид

$$(l_2(X), \omega^i B_i + (\lambda C_4 + E_4)A_4 + (\lambda C_5 + E_5)A_5),$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= A_2 + \rho A_4; \quad B_1 = A_3 + \rho A_5; \\ C_4 &= [\Lambda_{33}^0 \rho^4 + 2\Lambda_{13}^0 \rho^3 + (\Lambda_{11}^0 - 2\Lambda_{35}^0) \rho^2 - 2\Lambda_{15}^0 \rho + \\ &+ \Lambda_{55}^0] \lambda + [\Lambda_{31}^0 \rho^4 + (\Lambda_{14}^0 + \Lambda_{23}^0) \rho^3 + (\Lambda_{12}^0 - \Lambda_{45}^0 - \\ &- \Lambda_{36}^0) \rho^2 - (\Lambda_{16}^0 + \Lambda_{25}^0) \rho + \Lambda_{56}^0]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$E_4 = [\Lambda_{34}^0 \rho^4 + (\Lambda_{14}^0 + \Lambda_{23}^0) \rho^3 + (\Lambda_{12}^0 - \Lambda_{45}^0 - \Lambda_{36}^0) \rho^2 - \\ - (\Lambda_{16}^0 + \Lambda_{25}^0) \rho + \Lambda_{56}^0] \lambda + [\Lambda_{44}^0 \rho^4 + 2 \Lambda_{24}^0 \rho^3 + \\ + (\Lambda_{22}^0 - 2 \Lambda_{46}^0) \rho^2 - 2 \Lambda_{26}^0 \rho + \Lambda_{66}^0]; \quad (10)$$

$$C_5 = [\Lambda_{33}^1 \rho^4 + 2 \Lambda_{13}^1 \rho^3 + (\Lambda_{11}^1 - 2 \Lambda_{35}^1) \rho^2 - 2 \Lambda_{15}^1 \rho + \\ + \Lambda_{55}^1] \lambda + [\Lambda_{34}^1 \rho^4 + (\Lambda_{14}^1 + \Lambda_{23}^1) \rho^3 + (\Lambda_{12}^1 - \Lambda_{45}^1 - \\ - \Lambda_{36}^1) \rho^2 - (\Lambda_{16}^1 + \Lambda_{25}^1) \rho + \Lambda_{56}^1];$$

$$E_5 = [\Lambda_{34}^1 \rho^4 + (\Lambda_{14}^1 + \Lambda_{23}^1) \rho^3 + (\Lambda_{12}^1 - \Lambda_{45}^1 - \Lambda_{36}^1) \rho^2 - \\ - (\Lambda_{16}^1 + \Lambda_{25}^1) \rho + \Lambda_{56}^1] \lambda + [\Lambda_{44}^1 \rho^4 + 2 \Lambda_{24}^1 \rho^3 + \\ + (\Lambda_{22}^1 - 2 \Lambda_{46}^1) \rho^2 - 2 \Lambda_{26}^1 \rho + \Lambda_{66}^1].$$

Эта 3-плоскость в силу (6) и (9) совпадает с $l_3(X)$, если

$$\begin{aligned} \lambda C_4 + E_4 &= 0; \\ \lambda C_5 + E_5 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В развернутом виде система (11) примет вид

$$\begin{aligned} &[\Lambda_{33}^0 \rho^4 + 2 \Lambda_{13}^0 \rho^3 + (\Lambda_{11}^0 - 2 \Lambda_{35}^0) \rho^2 - 2 \Lambda_{15}^0 \rho + \Lambda_{55}^0] \lambda^2 + \\ &+ 2[\Lambda_{34}^0 \rho^4 + (\Lambda_{14}^0 + \Lambda_{23}^0) \rho^3 + (\Lambda_{12}^0 - \Lambda_{45}^0 - \Lambda_{36}^0) \rho^2 - (\Lambda_{16}^0 + \Lambda_{25}^0) \rho + \Lambda_{56}^0] \lambda + \\ &+ [\Lambda_{44}^0 \rho^4 + 2 \Lambda_{24}^0 \rho^3 + (\Lambda_{22}^0 - 2 \Lambda_{46}^0) \rho^2 - 2 \Lambda_{26}^0 \rho + \Lambda_{66}^0] = 0; \quad (12) \\ &[\Lambda_{33}^1 \rho^4 + 2 \Lambda_{13}^1 \rho^3 + (\Lambda_{11}^1 - 2 \Lambda_{35}^1) \rho^2 - 2 \Lambda_{15}^1 \rho + \Lambda_{55}^1] \lambda^2 + \\ &+ 2[\Lambda_{34}^1 \rho^4 + (\Lambda_{14}^1 + \Lambda_{23}^1) \rho^3 + (\Lambda_{12}^1 - \Lambda_{45}^1 - \Lambda_{36}^1) \rho^2 - (\Lambda_{16}^1 + \Lambda_{25}^1) \rho + \Lambda_{56}^1] \lambda + \\ &+ [\Lambda_{44}^1 \rho^4 + 2 \Lambda_{24}^1 \rho^3 + (\Lambda_{22}^1 - 2 \Lambda_{46}^1) \rho^2 - 2 \Lambda_{26}^1 \rho + \Lambda_{66}^1] = 0. \end{aligned}$$

Обращение результата этой системы в нуль, т. е. условие совместности относительно λ , дает уравнение 16-й степени относительно ρ .

4. Построим оснащение и канонический репер для комплекса K_2 . Поместим вершины A_0 и A_1 в инфлекционные центры прямой l и зададим соответствующие им инфлекционные подконусы системами:

$$\begin{aligned} k(A_0) : \theta^1 = \theta^2 = \theta^3 = \theta^4 = \theta^5 = 0; \\ k(A_1) : \theta^1 = \theta^2 = \theta^4 = \theta^5 = \theta^6 = 0. \end{aligned}$$

Тогда из (12) получаем

$$\Lambda_{33}^i = \Lambda_{66}^i = 0. \quad (13)$$

Все 1-подсемейства комплекса K_2 , которые касаются плоскости $l_3(A_i)$ в точке A_i , являются интегральными для распределения Δ_4^i ($i=0,1$):

$$\begin{aligned} \Delta_4^0 : \theta^3 = \theta^4 = 0; \\ \Delta_4^1 : \theta^5 = \theta^6 = 0. \end{aligned}$$

Каждая из гиперплоскостей $\Gamma_i = T A_i(\Psi_4^i)$, где $i, j=0,1$; $i \neq j$, а $T A_i(\Psi_4^i)$ — линейная оболочка касательных к интегральным кривым распределения Δ_4^i , описываемым точкой A_i , не содержит прямой l . Поэтому пересечение $l_3^* = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ не содержит прямой l , а поле 3-плоскостей l_3^* (6) является оснащением Картана. Поместим в плоскость l_3^* вершины

A_p подвижного репера. Тогда ставшие после фиксации вершин A_i главными, формы ω_0^1 и ω_1^0 удовлетворяют еще условиям:

$$\omega_0^1 = 0 \pmod{\theta^5, \theta^6}; \quad \omega_1^0 = 0 \pmod{\theta^3, \theta^4}. \quad (14)$$

С помощью алгоритма Картана [3] легко показать, что соотношения (13) и (14) приводят к фиксации всех оставшихся вторичных параметров, кроме тех, от которых зависит нормирование, т. е. построено с точностью до нормирования канонический репер комплекса K_2 .

Выясним геометрическую характеристику фиксаций (13) и (14). Касательная плоскость к подконусу $k(A_0)$ в точках l суть (l, A_3) , а к подконусу $k(A_1)$ — (l, A_4) . Эти плоскости пересекают 3-плоскость l_3^* в точках A_3 и A_4 .

Однопараметрическое семейство гиперплоскостей $(l_3(X), A_3) = (l, A_2 + \rho A_4, A_3, A_5)$ имеет характеристику в точке $X: x^2 = x^4 = 0$. Пересечение этой характеристики с пересечением плоскостей $l_3(A_1)$ и l_3^* есть точка A_5 . Аналогично, рассматривая пересечение характеристики однопараметрического семейства гиперплоскостей $(l_3(X), A_4) = (l, A_2, A_4, A_3 + \rho A_5)$ с пересечением плоскостей $l_3(A_0)$ и l_3^* , получаем вершину A_2 .

5. Рассмотрим один класс комплексов K_2 в P_5 в репере, построенном в п. 2.

Определение. Будем называть точку X прямой l комплекса K_2 в P_5 инфлекционным центром, если она является инфлекционным центром относительно любого подконуса $k(X) \subset K(X)$.

Из уравнений (12) следует, что инфлекционных центров на прямой может быть не более четырех.

Рассмотрим комплекс, на прямой которого имеется один инфлекционный центр. Поместим вершину A_0 в этот центр. Тогда из (12) следует

$$\Lambda_{55}^i = \Lambda_{56}^i = \Lambda_{66}^i = 0. \quad (15)$$

Рассматривая (15) совместно с уравнениями первого и второго продолжений системы (1), находим

$$\omega_0^1 = a_1 \omega_0^2 + a_2 \omega_0^3 + a_3 \omega_0^4 + a_4 \omega_0^5. \quad (16)$$

Из формул (2) и (16) получаем

$$\begin{aligned} dA_0 = & \omega_0^0 A_0 + \omega_0^2 (a_1 A_1 + A_2) + \omega_0^3 (a_2 A_1 + A_3) + \\ & + \omega_0^4 (a_3 A_1 + A_4) + \omega_0^5 (a_4 A_1 + A_5). \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, инфлекционный центр A_0 описывает гиперповерхность. Поместим вершины A_2, A_3, A_4 и A_5 в касательную плоскость к этой гиперповерхности. Тогда из (7) и (16) получаем

$$\begin{aligned} \omega_0^1 &= 0; \\ \omega_2^4 &= -\Lambda_{5\nu}^0 \theta^\nu; \quad \omega_2^5 = -\Lambda_{5\nu}^1 \theta^\nu; \\ \omega_3^4 &= -\Lambda_{6\nu}^0 \theta^\nu; \quad \omega_3^5 = -\Lambda_{6\nu}^1 \theta^\nu \end{aligned} \quad (18)$$

$$(\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Из (17), (18) и (3) следует, что при неподвижной точке 3-плоскость $(A_0 A_1 A_2 A_3)$ остается неподвижной; так как в этом случае $d(A_0 A_1) = (\omega_0^0 + \omega_1^1)(A_0 A_1) + \omega_1^2(A_0 A_2) + \omega_1^3(A_0 A_3)$, то прямая описывает в этой 3-плоскости полную связь.

Таким образом, рассматриваемый комплекс распадается в четырехпараметрическое семейство связок прямых, центры которых описывают гиперповерхность, а прямые лежат в 3-плоскостях, не касающихся этой гиперповерхности.

Покажем, что выбор гиперповерхности и связанного с ней поля 3-плоскостей произволен.

Для этого рассмотрим произвольную гиперповерхность и в каждой ее точке зададим произвольную 3-плоскость, не касающуюся этой гиперповерхности. Присоединим к гиперповерхности подвижной репер так, чтобы вершина A_0 была ее текущей точкой, вершины A_2, A_3, A_4 и A_5 лежали в касательной гиперплоскости, а вершины A_1, A_2, A_3 — в заданной 3-плоскости поля; за базисные формы гиперповерхности выберем формы:

$$\theta^v = \omega_0^{v+1} (v=1, 2, 3, 4).$$

Тогда

$$\omega_0^1 = 0 \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1^4 &= a_1^4, \theta^v; \omega_2^4 = a_2^4, \theta^v; \omega_3^4 = a_3^4, \theta^v; \\ \omega_1^5 &= a_1^5, \theta^v; \omega_2^5 = a_2^5, \theta^v; \omega_3^5 = a_3^5, \theta^v. \end{aligned} \quad (20)$$

Образуем комплекс, проводя через каждую точку A_0 гиперповерхности в 3-плоскости $(A_0 A_1 A_2 A_3)$ полную связку прямых $(A_0 A_1)$. За параметры связки возьмем формы $\theta^3 = \omega_1^2$ и $\theta^6 = \omega_1^3$. Тогда уравнения построенного комплекса $I(6)$ будут следующими:

$$\omega_1^4 = a_1^4, \theta^v; \omega_1^5 = a_1^5, \theta^v. \quad (21)$$

Требуя, чтобы точке A_1 соответствовала 3-плоскость $(A_0 A_1 A_4 A_5)$, а также чтобы

$$Tl(\Psi_1^1) = (l, A_4); Tl(\Psi_1^2) = (l, A_5),$$

где уравнения подсемейств

$$l(\Psi_1^1): \theta^2 = \theta^3 = \dots = \theta^6 = 0;$$

$$l(\Psi_1^2): \theta^1 = \theta^3 = \dots = \theta^6 = 0,$$

мы приведем соотношения (21) к виду

$$\begin{aligned} \omega_1^4 + \omega_0^2 &= 0; \\ \omega_1^5 + \omega_0^3 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая продолжение системы (22) с (19) и (20), заключаем, что точки A_0 являются инфлекционными центрами и построенного комплекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Л. З., Приходько В. А., Романькова Т. П. О некоторых свойствах линейчатых комплексов в многомерном проективном пространстве.— Геометр. сб., 19. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 42—47.
2. Гербсоммер Л. Э., Кругляков Л. З. О комплексах K_n -з прямых в пространстве P_n ($n \geq 6$).— Геометр. сб., 22. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982, с. 35—45.
3. Щербakov Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973.— 236 с.

Л. З. КРУГЛЯКОВ, С. А. ЛАКТИОНОВ

ДОПУСТИМЫЕ КОМПЛЕКСЫ K_0 ПЛОСКОСТЕЙ В P_5

Комплексом K_0 плоскостей (2-плоскостей) в проективном 5-пространстве P_5 называется [1, 2] 6-семейство L (6) плоскостей L . Эти семейства были введены С. Е. Карапетяном [3], как конгруэнции класса один, и Г. И. Орленко [4], как гиперконгруэнции.

В данной работе изучается строение классов комплексов K_0 , у которых один из рангов объемной матрицы основных соотношений [5, 6] понижается. Эти комплексы обладают свойствами, аналогичными свойствам допустимых комплексов [1, 2], и поэтому также называются допустимыми. Применяется терминология из [5].

1. Присоединим к комплексу K_0 подвижной репер $\{A_I\}$ ($I, J=0, \dots, 5$); деривационные формулы которого $dA_I = \omega_I^J A_J$, где формы ω_I^J удовлетворяют известным [6] условиям. С репером $\{A_I\}$ ассоциируется тангенциальный репер

$$\Gamma^J = (-1)^J (A_0, \dots, A_{J-1}, A_{J+1}, \dots, A_5).$$

Поместив вершины A_I в текущую плоскость L комплекса K_0 , запишем для него три основных соотношения:

$$\Lambda_p^{\alpha i} \omega_i^p = 0, (\alpha=1, 2, 3; i=0, 1, 2; p=3, 4, 5). \quad (1)$$

Система

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0 \quad (2)$$

задает отображение $\varphi_1: L_1 \rightarrow l_3$ для тех прямых $a_i x^i = 0, x^p = 0$, которые являются характеристиками торсов [5] и находятся из условия: ранг

$$R \parallel \Lambda_p^{\alpha i} a_i \parallel = 2, \quad (3)$$

l_3 — касательное подпространство соответствующего торса. Эта же система задает еще отображение $\varphi_2: l_3 \rightarrow L_1$, для тех 3-плоскостей $(L, x^p A_p)$, которые являются касательными подпространствами торсов и находятся из условия: ранг

$$R \parallel \Lambda_p^{\alpha i} x^p \parallel = 2, \quad (4)$$

L_1 — характеристики этих торсов.

С объемной матрицей $\parallel \Lambda_p^{\alpha i} \parallel$ ассоциируются три прямоугольные матрицы, ранги которых обозначим R_α, R_i и R_p , где нижний индекс означает номера столбцов соответствующей матрицы, а остальные индексы пробегают номера строк. Соотношения (1) всегда независимы и

Допустимые комплексы K_0 плоскостей в P_5

поэтому ранг $R_i \parallel \Lambda_p^{at} \parallel = 3$. Далее рассмотрим классы комплексов K_0 , для которых один из рангов R_p (R_i) понижается, и выясним строение соответствующих комплексов.

2. Пусть ранг

$$R_p \parallel \Lambda_p^{at} \parallel = 2. \quad (5)$$

Тогда из системы (2) следует, что отображение φ_1 определено почти для всех прямых и постоянно. Исключения составляют те прямые, для которых ранг

$$R \parallel \Lambda_p^{at} a_i \parallel = 1. \quad (6)$$

В силу формулы в [7, с. 33] таких прямых будет три. Общим случаем комплекса (5) назовем такой, когда все эти прямые различны. Тогда ранг $R_i \parallel \Lambda_p^{at} \parallel = 3$.

В работах [1, 2] допустимыми комплексами K_b ($b=1, 2$) плоскостей L называются такие, для которых отображение φ_1 определено почти для всех прямых из L и постоянно. Так как выделенный класс удовлетворяет таким же условиям, то естественно комплексы этого класса называть допустимыми.

Теорема 1. Допустимый комплекс K_0 плоскостей в P_5 представляет собой в общем случае грасманово расслоение произвольного 3-семейства 3-плоскостей.

Доказательство. Поместим вершину A_5 в плоскость $l_3 = \varphi_1(L_1)$. Каждой прямой, определяемой из условия (6), соответствует в силу (2) некоторая гиперплоскость. Потребуем еще, чтобы этими прямыми были (A_0, A_1) , (A_0, A_2) и (A_1, A_2) , а соответствующими гиперплоскостями Γ^4 , $\Gamma^3 - \Gamma^4$, Γ^3 . Тогда уравнения (1) примут вид

$$\omega_0^3 = 0; \quad \omega_1^3 = \omega_1^4; \quad \omega_2^4 = 0 \quad (7)$$

и за базисные формы можно выбрать такие:

$$\omega_0^4 = \theta^1; \quad \omega_0^5 = \theta^2; \quad \omega_1^4 = \theta^3; \quad \omega_1^5 = \theta^4; \quad \omega_2^3 = \theta^5; \quad \omega_2^5 = \theta^6. \quad (8)$$

Из продолжения [6] соотношений (7), в частности, получим

$$\omega_3^3 = a_{5v}^3, \theta^v; \quad \omega_3^4 = a_{5v}^4, \theta^v \quad (v=1, 3, 5). \quad (9)$$

Из (7) — (9) следует, что плоскость $l_3 = (L, A_5)$ описывает на комплексе K_0 только 3-семейство.

Рассмотрим теперь произвольное 3-семейство 3-плоскостей l_3 (3). Поместив вершины A_i и A_5 в его текущую 3-плоскость, записывая основные соотношения этого семейства и рассматривая его грасманово расслоение 2-плоскостями, убеждаемся, что для этого расслоения имеет место условие (5).

3. Пусть ранг

$$R_p = \parallel \Lambda_p^{at} \parallel = 1.$$

Тогда $R_i \parallel \Lambda_p^{at} \parallel = 3$ и система (2) каждой прямой $L_1 \subset L$ сопоставляет одну и ту же гиперплоскость. Такой комплекс K_0 назовем вырожденным допустимым. Совместив с этой гиперплоскостью гиперплоскость Γ^5 , приведем соотношения (1) к виду

$$\omega_0^5 = 0; \quad \omega_1^5 = 0; \quad \omega_2^5 = 0.$$

Продолжение последних дает

$$\omega_3^5 = 0; \quad \omega_4^5 = 0.$$

Таким образом, получается

Теорема 2. Вырожденный допустимый комплекс K_0 плоскостей представляет собой грассманоно многообразие плоскостей некоторой гиперплоскости.

Заметим, что через каждую прямую такого комплекса проходит $L(\Psi_2)$ торсов с касательным подпространством Γ^5 .

4. Двойственным образом вводится дуально допустимый комплекс, для него ранг

$$R_i \parallel \Lambda_p^{ai} \parallel = 2,$$

и вырожденный дуально допустимый комплекс, для него ранг

$$R_i \parallel \Lambda_p^{ai} \parallel = 1$$

(тогда ранг $R_p \parallel \Lambda_p^{ai} \parallel = 3$). Их строение выясняют следующие теоремы.

Теорема 3. Дуально допустимый комплекс K_0 плоскостей в P_5 представляет собой в общем случае совокупность полных связок плоскостей, осями которых являются прямые произвольного 3-семейства.

Теорема 4. Вырожденный дуально допустимый комплекс K_0 представляет собой совокупность всех плоскостей, проходящих через неподвижную точку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гербсоммер Л. Э., Кругляков Л. З., Мизин А. Г. О комплексах многомерных плоскостей.—ДАН, 1980, т. 255, № 5, с. 1039—1042.
2. Кругляков Л. З. О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве. — Функци. анализ, 1982, т. 16, вып. 3, с. 66—67.
3. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей.—Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат., 1963, т. 16, № 5, с. 3—22.
4. Орленко Г. И. К метрической теории семейств прямых и плоскостей в многомерном евклидовом пространстве.—Тр./Ин-т инж. гражд. авиации. Рига, 1966, вып. 97, с. 3—37.
5. Кругляков Л. З. К дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей в проективном пространстве. I.—Сиб. мат. ж., 1976, т. XVII, № 6, с. 1295—1307.
6. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.—Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973.—236 с.
7. Room T. G. The geometry of determinantal loci, Cambridge, 1938.—483 p.

В. А. ПЕТИН

КАСАТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ЛИНЕЙЧАТОГО КОМПЛЕКСА

Изучение геометрических образов обычно начинается с отыскания более простых образов, касающихся данных. В теории комплексов такими являются линейные комплексы. Уже первыми исследователями [1] было обнаружено, что в каждом луче комплекса имеется пучок касательных линейных комплексов, из которых были аналитически выделены и геометрически охарактеризованы сначала один линейный комплекс [1, 2, 3, 4] — комплекс Коровина — Гриневичуса [5], а затем еще три — главные линейные комплексы [6]. Геометрические характеристики других линейных комплексов не приводились, хотя они и исследовались в [7, 8].

В статье отмечены новые свойства указанных выше линейных комплексов и охарактеризованы некоторые другие линейные комплексы. Установлено проективное отображение луча комплекса на пучок касательных линейных комплексов, в котором введена структура проективной прямой. Большинство приведенных здесь результатов было сообщено в [9, 10]. Почти все обозначения и названия заимствованы из [6].

§ 1. Предварительные сведения из теории комплексов

Сопоставим с каждым лучом A_1A_2 не специального линейчатого комплекса, заданного в некоторой области проективного пространства, нормальный тетраэдр A_1, A_2, A_3, A_4 , компоненты инфинитезимального смещения которого связаны соотношением

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \quad (1.1)$$

Будем считать формы ω_2^3, ω_1^4 и ω_2^4 базисными. Дифференцируя (1.1) внешним образом и применяя к полученному выражению лемму Картана, приходим к равенствам:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p \omega_2^3 + \alpha \omega_1^4 + \beta \omega_2^4; \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha \omega_2^3 + q \omega_1^4 - \gamma \omega_2^4; \\ -\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 &= \beta \omega_2^3 - \gamma \omega_1^4 + r \omega_2^4. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Инфлекссионные центры $C = A_1 + tA_2$ луча комплекса определяются из уравнения

$$qt^4 + 2\gamma t^3 - (2\alpha - r)t^2 + 2\beta t + p = 0. \quad (1.3)$$

Главные поверхности комплекса находятся из системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}(\alpha-s)\omega_2^3+q\omega_1^4-\gamma\omega_2^4&=0; \\ p\omega_2^3+(\alpha-s)\omega_1^4+\beta\omega_2^4&=0; \\ \beta\omega_2^3-\gamma\omega_1^4+(r-2s)\omega_2^4&=0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где s определяется из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}\alpha-s & q & -\gamma \\ p & \alpha-s & \beta \\ \beta & -\gamma & r-2s\end{vmatrix}=0.\tag{1.5}$$

Присоединим теперь к каждому лучу комплекса все нормальные тетраэдры, то есть будем считать компоненты инфинитезимального смещения тетраэдра зависящими от дифференциалов как главных параметров, определяющих положение луча в комплексе, так и вторичных параметров, определяющих положение тетраэдра при закрепленном луче. Присваивая символ δ дифференцированию по вторичным параметрам и обозначая вторичные формы буквами π_i^j ($i, j=1, 2, 3, 4$), имеем

$$\pi_1^3=\pi_2^3=\pi_1^4=\pi_2^4=0; \quad \pi_1^2-\pi_3^4=\pi_1^2-\pi_4^3=-\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3-\pi_4^4=0;\tag{1.6}$$

$$\delta s=-\frac{1}{2}s(\pi_1^1+\pi_2^2-\pi_3^3-\pi_4^4)-(\pi_4^2+\pi_3^1).\tag{1.7}$$

Как показано в [3], всякий линейный касательный комплекс $\bar{h}$, заданный уравнением

$$p^{14}-p^{23}-hp^{34}=0,\tag{1.8}$$

является инвариантным относительно преобразования вторичных параметров тогда и только тогда, когда

$$\delta h=-\frac{1}{2}h(\pi_1^1+\pi_2^2-\pi_3^3-\pi_4^4)-(\pi_4^2+\pi_3^1).\tag{1.9}$$

Отсюда следует, что все касательные линейные комплексы $\bar{h}$, заданные уравнением (1.8), где

$$h=\frac{c_1s_1+c_2s_2+c_3s_3}{c_1+c_2+c_3}\tag{1.10}$$

(здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, не равные нулю одновременно, а s_1, s_2 и s_3 — корни характеристического уравнения), будут инвариантными и только такие линейные комплексы будут здесь в дальнейшем рассматриваться.

Для линейных комплексов $\bar{h}_i$:

$$p^{14}-p^{23}-h_ip^{34}=0, \quad i=1, 2, 3, 4,\tag{1.11}$$

введем понятие сложного отношения.

Определение 1. Сложным отношением ($\bar{h}_1\bar{h}_2; \bar{h}_3\bar{h}_4$) четырех линейных комплексов $\bar{h}_i$ одного пучка называется сложное отношение ($N_1N_2; N_3N_4$) точек N_i , соответствующих в нуль-системе комплексов $\bar{h}_i$ некоторой плоскости.

Это определение корректно, так как сложное отношение линейных комплексов не зависит от выбора плоскости. В самом деле, задав произвольную плоскость относительно нормального тетраэдра уравнением

$$b_1x^1+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4=0,\tag{1.12}$$

где x^1, x^2, x^3, x^4 — однородные координаты текущей точки плоскости, мы найдем, что в нуль-системе линейных комплексов $\bar{h}_i$ этой плоскости соответствуют точки

$$N_i = P_1 + h_i P_2, \quad (1.13)$$

где

$$P_1 = b_4 A_1 - b_3 A_2 + b_2 A_3 - b_1 A_4; \quad P_2 = b_2 A_1 - b_1 A_2 \quad (1.14)$$

и, следовательно

$$(\bar{h}_1 \bar{h}_2; \bar{h}_3 \bar{h}_4) = \frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_3} : \frac{h_4 - h_1}{h_2 - h_4} \quad (1.15)$$

не зависит от выбора плоскости (1.12). Определение 1 позволяет применять к линейным комплексам одного пучка все понятия, которые вводятся для точек прямой с помощью сложного отношения.

Определение 2. Пусть на прямой даны точки $A, B, M_1, M_2, \dots, M_n$. Точка A называется ассоциированной точке B относительно точек $M_1, M_2, \dots, M_n$, если

$$(AB; M_1 M_n) + (AB; M_2 M_n) + \dots + (AB; M_{n-1} M_n) = -1. \quad (1.16)$$

Легко проверить, что для каждой точки B найдется единственная точка A , причем нумерация точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ не существенна. Введенные в [4] довольно сложным путем квазинфлекссионные центры оказываются точками, ассоциированными инфлекссионным центрам относительно трех других инфлекссионных центров.

Найдем все линейчатые поверхности комплекса, которые имеют соприкосновение второго порядка с линейным комплексом $\bar{h}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы плюккеровы координаты близкой к лучу $A_1 A_2$ образующей линейчатой поверхности удовлетворяли с точностью до бесконечно малых третьего порядка уравнению (1.8). Проведя необходимые вычисления, найдем, что все такие поверхности являются нуль-поверхностями квадратичной дифференциальной формы

$$\psi_h = \varphi_1 - 2h\varphi_2, \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \omega_2^3(\omega_1^2 - \omega_3^4) + \omega_1^4(\omega_2^3 - \omega_4^3) + \omega_2^4(-\omega_1^3 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4); \\ \varphi_2 &= \omega_2^3\omega_1^4 + (\omega_2^4)^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

§ 2. Главные линейные комплексы и комплекс Коровина—Гринцевичуса

Среди линейных комплексов $\bar{h}$ вида (1.8), где h определяется равенством (1.10), выделим так называемые главные линейные комплексы $\bar{s}_i$:

$$p^{14} - p^{23} - s_i p^{34} = 0, \quad i=1,2,3. \quad (2.1)$$

Известно, что каждый главный линейный комплекс $\bar{s}_i$ имеет соприкосновение второго порядка с главной поверхностью комплекса, соответствующей корню s_i характеристического уравнения [6]. В [11] доказано, что каждая неголономная конгруэнция W линейчатого комплекса имеет соприкасающийся линейный комплекс, являющийся главным. Мы докажем более сильное утверждение, а именно, что справедлива

Теорема 1. Каждый главный и только главный линейный комплекс имеет соприкосновение второго порядка с двумя неголономными конгруэнциями W , не имеющими общих фокусов.

Доказательство. Запишем дифференциальные уравнения линейчатых поверхностей, имеющих соприкосновение второго порядка с линейным комплексом $\bar{h}$ в виде

$$\psi_h = p(\omega_2^3)^2 + q(\omega_1^4)^2 + (r - 2h)(\omega_2^4)^2 + 2(\alpha - h)\omega_2^3\omega_1^4 + + 2\beta\omega_2^3\omega_2^4 - 2\gamma\omega_1^4\omega_2^4 = 0. \quad (2.2)$$

Квадратичная форма Ψ_2 распадается на две линейные дифференциальные формы, определяющие неголономные конгруэнции, только в том случае, когда ее ранг не больше двух. Приравнявая определитель матрицы этой формы к нулю, мы приходим к характеристическому уравнению (1.4), откуда следует, что $h = s_i$, то есть форма Ψ_{s_i} определяет две неголономные конгруэнции, имеющие соприкасающийся линейный комплекс $\bar{s}_i$. Покажем, что каждая из этих двух неголономных конгруэнций есть конгруэнция W . Для этого представим форму Ψ_{s_i} в виде

$$\psi_{s_i} = (x_1\omega_2^3 + y_1\omega_1^4 + z_1\omega_2^4)(x_2\omega_2^3 + y_2\omega_1^4 + z_2\omega_2^4), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= p; & y_1y_2 &= q; & x_1z_2 + x_2z_1 &= 2\beta; \\ x_1y_2 + y_1x_2 - z_1z_2 &= 2\alpha - r. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Фокусы $F = A_1 + tA_2$ неголономной конгруэнции

$$x_m\omega_2^3 + y_m\omega_1^4 + z_m\omega_2^4 = 0, \quad m=1,2 \quad (2.5)$$

определяются корнями уравнения

$$y_mt^2 - z_mt - x_m = 0, \quad m=1,2. \quad (2.6)$$

Оказывается, каждое уравнение (2.6) определяет одну пару инфлекссионных центров, так как если эти два уравнения перемножить и учесть равенства (2.4), то получится уравнение (1.3), определяющее инфлекссионные центры. Но, как известно из [11], оба фокуса неголономной конгруэнции являются инфлекссионными центрами тогда и только тогда, когда эта конгруэнция есть конгруэнция W , что и доказывает нашу теорему.

Известно, что каждую прямую трехмерного проективного пространства можно истолковать как точку гиперквадрики Пюккера в P_5 , а линейный комплекс — как точку в P_5 . Так как для каждого луча l комплекса найдется линейный комплекс $\bar{h}$, касающийся комплекса в луче l , то с лучом l можно связать пару точек в P_5 : точки $[l]$ и $[\bar{h}]$, являющиеся образами луча l и линейного комплекса $\bar{h}$ при отображении Пюккера.

Теорема 2. Пусть линейчатой поверхности L комплекса сопоставлена в P_5 пара кривых: кривая (l) , описанная образом $[l]$ луча l комплекса, и кривая $(\bar{h})$, описанная образом $[\bar{h}]$ линейного комплекса $\bar{h}$ при отображении Пюккера. Тогда касательная к кривой $(\bar{h})$ в точке $[\bar{h}]$ проходит через соответствующую ей точку $[l]$ кривой (l) тогда и только тогда, когда линейчатая поверхность L и линейный комплекс $\bar{h}$ — главные.

Доказательство. При отображении Пюккера образом луча A_1A_2 будет точка $[A_1A_2]$ в P_5 , а образом линейного комплекса $\bar{h}$ — точка

$$[\bar{h}] = [A_2A_3] - [A_1A_4] - h[A_1A_2]. \quad (2.7)$$

Если дана поверхность L комплекса, то, дифференцируя равенство (2.7) по параметру поверхности, получаем

$$\begin{aligned} d[\bar{h}] = & \{-dh - h(\omega_1^1 + \omega_2^2) - \omega_4^2 - \omega_3^1\}[A_1A_2] + \{p\omega_2^3 + (\alpha - h)\omega_1^4 + \\ & + \beta\omega_2^4\}[A_4A_2] + \{(\alpha - h)\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4\}[A_1A_3] + \\ & + \frac{1}{2}\{\beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 - (r - 2h)\omega_2^4\}([A_2A_3] + [A_1A_4]). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Касательная к кривой $(\bar{h})$ в точке $[\bar{h}]$ пройдет через точку $[A_1A_2]$ в том и только в том случае, если компоненты при $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_2A_3] + [A_1A_4]$ будут равны нулю. Приравняв их нулю, получим систему уравнений вида (1.4), а составляя для нее характеристическое уравнение, получим $h = s_i$, то есть L — главная поверхность, а $\bar{h}$ — главный линейный комплекс.

Рассмотрим теперь линейный комплекс $\bar{g}$:

$$p^{14} - p^{23} - gp^{34} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$g = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}, \quad (2.10)$$

отмеченный сначала В. Главатым [1], затем В. И. Коровиным [2], впервые геометрически охарактеризованный К. И. Гринцевичусом [3] и названный в [5] комплексом Коровина—Гринцевичуса. Р. Н. Щербаков в [4] дал ему очень простую геометрическую характеристику: линейный комплекс $\bar{g}$ имеет соприкосновение второго порядка со всеми четырьмя инфлекционными поверхностями. По этой причине в [9, 10] он называется инфлекционным.

Здесь мы укажем еще одно свойство комплекса Коровина—Гринцевичуса, которое полностью характеризует его, если известны главные линейные комплексы.

Обозначим l единственный специальный линейный комплекс из пучка касательных с осью l , являющейся лучом A_1A_2 комплекса.

Теорема 3. Комплекс Коровина—Гринцевичуса ассоциирован специальному линейному комплексу относительно трех главных, то есть

$$(\bar{g}l; \bar{s}_i \bar{s}_k) + (\bar{g}l; \bar{s}_j \bar{s}_k) = -1, \quad (2.11)$$

где i, j, k — любые различные числа из 1, 2, 3.

В самом деле, пользуясь определениями 1 и 2 § 1 и формулой (1.15), имеем

$$\frac{s_i - g}{s_k - g} + \frac{s_j - g}{s_k - g} = \frac{s_i + s_j - \frac{2}{3}(s_i + s_j + s_k)}{s_k - \frac{1}{3}(s_i + s_j + s_k)} = \frac{s_i + s_j - 2s_k}{2s_k - s_i - s_j} = -1,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Геометрические характеристики и свойства некоторых линейных комплексов из пучка касательных

Положим в (1.10) $c_j = c_k = -c_i$, где i, j, k — любые различные числа из 1, 2, 3, и обозначим

$$\sigma_i = s_j + s_k - s_i. \quad (3.1)$$

Следовательно, среди инвариантных линейных комплексов $\bar{h}$ выделяются три линейных комплекса $\bar{\sigma}_i$:

$$p^{14} - p^{23} - \sigma_i p^{34} = 0. \quad (3.2)$$

Один из таких линейных комплексов был отмечен С. Е. Карапетяном в [8], но геометрическая характеристика его не приводилась. Ниже мы дадим две геометрические характеристики этих комплексов.

Обозначим Π_i и Π'_i линейчатые поверхности комплекса, линии прикосновения которых описываются теми двумя парами инфлекционных центров, которые служат фокусами двух неголономных конгруэнций W , имеющих соприкосновение второго порядка с главным линейным комплексом $\bar{\sigma}_i$.

Теорема 4. Каждый линейный комплекс σ_i имеет соприкосновение второго порядка с линейчатыми поверхностями Π_i и Π'_i .

Для доказательства теоремы поместим вершины A_1 и A_2 тетраэдра в инфлекционные центры, ребра A_1A_4 и A_2A_3 направим так, чтобы они были сопряжены в нуль-системе комплекса Коровина—Гриневичуса $\bar{g}$. Тогда

$$p = q = r + 4\alpha = 0. \quad (3.3)$$

В выбранном тетраэдре характеристическое уравнение (1.5) принимает вид

$$(s - \alpha)(s^2 + \alpha s + \beta\gamma - 2\alpha^2) = 0 \quad (3.4)$$

и, следовательно, можно считать

$$s_1 = \alpha; \quad s_2 + s_3 = -\alpha; \quad \sigma_1 = -2\alpha. \quad (3.5)$$

Используя равенство (2.2) при условиях (3.3), мы найдем, что главный линейный комплекс $\bar{\sigma}_1$ является соприкасающимся для двух неголономных конгруэнций W , уравнения которых:

$$\omega_2^4 = 0; \quad \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 - 3\alpha\omega_2^4 = 0, \quad (3.6)$$

а фокусами этих конгруэнций будут служить пары инфлекционных центров: A_1 , A_2 и $C_1 = A_1 + t_1 A_2$; $C_2 = A_1 + t_2 A_2$, где $t_1 t_2 = \frac{\beta}{\gamma}$; $t_1 + t_2 = \frac{3\alpha}{\gamma}$. Отсюда находим, что уравнения поверхностей Π_1 и Π'_1 будут иметь вид

$$\omega_2^3 : \omega_1^4 : \omega_2^4 = 0 : 0 : 1; \quad \omega_2^3 : \omega_1^4 : \omega_2^4 = 2\gamma : -2\beta : 3\alpha. \quad (3.7)$$

Так как линейный комплекс $\bar{\sigma}_1$ имеет соприкосновение второго порядка с нуль-поверхностями квадратичной формы

$$\Psi_{\sigma_1} = 6\alpha\omega_2^3\omega_1^4 + 2\beta\omega_2^3\omega_1^4 - 2\gamma\omega_1^4\omega_2^4, \quad (3.8)$$

то из (3.7) и (3.8) следует справедливость утверждения теоремы.

Линейный комплекс $\bar{\sigma}_i$ можно охарактеризовать с помощью сложных отношений, считая известными главные линейные комплексы.

Теорема 5. Для линейных комплексов σ_i и главных линейных комплексов $\bar{\sigma}$ справедливо равенство

$$(\bar{\sigma}_i \bar{l}; \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k = 1 : (\bar{\sigma}_i \bar{l}; \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k), \quad (3.9)$$

где i, j, k — различные числа из 1, 2, 3, а $\bar{l}$ — специальный линейный комплекс из пучка касательных.

Доказательство просто: по формуле (1.15) вычисляем указанные в

равенстве (3.9) сложные отношения и убеждаемся в его справедливости.

Таким же образом можно показать, что справедлива

Теорема 6. Линейный комплекс Коровина—Гринцевичуса ассоциирован специальному линейному комплексу $\bar{l}$ относительно линейных комплексов $\bar{\sigma}_i$, то есть

$$(\bar{g}\bar{l}; \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_k) + (\bar{g}\bar{l}; \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k) = -1, \quad (3.10)$$

где i, j, k — различные числа из 1, 2, 3.

Из других касательных линейных комплексов отметим линейные комплексы τ_i , уравнения которых:

$$p^{14} - p^{23} - \frac{s_j + s_k}{2} p^{34} = 0. \quad (3.11)$$

Они характеризуются равенством

$$(\bar{\tau}_i \bar{l}; \bar{s}_j \bar{s}_k) = -1. \quad (3.12)$$

Линейные комплексы $\bar{g}$, $\bar{\sigma}_i$, $\bar{s}_i$, $\bar{\tau}_i$ связаны соотношениями

$$(\bar{g}\bar{\delta}_i; \bar{\tau}_i \bar{s}_i) = -1. \quad (3.13)$$

Легко доказать, что линейный комплекс Коровина—Гринцевичуса ассоциирован специальному и относительно линейных комплексов τ_i .

§ 4. Проективное отображение луча комплекса на пучок касательных линейных комплексов

Учитывая определение 1, мы можем считать, что в пучке касательных линейных комплексов (1.8), где допускается значение $h = \infty$, введена структура проективной прямой. Поэтому можно говорить о проективном отображении луча комплекса на пучок касательных линейных комплексов. Оно будет задано, если трем различным точкам луча сопоставить три различных линейных комплекса из пучка.

Ниже мы рассмотрим одно из проективных отображений, определяемое соответствием трех инфлекционных центров и трех главных линейных комплексов. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Для комплекса, у которого хотя бы один инфлекционный центр некротный, существует такой нормальный тетраэдр, в котором корни характеристического уравнения являются и корнями уравнения (1.3), определяющего инфлекционные центры.

Действительно, поместим вершину A_2 нормального тетраэдра в некротный инфлекционный центр S_4 , а вершину A_1 — в квазиинфлекционный центр [4], соответствующий инфлекционному центру S_4 , то есть потребуем, чтобы

$$(A_1 A_2; C_1 C_3) + (A_1 A_2; C_2 C_3) = -1. \quad (4.1)$$

Ребра $A_1 A_4$ и $A_2 A_3$ направим так, чтобы они были сопряжены в нуль-системе комплекса Коровина—Главатого. Тогда

$$q = z = r = 0, \quad \gamma \neq 0. \quad (4.2)$$

Нормировкой вершин добьемся, чтобы

$$\gamma = -1. \quad (4.3)$$

В таком тетраэдре уравнения (1.3) и (1.5) переписутся соответственно в виде

$$-2t^3 - 2\beta t + p = 0; \quad (4.4)$$

$$-2s^3 + 2\beta s + p = 0, \quad (4.5)$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть в каждом луче комплекса с некротными инфлекционными центрами выделен инфлекционный центр C_4 . Тогда существует нормальный тетраэдр, в котором равенство

$$t_i = s_i, \quad i=1,2,3 \quad (4.6)$$

определяет соответствие, ставящее каждому инфлекционному центру $C_i = A_1 + t_i A_2$, отличному от C_4 , главный линейный комплекс $\bar{s}_i$, соприкасающийся с той главной поверхностью, точки прикосновения которой гармонически делят C_i и C_4 .

Доказательство. Выберем для данного комплекса такой же сопровождающий его тетраэдр, как в лемме 1, и сопоставим инфлекционному центру $C_i = A_1 + t_i A_2$ главную поверхность, определяемую корнем характеристического уравнения $s_i = t_i$. Точки прикосновения $M_v = A_1 + \lambda_v A_2$ ($v=1,2$) этой поверхности находятся из уравнения

$$\omega_2^3 \lambda^2 - 2\omega_2^4 \lambda - \omega_1^4 = 0, \quad (4.7)$$

где $\omega_2^3 : \omega_1^4 : \omega_2^4$ удовлетворяют системе (1.4) при $s=s_i$.

Из (4.7) и первого уравнения системы (1.4), в котором учтены условия (4.2) и (4.3), получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{2\omega_2^4}{\omega_2^3} = 2s_i. \quad (4.8)$$

С другой стороны, равенство $(M_1 M_2; C_i C_4) = -1$ влечет

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2t_i. \quad (4.9)$$

Из последних двух равенств заключаем, что при $t_i = s_i$ точки прикосновения главной поверхности, отвечающей корню s_i , делят гармонически инфлекционные центры C_i и C_4 , а поскольку с этой главной поверхностью соприкасается единственный главный линейный комплекс $\bar{s}_i$, то лемма доказана.

Замечание. Для квазиспециальных комплексов класса C^1 , где выделен инфлекционный центр, описывающий поверхность, соответствие инфлекционных центров и главных поверхностей было установлено Н. И. Кованцовым в [6].

Соответствие инфлекционных центров и главных линейных комплексов, описанное в лемме 2, определяет проективное отображение f луча комплекса на пучок касательных линейных комплексов. Оно зависит, конечно, от выбора инфлекционного центра C_4 .

Легко видеть, что в тетраэдре, построенном в лемме 1, образом точки $M_h = A_1 + h A_2$ при отображении f является линейный комплекс $\bar{h}$ вида (1.8), или, что то же самое, справедливо равенство

$$(C_1 C_2; C_3 M_h) = (\bar{s}_1 \bar{s}_2; \bar{s}_3 \bar{h}). \quad (4.10)$$

Из соотношений (4.6) и (4.10) можно получить ряд следствий которые мы оформим в виде теорем.

Теорема 7. Сложное отношение главных и специального линейного комплексов равно сложному отношению инфлекционных центров, взятых в соответствующем порядке.

В самом деле, заметив, что образом инфлекционного центра $C_4 = A_2$, отвечающего значению $h = \infty$, при проективном отображении f

является специальный линейный комплекс l из пучка касательных, получаем

$$(C_1C_2; C_3C_4) = (\bar{s}_1\bar{s}_2; \bar{s}_3l). \quad (4.11)$$

Следствие. В комплексе с гармонической четверкой инфлекционных центров и только в нем главные линейные комплексы и специальный образуют гармоническую четверку.

Теорема 8. Инфлекционные центры комплекса образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда комплекс Коровина—Гринцевичуса совпадает с одним из главных.

Действительно, равенство $(C_1C_2; C_3C_4) = -1$ равносильно условию $t_3 - t_1 = t_2 - t_3$, которое с учетом (4.6) можно переписать в виде $s_3 = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3)$, что означает совпадение линейных комплексов $\bar{s}_3$ и $\bar{g}$.

Теорема 9. В комплексе с гармонической четверкой инфлекционных центров каждый инфлекционный центр совпадает с квазиинфлекционным центром, соответствующим другому инфлекционному центру.

Действительно, отображение f ставит в соответствие точке A_1 линейный комплекс Коровина—Гринцевичуса, который в силу теоремы 8 совпадает с одним из главных линейных комплексов $\bar{s}$. Поэтому и его прообраз C совпадает с A_1 , являющейся квазиинфлекционным центром, соответствующим инфлекционному центру C_4 . Поскольку в качестве C_4 можно выбирать любой инфлекционный центр, то всякий инфлекционный центр совпадает с квазиинфлекционным. Другим путем этот результат был доказан в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hlavaty V. *Diferencialni primkova geometrie*. Praha, 1942, t. 1,2, p. 227: p. 315.
2. Коровин В. И. Преобразование комплекса прямых в проективном пространстве с сохранением его инвариантной формы. — ДАН, 1950, т. 70, № 5, с. 753—755.
3. Гринцевичус К. И. Линейный комплекс, присоединенный к дифференциальной окрестности второго порядка луча комплекса. — УМН, 1958, т. 13, № 2, с. 175—180.
4. Щербаков Р. Н. Проективный полуканонический репер линейчатого комплекса. *Ann. stitnt. univ. Jasi*, 1962, sect. I, 8, № 2, с. 395—415.
5. Близниак В. И., Лупейкис З. Ю. О внутренних оснащениях линейчатого комплекса. — Тр. геом. семинара. М.: ВИНТИ, 1973, т. 4, с. 155—166.
6. Кованцов Н. И. Теория комплексов. — Киев, 1963. — 292 с.
7. Гринцевичус К. И. О пучке линейных касательных комплексов. — Литовский матем. сб., 1966, т. 6, № 4, с. 621.
8. Карапетян С. Е. О комплексах прямых трехмерного проективного пространства. — Матем. сб., 1962, т. 56, № 3, с. 343—352.
9. Петин В. А. Некоторые вопросы теории комплексов. — Материалы 2-й Прибалтийской геом. конф. Тарту, 1965, с. 142—145.
10. Петин В. А. О соответствии касательных линейных комплексов и точек на луче линейчатого комплекса. — Тезисы докл. 6-й Всесоюз. геом. конф. по проблемам геометрии. Вильнюс, 1975, с. 121.
11. Щербаков Р. Н. О неголомомных конгруэнциях W . — ДАН, 1961, т. 138, № 4, с. 802—804.
12. Щербаков Р. Н., Бочилло Г. П. К проективно-дифференциальной геометрии комплекса прямых. — Геометр. сб., 5. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1965, с. 24—33.

И. А. ПЕЧНИКОВ

О КОМПЛЕКСЕ K_2 ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ, АССОЦИИРОВАННОМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ Δ_{n-1} НА МНОГООБРАЗИИ $Gr(1, n)$ ВСЕХ ПРЯМЫХ В A_n

В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [4], исследуется комплекс K_2 , порождаемый инвариантной двумерной плоскостью ${}^B L_2$ (главной 2-плоскостью), ассоциируемой с произвольной прямой $L_1 \in Gr(1, n)$ при задании указанного распределения. Комплексы K_2 , образуемые 2-плоскостями, касающимися торсов конгруэнции $L_1(\Psi_{n-1})$, соответствующей распределению Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$, рассматривались в [3]. Терминология и обозначения соответствуют принятым в [3—4].

§ 1. Комплекс K_2 главных плоскостей распределения Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$

Пусть на многообразии $Gr(1, n)$ всех прямых в A_n задано произвольное нецилиндрическое распределение Δ_{n-1} , составляющее вместе с сопряженным ему распределением $\dot{\Delta}_{n-1}$ на $Gr(1, n)$ невырожденную сопряженную пару $\{\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}\}$. Отнесем распределение Δ_{n-1} к каноническому реперу, построенному в [4]. (Этот репер мы будем называть B -репером, в отличие от Φ -репера, используемого в [3].) Дифференциальные формулы B -репера имеют вид

$$dA = \vartheta^{N-I+1} m_I + \left\{ t_s \vartheta^s - \frac{1}{2} (t_1 + t_{n-1}) \right\} m_n;$$

$$dm_K = M_{KA}^i \vartheta^A m_i; \quad dm_n = \vartheta^I m_I + M_{nA}^n \vartheta^A m_n, \quad (1.1)$$

где $i=1, 2, \dots, n$; $I, K=1, 2, \dots, n-1$; $r, s=1, 2, \dots, n-2$; $A=1, 2, \dots, N$; $N=2(n-1)$; $\vartheta^I \equiv \omega_n^I$, $\vartheta^{N-I+1} \equiv \omega_n^I$; t_I — координата I -го фокуса луча $L_1 \in Gr(1, n)$; M_{KA}^i , M_{nA}^n — инварианты распределения Δ_{n-1} , удовлетворяющие уравнениям структуры пространства A_n . В терминах B -репера распределение Δ_{n-1} задается уравнениями:

$$\begin{cases} \Theta^{N-s+1} \equiv \frac{1}{2} (\vartheta^{N-s+1} + u^s \vartheta^s - v^s \vartheta^{n-1}) = 0, \\ \Theta^n \equiv \frac{1}{2} (\vartheta^n - t_r \vartheta^r - v^{n-1} \vartheta^{n-1}) = 0; \end{cases} \quad (1.2)$$

распределение $\dot{\Delta}_{n-1}$ — уравнениями:

$$\Theta^s \equiv \frac{1}{2} (\vartheta^{N-s+1} - u^s \vartheta^s + v^s \vartheta^{n-1}) = 0,$$

$$\Theta^{n-1} \equiv \frac{1}{2} (\vartheta^n + t_r \vartheta^r + v^{n-1} \vartheta^{n-1}) = 0; \quad (1.3)$$

B -регулюс L_1 (${}^B\Phi_1$) [4] — системой:

$$\Theta^{N-I+1} = 0, \quad \vartheta^1 = \vartheta^2 = \dots = \vartheta^{n-2} = 0; \quad (1.4)$$

B^* -регулюс L_1 (${}^B\Phi_1^*$), внешне сопряженный B -регулюсу, — системой:

$$\Theta^I = 0, \quad \vartheta^1 = \vartheta^2 = \dots = \vartheta^{n-2} = 0; \quad (1.5)$$

двумерная плоскость ${}^B L_2$, асимптотическая для B -регулюса (ее мы будем называть главной 2-плоскостью), — локальными уравнениями $x^1 = x^2 = \dots = x^{n-2} = 0$, где инварианты первого порядка u^s и v^s выражаются через t_i по формулам:

$$u^s \equiv \frac{1}{2} (t_s + t_{s+1}); \quad \sum_{s=1}^{n-2} \frac{2t_s}{t_{s+1} + t_s + 2t_r} v^s = \frac{t_1 + t_{n-1}}{2} + t_r. \quad (1.6)$$

В то время, как прямая L_1 описывает $Gr(1, n)$, главная 2-плоскость ${}^B L_2$ порождает в общем случае $(2n-2)$ -параметрическое семейство двумерных плоскостей, являющееся при $n > 4$ с точки зрения [2] комплексом K_2 . Будем обозначать этот комплекс символом ${}^B K_2$.

Так как условия неподвижности 2-плоскости ${}^B L_2$ имеют относительно B -репера вид $\omega^s = \omega_n^s = \omega_{n-1}^s = 0$ ($r, s = 1, 2, \dots, n-2$), комплекс ${}^B K_2$ может быть задан системой $n-4$ уравнений Пфаффа, получаемой исключением форм ϑ^{n-1} и ϑ^n из равенств:

$$\omega_{n-1}^s = M_{n-1, r}^s \omega_n^r + M_{n-1, N-r+1}^s \omega^r + M_{n-1, n-1}^s \vartheta^{n-1} + M_{n-1, n}^s \vartheta^n \quad (1.7)$$

при условии $R \| M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s \| = 2$ (случай $R \| M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s \| < 2$ будет рассмотрен в § 3).

Характеристика $Ch \{ {}^B L_2(\Phi_1) \}$ главной 2-плоскости ${}^B L_2$ относительно 1-семейства ${}^B L_2(\Phi_1)$, соответствующего регулюсу $L_1(\Phi_1)$, задаваемому уравнениями $\vartheta^A = a^A \Theta$ ($A = 1, 2, \dots, N = 2(n-1)$; $\Theta \in T_N$), определяется системой:

$$\begin{cases} x^s = 0 \\ M_{n-1, A}^s a^A x^{n-1} + a^s x^n + a^{N-s+1} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

при условии $R \| M_{n-1, A}^s, a^A, a^s, a^{N-s+1} \| \leq 2$. Из (1.8) находим, что совокупность регулюсов $L_1(\Phi_1)$, соответствующая множеству всех 1-семейств ${}^B L_2(\Phi_1) \subset {}^B K_2$, для которых данная точка $X \in {}^B L_2$:

$$x^s = 0; \quad x^{n-1} = x_0^{n-1}; \quad x^n = x_0^n \quad (1.9)$$

является характеристической, задается системой:

$$\begin{aligned} & x_0^{n-1} M_{n-1, n-1}^s \vartheta^{n-1} + x_0^{n-1} M_{n-1, n}^s \vartheta^n + (x_0^{n-1} M_{n-1, r}^s + \\ & + x_0^n \delta_r^s) \vartheta^r + (x_0^{n-1} M_{n-1, N-r+1}^s + \delta_{N-r+1}^{N-s+1}) \vartheta^{N-r+1} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

определяющей в общем случае некоторое n -мерное распределение $\Delta_n(X)$ на $Gr(1, n)$. Понижение ранга матрицы $M = \| x_0^{n-1} M_{n-1, n-1}^s, x_0^{n-1} M_{n-1, n}^s, x_0^{n-1} M_{n-1, r}^s + x_0^n \delta_r^s, x_0^{n-1} M_{n-1, N-r+1}^s + \delta_{N-r+1}^{N-s+1} \|$ только выбором точки $X \in {}^B L_2$ в общем случае недостижимо, откуда ясно [1], что 2-плоскость ${}^B L_2$, как правило, не имеет относительно комплекса ${}^B K_2$ особых точек (ср. [3, с. 14]).

Если $X \in L_1$, то система (1.10) принимает вид

$$x_0^n \vartheta^s + \vartheta^{N-s+1} = 0 \quad (1.11)$$

($s = 1, 2, \dots, n-2$). Распределение Δ_n , определяемое системой (1.11),

обозначим ${}^B\Delta_n^X$. В частности, центру луча L_1 соответствует инвариантное распределение

$${}^B\Delta_n^0 : \vartheta^{N-s+1}=0, \quad (1.12)$$

а несобственной точке луча L_1 — распределение

$${}^B\Delta_n^\infty : \vartheta^s=0. \quad (1.13)$$

Пересечение ${}^B\Delta_2 = {}^B\Delta_n^0 \cap {}^B\Delta_n^\infty$ есть инвариантное двумерное распределение на $Gr(1, n)$, характеризующееся тем, что совокупности $L_1({}^B\Psi_2)$ всех интегральных регулюсов $L_1(\Phi_1)$ этого распределения соответствует множество ${}^BL_2({}^B\Psi_2)$ всех тех торсов комплекса BK_2 , относительно каждого из которых прямая L_1 является характеристикой 2-плоскости BL_2 .

Основное соответствие [2] комплекса BK_2 сопоставляет прямой L_1 инвариантную 4-мерную плоскость

$${}^BL_4 = T\{{}^BL_2({}^B\Psi_2)\},$$

то есть 4-плоскость

$${}^BL_4 = (m_n, m_{n-1}; M_{n-1, n-1}^s m_s, M_{n-1, n}^s m_s). \quad (1.14)$$

Будем называть эту 4-плоскость главной 4-плоскостью.

§ 2. $(n-1)$ -мерное распределение на комплексе BK_2 , порождаемое распределением Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$

Распределение Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$ индуцирует на комплексе BK_2 инвариантное $(n-1)$ -мерное распределение. Множество ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$, которое описывает 2-плоскость BL_2 вдоль всевозможных регулюсов $L_1(\Phi_1) \in L_1(\Psi_{n-1})$, имеет локальное строение, аналогичное строению комплекса K_1^0 двумерных плоскостей в A_n . Поэтому будем называть совокупность ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$ комплексом ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$.

Комплекс ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$ можно задать системой, получаемой исключением форм ϑ^{n-1} и ϑ^n из системы

$$\begin{cases} \omega_{n-1}^s = N_j^s \vartheta^j, \\ \vartheta^{N-s+1} = -u^s \vartheta^s + v^s \vartheta^{n-1}, \\ \vartheta^n = t_r \vartheta^r + v^{n-1} \vartheta^{n-1}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} N_r^s &\equiv M_{n-1, r}^s + M_{n-1, n}^s t_r - M_{n-1, N-r+1}^s u^r; \\ N_{n-1}^s &\equiv M_{n-1, n-1}^s + M_{n-1, n}^s v^{n-1} + M_{n-1, N-r+1}^s v^r, \\ r, s &= 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Характеристика $Ch\{{}^BL_2(\Phi_1)\}$ 2-плоскости BL_2 относительно 1-семейства ${}^BL_2(\Phi_1)$, описываемого ею вдоль произвольного регулюса $L_1(\Phi_1) \in L_1(\Psi_{n-1})$, задаваемого уравнениями $\Theta^{N-I+1}=0$, $\vartheta^I = a^I \Theta$ ($I=1, 2, \dots, n-1$), определяется из системы

$$\begin{cases} x^s = 0, \\ N_j^s a^j x^{n-1} + a^s x^n + v^s a^{n-1} - u^s a^s = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

если $R\|N_j^s a^j, a^s, v^s a^{n-1} - u^s a^s\| \leq 2$. Условие $R\|N_j^s a^j, a^s, v^s a^{n-1} - u^s a^s\| = 1$ выделяет торсы двумерных плоскостей, принадлежащие ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$. Легко показать, что последнее требование нельзя в общем случае выполнить только выбором a^s , вследствие чего совокупность

${}^B L_2(\Psi_{n-1})$ не содержит, как правило, торсов и никакая прямая $l_1 \subset {}^B L_2$ не является характеристикой $Ch\{{}^B L_2(\Phi_1)\}$ ни для какого ${}^B L_2(\Phi_1) \in {}^B L_2(\Psi_{n-1})$ (ср. [3, с. 18]).

Почти для каждой точки $X \in {}^B L_2$ найдется единственный регулюс $L_1(\Phi_1) \in L_1(\Psi_{n-1})$, определяемый системой

$$\Theta^{N-K+1}=0; P_f^s \vartheta^f=0, \quad (2.4)$$

где $P_r^s \equiv N_r^s x_0^{n-1} + \delta_r^s (x_0^n - u^s)$; $P_{n-1}^s \equiv N_{n-1}^s x_0^{n-1} + v^s$, $r, s = 1, 2, \dots, n-2$; $I, K=1, 2, \dots, n-1$, такой, что $Ch\{{}^B L_2(\Phi_1)\}=X$. В частности, произвольной точке $X \in L_1$, не совпадающей ни с одной из M -точек, соответствует регулюс

$$\Theta^{N-K+1}=0; \vartheta^s = -\frac{v^s}{x_0^n - u^s} \vartheta^{n-1}. \quad (2.5)$$

Для M -точек выполняется

Теорема 1. Каждая из M -точек луча L_1 является характеристикой 2-плоскости ${}^B L_2$ вдоль внутренне сопряженного B -регулюсу регулюс $L_1(\Phi_1) \in L_1(\Psi_{n-1})$, касающегося этой 2-плоскости в данной M -точке.

Доказательство вытекает из определения регулюсов, внутренне сопряженных B -регулюсу, их уравнений относительно B -репера [4] и формул (2.4).

Особые точки 2-плоскости ${}^B L_2$ относительно ${}^B L_2(\Psi_{n-1})$ задаются условием $R\|P_f^s\| < n-2$, откуда видно, что при $v^1 v^2 \dots v^{n-2} \neq 0$ никакая точка прямой L_1 не является особой для ${}^B L_2$. При этом имеет место

Теорема 2. Если точка $M \in L_1$ является особой для 2-плоскости ${}^B L_2$, то она совпадает с одной из M -точек луча L_1 .

Доказательство. Для произвольной точки $M(0, 0, \dots, x_0^n)$ луча L_1 матрица $\|P_f^s\|$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} x_0^n - u^1 & 0 & \dots & 0 & v^1 \\ 0 & x_0^n - u^2 & \dots & 0 & v^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x_0^n - u^{n-2} & v^{n-2} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Для того чтобы $R\|P_f^s\| < n-2$, необходимо $v^1 v^2 \dots, v^{n-2} = 0$, $\prod_{r=1}^{n-2} (x_0^n - u^r) = 0$, откуда (и из определения M -точек [4]) следует утверждение теоремы.

Касательное подпространство $T\{{}^B L_2(\Phi_1)\}$ для ${}^B L_2(\Phi_1) \in {}^B L_2(\Psi_{n-1})$ есть в общем случае (при $n > 5$) пятимерная плоскость

$$T\{{}^B L_2(\Phi_1)\} = (m_n, m_{n-1}, a^s m_s, (u^s a^s - v^s a^{n-1}) m_s, N_f^s a^f m_s). \quad (2.7)$$

Вдоль регулюсов $L_1(\Phi_1)$, для которых

$$R\|a^s, u^s a^s - v^s a^{n-1}, N_f^s a^f\| = 2, \quad (2.8)$$

$T\{{}^B L_2(\Phi_1)\}$ является 4-плоскостью

$$T\{{}^B L_2(\Phi_1)\} = (m_n, m_{n-1}, a^s m_s, N_f^s a^f m_s), \quad (2.9)$$

где a^f удовлетворяют (2.8).

Основное соответствие в ${}^B L_2(\Psi_{n-1})$, определяемое аналогично основному соответствию комплекса K_1^0 двумерных плоскостей, сопоставляет произвольной неособой точке $X \in {}^B L_2$ 4-плоскость (2.9), где a^f определяется из системы

$$P_f^s a^f = 0. \quad (2.10)$$

Нетрудно показать, что 4-плоскости, соответствующие различным не-

особым точкам 2-плоскости BL_2 при $n \geq 5$, всегда различны (ср. [3, с. 21]), откуда следует, что комплекс ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$ не может быть неголомомным аналогом допустимого комплекса K_1^0 [2].

Представляет интерес нахождение такой неособой точки $X \in {}^BL_2$, которой в основном соответствии комплекса ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$ сопоставлялась бы главная 4-плоскость BL_4 . Если $n=5$, то такая точка определяется в общем случае единственным образом в силу взаимной однозначности основного соответствия [1]. Если же $n > 5$, то нетрудно видеть, что главная 4-плоскость не является образом никакой неособой точки $X \in {}^BL_2$.

Произвольной точке $X \in L_1$, не являющейся ни одной из M -точек, основное соответствие комплекса ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$ сопоставляет 4-плоскость

$$\left(m_n, m_{n-1}, \frac{v^s}{x_0^n - u^s} m_s, \frac{N_r^s v^r - N_{n-1}^s (x_0^n - u^r)}{x_0^n - u^r} m_s \right). \quad (2.11)$$

В частности, M -точке $M_q(0, 0, \dots, u_q)$ ($1 \leq q \leq n-2$) соответствует 4-плоскость

$$L_4^q = (m_n, m_{n-1}, m_q, N_q^s m_s). \quad (2.12)$$

Из (2.12) и геометрического значения векторов B -репера следует

Теорема 3. Основное соответствие комплекса ${}^BL_2(\Psi_{n-1})$ сопоставляет каждой M -точке луча L_1 4-плоскость, содержащую асимптотическую 2-плоскость регулюса $L_1(\Phi_1) \in L_1(\Psi_{n-1})$ касающегося главной 2-плоскости BL_2 в этой M -точке.

§ 3. Распределения Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$, для которых комплекс BK_2 вырождается

В этом параграфе исследуются распределения Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$ частного вида, для которых $R\|M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s\| < 2$, вследствие чего многообразие, описываемое главной 2-плоскостью BL_2 , в то время как прямая L_1 пробегает $Gr(1, n)$, перестает быть комплексом K_2 . Отдельно рассматриваются случаи $R\|M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s\| = 1$ (распределение Δ_{n-1}^1) и случай $R\|M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s\| = 0$ (распределение Δ_{n-1}^0).

Если $R\|M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s\|$, то найдется такая функция k , что $M_{n-1, n}^s = k M_{n-1, n-1}^s$, и система (1.7) принимает вид

$$\omega_{n-1}^s = M_{n-1, r}^s \omega_n^r + M_{n-1, n-r+1}^s \omega_n^r + M_{n-1, n-1}^s (\vartheta^{n-1} + k \vartheta^n). \quad (3.1)$$

Исключая из (3.1) форму $\vartheta^{n-1} + k \vartheta^n$, мы приходим к системе

$$M_{n-1, n-1}^{n-2} \omega_{n-1}^r - M_{n-1, n-1}^r \omega_{n-1}^{n-2} + M_{n-1, n-1}^{n-2} M_{n-1, r}^r \omega_n^r + \\ + M_{n-1, n-1}^r M_{n-1, n-r+1}^{n-2} \omega_n^r = 0, \quad (3.2)$$

где $r=1, 2, \dots, n-2$; $\tau=1, 2, \dots, n-3$. Система (3.2) вполне интегрируема и определяет $(2n-3)$ -параметрическое семейство ${}^BL_2(2n-3)$, являющееся с точки зрения [2] комплексом K_1 двумерных плоскостей. (Его мы обозначим BK_1 .) При этом легко видеть, что вдоль регулюса $L_1(\Phi_1)$, определяемого уравнениями

$$\begin{cases} \vartheta^1 = \vartheta^2 = \dots = \vartheta^{n-2} = \vartheta^{n-1} = \vartheta^{n+2} = \dots = \vartheta^N = 0; \\ \vartheta^{n-1} + k \vartheta^n = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

плоскость BL_2 неподвижна. Обозначим этот регулюс $L_1({}^{SB}\Phi_1)$.

Совокупность регулюсов $L_1(\Phi_1)$, вдоль каждого из которых заданная точка $X \in {}^BL_2$, является характеристикой 2-плоскости BL_2 относи-

тельно ${}^B L_2(\Phi_1) \subset {}^B K_1$, как и в общем случае, определяется системой (1.10), задающей на $Gr(1, n)$ некоторое n -мерное распределение $\Delta_n(X)$. Однако сама совокупность $\bigcup_{L_1(\Phi_1) \in L_1(\Psi_n)} {}^B L_2(\Phi_1)$ представляет собой

в данном случае множество всех интегральных регулюсов $(n-1)$ -мерного распределения на ${}^B L_2(2n-3)$, определяемого системой

$$\begin{aligned} & x_0^{n-1} \omega_{n-1}^{n-2} + x_0^n \omega_n^{n-2} + \omega_n^{n-2} = 0; \\ & M_{n-1, n-1}^{\tau} x_0^{n-1} \omega_{n-1}^{n-2} + (M_{n-1, n-1}^{n-2} x_0^n - M_{n-1 | n-1}^{\tau} M_{n-1, \sigma}^{n-2} x_0^{n-1}) \omega_n^{\sigma} - \\ & - M_{n-1 | n-1}^{\tau} M_{n-1, n-2}^{n-2} x_0^{n-1} \omega_n^{n-2} + (M_{n-1, n-1}^{n-2} - \\ & - M_{n-1 | n-1}^{\tau} M_{n-1, N-\sigma+1}^{n-2}) \omega_n^{\tau} - \\ & - M_{n-1 | n-1}^{\tau} M_{n-1, n+1}^{n-2} x_0^{n-1} \omega_n^{n-2} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\sigma, \tau = 1, 2, \dots, n-3$.

При этом, как легко видеть из (3.4), 2-плоскость ${}^B L_2$ не имеет, как правило, особых точек относительно ${}^B L_2(2n-3)$.

Инвариантное распределение ${}^B \Delta_2$, определяемое для данного класса распределений Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$, аналогично общему случаю, обладает тем свойством, что в то время как прямая L_1 описывает $L_1({}^B \Psi_2)$, 2-плоскость ${}^B L_2$ порождает 1-семейство двумерных плоскостей, определяемое системой

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega_n^s = 0; \\ & \omega_n^s = 0; \\ & \omega_{n-1}^{\tau} = \frac{M_{n-1, n-1}^{\tau}}{M_{n-1, n-1}^{n-2}} \omega_{n-1}^{n-2} \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} & s = 1, 2, \dots, n-2 \\ & \tau = 1, 2, \dots, n-3 \end{aligned} \right). \right. \quad (3.5)$$

Из (3.4) ясно, что это 1-семейство (его мы обозначим ${}^B L_2(\Phi_1^T)$) есть торс, причем вдоль него прямая L_1 является характеристикой 2-плоскости ${}^B L_2$. Отсюда видно, что основное соответствие комплекса ${}^B L_2(2n-3)$ сопоставляет прямой L_1 трехмерную плоскость

$$T\{{}^B L_2(\Phi_1^T)\} = (m_n, m_{n-1}, \overset{\circ}{M}_{n-1, n-1}^{\tau} m_s). \quad (3.6)$$

Легко видеть, что совокупность $L_1({}^B \Psi_2)$ содержит регулюс $L_1({}^{SB} \Phi_1)$. Данное распределение Δ_{n-1}^1 на $Gr(1, n)$ порождает на комплексе ${}^B K_1$ $(n-1)$ -мерное распределение, локальное строение которого аналогично локальному строению распределения индуцируемого распределением Δ_{n-1} общего вида на комплексе ${}^B K_2$. Поэтому вся теория, изложенная в § 2 для общего случая, переносится на случай распределений Δ_{n-1}^1 .

Присоединение условий $M_{n-1, n-1}^s = k M_{n-1, n}^s$ к системе основных дифференциальных уравнений распределения Δ_{n-1} [4] не нарушает стандартности последней. Отсюда находим, что распределение Δ_{n-1}^1 существует с произволом $(n-1)^2 - (n-3)$ функций N аргументов.

Рассмотрим теперь распределение Δ_{n-1}^0 , характеризующееся условием $R\|M_{n-1, n-1}^s, M_{n-1, n}^s\| = 0$, т. е. натуральными уравнениями:

$$M_{n-1, n-1}^s = M_{n-1, n}^s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n-2). \quad (3.7)$$

Для этого класса распределений Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$, в то время как прямая L_1 пробегает $Gr(1, n)$, то 2-плоскость ${}^B L_2$ описывает $(2n-4)$ -семейство, задаваемое вполне интегрируемой системой

$$\omega_{n-1}^s = M_{n-1, r}^s \omega_n^r + M_{n-1, N-r+1}^s \omega_n^r. \quad (3.8)$$

Это семейство является [2] комплексом K_0 двумерных плоскостей, который будем обозначать ${}^B K_0$. Инвариантное распределение ${}^B \Delta_2$ в данном случае становится инволютивным и ему соответствует семейство $L_1(2)$, характеризующееся тем, что вдоль него плоскость ${}^B L_2$ неподвижна.

Распределение Δ_{n-1}^0 на $Gr(1, n)$ индуцирует на комплексе ${}^B K_0$ $(n-1)$ -мерное распределение, которое, как и в предыдущем случае, аналогично по своему локальному строению распределению, порождаемому на комплексе ${}^B K_2$ произвольным распределением Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$.

Присоединение равенств $M_{n-1, n-1}^s = M_{n-1, n}^s = 0$ к системе основных дифференциальных уравнений распределения Δ_{n-1} на $Gr(1, n)$ не приводит к новым конечным соотношениям на инварианты указанного распределения и сохраняет стандартность этой системы. Распределение Δ_{n-1}^0 существует с произволом $(n-1)^2 - (n-2)$ функций N аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляков Л. З. Основы теории комплексов d -плоскостей в проективном пространстве.— Геометр. сб., 20. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 3—15.
2. Гербсоммер Л. Э., Кругляков Л. З., Мизин А. Г. О комплексах многомерных плоскостей.— ДАН, 1980, т. 255, № 5, с. 1039—1042.
3. Печников И. А. О распределениях Δ_{n-1} на многообразии $Gr(1, n)$ всех прямых n -мерного аффинного пространства.— Томск, 1982.— 24 с. Рукопись представлена Томским ун-том. Деп. в ВИНИТИ 9 июля 1982, № 3670—82.
4. Печников И. А. Сопряженные пары распределений Δ_{n-1} на многообразии всех прямых в A_n .— Геометр. сб., 24. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 56—68

М. С. БУХТЯК

ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА B_6

Шестимерное пространство B_6 , введенное в [1] как пространство пар вида $(A, \bar{a})$, где A и $\bar{a}$ — точка и вектор эквиаффинного пространства A_3 , является аффинным пространством в смысле [2], и в то же время в его касательном расслоении определена послойная метрика [3], относительно которой B_6 — полуриманово пространство дефекта 2 и отрицательного индекса 2.

Пусть $\{M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ — репер в A_3 . Аналогично [1] сопоставляем ему репер $\{\Lambda, \bar{e}_i^\mu\}$ ($\mu=0, 3; i=1, 2, 3$) в B_6 , где $\Lambda=(M, \bar{e}_3)$, $\bar{e}_i^0=(\bar{e}_i, \bar{0})$, $\bar{e}_i^3=(\bar{0}, \bar{e}_i)$.

Деривационные формулы этих двух реперов суть

$$\begin{aligned} dM &= \omega_0^i \bar{e}_i; & d\Lambda &= \omega_\mu^i \bar{e}_i^\mu; \\ d\bar{e}_i &= \omega_i^j \bar{e}_j; & d\bar{e}_i^\mu &= \omega_i^\mu \bar{e}_j^\mu \\ (i, j &= 1, 2, 3; \mu=0, 3), \end{aligned} \quad (1)$$

где ω_0^i, ω_i^j — формы Пфаффа, подчиненные уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\omega_0^i = [\omega_0^j \omega_j^i]; \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2)$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_i^i = 0. \quad (3)$$

При этом в B_6 имеется метрическая форма

$$ds^2 = \omega_0^1 \omega_3^2 - \omega_0^2 \omega_3^1. \quad (4)$$

Локальный изотропный конус в точке Λ имеет двумерную плоскую вершину. Семейство этих плоскостей, присоединенных к точкам Λ , образует интегрируемое распределение Δ_2 , дифференциальные уравнения которого

$$\omega_0^1 = \omega_0^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0. \quad (5)$$

Пространство B_6 расслаивается на ∞^4 2-плоскостей L^* (строение соответствующих образов $\{(M, \bar{e}_3)\}$ в A_3 очевидно).

Будем теперь считать репер $\{\Lambda, \bar{\sigma}_{i+\mu}\}$, где $\bar{\sigma}_{i+\mu} = \bar{e}_i^\mu$, в B_6 неподвижным. Слоевая метрика [3] пространства B_6 задается формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, 6), \quad (6)$$

где матрица $G = (g_{ij})$ такова:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & | & \Phi \\ - & + & - \\ -\Phi & | & 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1+x^6 & -x^5 \\ -(1+x^6) & 0 & x^4 \\ x^5 & -x^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Предложение 1. Не существует аффинной связности без кручения, в которой метрический тензор пространства B_6 переносится параллельно.

Доказательство. Известно (например, [4]), что необходимое и достаточное условие согласованности аффинной связности без кручения Γ_{ij}^k с метрикой g_{ij} имеет вид

$$g_{ks} \Gamma_{ij}^k = P_{ijs}, \quad (8)$$

где

$$P_{ijs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right). \quad (9)$$

Упомянутое условие справедливо и для вырожденных метрик. Систему (8) относительно Γ_{ij}^k будем рассматривать как систему шести матричных уравнений (параметр — i) относительно шести матриц $\Gamma(i) = (\Gamma_{ij}^k)$. Согласно [5] при каждом значении i уравнение (8) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$GG^+ P(i) - P(i) = 0 \quad (i=1, \dots, 6), \quad (10)$$

где

$$P(i) = (P_{ijs}) \quad (i, j, s=1, \dots, 6), \quad (11)$$

а G^+ — матрица, псевдообратная [5] к G . Пользуясь [5], можем найти, что

$$G^+ = KG, \quad (12)$$

где

$$K = [(x^4)^2 + (x^5)^2 + (1+x^6)^2]^{-2}, \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10) и учитывая (7), приведем условие существования аффинной связности без кручения, согласованной с метрикой g_{ij} , в виде

$$K \begin{pmatrix} -\Phi^2 & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & -\Phi^2 \end{pmatrix} P(i) = P(i). \quad (14)$$

Но поскольку из (9) и (7)

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & C \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то (14) при $i=1$ дает нам

$$-K \Phi^2 C = C,$$

что не имеет места в силу (7). Предложение доказано.

Таким образом, пространство B_6 как полуриманово пространство не может быть плоским пространством и его класс [6] больше нуля.

Известно [6], что верхняя оценка класса n -мерного риманова пространства равна $\frac{1}{2}n(n-1)$ — в нашем случае 15. Мы получим более низкую оценку. Из следующего предложения будет следовать, что класс некоторой области пространства B_6 не более шести.

Предложение 2. В псевдоевклидовом пространстве ${}^6R_{12}$ существует 6-поверхность, изометричная некоторой области пространства B_6 .

Доказательство. Пусть скалярный квадрат вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_{12})$ в ${}^6R_{12}$ задан формулой

$$\bar{z}^2 = \sum_{i=1}^{12} (-1)^i z_i^2 \quad (15)$$

Рассмотрим в ${}^6R_{12}$ поверхность S_6 , заданную параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+x^6) \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{1+x^6} + x^1 \right) \right]; \\ z_2 &= (1+x^6) \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{1+x^6} + x^1 \right) \right]; \\ z_3 &= (1+x^6) \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{1+x^6} - x^1 \right) \right]; \\ z_4 &= (1+x^6) \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^5}{1+x^6} - x^1 \right) \right]; \\ z_5 &= x^4 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^6}{x^4} + x^2 \right) \right]; \quad z_6 = x^4 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^6}{x^4} + x^2 \right) \right]; \\ z_7 &= x^4 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^6}{x^4} - x^2 \right) \right]; \quad z_8 = x^4 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^6}{x^4} - x^2 \right) \right]; \\ z_9 &= x^5 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{x^5} + x^3 \right) \right]; \quad z_{10} = x^5 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{x^5} + x^3 \right) \right]; \\ z_{11} &= x^5 \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{x^5} - x^3 \right) \right]; \quad z_{12} = x^5 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{x^5} - x^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $x^1, \dots, x^6$ отождествляются с координатами точки Λ пространства B_6 (в репере $\{\Lambda, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_6\}$), принадлежащей области

$$x^4 x^5 (1+x^6) \neq 0, \quad (17)$$

Убедимся, что S_6 изометрична указанной области пространства B_6 (проверка прямым вычислением громоздка). Зададим сначала в ${}^6R_{12}$ поверхность S_9 параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 \operatorname{ch} v_1; \quad z_2 = u_1 \operatorname{ch} v_1; \quad z_3 = u_1 \operatorname{ch} v_2; \\ z_4 &= u_1 \operatorname{sh} v_2; \quad z_5 = u_2 \operatorname{ch} v_3; \quad z_6 = u_2 \operatorname{sh} v_3; \\ z_7 &= u_2 \operatorname{ch} v_4; \quad z_8 = u_2 \operatorname{sh} v_4; \quad z_9 = u_3 \operatorname{ch} v_5; \\ z_{10} &= u_3 \operatorname{sh} v_5; \quad z_{11} = u_3 \operatorname{ch} v_6; \quad z_{12} = u_3 \operatorname{sh} v_6. \end{aligned} \quad (18)$$

Первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид

$$ds^2 = u_1^2 (dv_1^2 - dv_2^2) + u_2^2 (dv_3^2 - dv_4^2) + u_3^2 (dv_5^2 - dv_6^2). \quad (19)$$

Сделаем на S_9 замену криволинейных координат

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= x^1; \quad v_1 + v_2 = y^1; \quad v_3 - v_4 = x^2; \\ v_3 + v_4 &= y^2; \quad v_5 - v_6 = x^3; \quad v_5 + v_6 = y^3; \\ u_1 &= 1+x^6; \quad u_2 = x^4; \quad u_3 = x^5, \end{aligned} \quad (20)$$

приведем (19) к виду

$$ds^2 = (1+x^6)^2 dx^1 dy^1 + (x^4)^2 dx^2 dy^2 + (x^5)^2 dx^3 dy^3. \quad (21)$$

Наконец, на S_9 высекаем S_6 , налагая на параметры $y^1, y^2, y^3, x^1, \dots, x^6$ соотношения:

$$y^1 = \frac{x^5}{1+x^6}; \quad y^2 = \frac{1+x^6}{x^4}; \quad y^3 = \frac{x^4}{x^5}. \quad (22)$$

Тогда (18) с учетом (20) и (22) примет вид (16), а (21) становится идентичной формуле (6). Предложение доказано.

Предложение 3. Некоторая область поверхности S_6 представляет собой область на конусе с двумерными плоскими образующими.

Доказательство. Из (18) получаем явные уравнения поверхности S_9 :

$$\begin{aligned} z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 &= 0; \\ z_5^2 - z_6^2 - z_7^2 + z_8^2 &= 0; \\ z_9^2 - z_{10}^2 - z_{11}^2 + z_{12}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

а для получения остальных уравнений поверхности S_6 имеем следствия системы (16)

$$(1+x^6)^2 = z_1^2 - z_2^2; \quad (x^4)^2 = z_5^2 - z_6^2; \quad (x^5)^2 = z_9^2 - z_{10}^2; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{x^5}{1+x^6} &= \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_1 z_3 + z_2 z_4}; \\ \operatorname{tn} \frac{1+x^6}{x^4} &= \frac{z_5 z_8 + z_6 z_7}{z_5 z_7 + z_6 z_8}; \\ \operatorname{tn} \frac{x^4}{x^5} &= \frac{z_9 z_{12} + z_{10} z_{11}}{z_9 z_{11} + z_{10} z_{12}}. \end{aligned}$$

Исключая x^4, x^5, x^6 из (24), получаем вместе с (23) систему явных уравнений области поверхности S_6 :

$$a_1 a_2 = a_3 a_4; \quad a_5 a_6 = a_7 a_8; \quad a_9 a_{10} = a_{11} a_{12}; \quad (25)$$

$$\ln^2 \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3} = 4 \frac{a_9 a_{10}}{a_1 a_2};$$

$$\ln^2 \frac{a_6 a_8}{a_5 a_7} = 4 \frac{a_1 a_2}{a_5 a_6};$$

$$\ln^2 \frac{a_{10} a_{12}}{a_9 a_{11}} = 4 \frac{a_5 a_6}{a_9 a_{10}},$$

где $a_1, \dots, a_{12}$ — новые координаты и

$$\begin{aligned} z_{2i-1} - z_{2i} &= a_{2i-1}; \\ z_{2i-1} + z_{2i} &= a_{2i} \quad (i=1, \dots, 6). \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть $a_1, \dots, a_{12}$ — некоторые константы. Проходящая через 0 (0, ..., 0) 2-плоскость L_2 , заданная уравнениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_1 a_5; \quad a_2 = \alpha_2 a_{11}; \\ a_4 &= \alpha_4 a_5; \quad a_3 = \alpha_3 a_{11}; \\ a_8 &= \alpha_8 a_5; \quad a_6 = \alpha_6 a_{11}; \\ a_{12} &= \tau_{12} a_5; \quad a_7 = \alpha_7 a_{11}; \\ a_9 &= \tau_9 a_5; \quad a_8 = \alpha_8 a_{11}, \end{aligned} \quad (27)$$

принадлежит своей областью $a_5 > 0$, $a_{11} > 0$ поверхности (25), если и только если константы $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$ подчинены условиям:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 &= \alpha_3 \alpha_4; & \alpha_6 &= \alpha_7 \alpha_8; & \alpha_9 \alpha_{10} &= \alpha_{12}; \\ \ln^2 \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3} &= 4 \frac{\alpha_9 \alpha_{10}}{\alpha_1 \alpha_2}; & \ln^2 \frac{\alpha_6 \alpha_8}{\alpha_7} &= 4 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_6}; \\ \ln^2 \frac{\alpha_{10} \alpha_{12}}{\alpha_9} &= 4 \frac{\alpha_6}{\alpha_9 \alpha_{10}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из 10 констант мы получаем 4 независимых. Чтобы убедиться, что полученные 4 параметра, от которых зависит 2-плоскость L_2 , существенны, заметим, что (28) можно разрешить в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \kappa; & \alpha_8 &= \beta; & \alpha_{10} &= \gamma; \\ \alpha_9 &= \kappa \delta; & \alpha_4 &= \alpha \kappa; & \alpha_{12} &= \gamma \kappa \delta; \\ \alpha_3 &= \frac{\delta \gamma}{\alpha \ln^2 \alpha}; & \alpha_2 &= \frac{\delta \gamma}{\ln^2 \alpha}; \\ \alpha_6 &= \frac{\kappa \alpha \gamma \delta}{\ln^2 \beta \ln^2 \alpha}; & \alpha_7 &= \frac{\kappa \alpha \delta \gamma}{\beta \ln^2 \beta \ln^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ — положительные, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) \neq 0$ и

$$\ln \alpha \cdot \ln \beta \cdot \ln \gamma = 1.$$

Внеся (29) в (27), видим, что семейство плоскостей L_2 (локально) находится во взаимно однозначном соответствии с набором параметров $\alpha, \beta, \delta, \kappa$. Предложение доказано.

Выше мы обнаружили, что B_6 расслаивается весьма естественным образом на ∞^4 2-плоскостей L^* . Столь же естественно было бы ожидать, что при построенном нами изометричном погружении φ области пространства B_6 в ${}^6R_{12}$ прообразами плоских образующих конуса S_6 будут как раз 2-плоскости L^* . Однако это не так.

Будем называть прямую в B_6 выделенной, если первые проекции [1] всех ее точек одинаковы. (Такой прямой в A_3 соответствует однопараметрическое семейство пар вида $(\bar{M}, \lambda \bar{a})$, $\bar{a} \neq 0$, $\lambda \in R$, $\bar{M} = \text{const}$, $\bar{a} = \text{const}$.) Интегрируя систему (5) и переходя к неподвижному реперу $\{\Lambda, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_6\}$, получаем параметрические уравнения плоскости L^* в виде

$$x^i = c^i + b^i u; \quad x^{3+i} = b^i v \quad (i=1, 2, 3), \quad (30)$$

где $c^i, b^i = \text{const}$; u, v — параметры. Ясно, что всякая выделенная прямая принадлежит некоторой плоскости L^* .

Предложение 4. Из всех прямых, принадлежащих плоскости L^* , только выделенные прямые переходят в прямолинейные образующие конуса S_6 при отображении φ .

Доказательство. В уже введенных ранее координатах $a_1, \dots, a_{12}$ [см. (26)] получаем формулы, обращающие уравнения (16):

$$\begin{aligned} (1+x^6)^2 &= a_1 a_2; & (x^4)^2 &= a_5 a_6; & (x^5)^2 &= a_9 a_{10}; \\ x^1 &= \ln \frac{a_2}{a_1} - \sqrt{\frac{a_{10} a_9}{a_1 a_2}}; \\ x^2 &= \ln \frac{a_6}{a_5} - \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_5 a_6}}; & x^3 &= \ln \frac{a_{10}}{a_9} - \sqrt{\frac{a_5 a_6}{a_9 a_{10}}}, \end{aligned} \quad (31)$$

к которым надо добавить уравнения (25). Видно, что разрешение сис-

темы (31), (25) в виде линейных соотношений на $a_1, \dots, a_{12}$, совместимое с последними тремя уравнениями в (30), осуществимо лишь в виде

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha^2 a_1; & a_6 &= \beta^2 a_5; & a_{10} &= \gamma^2 a_9; \\ a_4 &= t^2 a_3; & a_8 &= \varphi^2 a_7; & a_{12} &= \sigma^2 a_{11}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь коэффициенты — неотрицательные константы, (32) и (25) имеют следствием

$$\begin{aligned} a_2 &= \varepsilon_1 t \alpha a_3; & a_6 &= \varepsilon_2 \varphi \beta a_7; & a_{10} &= \varepsilon_3 \sigma \gamma a_{11}; \\ a_1 &= \varepsilon_1 \frac{t}{\alpha} a_3; & a_5 &= \varepsilon_2 \frac{\varphi}{\beta} a_7; & a_9 &= \varepsilon_3 \frac{\sigma}{\gamma} a_{11}; \\ a_4 &= t^2 a_3; & a_8 &= \varphi^2 a_7; & a_{12} &= \sigma^2 a_{11}; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \ln t + \ln \alpha &= -\frac{\sigma}{t} \left| \frac{a_{11}}{a_3} \right|; \\ \ln \beta + \ln \varphi &= -\frac{t}{\varphi} \left| \frac{a_3}{a_7} \right|; \\ \ln \gamma + \ln \sigma &= -\frac{\varphi}{\sigma} \left| \frac{a_7}{a_{11}} \right|, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1.$$

Но из (31) при условии (33), (34) имеем

$$x^1 = \ln \frac{t}{\alpha}; \quad x^2 = \ln \frac{\beta}{\varphi}; \quad x^3 = \ln \frac{\gamma}{\sigma}, \quad (35)$$

и первая проекция точки $(x^1, x^2, \dots, x^6)$ неподвижна. Чтобы соотношения (34) удовлетворялись при линейных соотношениях на $a_1, \dots, a_{12}$, надо наложить две независимых однородных линейных связи на a_3, a_7, a_{11} . Сделав это в виде

$$a_3 = \lambda^2 s^2; \quad a_7 = \mu^2 s^2; \quad a_{11} = \nu^2 s^2$$

(s — параметр, λ, μ, ν — константы), мы в силу (31) добавим к (35)

$$1 + x^6 = t \lambda s; \quad x^4 = \varphi \mu s; \quad x^5 = \sigma \nu s,$$

и предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухтяк М. С. Об одном шестимерном пространстве.— Геометр. сб., 22.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982, с. 51—61.
2. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.— М.: Наука, 1970.— 528 с.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: Пер. с англ.— М.: Наука, 1981.— 344 с.
4. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.— М.: Наука, 1964.— 664 с.
5. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание: Пер. с англ.— М.: Наука, 1977.— 224 с.
6. Позняк Э. Г., Соколов Д. Д. Изометрическое погружение римановых пространств в евклидовы.— В кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: Изд-во ВИНТИ, 1977, т. 15, с. 173—211.

Н. М. ОНИЩУК, И. В. ШТАТСКАЯ

КОНГРУЭНЦИИ ПЛОСКОСТЕЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЦЕНТРОАФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Конгруэнция плоскостей четырехмерного пространства — это двумерное параметрическое семейство двумерных плоскостей P_2 . Мы изучаем локальные свойства таких конгруэнций в окрестности регулярного элемента (плоскости P_2).

В работе дана центроаффинная классификация конгруэнций плоскостей четырехмерного пространства, геометрическая характеристика каждого класса.

§ 1. Конгруэнции плоскостей, не содержащие цилиндроидальных 1-семейств первого рода

В общем случае в каждой плоскости P_2 , принадлежащей некоторому 1-семейству плоскостей, имеется центральная прямая — линия пересечения плоскости P_2 с характеристикой плоскости P_3 , содержащей P_2 и центр 0 пространства. (Мы всюду предполагаем, что P_2 не проходит через центр пространства.) Совокупность всех центральных прямых называется центральной линейчатой поверхностью 1-семейства. Если 1-семейство не имеет центральной линейчатой поверхности (это будет тогда, когда для каждой плоскости P_2 характеристика плоскости P_3 параллельна P_2), то оно называется цилиндрическим первого рода.

Конгруэнции плоскостей четырехмерного центроаффинного пространства можно разбить на два больших класса: 1) конгруэнции K_1 , не содержащие цилиндрических 1-семейств первого рода; 2) конгруэнции K_2 , содержащие цилиндрические 1-семейства первого рода.

В данном параграфе мы изучим конгруэнции K_1 . Для этого выберем подвижной репер $\{0; e_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$) так, чтобы векторы e_1, e_2 были параллельны плоскости P_2 , а e_0 имел бы начало в точке O и конец в некоторой точке плоскости P_2 . Деривационные формулы репера имеют вид

$$de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta, \quad (1)$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют равенствам

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \quad (2)$$

Уравнения плоскости P_2 в выбранном репере имеют вид

$$x^0 = 1; \quad x^3 = 0. \quad (3)$$

Эта плоскость становится неподвижной при обращении в нуль форм $\omega_0^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_0^3, \omega_1^3, \omega_2^3$. Следовательно, эти формы — главные.

Характеристика плоскости P_3 , содержащей P_2 и центр пространства при смещении по любому 1-семейству, определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} x^3 &= 0; \\ \omega_1^3 x^1 + \omega_2^3 x^2 + \omega_0^3 x^0 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Плоскости (3) и (4) параллельны хотя бы для одного 1-семейства лишь тогда, когда формы ω_1^3, ω_2^3 линейно зависимы. Итак, конгруэнции K_1 характеризуются линейной независимостью форм ω_1^3, ω_2^3 ; а конгруэнции K_2 , напротив, их линейной зависимостью.

Так как в данном параграфе мы изучаем конгруэнции K_1 , то мы выберем в качестве базиса формы ω_1^3, ω_2^3 , тогда получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_0^0 &= a_0^0 \omega_1^3 + b_0^0 \omega_2^3; \\ \omega_1^0 &= a_1^0 \omega_1^3 + b_1^0 \omega_2^3; \\ \omega_2^0 &= a_2^0 \omega_1^3 + b_2^0 \omega_2^3; \\ \omega_0^3 &= a_0^3 \omega_1^3 + b_0^3 \omega_2^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1. В каждой плоскости $P_2 \in K_1$ центральные прямые всех 1-семейств конгруэнции K_1 , проходящих через P_2 , образуют пучок.

Доказательство. Центральная прямая плоскости P_2 некоторого 1-семейства — это линия пересечения плоскости P_2 и характеристики плоскости P_3 , она определяется системой уравнений (3), (4). Для 1-семейства $\lambda^1 \omega_1^3 + \lambda^2 \omega_2^3 = 0$ система (3), (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} x^0 &= 1; \quad x^3 = 0; \\ \lambda^2(x^1 + a_0^3) - \lambda^1(x^2 + b_0^3) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Меняя λ^1, λ^2 , получаем пучок прямых в плоскости P_2 . Теорема доказана.

Из уравнений (6) видим, что центр пучка центральных прямых находится в точке $A(-a_0^3, -b_0^3)$. Точка A характеризуется также тем, что это единственная точка плоскости P_2 , в которой касательная плоскость к поверхности (A) принадлежит плоскости P_3 .

Положим $e_0 = \overline{OA}$, тогда $a_0^3 = b_0^3 = 0$ и система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \omega_0^0 &= a_0^0 \omega_1^3 + b_0^0 \omega_2^3; \\ \omega_1^0 &= a_1^0 \omega_1^3 + b_1^0 \omega_2^3; \\ \omega_2^0 &= a_2^0 \omega_1^3 + b_2^0 \omega_2^3; \\ \omega_0^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 2. Центр пучка центральных прямых плоскости $P_2 \in K_1$ лежит на характеристической конике.

Для доказательства теоремы находим уравнения характеристической коники:

$$\begin{aligned} b_1^0(x^1)^2 + (b_2^0 - a_1^0)x^1x^2 - a_2^0(x^2)^2 + b_0^0x^1 - a_0^0x^2 &= 0; \\ x^0 &= 1; \quad x^3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Этим уравнениям удовлетворяют координаты точки $A(1, 0, 0, 0)$ — центра пучка центральных прямых. Теорема доказана.

На каждой центральной прямой 1-семейства конгруэнции K_1 име-

ется в общем случае центральная точка (точка пересечения характеристики плоскости, содержащей центральную прямую и центр пространства, с данной центральной прямой).

Теорема 3. В общем случае через P_2 проходит не более двух 1-семейств плоскостей конгруэнции K_1 таких, что центральная точка плоскости P_2 для них совпадает с центром пучка центральных прямых.

Доказательство. Пусть $\lambda^1\omega_1^3 + \lambda^2\omega_2^3 = 0$ — некоторое 1-семейство. Уравнения плоскости, проходящей через центральную прямую (6) и центр пространства, имеют вид

$$\begin{aligned}x^3 &= 0; \\ \lambda^2 x^1 - \lambda^1 x^2 &= 0\end{aligned}$$

(так как в выбранном репере $a_0^3 = b_0^3 = 0$). Тогда координаты центральной точки плоскости P_2 для данного 1-семейства являются решением системы уравнений:

$$\begin{aligned}x^0 &= 1; \quad x^3 = 0; \\ \lambda^2 x^1 - \lambda^1 x^2 &= 0; \\ d\lambda^2 x^1 - d\lambda^1 x^2 + \lambda^2(-\omega_0^1 x^0 - \omega_1^1 x^1 - \\ &- \omega_2^1 x^2 - \omega_3^1 x^3) + \lambda^1(\omega_0^2 x^0 + \omega_1^2 x^1 + \\ &+ \omega_2^2 x^2 + \omega_3^2 x^3) = 0\end{aligned} \quad (9)$$

при условии

$$\lambda^1 \omega_1^3 + \lambda^2 \omega_2^3 = 0. \quad (10)$$

Ищем 1-семейства, для которых центральная точка плоскости P_2 совпадает с точкой $A(1, 0, 0, 0)$. Полагая в системе (9) $x^0 = 1$, $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, получаем

$$\lambda^1 \omega_0^1 - \lambda^2 \omega_0^2 = 0. \quad (11)$$

Дифференцируем внешним образом форму $\omega_0^3 = 0$ из системы (7):

$$\omega_0^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_0^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Отсюда по лемме Картана находим

$$\begin{aligned}\omega_0^1 &= a_0^1 \omega_1^3 + b_0^1 \omega_2^3; \\ \omega_0^2 &= b_0^1 \omega_1^3 + b_0^2 \omega_2^3.\end{aligned} \quad (12)$$

В силу (10) и (12) уравнение (11) принимает вид

$$a_0^1(\omega_1^3)^2 + 2b_0^1\omega_1^3\omega_2^3 + b_0^2(\omega_2^3)^2 = 0. \quad (13)$$

Последнее уравнение в общем случае ($(a_0^1)^2 + (b_0^1)^2 + (b_0^2)^2 \neq 0$) определяет два 1-семейства (действительных, мнимых или совпадающих), проходящих через плоскость P_2 . Теорема доказана.

Центральные линии в плоскости P_2 , соответствующие 1-семействам (13), будем называть основными прямыми плоскости P_2 , они определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}x^0 &= 1; \quad x^3 = 0; \\ b_0^2(x^1)^2 + 2b_0^1x^1x^2 + a_0^1(x^2)^2 &= 0.\end{aligned} \quad (14)$$

Замкнем систему (12), получим

$$(da_0^1 + a_0^1(\omega_3^3 - 2\omega_1^1) - 2b_0^1\omega_2^1 - a_0^0b_0^1\omega_2^3 +$$

$$\begin{aligned}
 & + a_0^1 b_0^0 \omega_2^3) \wedge \omega_1^3 + (d b_0^1 - a_0^1 \omega_1^2 + b_0^1 (\omega_3^3 - \omega_2^2) - \\
 & - b_0^1 \omega_1^1 - b_0^2 \omega_2^1) \wedge \omega_2^3 = 0; \\
 & (d b_0^1 - b_0^1 \omega_1^1 + b_0^1 \omega_3^3 - b_0^2 \omega_2^1 - a_0^1 \omega_1^2 - b_0^1 \omega_2^2) \wedge \omega_1^3 + \\
 & + (d b_0^2 - 2 b_0^1 \omega_1^2 - 2 b_0^2 \omega_2^2 + b_0^2 \omega_3^3 + a_0^0 b_0^2 \omega_1^3 - b_0^0 b_0^1 \omega_1^3) \wedge \omega_2^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда для дифференциалов по вторичным параметрам имеем

$$\begin{aligned}
 \delta a_0^1 &= 2 a_0^1 \pi_1^1 + 2 b_0^1 \pi_2^1 - a_0^1 \pi_3^3; \\
 \delta b_0^1 &= a_0^1 \pi_1^2 + b_0^1 (\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3) + b_0^2 \pi_2^1; \\
 \delta b_0^2 &= 2 b_0^1 \pi_1^2 + 2 b_0^2 \pi_2^2 - b_0^2 \pi_3^3; \\
 \delta (a_0^1 b_0^2 - (b_0^1)^2) &= 2 (a_0^1 b_0^2 - (b_0^1)^2) (\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3).
 \end{aligned}$$

Следовательно, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_0^2 & b_0^1 \\ b_0^1 & a_0^1 \end{vmatrix}$$

является относительным инвариантом.

В зависимости от значения инварианта Δ дадим следующую классификацию конгруэнций K_1 .

1. Конгруэнции K_1 , для которых $\Delta > 0$, назовем конгруэнциями K_1 эллиптического типа. Геометрически такие конгруэнции характеризуются тем, что плоскость P_2 для них не имеет основных прямых [см. (13)].

2. Конгруэнции K_1 , для которых $\Delta < 0$, назовем конгруэнциями гиперболического типа. Они характеризуются тем, что для них в плоскости P_2 существуют две основные прямые.

3. Конгруэнции K_1 , для которых $\Delta = 0$, назовем конгруэнциями K_1 параболического типа. Конгруэнции K_1 параболического типа, в свою очередь, подразделяются на два класса: а) $\Delta = 0$, но $(a_0^1)^2 + (b_0^1)^2 + (b_0^2)^2 \neq 0$, в этом случае в плоскости P_2 имеется одна основная прямая; б) $a_0^1 = b_0^1 = b_0^2 = 0$, тогда всякая центральная прямая будет основной прямой.

Теорема 4. Основные прямые плоскости P_2 конгруэнции K_1 гиперболического типа гармонически делят касательную к характеристической конике в точке A и прямую пересечения касательной плоскости к поверхности (A) в точке A и плоскости P_2 .

Доказательство. Уравнения:

$$\begin{aligned}
 \Delta(x^0 - 1) &= a_0^0 (b_0^2 x^1 - b_0^1 x^2) + b_0^0 (a_0^1 x^2 - b_0^1 x^1); \\
 x^3 &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

определяют касательную плоскость к поверхности (A) в точке A . Плоскость (16) пересекает плоскость P_2 по прямой

$$\begin{aligned}
 (a_0^0 b_0^2 - b_0^0 b_0^1) x^1 + (b_0^0 a_0^1 - a_0^0 b_0^1) x^2 &= 0; \\
 x^0 &= 1; \quad x^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Касательная к характеристической конике (8) в точке A определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}
 b_0^0 x^1 - a_0^0 x^2 &= 0; \\
 x^0 &= 1; \quad x^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Для упрощения дальнейших вычислений направим векторы e_1, e_2 по основным прямым, тогда $a_0^1 = b_0^2 = 0$ и уравнения (17) примут вид

$$\begin{aligned} b_0^0 x^1 + a_0^0 x^2 &= 0; \\ x^0 &= 1; x^3 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения же основных прямых в выбранном репере следующие:

$$x^1 = 0; x^3 = 0; x^0 = 1 \quad (20)$$

и

$$x^2 = 0; x^3 = 0; x^0 = 1. \quad (21)$$

Сложное отношение прямых (20), (21) и (18), (19) равно -1 . Теорема доказана.

Для конгруэнции K_1 параболического типа имеют место следующие предложения.

1. Касательная плоскость к поверхности (A) в точке A проходит через центр пространства лишь тогда, когда конгруэнция K_1 является конгруэнцией параболического типа (это видно из уравнения (16)).

2. Если поверхность (A) вырождается, то конгруэнция K_1 будет конгруэнцией параболического типа. Действительно, условие вырождения поверхности (A) имеет вид

$$\frac{a_0^0}{b_0^0} = \frac{a_0^1}{b_0^1} = \frac{b_0^1}{b_0^2}.$$

Отсюда видно, что $\Delta = 0$, т. е. конгруэнция K_1 является конгруэнцией параболического типа.

3. Конгруэнция K_1 параболического типа, для которой $(a_0^1)^2 + (b_0^1)^2 + (b_0^2)^2 \neq 0$, существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов. Для доказательства нужно замкнуть систему (7), присоединить к ней систему (15) при условии $\Delta = 0$. Получим пять независимых квадратичных уравнений на восемь неизвестных функций. Решение такой системы существует с произволом трех функций двух аргументов.

4. Если конгруэнция K_1 является конгруэнцией параболического типа, для которой $a_0^1 = b_0^1 = b_0^2 = 0$, то поверхность (A) для нее вырождается либо в прямую, либо в точку. Действительно, радиус-вектор точки A — это вектор e_0 . Для рассматриваемого класса конгруэнций K_1 $de_0 = (a_0^0 \omega_1^3 + b_0^0 \omega_2^3) e_0$. Возникают две возможности: а) $(a_0^0)^2 + (b_0^0)^2 \neq 0$; б) $a_0^0 = b_0^0 = 0$. В случае а) имеем $de_0 \parallel e_0$, $d^2 e_0 \parallel e_0, \dots$, т. е. центр пучка описывает прямую, проходящую через центр пространства. В случае б) имеем $de_0 = 0$ и точка A , следовательно, неподвижна. Характеристическая коника в этом случае распадается на пару прямых (см. (8) при $b_0^0 = a_0^0 = 0$).

§ 2. Конгруэнции плоскостей, содержащие цилиндрические 1-семейства первого рода

Конгруэнции плоскостей, содержащие цилиндрические 1-семейства, мы обозначили K_2 . Конгруэнции K_2 характеризуются линейной зависимостью форм ω_1^3, ω_2^3 .

Для неуницентральные конгруэнций K_2 выберем за базис формы ω_0^3, ω_1^3 . Этим мы исключаем из рассмотрения уницентральные конгру-

энции, которые рассматривались в работе [1]. Выражая главные формы через базисные, получим

$$\begin{aligned}\omega_0^0 &= \alpha_0^0 \omega_0^3 + \beta_0^0 \omega_1^3; \\ \omega_1^0 &= \sigma_1^0 \omega_0^3 + \beta_1^0 \omega_1^3; \\ \omega_2^0 &= \sigma_2^0 \omega_0^3 + \beta_2^0 \omega_1^3; \\ \omega_2^3 &= \beta_2^3 \omega_1^3.\end{aligned}\quad (22)$$

Замыкая эту систему, получим четыре независимых квадратичных уравнения на семь неизвестных функций. Произвол решения — три функции двух аргументов. Итак, конгруэнции K_2 существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Неуницентральные конгруэнции K_2 обладают следующими геометрическими свойствами.

1. Центральные прямые плоскости P_2 для всех 1-семейств образуют пучок параллельных прямых. Действительно, пусть $\lambda^0 \omega_0^3 + \lambda^1 \omega_1^3 = 0$ — произвольное 1-семейство конгруэнции K_2 . Центральная прямая для данного 1-семейства определится уравнениями:

$$x^0 = 1; \quad x^3 = 0; \quad (23)$$

$$\lambda^0(x^1 + \beta_2^3 x^2) - \lambda^1 = 0.$$

Меняя λ^0, λ^1 , мы получим пучок параллельных прямых.

2. Из уравнений (23) также видно, что через плоскость P_2 проходит только одно 1-семейство, для которого нет центральной прямой, т. е. только одно цилиндрическое 1-семейство, его уравнения $\omega_1^3 = 0$.

3. Характеристическая коника для данного класса конгруэнций является гиперболой, а направление центральных прямых совпадает с ее асимптотическим направлением. Действительно, направим вектор e_2 параллельно центральным прямым, тогда $\beta_2^3 = 0$ и уравнение характеристической коники в плоскости P_2 будет иметь вид

$$\alpha_1^0(x^1)^2 + \sigma_2^0 x^1 x^2 + \alpha_0^0 x^1 - \beta_1^0 x^1 - \beta_2^0 x^2 - \beta_0^0 = 0.$$

Эта кривая — гипербола, одной из асимптот которой является прямая $\alpha_2^0 x^1 + \beta_2^0 = 0$, параллельная вектору e_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук Н. М., Джо Е. А. Уницентральные конгруэнции плоскостей в четырехмерном центроаффинном пространстве. — Геометр. сб., 24. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, с. 93—97.

Н. В. ШИРОБАКИНА, Р. Н. ЩЕРБАКОВ

ДВУМЕРНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В R_5^2

Данная работа является продолжением работ [1—3], посвященных геометрии двумерных поверхностей в пятимерных полувеклидовых пространствах [4]. Параболическая поверхность в R_5^2 обозначается V_2^1 и характеризуется (локально) тем, что касательная плоскость пересекает двумерную вершину T_1 минимого конуса абсолюта в одной несобственной точке. В [3] был построен один из возможных канонических реперов такой поверхности. Здесь поверхность V_2^1 изучается в полуканоническом репере [5], что дает возможность выделить ряд важных подклассов класса параболических поверхностей.

1. Репераж. Поместим векторы e_1 и e_2 в касательную плоскость так, чтобы вектор e_1 был вектором первого порядка (т. е. не принадлежал множеству векторов, определяемых плоскостью T_1), а e_2 был вектором второго порядка. Остальные три вектора репера определяют нормальную плоскость $N_3(x)$. Среди этих векторов один вектор является вектором первого порядка, два — второго порядка. Пусть для определенности вектор e_5 — первого порядка. Деривационные формулы такого репера поверхности в обозначениях, принятых в [1], имеют вид

$$\begin{aligned} dx &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2; \\ de_1 &= \Omega_1^2 e_2 + \Omega_1^3 e_3 + \Omega_1^4 e_4 + \Omega_1^5 e_5; \\ de_2 &= \Omega_2^3 e_3 + \Omega_2^4 e_4; \\ de_3 &= -\Omega_2^3 e_2 + \Omega_3^4 e_4; \\ de_4 &= -\Omega_2^4 e_3 - \Omega_3^4 e_3; \\ de_5 &= -\Omega_1^5 e_1 + \Omega_2^5 e_2 + \Omega_3^5 e_3 + \Omega_4^5 e_4. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Дифференцирование внешним образом основных соотношений [5]

$$\omega^3 = \omega^4 = 0$$

после применения леммы Картана дает

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= A \omega_1^1 + B \omega^2; & \omega_1^4 &= H \omega^1 + E \omega^2; \\ \omega_2^3 &= B \omega^1 + C \omega^2; & \omega_2^4 &= E \omega^1 + F \omega^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Дифференцирование соотношения $\omega^5 = 0$ дает

$$\omega_1^5 = G \omega^1; \quad (1.3)$$

то есть $\pi_1^5 = 0$. Заметим еще, что так как $D\omega^1 = 0$, то есть $\omega^1 = du$, то отсюда следует, что $G = G(u)$.

Из (1.2) обычным способом [5] получаем следующую зависимость коэффициентов от вторичных параметров:

$$\begin{aligned}\delta A &= 2B\pi_1^2 + H\pi_3^4 - G\pi_5^3; \\ \delta B &= C\pi_1^2 + E\pi_3^4; \quad \delta C = F\pi_3^4; \\ \delta H &= 2E\pi_1^2 + A\pi_3^4 - G\pi_5^4; \\ \delta E &= F\pi_1^2 - B\pi_3^4; \quad \delta F = -C\pi_3^4,\end{aligned}\tag{1.4}$$

где δ — знак дифференцирования по вторичным параметрам, а π — соответствующие дифференциальные формы. Из (1.3) следует

$$\delta G = 0.$$

Прежде всего проведем фиксацию

$$\pi_3^4 = 0; \quad F = 0; \quad C \neq 0.\tag{1.5}$$

Затем, исключив π_1^2 из (1.4), получим

$$\begin{aligned}\delta(AC - B^2) &= -CG\pi_5^3; \\ \delta(CH - 2BE) &= -CG\pi_5^4.\end{aligned}\tag{1.6}$$

При этом, естественно, следует считать, что пока

$$ABHE \neq 0.\tag{1.7}$$

Проводим следующую фиксацию:

$$\pi_5^3 = 0; \quad AC - B^2 = 0; \quad G \neq 0;\tag{1.8}$$

$$\pi_5^4 = 0; \quad CH - 2BE = 0.\tag{1.9}$$

Теперь формы Ω_3^4 , Ω_5^3 , Ω_5^4 становятся главными, т. е.

$$\begin{aligned}\omega_3^4 &= K\omega^1 + L\omega^2; \quad \omega_5^3 = M\omega^1 + N\omega^2; \\ \omega_5^4 &= P\omega^1 + Q\omega^2,\end{aligned}\tag{1.10}$$

а величины C , G , E — инвариантами поверхности.

Дифференцируя равенства (1.2) внешним образом с учетом (1.5) и применяя лемму Картана, получаем

$$\begin{aligned}dA - 2B\Omega_1^2 - H\omega_3^4 + G\omega_5^3 &= a_1\omega^1 + b_1\omega^2; \\ dB - C\Omega_1^2 - E\omega_3^4 &= b_1\omega^1 + c_1\omega^2; \\ dH - 2E\Omega_1^2 + A\omega_3^4 + G\omega_5^4 &= a_2\omega^1 + b_2\omega^2; \\ dE + B\omega_3^4 &= b_2\omega^1 + CK\omega^2; \\ dC &= c_1\omega^1 + c_2\omega^2.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Заметим еще, что из (1.8) и (1.9) следует, что

$$BH = 2AE.\tag{1.12}$$

Среди пяти соотношений (1.11) только три независимых в силу (1.8) и (1.9).

Обычным образом из (1.10) и (1.11) получаем

$$\begin{aligned}\delta b_1 &= 2c_1 \pi_1^2 + CG \pi_5^2; \\ \delta c_1 &= c_2 \pi_1^2; \delta c_2 = 0; \delta K = L \pi_1^2; \delta L = 0.\end{aligned}$$

Исключая π_1^2 , получаем

$$\delta(c_2 b_1 - c_1^2 + c_2 EK - c_1 EL) = c_2 CG \pi_5^2, \quad (1.13)$$

что позволяет провести фиксацию

$$\pi_5^2 = 0; c_2 b_1 - c_1^2 + E(c_2 K - c_1 L) = 0, c_2 \neq 0. \quad (1.14)$$

Теперь можно положить

$$\omega_5^2 = s_1 \omega^1 + s_2 \omega^2. \quad (1.15)$$

Оставшийся вторичный параметр, которому соответствует полу-вторичная форма π_1^2 , будем считать произвольной функцией главных, т. е. отнесем поверхность к произвольному, не фиксированному семейству $\omega^2 = 0$. Тогда можно положить

$$\omega_1^2 = \alpha \omega^1 + \beta \omega^2. \quad (1.16)$$

Дифференцируя соотношения (1.8) и (1.9) и подставляя значения дифференциалов из (1.11) и форм из (1.10), получаем два уравнения Пфаффа:

$$X \omega^1 + Y \omega^2 = 0; Z \omega^1 + U \omega^2 = 0, \quad (1.17)$$

которые должны выполняться тождественно, т. е. дадут четыре конечных соотношения:

$$\begin{aligned}X &\equiv Ac_1 + C(HK - GM + a_1) - 2B(EK - b_1) = 0; \\ Y &\equiv ACK + C(HL - GN + b_1) - 2B(EL - c_1) = 0; \\ Z &\equiv Hc_1 + C(a_2 - AK - GP) - 2E(EK + b_1) + 2B(BK - b_2) = 0; \\ U &\equiv HCK + C(b_2 - AL - GQ) - 2E(EL + c_1) + 2B(BL - CK) = 0.\end{aligned} \quad (1.18)$$

Основная система внешних дифференциальных уравнений поверхности для полуканонического репера получается замыканием уравнений (1.3), трех уравнений из (1.11) и уравнений (1.10), (1.15) и (1.16). Она имеет вид

$$\begin{aligned}[da_1 \omega^1] + [db_1 \omega^2] &= W_1 [\omega^1 \omega^2]; \\ [da_2 \omega^1] + [db_2 \omega^2] &= W_2 [\omega^1 \omega^2]; \\ [dc_1 \omega^1] + [dc_2 \omega^2] &= W_3 [\omega^1 \omega^2]; \\ [dG, \omega^1] &= 0; \\ [dK, \omega^1] + [dL, \omega^2] &= W_4 [\omega^1 \omega^2]; \\ [dM, \omega^1] + [dN, \omega^2] &= W_5 [\omega^1 \omega^2]; \\ [dP, \omega^1] + [dQ, \omega^2] &= W_6 [\omega^1 \omega^2]; \\ [ds_1 \omega^1] + [ds_2 \omega^2] &= W_7 [\omega^1 \omega^2]; \\ [d\alpha, \omega^1] + [d\beta, \omega^2] &= W_8 [\omega^1 \omega^2],\end{aligned} \quad (1.19)$$

где $W_1, \dots, W_8$ — несущественные коэффициенты.

Теперь

$$D \omega^1 = 0; D \omega^2 = \beta [\omega^1 \omega^2]. \quad (1.20)$$

Дифференцируя равенства (1.14) и (1.18), мы получим линейные выражения пяти из дифференциалов $db_1, db_2, dc_1, dc_2, da_1, da_2, dK,$

dL, dM, dN, dP, dQ через дифференциалы остальных неизвестных функций и сможем привести систему (1.19) к стандартному виду. Например, можно db_1, db_2, dc_1, dP, dM выразить через остальные дифференциалы. Тогда определится произвол решения получившейся стандартной системы — три функции двух аргументов, из которых одна определяет произвол задания линии $\omega^2=0$, а две — произвол задания поверхности.

Выясним геометрическое строение векторов репера. Вектор e_2 является касательным вектором к единственной изотропной линии $\omega^1=0$, проходящей через точку x поверхности. Вектор e_1 — касательный к произвольной фиксированной линии на поверхности.

Индикатриса нормальной кривизны [3] является для поверхности V_2^1 в общем случае параболой. Ее векторно-параметрическое уравнение имеет вид

$$k_n = b_{11} + 2tb_{12} + t^2b_{22}, \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= Ae_3 + He_4 + Ge_5; \\ b_{12} &= Be_3 + Ee_4; \quad b_{22} = Ce_3 + Fe_4. \end{aligned}$$

Из (1.5), (1.8), (1.9) и (1.21) следует, что в $N_3(x)$ вектор e_3 имеет направление диаметров параболы, а плоскость индикатрисы задается уравнением $y^5=G$, т. е. параллельна плоскости $\{e_3, e_4\}$.

Так как векторы e_2, e_3 и e_4 лежат в трехмерном евклидовом пространстве, то вектор e_4 можно определить как векторное произведение векторов e_2 и e_3 .

Вершина M параболы имеет в $N_3(x)$ координаты $(0, 0, G)$. Следовательно, вектор e_5 является направляющим вектором прямой $\{x, M\}$. Однако сама 3-плоскость $N_3(x)$ еще полностью не определена, так как не выяснено значение фиксации (1.14).

Для завершения геометрической характеристики репера найдем фокусную поверхность для конгруэнции, образованной плоскостями $r = x + y^1e_1 + y^2e_2 + y^5e_5$. Для этого потребуем, чтобы

$$d(x + y^1e_1 + y^2e_2 + y^5e_5) \parallel \{e_1, e_2, e_5\}$$

и получим уравнение фокусной поверхности

$$\begin{vmatrix} Ay^1 + By^2 + My^5 & By^1 + Cy^2 + Ny^5 \\ Hy^1 + Ey^2 + Py^5 & Ey^1 + Qy^5 \end{vmatrix} = 0.$$

Она пересекает касательную плоскость по линии, уравнение которой с учетом (1.12) имеет вид

$$y^3 = y^4 = y^5 = 0; \quad \sqrt{Ay^1} + \sqrt{Cy^2} = 0. \quad (1.22)$$

Возьмем вектор-функцию

$$R = Ce_1 - Be_2, \quad (1.23)$$

радиус-вектор которой (относительно начала репера) параллелен линии (1.22) и нормирован так, что его длина равна C (плоскость — флаговая), т. е. длине вектора b_{22} нормальной кривизны [6] изотропной координатной линии. Вдоль линии $\omega^1:\omega^2$ на поверхности проекция касательной dR годографа (1.23) имеет направление

$$(c_1\omega^1 + c_2\omega^2)e_1 - \{(EK + b_1)\omega^1 + (EL + c_1)\omega^2\}e_2.$$

Это направление не будет зависеть от $\omega^1:\omega^2$ (т. е. будет одинаково для

всех линий на поверхности) только в том случае, если выполнено условие (1.14). Этим полностью характеризуется последняя фиксация, т. е. выбор нормальной плоскости.

Положив в деривационных формулах полуканонического репера поверхности $\omega^2=0$, получим с учетом (1.8) и (1.9) следующие деривационные формулы репера линии на поверхности:

$$\begin{aligned}x' &= e_1; \\e_1' &= k_g e_2 + \frac{x^2}{C} e_3 + 2 \frac{E}{C} e_4 + G e_5; \\e_2' &= x e_3 + E e_4; \\e_3' &= -x e_2 + \xi e_4; \\e_4' &= -E e_2 - \xi e_3; \\e_5' &= -G e_1 + \tau e_2 + \mu e_3 + \nu e_4,\end{aligned}\tag{1.24}$$

где

$$e' = \frac{de}{ds}; \quad k_g = \alpha|_{\omega^2=0}; \quad x = B|_{\omega^2=0}; \tag{1.25}$$

$$\xi = K|_{\omega^2=0}; \quad \sigma = S_1|_{\omega^2=0}; \quad \mu = M|_{\omega^2=0}; \quad \nu = P|_{\omega^2=0};$$

а C , E и G — инварианты поверхности.

Заметим, что так как $[dG, \omega^1]=0$, то значение инварианта G будет одним и тем же для всех изотропных кривых $\omega^1=0$, пересекающих фиксированную линию $\omega^2=0$.

Выясним геометрическое значение инвариантов линии. Очевидно, что k_g является геодезической кривизной линии [3], т. е. проекцией вектора e_1' на касательную плоскость. Вектор нормальной кривизны линии имеет вид

$$k_n = \frac{x^2}{C} e_3 + 2 \frac{E x}{C} e_4 + G e_5. \tag{1.26}$$

Остальные коэффициенты можно охарактеризовать, используя графы вектор-функций $e_2(s)$, ..., $e_5(s)$.

Обычным способом [5, с. 140] получим вычислительные формулы для инвариантов линии на поверхности в терминах полуканонического репера:

$$\begin{aligned}k_g &= \frac{\alpha \omega^1 + \beta \omega^2}{ds} + \frac{\omega^2 d \omega^1 - \omega^1 d \omega^2}{ds^3}; \\x &= \frac{B \omega^1 + C \omega^2}{ds}; \quad \xi = \frac{K \omega^1 + L \omega^2}{ds}; \\ \nu &= \frac{P \omega^1 + Q \omega^2}{ds}; \quad \mu = \frac{M \omega^1 + N \omega^2}{ds}; \\ \tau &= \frac{S_1 \omega^1 + (G + S_2) \omega^2}{ds}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Отсюда следует, что инвариант k_g зависит от вторых дифференциалов первичных параметров, остальные — от первых.

Как известно [6, 3], линии кривизны характеризуются перпенди-

кулярностью векторов $b_{12} = \kappa e_3 + E e_4$ и $b_{22} = C e_3$. Поэтому $\kappa = 0$ является натуральным уравнением линии кривизны. В силу (1.26) линии кривизны обладают еще таким свойством: вектор нормальной кривизны параллелен вектору e_5 . При $C = 0$ они не определены.

Обращая в нуль остальные инварианты линии, получаем следующие классы линий на поверхности: 1) $k_g = 0$ — геодезические, т. е. линии, для которых пересечение соприкасающейся плоскости с нормальной есть прямая; 2) $\xi = 0$ — касательные к годографам вектор-функций $e_3(s)$ и $e_4(s)$ параллельны вектору e_2 ; 3) $\sigma = 0$ — касательная к годографу вектор-функции $e_5(s)$ параллельна координатной плоскости $\{e_1, e_3, e_4\}$; 4) $\mu = 0$ — касательная к годографу вектор-функции $e_5(s)$ параллельна координатной плоскости $\{e_1, e_2, e_4\}$; 5) $\nu = 0$ — касательная к линии, описываемой вершиной индикатрисы нормальной кривизны, параллельна плоскости $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Потребовав, чтобы линии $\omega^2 = 0$ стали линиями $\mu = 0$, или $\nu = 0$, или $\xi = 0$, мы превратим полуканонический репер в канонический. При этом в системе (1.19) после подстановки соответственно $M = 0$, $P = 0$ или $K = 0$ сохранится возможность превращения ее в стандартную при помощи равенств (1.14) и (1.18) с понижением произвола решения на одну функцию двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности V_2^1 в R_5^2 , установленному в [3].

Накладывая на линии $\omega^2 = 0$ два или более условий, мы будем получать частные классы поверхностей V_2^1 . Приведем несколько примеров.

Рассмотрим инвариантно связанную с линией $\omega^2 = 0$ 3-плоскость $(R - x, e_1, e_3, e_5) = 0$, содержащую касательную к линии, радиус-вектор вершины и ось индикатрисы кривизн (1.21). Характеристикой этой плоскости при смещении по линии $\omega^2 = 0$ является в общем случае прямая

$$\begin{aligned} 2E \kappa x_1 + C \xi x_3 + C \nu x_5 &= 0; \\ k_g x_1 - \kappa x_3 + \delta x_5 &= 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Определим поверхность, несущую семейство линий $\omega^2 = 0$, вдоль которого характеристика становится 2-плоскостью. Такие линии имеют натуральные уравнения $2E\kappa^2 + C\xi k_g = \xi\sigma + \nu\kappa = 0$. Для поверхности в силу (1.25) получим

$$\alpha = 2 \frac{EB^2}{CK}; \quad s_1 = -\frac{PB}{K}. \quad (1.29)$$

Присоединение этих соотношений к системе (1.19) не нарушает ее стандартности, но снижает произвол решения на две функции одного аргумента. Итак, указанные линии существуют только на поверхностях (1.29), определяемых с произволом одной функции одного аргумента. Сами линии определяются уравнением $\xi\sigma + \nu\kappa = 0$, которое в силу (1.27) — первого порядка.

Другой класс поверхностей получится, если мы потребуем параллельность прямой (1.28) вектору e_5 . Это дает $\nu = \sigma = 0$, затем $s_1 + P = 0$ и вместе с (1.19) определяет широту класса: одна функция двух аргументов.

Наконец, потребуем, чтобы характеристика (1.28) стала 2-плоскостью, проходящей через прямую, параллельную вектору e_5 . Тогда надо добавить еще одно уравнение: $2E\kappa^2 + C\xi k_g = 0$, которое приведет к первому из уравнений (1.29). Вместе с $s_1 = P = 0$ и системой (1.19) оно определит класс поверхностей, широта которого — 9 функций одного аргумента.

Аналогичные рассмотрения можно провести и для семейства плоскостей $(R-x, e_1, e_4, e_5)=0$ и получить еще три класса поверхностей V_2^1 .

Оставляя на будущее детальное исследование отмеченных классов поверхностей V_2^1 и других вопросов теории этих поверхностей при помощи построенного аппарата, рассмотрим теперь исключенные при репераже случаи.

2. Исключенные при репераже классы поверхностей. В процессе репеража условиями (1.5), (1.7) и (1.8) мы исключили из рассмотрения некоторые классы поверхностей. Однако не все эти условия имеют инвариантный характер. Рассматривая формулы (1.4), мы находим следующие инварианты:

$$I_1=G; I_2=BF-CE; I_3=C^2+F^2. \quad (2.1)$$

Обращение в нули этих инвариантов связано с существованием сопряженной сети на поверхности, которая, как известно [7], определяется аннуляцией асимптотических форм:

$$\begin{aligned} A(\omega^1)^2+2B\omega^1\omega^2+C(\omega^2)^2 &=0; \\ H(\omega^1)^2+2E\omega^1\omega^2+F(\omega^2)^2 &=0; \\ G(\omega^1)^2 &=0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если $I_3=0$ трактовать как $C=F=0$, то на всех определяемых аннуляцией инвариантов (2.1) поверхностях существует сопряженная сеть. Кроме того, от инвариантов (2.1) зависит строение и расположение (относительно поверхности) индикатрисы (1.21).

Теорема 1. Поверхность $I_1=0, I_2I_3 \neq 0$ принадлежит четырехмерному галилееву пространству Γ_4 и является там поверхностью общего вида (т. е. несет сопряженную сеть и имеет невырожденную индикатрису кривизн).

Доказательство непосредственно следует из формул (1.3), (1.1), (1.2) и (2.2).

Теорема 2. Поверхность $I_2=0, I_1I_3 \neq 0$ есть многообразие Картана, имеющее соприкасающееся пространство R_4^2 и сопряженную сеть, состоящую из плоских изотропных и цилиндрических линий. Широта класса — одна функция двух аргументов.

Доказательство. Если снова провести фиксацию репера $F=0, C \neq 0, \pi_3^4=0$ (что возможно в силу $I_3 \neq 0$), то получится $E=0$. Оставшиеся (1.4) вторичные формы фиксируются так:

$$\pi_5^4=\pi_1^2=\pi_5^3=0; H=B=A=0. \quad (2.3)$$

Положив $\omega_1^2=\alpha\omega^1+\beta\omega^2$, закончим фиксацию репера так: $\pi_5^2=0, \alpha=0$. Далее обычным путем получаем деривационные формулы:

$$\begin{aligned} dx &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2; & de_1 &= \beta \omega^2 e_2 + G \omega^1 e_5; \\ de_2 &= C \omega^2 e_3; & de_3 &= -C \omega^2 e_2 + K \omega^1 e_4; \\ de_4 &= -K \omega^1 e_3; & de_5 &= -G \omega^1 e_1 + \\ & + (s_1 \omega^1 + s_2 \omega^2) e_2 + M \omega^1 e_3 + P \omega^1 e_4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

и стандартную систему внешних дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} [d\beta, \omega^2] &= W_1[\omega^1, \omega^2], [dG, \omega^1] = 0; \\ [dC, \omega^2] &= W_2[\omega^1, \omega^2], [dK, \omega^1] = W_3[\omega^1, \omega^2]; \\ [dM, \omega^1] &= W_4[\omega^1, \omega^2], [dP, \omega^1] = W_5[\omega^1, \omega^2]; \\ [ds_1 \omega^1] &+ [ds_2 \omega^2] = W_6[\omega^1, \omega^3]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

которая определяет широту класса. Из (2.4) видно, что d^2x принадлежит 4-плоскости $(r-x, e_1, e_2, e_3, e_5)=0$, откуда следует, что соприкасающееся пространство есть R_4^2 , а из (2.2) получим уравнения сопряженной сети $\omega^1\omega^2=0$. Линии $\omega^1=0$ — плоские, так как $d^2x/\omega^1=0 \in \{e_1, e_2, e_3\}$, а линии $\omega^2=0$ — цилиндрические, так как $de_2/\omega^2=0=0$. Теорема доказана.

Сеть $\omega^1\omega^2=0$ на поверхности класса $I_2=0$ является аналогом классической сети Кенигса [8, с. 85].

Для дальнейшего важно, что обращение в нуль инварианта $I_2=0$ всегда влечет обращение индикатрисы кривизн (1.21) в прямую.

Так как обращение инварианта I_3 в нуль влечет $C=F=0$, т. е. $I_2=0$, то следующая теорема описывает случай, исключенный в предыдущей. При этом из (1.4) следует, что при $I_2=I_3=0$ появляется новый инвариант

$$I_4=B^2+E^2, \quad (2.6)$$

в дальнейшем возникает еще один

$$I_5=K^2+N^2. \quad (2.7)$$

Теорема 3. Поверхность $C=F=0$, т. е. $I_2=I_3=0$, $I_1I_4I_5 \neq 0$ есть многообразие Картана с полуевклидовым соприкасающимся пространством R_4^2 и изотропными прямолинейными образующими. Широта класса — пять функций одного аргумента.

Доказательство. В этом случае формулы (1.4) дают возможность провести фиксацию

$$\pi_3^4=\pi_5^3=0; B=A=0; E \neq 0.$$

Тогда

$$\omega_1^3=\omega_2^3=0; \omega_1^4=H\omega^1+E\omega^2; \quad (2.8)$$

$$\omega_2^4=E\omega^1; \omega_3^4=K\omega^1+L\omega^2; \omega_5^3=M\omega^1+N\omega^2.$$

Поэтому $de_2=E\omega^1e_4$, т. е. линии $\omega^1=0$ становятся изотропными образующими. Из (2.2) следует, что сеть $\omega^1\omega^2=0$ — сопряженная, а из $\omega_2^3=0$ вытекает $d^2x \in \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, т. е. соприкасающееся пространство есть R_4^2 . Для определения широты класса продолжим фиксацию репера. От (1.4) осталось одно соотношение

$$\delta H=2E\pi_1^2-G\pi_5^4. \quad (2.9)$$

Дифференцируя внешним образом (2.8), мы после обычной процедуры получим новый инвариант N , так как $\delta N=0$, равенства

$$L=KE+GN=0 \quad (2.10)$$

и соотношение

$$\delta M=N\pi_1^2-K\pi_5^4. \quad (2.11)$$

Мы имеем возможность завершить фиксацию репера

$$\pi_1^2=\pi_5^4=0; H=M=0 \quad (2.12)$$

при условии $2EK-NG=0$. В силу (2.10) это условие сводится к предположению

$$I_5=K^2+N^2 \neq 0. \quad (2.13)$$

Из (2.12) следует, что

$$\omega_1^2=\alpha\omega^1+\beta\omega^2; \omega_5^4=P\omega^1+Q\omega^2, \quad (2.14)$$

Последняя фиксация дает $\pi_5^2=0$, $\alpha=0$ и

$$\omega_5^2=s_1\omega^1+s_2\omega^2. \quad (2.15)$$

Вместо (1.19) получаются три уравнения Пфаффа

$$\begin{aligned} dE &= (GQ - 2E\beta)\omega^1; \quad dN = (KQ - N\beta)\omega^1; \\ d\beta &= (Gs_2 + E - \beta^2)\omega^1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

и пять квадратичных уравнений

$$\begin{aligned} [dG, \omega^1] &= 0; \quad [dQ, \omega^1] = 0; \quad [ds_2, \omega^1] = 0; \\ [ds_1, \omega^1] + [ds_2, \omega^2] &= -s_2\beta[\omega^1, \omega^2]; \\ [dP, \omega^1] + [dQ, \omega^2] &= (GE - NK - s_2E - Q\beta)[\omega^1, \omega^2]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Система (2.17) — стандартная и дает искомую широту класса. Теорема доказана.

Теорема 4. Поверхности $I_2=I_3=I_5=0$, $I_1I_4 \neq 0$ (т. е. $K=N=C=F=0$) выделяются из изотропных линейчатых поверхностей, описанных в теореме 3, тем, что прямые $r=Ge_5+\lambda e_4$ (выродившиеся индикатрисы) перпендикулярны постоянному вектору e_3 . Широта класса — шесть функций одного аргумента.

Доказательство. Постоянство вектора e_3 следует из $\omega_3^2=\omega_3^4=0$, что вытекает из (1.2), (1.10) и условий теорем 3 и 4, а уравнение индикатрисы из (1.21). Широта класса определяется тем, что уравнения структуры принимают вид

$$\begin{aligned} [dG, \omega^1] &= [dM, \omega^2] = [\Delta\beta, \omega^2] = [\Delta Q, \omega^1] = 0; \\ [dP, \omega^1] + [dQ, \omega^2] &= W_1[\omega^1\omega^2]; \quad [ds_2, \omega^2] = W_2[\omega^1\omega^2], \end{aligned}$$

где значения коэффициентов W_1 , W_2 опять несущественны. Теорема доказана.

Для полного исследования исключенных классов осталось рассмотреть еще один случай.

Теорема 5. Поверхность $B=F=C=E=0$, т. е. $I_2=I_3=I_4=0$, $I_1 \neq 0$ есть цилиндр с изотропными образующими.

Доказательство. Из (1.4) теперь имеем $\delta A = H\pi_3^4$, $\delta H = -A\pi_3^4 - G\pi_5^4$. Так как $I_1=G \neq 0$, то возможна фиксация $\pi_5^4=\pi_3^4=0$, $A=H=0$. Тогда вместо (1.3) получаем $\omega_1^3=\omega_1^4=\omega_2^3=\omega_2^4=0$.

Отсюда следует $de_2=0$, т. е. линии $\omega^1=0$ являются изотропными параллельными прямыми. Теорема доказана.

Замечание. Для цилиндра, естественно, полная канонизация репера невозможна, но легко найти дериивационные формулы направляющей:

$$x'=e_1; \quad e_1'=Ge_5; \quad e_5'=-Ge_1+\mu e_3; \quad e_3'=\xi e_4; \quad e_4'=-\xi e_3.$$

Отсюда видно, что это — общая кривая в R_4^1 . Следовательно, широта класса — три функции одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Широбакина Н. В. К геометрии двумерных непараболических поверхностей в пятимерном полуевклидовом пространстве R_5^2 . — Геометр. сб., 21. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 37—44.

2. Широбакина Н. В. Двумерные непараболические поверхности в R_5^2 с вы-
рождающейся индикатрисой нормальной кривизны.— Геометр. сб., 22. Томск: Изд-во
Томск. ун-та, 1981, с. 84—91.
 3. Широбакина Н. В. О двумерных поверхностях в пятимерных полуев-
клидовых пространствах R_5^m .— Геометр. сб., 24. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983.
 4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства.— М.: Наука, 1969.— 548 с.
 5. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой геометрии.—
Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973.— 236 с.
 6. Сдвижков О. А. Геометрия поверхности $V_m^{m_1, \dots, m_{a-1}}$ в $R_n^{m_1, \dots, m_{r-1}}$. — Гео-
метр. сб., 20. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1979, с. 60—69.
 7. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин:
Изд-во Калининского ун-та, 1977.— 84 с.
 8. Норден А. П. Теория поверхностей.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 261 с.
-

О. А. СДВИЖКОВ

АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ ГАУССА—БОННЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЫРОЖДЕННЫМИ МЕТРИКАМИ

Пусть в одном из пространств Γ_3 , F_3 , I_3 (см. [2]) задана регулярная ориентированная поверхность Φ , имеющая непараболические [2] касательные плоскости, и на ней треугольная область S , ограниченная кусочно-регулярным контуром, состоящим из дуг γ_1 , γ_2 , γ_3 , имеющих касательные 1-го порядка [2]. Обозначим $\gamma_{k-1} \cap \gamma_k = A$, где $\gamma_0 = \gamma_3$, $k=1, 2, 3$, и присоединим к Φ подвижной правый адаптированный репер, состоящий из единичных векторов, ориентация вектора $\bar{e}_3$ которого индуцирована ориентацией поверхности.

Геодезическая кривизна k_g линии на поверхности Φ , имеющей касательные 1-го порядка, может быть вычислена по формуле

$$k_g = \frac{d\alpha + \omega_1^2}{ds},$$

где $\alpha = \frac{\omega_1^2}{\omega^1}$ — ориентированный угол от вектора $\bar{e}_1$ до касательного вектора к данной линии в рассматриваемой точке. Поэтому

$$\oint_{\partial S} k_g ds = \oint_{\partial S} d\alpha + \oint_{\partial S} \omega_1^2. \quad (1)$$

Так как в случае пространств F_3 и I_3 : $d\omega_1^2 = 0$, где d — символ внешнего дифференцирования, а в случае пространства Γ_3 : $d\omega_1^2 = -Kd\sigma$, где K — полная кривизна поверхности, то из равенства (1) в пространствах F_3 и I_3 имеем

$$\oint_{\partial S} k_g ds = \oint_{\partial S} d\alpha, \quad (2)$$

а в пространстве Γ_3

$$\iint_{(S)} K d\sigma + \oint_{\partial S} k_g ds = \oint_{\partial S} d\alpha. \quad (3)$$

В пространстве I_3 угол между векторами 1-го порядка является евклидовым и поэтому из (2) можно обычным образом [1] получить, что

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} k_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \theta_i, \quad (4)$$

где θ_i — ориентированные углы в вершинах A между направляющими векторами дуг γ_{i-1} и γ_i . Равенство (4) является аналогом формулы Гаусса—Бонне для треугольной области $S \subset I_3$.

В пространствах F_3 и Γ_3 угол между векторами 1-го порядка флаговый, а поэтому α — однозначная функция. Это позволяет, в отличие от предыдущего случая, вычислить правые части равенств (2) и (3) непосредственным интегрированием. Достаточно учесть, что для однозначной функции $\int \alpha$ не зависит от пути интегрирования, а только

от начальной и конечной точек. В результате получаем следующие аналоги формулы Гаусса—Бонне:

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 0, \quad \Phi \subset F_3; \quad (5)$$

$$\iint_{(S)} K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 0, \quad \Phi \subset \Gamma_3. \quad (6)$$

Если обозначить через α, β, γ неориентированные углы при вершинах A_1, A_2, A_3 , то в предположении, что через вершину A_3 , в случае пространств F_3 и Γ_3 , проходит линия второго порядка, имеющая с ∂S еще хотя бы одну общую точку, равенства (4), (5), (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} k_g ds &= \alpha + \beta + \gamma - \pi; \\ \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} k_g ds &= \sigma + \beta - \gamma; \\ \iint_{(S)} K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} k_g ds &= \sigma + \beta - \gamma. \end{aligned}$$

Отсюда без труда можно получить ряд следствий, аналогичных $S \subset \Phi \subset R_3$. В случае n -угольной жордановой области S можно провести триангуляцию и применить полученные формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». — М.: Наука, 1973. — 440 с.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969. — 548 с.

В. Б. ЦЫРЕНОВА

КОМПЛЕКСЫ В ТРЕХМЕРНОМ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Комплексы в трехмерном евклидовом, проективном и некоторых неевклидовых пространствах достаточно изучены (см. [1, 2, 5]). В данной работе рассмотрены комплексы прямых в трехмерном квазиэллиптическом пространстве. Построен и геометрически охарактеризован канонический репер для комплекса, найдены геометрические значения всех инвариантов, образующих полную систему, и двух основных квадратичных форм комплекса. Рассмотрены некоторые частные классы комплексов. Используется терминология работы [3].

§ 1. Канонический репер комплекса

Включим элемент в репер, то есть точки A_0 и A_1 репера совместим с какими-либо двумя точками луча комплекса, тогда получим

$$\pi_0^2 = \pi_0^3 = \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0,$$

то есть

$$\Omega_0^2 = \omega_0^2, \Omega_0^3 = \omega_0^3, \Omega_1^2 = \omega_1^2, \Omega_1^3 = \omega_1^3. \quad (1.1)$$

Так как формы ω_i^j линейно зависят от трех дифференциалов du^1, du^2, du^3 , то исключение последних из (1.1) приведет к следующему основному соотношению [1]:

$$\alpha\Omega_0^2 + \beta\Omega_0^3 + \gamma\Omega_1^2 + \delta\Omega_1^3 = 0. \quad (1.2)$$

Потребуем, чтобы $[\Omega_0^3 \Omega_1^3] \neq 0$. Так как формы Ω_0^2 и Ω_1^2 пока равноправны, запишем (1.2) в виде

$$\Omega_1^2 = \xi\Omega_0^2 + \eta\Omega_0^3 + \zeta\Omega_1^3. \quad (1.3)$$

Внешнее дифференцирование последнего (с учетом уравнений структуры) дает

$$\begin{aligned} & [d\xi + (\xi^2 + 1)\Omega_0^1 - (\eta + \xi\zeta)\Omega_2^3, \Omega_0^2] + \\ & + [d\eta + (\xi\eta - \zeta)\Omega_0^1 + (\xi - \zeta\eta)\Omega_2^3, \Omega_0^3] + \\ & + [d\zeta + (\xi\zeta + \eta)\Omega_0^1 - (1 + \zeta^2)\Omega_2^3, \Omega_1^3] = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Следовательно, вариация коэффициентов ξ, η, ζ определяется равенствами:

$$\begin{aligned}\delta\xi &= -(1+\xi^2)\pi_0^1 + (\xi\zeta + \eta)\pi_2^3; \\ \delta\eta &= (\zeta - \xi\eta)\pi_0^1 + (\zeta\eta - \xi)\pi_2^3; \\ \delta\zeta &= (-\xi\zeta - \eta)\pi_0^1 + (1+\zeta^2)\pi_2^3.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Накладывая на вторичные формы π_0^1 и π_2^3 два условия:

$$\pi_0^1 - \eta\pi_2^3 = 0; \quad \eta\pi_0^1 - \pi_2^3 = 0, \quad (1.6)$$

приведем к нулю коэффициенты ξ и ζ . Исключим из рассмотрения особый случай $\Delta = 1 - \eta^2 = 0$. В этом случае точно так же, как в [5], можно показать, что получается «клиффордов комплекс», который можно представить как однопараметрическое семейство линейных конгруэнций с мнимыми директрисами. Для такого комплекса имеют место все свойства клиффордова комплекса эллиптического пространства (см. [2, с. 264—267; 5, с. 93—96]). В общем же случае, т. е. при $\Delta \neq 0$, из (1.6) следует $\pi_0^1 = \pi_2^3 = 0$ и репер полностью канонизирован. Точки, с которыми совпадают в этом случае вершины A_0 и A_1 репера, назовем по аналогии с [2] центрами луча комплекса. Равенство (1.3) принимает вид

$$\Omega_1^2 = \eta \Omega_0^3.$$

Инвариант η назовем кривизной комплекса. Деривационные формулы канонического репера комплекса имеют вид

$$dA_0 = \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3; \quad (1.7)$$

$$dA_1 = -\omega_0^1 A_0 + \eta\omega_0^3 A_2 + \omega_1^3 A_3; \quad (1.8)$$

$$dA_2 = \omega_2^3 A_3; \quad dA_3 = -\omega_2^3 A_2,$$

где

$$\omega_0^1 = \xi_1 \omega_0^2 + \eta_1 \omega_0^3 + \zeta_1 \omega_1^3; \quad \omega_2^3 = \xi_2 \omega_0^2 + \eta_2 \omega_0^3 + \zeta_2 \omega_1^3. \quad (1.9)$$

Построенный канонический репер геометрически характеризуется тем, что в нормальной корреляции [1, 2] точкам A_0 и A_1 (центрам комплекса) соответствуют плоскости $A_0 A_1 A_2$ и $A_0 A_1 A_3$, полярно сопряженные относительно абсолюта, а точки A_2 и A_3 суть точки пересечения абсолютной прямой $A_2 A_3$ с плоскостями $A_0 A_1 A_2$ и $A_0 A_1 A_3$.

Условия вполнеинтегрируемости системы (1.8) дают основную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}[d\eta\omega_0^3] &= (\eta_1 - \eta\eta_2)[\omega_0^2\omega_0^3] + (\zeta_1 + \xi_2 - \eta\xi_1 - \eta\zeta_2)[\omega_0^2\omega_1^3] + \\ &\quad + (\eta_2 - \eta\eta_1)[\omega_0^3\omega_1^3]; \\ [d\xi_1\omega_0^2] + [d\eta_1\omega_0^3] + [d\zeta_1\omega_1^3] &= (-\xi_1^2\eta - \xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2 + \xi_1\zeta_1 + \\ &\quad + \eta\xi_2\zeta_1)[\omega_0^2\omega_1^3] + (-\eta_1\xi_1 - \eta_1\zeta_2)[\omega_0^2\omega_1^3] + (\xi_1\zeta_2 - \eta\xi_1\zeta_1 - \eta_1^2 - \\ &\quad - \zeta_1^2 - \eta\zeta_1\zeta_2)[\omega_0^3\omega_1^3]; \\ [d\xi_2\omega_0^2] + [d\eta_2\omega_0^3] + [d\zeta_2\omega_1^3] &= (-\eta\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 - \eta_2^2 + \\ &\quad + \xi_1\zeta_2 + \xi_2\zeta_2\eta)[\omega_0^2\omega_0^3] + (-\xi_1\eta_2 - \zeta_2\eta_2)[\omega_0^2\omega_1^3] + (\eta\xi_2\zeta_1 + \\ &\quad + \xi_2\zeta_2 - \eta_1\eta_2 - \zeta_1\zeta_2 - \eta\zeta_2^2)[\omega_0^3\omega_1^3].\end{aligned}\quad (1.10)$$

Из первого уравнения получаем конечное соотношение

$$\xi_1 = -\xi_2 + \eta\xi_1 + \eta\xi_2, \quad (1.11)$$

а само уравнение принимает вид

$$[d\eta - (\eta_1 - \eta_2)\omega_0^2 + (\eta_2 - \eta_1)\omega_1^3, \omega_0^3] = 0. \quad (1.12)$$

В силу (1.11) второе уравнение будет содержать только два независимых дифференциала, система (1.10) имеет стандартный вид [1] и произвол ее решения — одна функция трех аргументов.

Полная система инвариантов комплекса состоит из семи коэффициентов дериационных формул канонического репера $\eta, \xi_1, \eta_1, \xi_1, \xi_2, \eta_2, \xi_2$, связанных одним конечным соотношением (1.11). Из (1.12) и (1.10) следует, что

$$d\eta = (\eta_1 - \eta_2)\omega_0^2 + \eta_3\omega_0^3 + (\eta\eta_1 - \eta_2)\omega_1^3, \quad (1.13)$$

где η_3 — новая функция первичных параметров, также являющаяся инвариантом комплекса.

Геометрически кривизна η определяется через расстояние δ между псевдоцентрами, т. е. точками луча, сопряженными гармонически с центрами, причем соответствующие им в главной корреляции плоскости гармонически сопряжены с плоскостями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_1A_3$ репера (ср. [2, с. 262]). Имеем

$$\cos \delta = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}. \quad (1.14)$$

§ 2. Регулюсы, принадлежащие комплексу. Геометрическое значение инвариантов комплекса

Для регулюса

$$\omega_0^2 : \omega_0^3 : \omega_1^3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \quad (2.1)$$

абсцисса t горловой точки и параметр распределения θ находятся в виде [4]:

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2(\omega_0^2\omega_1^2 + \omega_0^3\omega_1^3)}{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2 - (\omega_1^2)^2 - (\omega_1^3)^2}; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{th} 2\theta = \frac{2(\omega_0^2\omega_1^3 - \omega_0^3\omega_1^2)}{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2 + (\omega_1^2)^2 + (\omega_1^3)^2}. \quad (2.3)$$

В каноническом репере эти формулы принимают вид

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\omega_0^3(\eta\omega_0^2 + \omega_1^3)}{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2 - (\omega_1^2)^2 - (\omega_1^3)^2}; \quad (2.2')$$

$$\operatorname{th} 2\theta = \frac{2(\omega_0^2\omega_1^3 - \eta(\omega_0^3)^2)}{(\omega_0^2)^2 + (\omega_0^3)^2 + (\omega_1^2)^2 + (\omega_1^3)^2}. \quad (2.3')$$

Рассмотрим торс, определяемый уравнениями $\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$. Фокус этого торса совпадает с центром A_0 луча; поэтому будем называть его, как обычно [1], центральным торсом. При $\xi_1 \neq 0$ дериационные формулы центрального торса $\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$ можно записать в виде

$$\frac{dA_0}{ds} = A_1, \frac{dA_1}{ds} = -A_0 + \frac{1}{\xi_1}A_3, \frac{dA_2}{ds} = \frac{\xi_2}{\xi_1}A_3, \frac{dA_3}{ds} = -\frac{\xi_2}{\xi_1}A_2, \quad (2.4)$$

где $ds = \xi_1\omega_1^3$.

Отсюда видно, что инварианты ξ_1 и ξ_2 суть радиус кривизны $\frac{1}{k_1}$ и произведение кручения k_2 и радиуса кривизны $\frac{1}{k_1}$ ребра возврата торса (центральной кривой комплекса). Если же $\xi_1=0$, то центральный торс является конусом с вершиной в точке A_0 .

Регулюс, определяемый уравнениями $\omega_0^2=\omega_1^3=0$, будем называть центральным, так как горловые точки его совпадают с центрами луча. Деривационные формулы этого регулюса будут иметь вид

$$\frac{dA_0}{ds}=\eta_1 A_1+A_3; \frac{dA_1}{ds}=-\eta_1 A_0+\eta A_2; \frac{dA_2}{ds}=\eta_2 A_3; \frac{dA_3}{ds}=-\eta_2 A_2, \quad (2.5)$$

где $ds=\omega_0^3$, т. е. они имеют такой же вид, что и деривационные формулы канонического репера эллиптического регулюса [3]. Следовательно, канонические реперы комплекса и центрального регулюса совпадают полностью, причем инварианты η_1 , η и η_2 являются соответственными инвариантами p , ρ и q центрального эллиптического регулюса.

Торс $\omega_0^3=\omega_1^3=0$ будем называть также центральным, так как его фокус совпадает с центром A_1 луча комплекса. Деривационные формулы его имеют вид (если $\omega_0^2=ds$):

$$\frac{dA_0}{ds}=\xi_1 A_1+A_2; \frac{dA_1}{ds}=-\xi_1 A_0; \frac{dA_2}{ds}=\xi_2 A_3; \frac{dA_3}{ds}=-\xi_2 A_2,$$

или, если $ds=\xi_1 \omega_0^2$; $A_0^*= -A_1$; $A_1^*=A_0$; $A_2^*=A_3$; $A_3^*=A_2$, вид

$$\frac{dA_0^*}{ds}=A_1^*; \frac{dA_1^*}{ds}=-A_0^*+\frac{1}{\xi_1} A_3^*; \frac{dA_2^*}{ds}=-\frac{\xi_2}{\xi_1} A_3^*; \frac{dA_3^*}{ds}=\frac{\xi_2}{\xi_1} A_2^*. \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что инварианты ξ_1 и ξ_2 суть радиус кривизны $\frac{1}{k_1}$ и произведение кручения k_2 и радиуса кривизны $\frac{1}{k_1}$ ребра возврата торса $\omega_0^3=\omega_1^3=0$.

Таким образом, рассмотрение трех простейших регулюсов (центрального регулюса и двух центральных торсов), как и в евклидовом пространстве [1], дает возможность получить геометрические характеристики для всех инвариантов комплекса, входящих в деривационные формулы канонического репера.

§ 3. Касательный и соприкасающийся линейный комплексы.

Две основные квадратичные формы комплекса

Найдем уравнение касательного линейного комплекса. Условие того, что линейный комплекс $\Sigma p_{ij} q_{ij}=0$ (p_{ij} — плюккеры координаты прямой) содержит луч $A_0 A_1$ запишем в терминах «плюккеры произведения»

$$Q * (A_0 A_1)=0; Q\{q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{12}, q_{23}, q_{31}\}, \quad (3.1)$$

откуда следует, что $q_{23}=0$. Чтобы получить остальные условия на коэффициенты q_{ij} , продифференцируем (3.1):

$$Q * \{\omega_0^2(A_2 A_1)+\omega_0^3(A_3 A_1)+\eta \omega_0^3(A_0 A_2)+\omega_1^3(A_0 A_3)\}=0.$$

Отсюда получим $q_{03} = q_{12} = q_{02} + \eta q_{31} = 0$. Один коэффициент q_{01} остается произвольным. Следовательно, получился пучок линейных комплексов. Уравнение его в каноническом репере имеет вид

$$q_{01}p_{23} - \eta q_{31}p_{31} + q_{31}p_{02} = 0,$$

или, если обозначить $q_{31} : q_{01} = \lambda : \mu$:

$$\lambda p_{23} - \mu \eta p_{31} + \mu p_{02} = 0. \quad (3.2)$$

Теперь будем искать линейный комплекс, касательный с комплексом в данном луче и соприкасающийся с некоторым регулюсом $\omega_0^2 : \omega_0^3 : \omega_1^3$, т. е. соприкасающийся линейный комплекс для регулюса комплекса. Для этого к условиям (3.1) и (3.2) присоединим условие

$$Q * \{(d^2 A_0, A_1) + 2(dA_0, dA_1) + (A_0, d^2 A_1)\} = 0.$$

В терминах канонического репера получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda : \mu} = & 2\lambda\{\omega_0^2\omega_1^3 - \eta(\omega_0^3)^2\} + \mu\{-\eta\omega_0^2\omega_2^3 + \eta\omega_0^3\omega_1^3 + \\ & + d\eta\omega_0^3 + \omega_0^2\omega_0^1 - \omega_1^3\omega_2^3\} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что для каждого регулюса $\omega_0^2 : \omega_0^3 : \omega_1^3$ можно найти единственное значение $\lambda : \mu$ из (3.3), т. е. в пучке (3.2) единственный соприкасающийся с ним линейный комплекс.

При $\mu = 0$ получаем торсы

$$\Phi_1 = \omega_0^2\omega_1^3 - \eta(\omega_0^3)^2 = 0, \quad (3.4)$$

а при $\lambda = 0$ получаем регулюсы

$$\Phi_2 = -\eta\omega_0^2\omega_2^3 + \eta\omega_0^3\omega_1^3 + \omega_0^2\omega_0^1 - \omega_1^3\omega_2^3 + \omega_0^3 d\eta = 0,$$

или в каноническом репере

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & (\xi_1 - \eta\xi_2)(\omega_0^2)^2 + \eta_3(\omega_0^3)^2 + (\eta\xi_1 - \xi_2)(\omega_1^3)^2 + \\ & + 2(\eta_1 - \eta\eta_2)\omega_0^2\omega_0^3 + (\eta\xi_1 - \xi_2)\omega_0^2\omega_1^3 + (\eta\eta_1 - \eta_2)\omega_0^3\omega_1^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, мы ввели в рассмотрение две основные квадратичные формы Φ_1 и Φ_2 теории комплексов. Геометрическое значение формы Φ_2 выясним в следующем параграфе.

§ 4. Сопряженные регулюсы. Точки прикосновения.

Точки симметрии. Главные регулюсы

Условие сопряженности регулюсов $\omega_0^2 : \omega_0^3 : \omega_1^3$ и $\tilde{\omega}_0^2 : \tilde{\omega}_0^3 : \tilde{\omega}_1^3$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}_1 = \omega_0^2\tilde{\omega}_1^3 + \tilde{\omega}_0^2\omega_1^3 - 2\eta\omega_0^3\tilde{\omega}_0^3 = 0. \quad (4.1)$$

Два сопряженных регулюса в комплексе, проходящих через данный луч, характеризуются гармонической сопряженностью их точек прикосновения, определяемых уравнением

$$t^2\eta\omega_1^3 + 2t\eta\omega_0^3 + \omega_0^2 = 0. \quad (4.2)$$

Точки прикосновения описывают на регулюсе две линии прикосновения.

Для выяснения геометрического значения сопряженности регулю-

сов относительно второй квадратичной формы получим аналоги точек симметрии [1] для пространства S_3^1 , заменяя требование перпендикулярности прямой l_2 к эллиптической прямой l_1 требованием евклидовости луча l_2 (т. е. пересечения с A_2A_3). Эти точки назовем квазиэллиптическими точками симметрии. На луче регулюса $\omega_0^2:\omega_0^3:\omega_1^3$ возьмем точку $M=A_0+tA_1$ и потребуем, чтобы касательная к этой линии пересекалась с абсолютной прямой A_2A_3 . Тогда уравнение линии (M) имеет вид

$$dt = -\omega_0^1(1+t^2). \quad (4.3)$$

Плоскость Π , соответствующая в нормальной корреляции точке M , огибает вдоль нашего регулюса торс, образующая l которого (соответствующая рассматриваемому лучу) есть прямая $\Pi \cap \Pi + d\Pi$ с уравнениями:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 + t \eta \omega_0^3)x^6 + (\omega_1^2 + t \eta \omega_1^3)x^1 + t \eta \omega_2^3 x^2 - \{d(t\eta) + \omega_2^3\}x^3 = 0, \\ x^2 + t \eta x^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь дифференциал вычисляется вдоль линии (4.3). Потребуем, чтобы прямая (4.4) пересекалась с абсолютной прямой. Тогда получаем

$$d(t\eta) + t^2 \eta^2 \omega_2^3 + \omega_2^3 = 0.$$

Учитывая (4.3), получаем уравнение для определения квазиэллиптических точек симметрии

$$(\eta \omega_0^1 - \eta^2 \omega_2^3)t^2 - t d\eta + \eta \omega_0^1 - \omega_2^3 = 0. \quad (4.5)$$

Вычислим сложное отношение определяемых этим уравнением двух точек симметрии $M_i = A_0 + t_i A_1$ и двух точек прикосновения другого регулюса $\tilde{\omega}_0^2:\tilde{\omega}_0^3:\tilde{\omega}_1^3 - \tilde{M}_i = A_0 + \tilde{t}_i A_1$ и потребуем, чтобы это отношение было равно -1 . Получается

$$\tilde{\Phi}_2 = \tilde{\omega}_0^3 d\eta + \tilde{\omega}_1^3 (\eta \omega_0^1 - \omega_2^3) + \tilde{\omega}_0^2 (\omega_0^1 - \eta \omega_2^3) = 0,$$

или, учитывая (1.9) и (1.13):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 = & (\xi_1 - \eta \xi_2) \omega_0^2 \omega_2^3 + \eta_3 \omega_0^3 \omega_2^3 + (\eta \xi_1 - \xi_2) \omega_1^3 \omega_1^3 + \\ & + (\eta_1 - \eta \eta_2) (\omega_0^2 \omega_0^3 + \omega_0^2 \omega_0^3) + (\eta \xi_1 - \xi_2) (\omega_0^2 \omega_1^3 + \omega_0^2 \omega_1^3) + \\ & + (\eta \eta_1 - \eta_2) (\omega_0^3 \omega_1^3 + \omega_0^3 \omega_1^3) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сравнивая (4.6) и (3.5), получаем, что сопряженность регулюсов относительно второй квадратичной формы комплекса характеризуется гармонической сопряженностью точек прикосновения одного из них с точками квазиэллиптической симметрии другого.

Главные регулюсы характеризуются тем, что у них точки симметрии совпадают с точками прикосновения (ср. [1]). Рассмотрим систему

$$\tilde{\Phi}_1 = 0; \tilde{\Phi}_2 = 0,$$

где $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ — билинейные формы, соответствующие квадратичным формам Φ_1 и Φ_2 . Если считать точку $\tilde{x}^0:\tilde{x}^1:\tilde{x}^2 = \tilde{\omega}_0^2:\tilde{\omega}_0^3:\tilde{\omega}_1^3$ заданной, то надо, чтобы система имела не меньше двух фундаментальных решений, т. е. чтобы ее ранг был равен единице. Тогда

$$(a^{ij} - sb^{ij})x_i = 0, \quad (4.7)$$

где a^{ij} — коэффициенты формы $\tilde{\Phi}_2$, b^{ij} — коэффициенты формы $\tilde{\Phi}_1$. Для

существования нетривиальных решений этой системы необходимо и достаточно, чтобы $\det \|a^{ij} - sb^{ij}\| = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \eta \xi_2 & \eta_1 - \eta \eta_2 & \eta \xi_1 - \xi_2 - s \\ \eta - \eta \eta_2 & \eta_3 + 2 \eta s & \eta \eta_1 - \eta_2 \\ \eta \xi_1 - \xi_2 - s & \eta \eta_1 - \eta_2 & \eta \xi_1 - \xi_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) — третьей степени относительно s . В общем случае оно дает три решения, подстановка которых в (4.7) и дает три главных регулюса.

Соприкасающийся линейный комплекс главного регулюса называется главным линейным комплексом (ср. [1]). Для нахождения его запишем уравнение (4.3) в виде

$$2 \lambda \Phi_1 + \mu \Phi_2 = 0, \quad (4.9)$$

подставим в него $x_0 : x_1 : x_2 = \omega_0^2 : \omega_1^3 : \omega_1^3$, найденные из (4.7), и затем найдем $\lambda : \mu$. При этом оказывается $\lambda : \mu = -s : 2$.

Главные регулюсы имеют (как и в евклидовом пространстве [1]) чисто проективное характеристическое свойство: только на них обе линии прикосновения являются асимптотическими. Если линия прикосновения — асимптотическая, то характеристика семейства плоскостей Π при перемещении вдоль этой линии будет содержать точку dM . Следовательно

$$\Pi \cdot dM = 0; \quad d \Pi \cdot dM = 0. \quad (4.10)$$

Первое равенство выполняется в силу (4.2). Второе равенство имеет вид

$$t^2(\eta \omega_0^1 - \eta^2 \omega_2^3) - t d \eta - \eta \omega_0^1 - \omega_2^3 = 0. \quad (4.11)$$

Потребуем совпадения последнего уравнения с уравнением линий прикосновения (4.2). Это дает дифференциальные уравнения главных регулюсов:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_0^1 - \eta \omega_2^3}{\omega_1^3} - \frac{(\eta \eta_2 - \eta_1) \omega_0^2 - \eta_3 \omega_0^3 + (\eta_2 - \eta \eta_1) \omega_1^3}{2 \eta \omega_0^3} = \\ & = \frac{(\eta \xi_1 - \xi_2) \omega_0^2 + (\eta \eta_1 - \eta_2) \omega_0^3 + (\eta \xi_1 - \xi_2) \omega_1^3}{\omega_0^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полагая величину общего отношения равной s , получим три линейных уравнения:

$$\begin{aligned} & (\xi_1 - \eta \xi_2) \omega_0^2 + (\eta_1 - \eta \eta_2) \omega_0^3 + (\xi_1 - \eta \xi_2 - s) \omega_1^3 = 0; \\ & (\eta_1 - \eta \eta_2) \omega_0^2 + (\eta_3 + 2 \eta s) \omega_0^3 + (\eta \eta_1 - \eta_2) \omega_1^3 = 0; \\ & (\eta \xi_1 - \xi_2 - s) \omega_0^2 + (\eta \eta_1 - \eta_2) \omega_0^3 + (\eta \xi_1 - \xi_2) \omega_1^3 = 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда формы ω_0^2 , ω_0^3 , ω_1^3 , одновременно не равные нулю, получим характеристическое уравнение, совпадающее с уравнением (4.8). Наше утверждение этим доказано.

Как и в евклидовом пространстве [1], главные регулюсы обладают еще одним свойством: они являются решениями задачи об экстремуме отношения основных форм Φ_2 и Φ_1 .

§ 5. Некоторые частные классы комплексов

1. Специальный комплекс, т. е. комплекс нулевой кривизны $\eta=0$. Для этого комплекса, как и в евклидовом пространстве [1], главная корреляция вырождается и теряют смысл все связанные с ней понятия. Аналитическими следствиями уравнения $\eta=0$ являются соотношения $\zeta_1+\xi_2=0$, $\eta_1=\eta_2=0$, получающиеся из (1.10) и (1.11). Геометрически это означает, что центральный регулюс $\omega_0^2=\omega_1^3=0$ вырождается в пучок прямых, лежащих в плоскости $A_0A_1A_3$, с центром в точке A_1 , что следует из формул (2.4). Ширина класса равна одной функции двух аргументов.

2. Класс $d\eta=0$, т. е. комплекс постоянной кривизны. Этот класс характеризуется тем, что точки симметрии гармонически делят центры A_0 и A_1 луча, что следует из уравнения (4.5). Найдем широту класса. Первое уравнение системы (1.10) принимает вид

$$(\eta_1-\eta\eta_2)[\omega_0^2\omega_0^3]+(\eta_2-\eta\eta_1)[\omega_0^3\omega_1^3]=0.$$

Отсюда получаем $\eta_1-\eta\eta_2=\eta_2-\eta\eta_1=0$. Так как $1-\eta^2\neq 0$, то $d\eta_1=d\eta_2=0$. Два оставшихся уравнения системы (1.10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} [d\xi_1\omega_0^2]+[\eta d\xi_1+\eta d\xi_2-d\xi_2,\omega_1^3]&=(-\xi_1^2\eta-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2+ \\ &+\xi_1\xi_1+\eta\xi_2\xi_1)[\omega_0^2\omega_0^3]+(-\eta_1\xi_1-\eta_1\xi_2)[\omega_0^2\omega_1^3]+(\xi_1\xi_2+ \\ &+\eta\xi_1\xi_1-\eta_1^2-\xi_1^2-\eta\xi_1\xi_2)[\omega_0^3\omega_1^3]; \\ [d\xi_2\omega_0^2]+[d\xi_2\omega_1^3]&=(-\eta\xi_1\xi_2-\xi_2^2-\eta_2^2+\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_2\eta)[\omega_0^2\omega_0^3]+ \\ &+(-\xi_1\eta_2-\eta_2\xi_2)[\omega_0^2\omega_1^3]+(\eta\xi_2\xi_1+\xi_2\xi_2-\eta_1\eta_2-\xi_1\xi_2-\eta\xi_2^2)[\omega_0^3\omega_1^3]. \end{aligned}$$

Подсчитав характеры и число Картана ([1, с. 30–33]), получим $s_1=2$, $s_2=1$, $Q=4$. При определении произвола N общего решения, положив

$$\begin{aligned} d\xi_1 &\parallel \xi_{11}\omega_0^2+\xi_{12}\omega_0^3+\xi_{13}\omega_1^3; \\ d\xi_2 &=\xi_{21}\omega_0^2+\xi_{22}\omega_0^3+\xi_{23}\omega_1^3; \\ d\xi_2 &=\xi_{21}\omega_0^2+\xi_{22}\omega_0^3+\xi_{23}\omega_1^3, \end{aligned}$$

получим шесть соотношений:

$$\begin{aligned} \xi_{22} &=\eta\xi_1\xi_2+\xi_2^2+\eta_2^2-\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_2\eta; \\ \xi_{23}-\xi_{21} &=\xi_1\eta_2+\eta_2\xi_2; \xi_{22}=\eta\xi_2\xi_1+\xi_2\xi_2-\eta_1\eta_2-\xi_1\xi_2-\eta\xi_2^2; \\ \xi_{12} &=\xi_1^2\eta+\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2-\xi_1\xi_1-\eta\xi_2\xi_1; \\ \eta\xi_{11}+\eta\xi_{21}-\xi_{21}-\xi_{13} &=-\eta_1\xi_1-\eta_1\xi_2; \\ \eta\xi_{12}+\eta\xi_{22}-\xi_{22} &=\xi_1\xi_2+\eta\xi_1\xi_1-\eta_1^2-\xi_1^2-\eta\xi_1\xi_2, \end{aligned}$$

из которых только пять независимых. Следовательно, $N=9-5=4=Q$, критерий Картана выполнен, система в инволюции. Комплексы $\eta=\cos nt$ существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Нижеследующие классы выделяются при помощи известного понятия инфлекционных центров. Инфлекционный центр A_0+tA_1 луча комплекса характеризуется тем, что для ребра возврата некоторого проходящего через луч торса, выродившегося в плоскость, он является особой точкой [1]. Аналогично тому, как это делается в [2], найдем уравнение, определяющее инфлекционные центры в виде

$$t^4 \eta^2 (\xi_1 - \xi_2 \eta) + 2 t^3 \eta (\eta \eta_2 - \eta_1) + t^2 (\xi_1 \eta^2 - \xi_2 \eta - \xi_2 \eta^2 + \xi_1 \eta + \eta_3) + 2 t (\eta_2 - \eta \eta_1) + \xi_1 \eta - \xi_2 = 0. \quad (5.1)$$

Это — уравнение четвертой степени, которое в общем случае определяет на каждом луче четыре инфлекционных центра. Из уравнения (5.1) получим также условия, характеризующие линейный комплекс:

$$\eta^2 (\xi_1 - \xi_2 \eta) = \eta (\eta \eta_2 - \eta_1) = \eta_2 - \eta \eta_1 = 0; \\ \xi_1 \eta^2 - \xi_2 \eta - \xi_2 \eta^2 + \xi_1 \eta + \eta_3 = 0, \quad \xi_1 \eta - \xi_2 = 0. \quad (5.2)$$

3. Комплекс $\xi_1 \eta - \xi_2 = 0$ (или $\xi_1 - \xi_2 \eta = 0$) характеризуется тем, что один инфлекционный центр на каждом луче его совпадает с центром A_0 (или A_1) луча. Найдем произвол существования этого класса. Подставив (с учетом (1.11)) $d \xi_2 = \xi_1 d \eta + \eta d \xi_1$, $d \xi_2 = \eta d \xi_1 + (\eta^2 - 1) d \xi_1 + (\xi_1 + 2 \eta \xi_1) d \eta$ в систему (1.10), получим

$$[d \eta \omega_0^3] = (\eta_1 - \eta \eta_2) [\omega_0^2 \omega_0^3] + (\eta_2 + \eta \eta_1) [\omega_0^3 \omega_1^3]; \\ [d \xi_1 \omega_0^2] + [d \eta_1 \omega_0^3] + [d \xi_1 \omega_1^3] - (-\xi_1^2 \eta' - \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 + \xi_1 \xi_1 + \eta \xi_2 \xi_1) [\omega_0^2 \omega_0^3] + \\ + (-\eta_1 \xi_1 - \eta_1 \xi_2) [\omega_0^2 \omega_1^3] + (\xi_1 \xi_2 + \eta \xi_1 \xi_1 - \eta_1^2 - \xi_1^2 - \alpha \xi_1 \xi_2) [\omega_0^3 \omega_1^3]; \\ [\eta d \xi_1 + (\eta^2 - 1) d \xi_1 + (\xi_1 + 2 \eta \xi_1) d \eta, \omega_0^2] + [d \eta_2, \omega_0^3] + [\xi_1 d \eta + \eta d \xi_1, \omega_1^3] = \\ = (-\eta \xi_1 \xi_2 - \xi_2^2 - \eta_2^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_2 \eta) [\omega_0^2 \omega_0^3] + (-\xi_1 \eta_2 - \eta_2 \xi_2) [\omega_0^2 \omega_1^3] + \\ + (\eta \xi_2 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 - \xi_1 \xi_2 - \eta \xi_2^2) [\omega_0^3 \omega_1^3].$$

Подсчитав характеры и число Картана, получим $s_1 = 3$, $s_2 = 2$, $Q = 7$. При определении произвола N общего решения, положив

$$d \eta = (\eta_1 - \eta \eta_2) \omega_0^2 + \eta_3 \omega_0^3 + (\eta \eta_1 - \eta_2) \omega_1^3; \\ d \xi_1 = \xi_{11} \omega_0^2 + \xi_{12} \omega_0^3 + \xi_{13} \omega_1^3; \\ d \eta_1 = \eta_{11} \omega_0^2 + \eta_{12} \omega_0^3 + \eta_{13} \omega_1^3; \\ d \xi_1 = \xi_{11} \omega_0^2 + \xi_{12} \omega_0^3 + \xi_{13} \omega_1^3; \\ d \eta_2 = \eta_{21} \omega_0^2 + \eta_{22} \omega_0^3 + \eta_{23} \omega_1^3,$$

получим шесть независимых соотношений:

$$-\xi_{12} + \eta_{11} = -\xi_1^2 \eta - \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 + \xi_1 \xi_1 + \eta \xi_2 \xi_1; \\ -\xi_{13} + \xi_{11} = -\eta_1 \xi_1 - \eta_1 \xi_2; \\ -\eta_{13} + \xi_{12} = \xi_1 \xi_2 + \eta \xi_1 \xi_1 - \eta_1^2 - \xi_1^2 - \eta \xi_1 \xi_2; \\ (1 - \eta^2) \xi_{13} = 2 \eta \eta_1 \xi_1 + 3 \eta^2 \eta_1 \xi_1 - \eta_2 \xi_1 - 2 \eta \eta_2 \xi_1 - \xi_1 \eta_2 - \eta_2 \xi_1; \\ -\eta_{23} + \eta \xi_{12} + \xi_1 \eta_3 = \eta \xi_2 \xi_1 + \xi_2^2 - \eta_1 \eta_2; \\ -(\xi_1 + 2 \eta \xi_1) \eta_3 - \xi_{12} (\eta^2 - 1) - \eta \xi_{12} + \eta_{21} = -\eta \xi_1 \xi_2 - \\ -\xi_2^2 - \eta_2^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_2 \eta.$$

Следовательно, $N = 13 - 6 = 7 = Q$, система в инволюции. Широта класса — две функции двух аргументов.

4. Комплексы $\xi_1 \eta - \xi_2 = \xi_1 - \xi_2 \eta = 0$ характеризуются совпадением двух инфлекционных центров на каждом луче его с центрами A_0 и A_1 луча. Широта класса — четыре функции одного аргумента.

5. Комплексы $\xi_1 \eta - \xi_2 = \xi_1 - \xi_2 \eta = \eta_1 = \eta_2 = 0$ характеризуются

ются тем, что на каждом луче они имеют два двойных инфлекционных центра, совпадающих с центрами A_0 и A_1 луча, и существуют с параметрическим произволом.

6. Комплексы $\zeta_1\eta - \zeta_2 = \eta_2 - \eta\eta_1 = \xi_1\eta^2 - \xi_2\eta - \zeta_2\eta^2 + \zeta_1\eta + \eta_3 = 0$, $\eta\eta_2 - \eta_1 \neq 0$ (или $\zeta_1\eta - \zeta_2 = \eta\eta_2 - \eta_1 = \xi_1\eta^2 - \xi_2\eta - \zeta_2\eta^2 + \zeta_1\eta + \eta_3 = 0$, $\eta\eta_1 - \eta_2 \neq 0$) характеризуются наличием тройного инфлекционного центра, совпадающего с центром A_0 (или A_1) луча и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

7. Комплексы $\zeta_1\eta - \zeta_2 = \xi_1\eta^2 - \xi_2\eta - \zeta_2\eta^2 + \zeta_1\eta + \eta_3 = \eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta^2(\xi_1 - \xi_2\eta) \neq 0$ (или $\xi_1 - \xi_2\eta = \xi_1\eta^2 - \xi_2\eta - \zeta_2\eta^2 + \zeta_1\eta + \eta_3 = \eta_1 = \eta_2 = 0$, $\zeta_1\eta - \zeta_2 \neq 0$) имеют на каждом луче четырехкратный инфлекционный центр, совпадающий с центром A_0 (или A_1) луча и существуют с произволом одной функции одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973.— 236 с.
2. Кованцов Н. И. Теория комплексов.— Киев: Изд-во КГУ, 1963.— 292 с.
3. Цыренова В. Б., Щербаков Р. Н. Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства S_3^1 .— Геометр. сб., 15. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975, с. 183—204.
4. Войтенко М. А. К теории псевдоконгруэнций прямых квазиэллиптического пространства.— Уч. зап./Орехово-Зуевский пединститут, 1964, вып. 22, с. 55—63.
5. Кованцов Н. И. Теория комплексов в эллиптическом пространстве.— Ann. stl. univ. Iasi 1963, IX, 1, 87—109.

З. П. БАДЯЕВА

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТРЕХМЕРНОГО НЕМЕТРИЧЕСКОГО ФЛАГОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Абсолютом трехмерного неметрического флагового пространства Φ_3 является «флаг», т. е. плоскость α , лежащая в ней прямая a и точка A , принадлежащая прямой a . Плоскости, проходящие через прямую a , называются [5] изотропными. Плоскости, проходящие через точку A , но не содержащие прямую a , называются [3] полуизотропными. Прямые, проходящие через точку A , и параллельные им векторы называются [5] сильно изотропными. Прямые, лежащие в изотропных плоскостях (но не содержащих точку A), и параллельные им векторы называются [5] слабо изотропными. Остальные прямые и плоскости называются неизотропными.

В предлагаемой работе производится репераж неизотропной поверхности в Φ_3 (касательная плоскость не изотропна) и исследуются простейшие флагово-инвариантные классы поверхностей. Часть результатов анонсирована в [1].

§ 1. Репераж

Любой репер флагового пространства состоит из неизотропного вектора $\bar{e}_1$, слабо изотропного вектора $\bar{e}_2$ и сильно изотропного вектора $\bar{e}_3$. Следовательно, плоскость $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}$ полуизотропна, а плоскость $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ — изотропна.

Если $\bar{M}$ — радиус-вектор точки M неизотропной поверхности, то деривационные формулы репера, включающего касательную плоскость, имеют вид (ср. [4]):

$$d\bar{M} = \Omega_1 \bar{e}_1 + \Omega_2 \bar{e}_2; \quad (1.1)$$

$$d\bar{e}_i = \Omega_i^l \bar{e}_l,$$

$$i, j, l = 1, 2, 3, \quad i > j,$$

где в обозначенных [7] $\Omega = \omega + \pi$, а ω и π — формы, принадлежащие векторным пространствам дифференциалов главных и вторичных параметров. Уравнения структуры имеют обычный вид

$$D\Omega^i = [\Omega^i \Omega^j]; \quad D\Omega_i^j = [\Omega_i^j \Omega_l^k]. \quad (1.2)$$

Продолжение основного [7] соотношения $\Omega^3 = 0$ дает

$$\Omega_1^3 = \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2; \quad \Omega_2^3 = \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2. \quad (1.3)$$

Применяя алгоритм Картана [7], получаем

$$\begin{aligned}\delta a &= (2\pi_1^1 - \pi_3^3)a + 2b\pi_1^2; \\ \delta b &= (\pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3)b + c\pi_1^2; \\ \delta c &= (2\pi_2^2 - \pi_3^3)c.\end{aligned}\quad (1.4)$$

При $c=0$ получается $dM|_{\omega^1=0}=\bar{e}_2$ и $d\bar{e}_2/\omega^1=0=\bar{e}_2$, т. е. поверхность становится линейчатой со слабо изотропными образующими.

Так как асимптотические линии имеют уравнение

$$a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0, \quad (1.5)$$

то при $ac-b^2=0$ получаются торсы.

Исключив эти два простейших класса поверхностей, проведем такую фиксацию репера:

$$a=\varepsilon; b=0; c=1; \varepsilon=\pm 1; \quad \pi_3^3=2\pi_1^1+2\pi_2^2; \pi_1^2=0. \quad (1.6)$$

Тогда поверхность будет отнесена к инвариантной сопряженной сети, состоящей из плоских, принадлежащих изотропным плоскостям, линий $\omega^1=0$ и цилиндрических линий $\omega^2=0$, по которым поверхности касаются цилиндры со слабо изотропными образующими, параллельными $\bar{e}_2$.

Что касается нормировок $a=\varepsilon$, $c=1$, то они приводят асимптотическую формулу к простейшему виду $\varepsilon(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, а следовательно, приводят к такому же виду каноническое представление поверхности, а также уравнения некоторых соприкасающихся квадрик.

Отметим еще, что при $\varepsilon=1$ мы будем иметь (локально, конечно) эллиптическую, а при $\varepsilon=-1$ — гиперболическую поверхность.

Теперь (1.3) принимает вид

$$\omega_1^3=\varepsilon\omega^1; \quad \omega_2^3=\omega^2. \quad (1.7)$$

Применяя алгоритм Картана, получаем

$$\begin{aligned}2\omega_1^1 - \omega_3^3 &= \varepsilon I \omega^1 + \varepsilon J \omega^2; \\ \omega_1^2 &= J \omega^1 + L \omega^2; \\ 2\omega_2^2 - \omega_3^3 &= L \omega^1 + M \omega^2,\end{aligned}\quad (1.8)$$

причем коэффициенты I, J, L, M являются относительными инвариантами, так как от последней нормировки они зависят следующим образом:

$$\delta I = I \pi_3^3; \delta J = J \pi_3; \delta L = L \pi_3^3; \delta M = M \pi_3^3. \quad (1.9)$$

Эти инварианты фигурируют в каноническом представлении поверхности

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{\varepsilon}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{6}(Ix_1^3 + 3Jx_1^2x_2 + \\ &\quad + 3Lx_1x_2^2 + Mx_2^3) + [4]\end{aligned}$$

и называются инвариантами первого порядка.

Последнюю нормировку производить не будем. Считая оставшийся вторичный параметр произвольной функцией главных, выпишем деривационные формулы получившегося таким образом репера (в дальнейшем он называется «Q-репером»):

$$\begin{aligned}d\bar{M} &= \omega^1 \bar{e}_1 + \omega^2 \bar{e}_2; \\d\bar{e}_1 &= (A\omega^1 + B\omega^2)\bar{e}_1 + (J\omega^1 + L\omega^2)\bar{e}_2 + \varepsilon\omega^1 \bar{e}_3; \\d\bar{e}_2 &= \left\{ \frac{1}{2}(2A - \varepsilon I + L)\omega^1 + \frac{1}{2}(2B - \varepsilon J + M)\omega^2 \right\} \bar{e}_2 + \omega^2 \bar{e}_3; \\d\bar{e}_3 &= \{(2A - \varepsilon I)\omega^1 + (2B - \varepsilon J)\omega^2\} \bar{e}_3.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Внешние дифференциалы базисных форм имеют вид

$$D\omega^1 = B[\omega^1\omega^2]; \quad D\omega^2 = \frac{1}{2}(L + \varepsilon I - 2A)[\omega^1\omega^2], \quad (1.11)$$

а основная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}[dA, \omega^1] + [dB, \omega^2] &= -\frac{1}{2}B(\varepsilon I + L)[\omega^1\omega^2]; \\[dI, \omega^1] + [dJ, \omega^2] &= \frac{1}{2}(2JA - JL - \varepsilon IJ - 2BI)[\omega^1, \omega^2]; \\[dJ, \omega^1] + [dL, \omega^2] &= \frac{1}{2}(2AL - 2BJ - \varepsilon J^2 + MJ - 2L^2)[\omega^1\omega^2]; \\[dL, \omega^1] + [dM, \omega^2] &= \frac{1}{2}(2AM - 2BL - ML - \varepsilon IM)[\omega^1\omega^2]\end{aligned}\quad (1.12)$$

является стандартной [7] и имеет решение, зависящее от двух произвольных функций двух аргументов. Одна из них соответствует произволу задания поверхности, а вторая — произволу оставшегося вторичного параметра.

Функции A и B в (1.10) станут инвариантами (второго порядка), как только будет так или иначе произведена фиксация последнего вторичного параметра по формулам (1.9).

§ 2. Геометрическое значение инвариантов

Полная система инвариантов (удовлетворяющих основной системе дифференциальных уравнений) получится после приведения к константе одного из относительных инвариантов первого порядка. Для выяснения их геометрического значения рассмотрим простейшие геометрические образы, ассоциирующиеся с поверхностью и Q -репером.

Прежде всего отметим, что лучевая точка M_λ линии, $\omega^1 = 0$ (т. е. точка пересечения трех «бесконечно близких» касательных плоскостей поверхности, взятых вдоль линии [8, с. 70]), имеет радиус-вектор

$$\bar{M}_\lambda = \bar{M} + L^{-1}\bar{e}_1. \quad (2.1)$$

Иначе эту точку называют первым преобразованием Лапласа, так как она является фокусом конгруэнции прямых $\{M, \bar{e}_1\}$. Ось сопряженной сѣти (т. е. прямая пересечения соприкасающихся плоскостей линий сѣти) направлена по вектору

$$J\bar{e}_2 + \bar{e}_3. \quad (2.2)$$

Далее рассмотрим соприкасающиеся квадрики. Соприкосновение второго порядка с поверхностью в точке M имеют все квадрики трехпараметрического семейства

$$px_3^2 + \varepsilon x_1^2 + x_2^2 + 2qx_1x_3 + 2rx_2x_3 - 2x_3 = 0, \quad (2.3)$$

где p, q, r — параметры. Среди них имеется единственный параболический параболоид второго рода [2] (т. е. квадрика, касающаяся флаговой плоскости в точке A флага)

$$\varepsilon x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0,$$

уравнение которого приняло канонический вид вследствие нормировки (1.6).

Выделим пучок квадрик, имеющих соприкосновение третьего порядка с линиями $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$:

$$px_3^2 + \varepsilon x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3}\varepsilon Ix_1x_3 + \frac{2}{3}Mx_2x_3 - 2x_3 = 0. \quad (2.4)$$

В этом пучке есть единственный гиперболический гиперболоид третьего рода [2]. Для него $p = 0$, а его центр имеет координаты:

$$q_1 = WI; \quad q_2 = WM; \quad q_3 = 3M, \quad (2.5)$$

где $3W = -(\varepsilon I^2 + M^2)$.

Уже этих образов достаточно для геометрического истолкования последней нормировки и геометрической характеристики оставшихся (уже абсолютных) инвариантов первого порядка. Например, нормируя $L = -1$, мы помещаем точку $\bar{M} + \bar{e}_1$ репера в лучевую точку M_λ , а из (2.2) и (2.5) получаем геометрическое значение инвариантов I, J, M .

Пучок квадрик Дарбу [8, с. 48] имеет относительно Q -репера уравнение

$$px_3^2 + \varepsilon x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{3}(\varepsilon I + L)x_1x_3 + \frac{1}{3}(\varepsilon J + M)x_2x_3 - 2x_3 = 0. \quad (2.6)$$

Определив центры этих квадрик, найдем уравнение аффинной нормали

$$x_1 : x_2 : x_3 = (I + \varepsilon L) : (\varepsilon J + M) : 4. \quad (2.7)$$

которое дает аффинные геометрические характеристики флаговым инвариантам поверхности.

Для выяснения геометрического значения коэффициентов A и B найдем касательные T_1 и T_2 к линиям, описываемым точкой $\bar{M} + \bar{e}_1$ при смещениях $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$:

$$\begin{aligned} T_1 &\parallel (1+A)\bar{e}_1 + J\bar{e}_2 + \varepsilon\bar{e}_3; \\ T_2 &\parallel B\bar{e}_1 + (1+L)\bar{e}_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аффинные угловые коэффициенты проекций этих векторов на касательную плоскость и первого вектора на плоскость $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}$ дают искомое геометрическое значение (разумеется, после проведения последней фиксации).

§ 3. Важнейшие классы поверхностей

Как обычно, аннулирование инвариантов, входящих в деривационные формулы, и их простейших комбинаций немедленно выделяет важнейшие классы поверхностей. Отметим некоторые из них.

1. Поверхности $L=0$ можно назвать *флаговыми поверхностями переноса*, так как в силу (2.1) на них имеется сопряженная сеть цилиндрических линий $\omega^1\omega^2=0$ и они входят в хорошо известный класс поверхностей переноса (см. [8, с. 75]). Широта класса—три функции одного аргумента.

2. Поверхности $M=0$, $L\neq 0$ можно назвать *флаговыми цилиндро-коническими*, так как они входят в аффинный класс цилиндроконических поверхностей (см. [6, с. 271]). В самом деле, фиксируя репер условием $L=-1$, мы совместим точку $M+\bar{e}_1$ с лучевой точкой $M_{\bar{e}_1}$ и в силу (1.12) получим $B=0$ и $dM_{\bar{e}_1}=0$, т. е. линии $\omega^1=0$ станут коническими. Широта класса—три функции одного аргумента.

3. Поверхности $M=L=0$, $J\neq 0$ —тот случай, когда на поверхности переноса произвольная пространственная кривая переносится го циклам (см. [4, с. 80]). В самом деле, проведя нормировку $J=1$, получим $2B=\epsilon$ и для линии $\omega^1=0$ —дериwационные формулы $dM=\omega^2\bar{e}_2$, $d\bar{e}_2=\omega^2\bar{e}_3$, $d\bar{e}_3=0$, интегрирование которых дает цикл в плоскости $\{\bar{e}_2\bar{e}_3\}$. В дериwационных формулах для линии $\omega^2=0$ останется два инварианта и путем сравнения с формулами (31) работы [4] можно убедиться, что линия $\omega^2=0$ —произвольная пространственная кривая. Широта класса—две функции одного аргумента.

4. Поверхности $J=0$, $I\neq 1$ можно назвать флаговыми *резными* поверхностями, ибо у них, как и у аффинных резных (см. [6, с. 225]) линии $\omega^2=0$ являются плоскими цилиндрическими с кривизной A . Действительно, из (1.12) следует $B=0$ и $[dA, \omega^1]=0$, $D\omega^1=0$, т. е. линии $\omega^2=0$ являются плоскими с кривизной, зависящей лишь от параметра u , $du=\omega^1$. Широта класса—три функции одного аргумента.

6. Поверхности $M=L=J=0$, $I\neq 0$ являются флаговыми *резными* поверхностям переноса, так как обладают свойствами двух предыдущих классов. Широта—одна функция одного аргумента.

7. Поверхности $A=0$ можно характеризовать разными свойствами. Если, например, $J\neq 0$, то, фиксируя $J=1$, т. е. придавая оси (2.2) аффинно-биссекторное направление, мы получим, что вектор $\bar{T}_1$ из (2.8) будет иметь аффинно-биссекторное направление относительно всех векторов репера. При любой нормировке $A=0$ приводит к тому, что касательная к линии $\omega^2=0$ годографа $\bar{r}=\bar{e}_1$ становится слабо изотропной. Широта класса—4 функции одного аргумента.

8. Поверхности $B=0$ при любой нормировке характеризуются тем, что касательная к линии $\omega^1=0$ годографа $\bar{r}=\bar{e}_1$ параллельна вектору $\bar{e}_2$, а при $L\neq -1$ тому же вектору параллелен вектор $\bar{T}_2$ из (2.8). Широта класса—4 функции одного аргумента (см. также класс 2).

9. Поверхности $I+\epsilon L=0$ ($J+\epsilon M=0$) характеризуются прохождением одной из координатных плоскостей репера через аффинную нормаль (2.7). Широта класса—три функции одного аргумента.

Разумеется, эта классификация может быть продолжена как в направлении отыскания новых характеристик отмеченных классов, так и в направлении выделения новых классов. Что касается доказательств оценок произвола существования отмеченных классов, то мы их опустили, так как они получаются известными приемами [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадяева З. П. Поверхность в трехмерном флаговом пространстве.— Материалы научно-методич. конф. по математике.— Красноярск, 1971, с. 105—107.
2. Выжгина Л. Б., Семенова И. Н., Тюрина Н. И. Квадрики во флаговом пространстве.— Уч. зап./Моск. обл. пед. ин-та, 1963, т. 123, № 3, с. 491—507.
3. Лыжина Т. В. Регулюсы в трехмерном флаговом пространстве.— Геометр. сб., 11. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973, с. 75—91.

4. Лыжина Т. В., Мандрикова Н. А., Щербаков Р. Н. Немеетрическая флаговая теория кривых и ее приложения к теории комплексов.— Геометр. сб., 18. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 79—92.
 5. Пеннер И. А. Дифференциальная геометрия поверхностей пространства Φ_3 .— Уч. зап./МГПИ им. В. И. Ленина, 1967, т. 271, с. 113—123.
 6. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия.— М., 1959.— 319 с.
 7. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии.— Томск, 1973.— 236 с.
 8. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии.— Томск, 1960.— 196 с.
-

Н. И. ХАРИТОНОВА

ОБРАЗЫ СИММЕТРИИ, КОСИММЕТРИИ И ПРОСТОТЫ ПРОСТРАНСТВ НАД ПОЛЯМИ ГАЛУА И «КВАДРАТОМ ГАЛУА»

§ 1. Образы симметрии и косимметрии над полями Галуа

Рассмотрим проективное пространство $P_n(q)$ над полем Галуа $GF(q)$, где $q=p^h$, p — простое и h — натуральное число [1, 2]. В дальнейшем будем предполагать, что $p \neq 2$.

Образами симметрии пространства $P_n(q)$ будем называть множества точек или прямых, остающихся неподвижными при инволюционных коллинеациях. Образами косимметрии пространства $P_n(q)$ будем называть множества 0-пар, переходящих в себя при инволюционных корреляциях [3].

Теорема. Матрицы инволюционных коллинеаций пространства $P_n(q)$ могут быть приведены к одному из следующих двух видов:

$$\begin{matrix} m+1 \\ n-m \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \dots & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & -1 & -1 & \dots & -1 \end{array} \right\}; \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & \alpha & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \dots & \\ & & & & 0 & \alpha \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где α — неквадрат поля $GF(q)$ (имеется в виду, что на всех остальных местах матриц (1) и (2) стоят нули).

Доказательство. Как известно [4], всякую квадратную матрицу с элементами из поля $GF(q)$ можно привести в этом поле или в его расширении к жордановой нормальной форме. Нетрудно видеть, что матрица A , приведенная к жордановой нормальной форме, может быть матрицей инволюционной коллинеации, т. е. удовлетворять условию

$$A^2 = \alpha E,$$

где

$$\alpha \in GF(q) \setminus \{0\},$$

лишь в том случае, когда она имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & & \\ & \sigma_1 & & \\ & & \alpha_2 & \\ & & & \dots \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 & & & \\ & \alpha_1^2 & & \\ & & \alpha_2^2 & \\ & & & \dots \\ & & & & \alpha_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ & & & \dots \\ & & & & \alpha \end{pmatrix},$$

то есть $\alpha_i^2 = \alpha$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$).

Если α — квадрат поля $GF(q)$ т. е. $\alpha = \lambda^2$, то $\sigma_i = \pm \lambda$. Тогда матрица A приводится к виду (1). Если же α — неквадрат этого поля, то в случае нечетного n A приводится к виду (2). Теорема доказана.

Таким образом, если $n=2k-1$, то инволюционные коллинеации будут двух типов, т. е. приводимы соответственно к видам:

1. $'x^a = x^a$, $'x^u = -x^u$ ($a=0, 1, 2, \dots, m$; $u=m+1, \dots, n$).

2. $'x^{2i} = x^{2i+1}$, $'x^{2i+1} = \alpha x^{2i}$.

Если же $n=2k$, то в пространстве $P_n(q)$ инволюционными будут только коллинеации первого типа.

Образом симметрии при коллинеации первого типа является m -пара, а второго типа — эллиптическая линейная конгруэнция.

Инволюционной корреляцией пространства $P_{2k}(q)$ будет полярное преобразование относительно квадрики

$$2 \sum_{i=0}^{k-1} x^i x^{2k-i-1} + (x^{2k})^2 = 0, \quad (3)$$

приводимое к виду

$$u_0 = x^{2k-1}, u_1 = x^{2k-2}, \dots, u_{2k-1} = x^0, u_{2k} = x^{2k}. \quad (4)$$

Образом косимметрии при корреляции (4) будет квадрика (3).

В пространстве $P_{2k-1}(q)$ существуют инволюционные корреляции трех типов.

1. Полярное преобразование относительно квадрики

$$2 \sum_{i=0}^{k-1} x^i x^{2k-i-1} = 0 \quad (5)$$

следующего вида:

$$u_0 = x^{2k-1}, u_1 = x^{2k-2}, \dots, u_{2k-1} = x^0. \quad (6)$$

2. Полярное преобразование относительно квадрики

$$2 \sum_{i=0}^{k-1} x^i x^{2k-i-3} + (x^{2k-2})^2 - \alpha (x^{2k-1})^2 = 0 \quad (7)$$

вида

$$u_0 = x^{2k-3}, u_1 = x^{2k-4}, \dots, u_{2k-3} = x^0, u_{2k-2} = x^{2k-2}, u_{2k-1} = -\alpha x^{2k-1}. \quad (8)$$

3. Нуль-система

$$u_{2i} = x^{2i+1}, u_{2i+1} = \alpha x^i. \quad (9)$$

Образами косимметрии при этих корреляциях будут соответственно квадрика (5), квадрика (7) и линейный комплекс.

В случае пространства $P_n(q^2)$, т. е. проективного пространства над полем $GF(q^2)$, добавляется инволюционная коллинеация

$$'x^i = (x^i)^p. \quad (10)$$

и инволюционная корреляция

$$u_i = (x^i)^p. \quad (11)$$

Образом симметрии при коллинеации (10) является n -цепь, а образом косимметрии при корреляции (11) будет эрмитова квадратика

$$\sum_{i=0}^n x^i \overline{(x^i)} = 0,$$

где

$$\bar{x}^i = (x^i)^p.$$

§ 2. Образы симметрии, косимметрии в пространствах над «квадратом Галуа»

Рассмотрим проективное пространство $P_n[GF(q)^2]$ над «квадратом Галуа» [5]. Как известно, оно допускает интерпретацию в виде декартова квадрата пространства $P_n(q)$, т. е.

$$P_n[GF(q)^2] = [P_n(q)]^2.$$

Исходя из этой интерпретации, найдем образы симметрии и косимметрии пространства $P_n[GF(q)^2]$.

В пространстве $P_{2k}[GF(q)^2]$ инволюционные коллинеации можно привести к виду

$$'(x_+^a, x_-^a) = (x_+^a, x_-^a); \quad '(x_+^u, x_-^u) = -(x_+^u, x_-^u),$$

или к более общему виду для точки $A = (A^+, A^-)$, где $A^+ = (x_+^i)$, $A^- = (x_-^i)$:

$$\begin{aligned} 'x_+^a &= x_+^a; \quad 'x_-^u = -x_-^u; \\ 'x_+^a &= x_+^a; \quad 'x_-^u = -x_-^u \quad (a_1 = 0, 1, 2, \dots, l; \quad u_1 = l+1, \dots, 2k). \end{aligned}$$

В первом случае образом симметрии будет m -пара, а во втором (m, l) -пара.

В пространстве $P_{2k}[GF(q)^2]$ имеется инволюционная корреляция

$$(u_s^+, u_s^-) = (x_+^{2k-1-s}, x_-^{2k-1-s}), \quad (u_{2k}^+, u_{2k}^-) = (x_+^{2k}, x_-^{2k}). \quad (12)$$

Образом косимметрии при корреляции (12) будет квадратика $Q = (Q^+, Q^-)$, где Q^+ и Q^- приводится к виду (3).

В пространстве $P_{2k-1}[GF(q)^2]$, так же как и в $P_{2k}[GF(q)^2]$, образами симметрии будут m -пары и (m, l) -пары. Кроме того, в этом пространстве имеется инволюционная коллинеация, приводимая к виду

$$\begin{cases} '(x_+^{2l}, x_-^{2l}) = (x_+^{2l+1}, x_-^{2l+1}), \\ '(x_+^{2l+1}, x_-^{2l+1}) = (\alpha x_+^{2l}, \alpha x_-^{2l}). \end{cases} \quad (13)$$

Образом симметрии при корреляции (13) будет эллиптическая линейная контрдуэция.

В пространстве $P_{2k-1}[GF(q)^2]$ будет несколько типов инволюционных корреляций, приводимых соответственно к видам:

1. $(u_s^+, u_s^-) = (x_+^{2k-1-s}, x_-^{2k-1-s})$.
2. $(u_s^+, u_s^-) = (x_+^{2k-s-3}, x_-^{2k-s-3}), \quad (u_{2k-2}^+, u_{2k-2}^-) = (x_+^{2k-2}, x_-^{2k-2}),$
 $(u_{2k-1}^+, u_{2k-1}^-) = (-\alpha x_+^{2k-1}, -\alpha x_-^{2k-1}).$

3. (u_s^+, u_s^-) преобразуется так, что u_s^+ и u_s^- изменяются соответственно по законам (6) и (8), или наоборот.

4. Нуль-система $(u_{2l}^+, u_{2l}^-) = (x_{+}^{2l+1}, x_{-}^{2l+1})$, $(u_{2l+1}^+, u_{2l+1}^-) = (\alpha x_{+}^{2l}, \alpha x_{-}^{2l})$.

5. (u_s^+, u_s^-) преобразуется так, что u_s^+ и u_s^- изменяются соответственно по законам (6) и (9).

6. (u_s^+, u_s^-) преобразуется так, что u_s^+ и u_s^- изменяются соответственно по законам (8) и (9).

Тогда образами косимметрии пространства $P_{2k-1}[GF(q)^2]$ будут соответственно квадрака $Q = (Q^+, Q^-)$, у которой Q^+ и Q^- приводятся к виду (5); квадрака $Q = (Q^+, Q^-)$, у которой Q^+ и Q^- приводится к виду (7); квадрака $Q = (Q^+, Q^-)$, у которой Q^+ и Q^- приводится соответственно к виду (5) или (7), или, наоборот, линейный комплекс. Образы косимметрии в случае корреляций двух последних типов будем называть квадрикомplexами соответственно первого и второго рода.

§ 3. Образы простоты в пространствах над $GF(q)$ и $GF(q)^2$

Так как фундаментальные группы пространств $P_n(q)$, $S_{2n}(q)$, $S_{p2n-1}(q)$, $S_{2n-1}(q)$, $S'_{2n-1}(q)$ и $S_n(q^2)$ можно рассматривать как группы Ли над полем Галуа [6], определяемые как группы автоморфизмов соответствующих алгебр Ли, в этих группах можно определить параболические подгруппы. Для этого достаточно определить представления соответствующих алгебр Ли по отношению к их простым корням или системам простых корней в виде прямой суммы

$$G_{-k} \oplus G_{-k+1} \oplus \dots \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_{k-1} \oplus G_k,$$

где прямое слагаемое G_λ представляет собой линейное подпространство алгебры Ли, которое натянуто на такие векторы, у которых выделенный простой корень имеет кратность λ [7]. Тогда параболическая подгруппа продолжит подалгебру Ли

$$G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_k.$$

Будем называть образом простоты геометрический образ рассматриваемого нами пространства, в котором действует простая группа Ли, стационарной подгруппой которой является параболическая подгруппа, определяемая одним простым корнем. Образом полупростоты будем называть геометрический образ рассматриваемого пространства, в котором действует простая группа Ли, стационарной подгруппой которой является параболическая подгруппа, определенная несколькими простыми корнями.

Параболические подгруппы конечных простых групп определяют образы простоты или образы полупростоты, соответствующие простым корням или системам простых корней этих подгрупп [8]. Схемы простых корней [6, 8] в случае групп $A_n(q)$, ${}^2A_n(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$, $D_n(q)$ и $D_n(q)$ представлены на рис. 1.

Так же, как в случае пространства P_n , можно показать, что образами простоты пространства $P_n(q)$ являются точки, прямые и m -плоскости, изображаемые точками первой схемы. Образами простоты пространства $S_n(q^2)$ являются точки абсолюта, прямолинейные образующие абсолюта, ..., m -плоские образующие абсолюта, если $n = 2m + 1$, а также точки абсолюта, прямолинейные образующие абсолюта, ..., $(m-1)$ -плоские образующие абсолюта, если $n = 2m$. В этом случае образы простоты изображаются парами точек второй или третьей схем, равноотстоящих от концов и соединенных стрелками. Образами

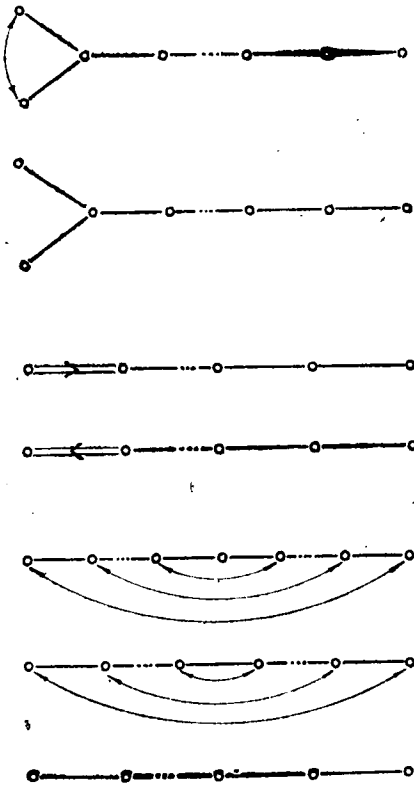


Рис. 1

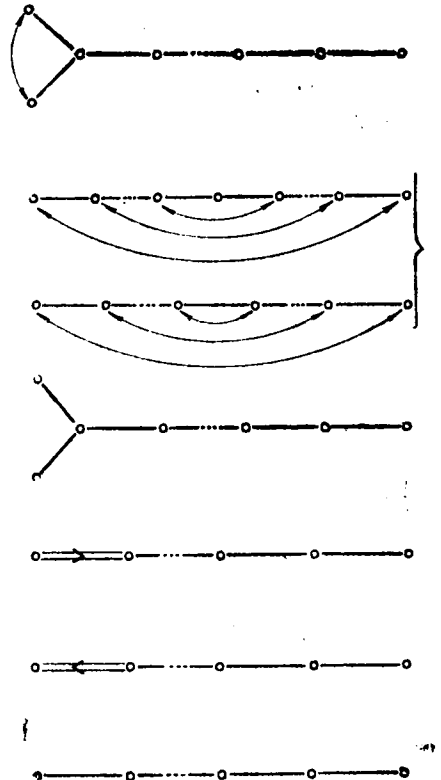


Рис. 2

простоты пространства $S_{2n}(q)$ являются точки абсолюта, прямолинейные образующие абсолюта, ..., $(n-1)$ -плоские образующие абсолюта. Образами простоты пространства $Sp_{2n-1}(q)$ являются точки, нулевые прямые, нулевые m -плоскости, ..., нулевые $(n-1)$ -плоскости. Образы простоты пространства $S_{2n-1}(q)$ — точки абсолюта, прямолинейные образующие абсолюта, ..., $(n-3)$ -плоские образующие абсолюта $(n-1)$ -плоские образующие абсолюта первого и второго семейств. Образы простоты пространства $S_{2n-1}(q)$ — точки абсолюта, прямолинейные образующие абсолюта, ..., $(n-2)$ -плоские образующие абсолюта.

В случае же конечных простых групп $A_n[GF(q^2)]$, ${}^2A_n[GF(q)^2]$, $B_n[GF(q)^2]$, $C_n[GF(q)^2]$, $D_n[GF(q)^2]$ и ${}^2D_n[GF(q)^2]$; схемы простых корней представлены на рис. 2.

Точки, прямые, ..., m -плоскости будут не образами простоты, а образами полупростоты, которые изображаются на схемах парами точек, расположенными одна под другой. Образами полупростоты будут также и так называемые (m, l) -плоскости, которые изображаются парами точек, одна из которых принадлежит верхней, а вторая — нижней частям схемы. Образами же простоты будут так называемые квазиточки, квазиплоскости, изображаемые на схемах одной точкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dembowski P. Finite geometries., 1968. Berlin. — 195 S.
2. Соколова Ю. Г. Проективные пространства Галуа. — Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1967, т. 173, вып. 2, с. 57—66.
3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.

4. Jordan C. Traite sur les substitutions et les equations algebriques. Paris, 1957.—350 p.

5. Харитонова Н. И. Проективные и эллиптические пространства над квадратом Галуа.—Акт. пробл. геом. и ее прилож. Чебоксары, 1976, с. 44—49.

6. Шевалле К. О некоторых простых группах. Математика (сб. перев.) 2:1, 1958, с. 3—58.

7. Кантор И. С. Некоторые обобщенные йордановы алгебры.—Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 1972, т. 16, с. 407—499.

8. Араки Ш. Корневые системы и локальная классификация неприводимых симметрических пространств. Математика (сб. перев.) 10:1, 1966, с. 90—126.

С. В. РУДНЕВ, В. А. ЕРМОЛАЕВ

О ПРИМЕНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ РИМАНА К ИССЛЕДОВАНИЮ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В данной работе кратко изложен один из основных вопросов, рассмотренных в работе [1] С. В. Руднева, а также вопросы применения нового геометрического подхода к кристаллическим структурам, рассматриваемые авторами совместно.

Основной вопрос состоит в характере реализации федоровских групп (кратко Ф-групп) преобразований евклидова пространства на поверхности Клиффорда $K(a, r)$, где a — ось, а r — соответствующий радиус. Кроме того, будем считать, что кривизна эллиптического пространства равна единице.

Определение. Собственными вращениями поверхности Клиффорда (кратко K -вращениями) назовем преобразование ее в себя без неподвижных точек, сохраняющее параллельность прямолинейных образующих поверхности Клиффорда.

Ясно, что K -вращения есть вращения вокруг осей поверхности Клиффорда. K -вращения образуют двупараметрическую группу, изоморфную фактор-группе группы параллельных переносов евклидовой плоскости по целочисленной решетке. Тожественному преобразованию поверхности Клиффорда соответствует целое число полных оборотов поверхности вокруг ее оси. На развертке поверхности Клиффорда, то есть на прямоугольнике со сторонами $\pi \sin r$ и $\pi \cos r$ (r — радиус поверхности Клиффорда), K -вращение выглядит как обычный евклидов перенос и может быть изображено векторами $T_i = \{t_i, t_i \operatorname{tg} \alpha\}$, где α — угол между направлением вектора и стороной прямоугольника. Если $\operatorname{tg} \alpha$ — рациональное число, то однопараметрическая подгруппа K_1 K -вращений, порожденная направлением вектора T_i , компактна, а ее траектория есть замкнутая кривая на поверхности Клиффорда. Если же $\operatorname{tg} \alpha$ — иррациональное число, то подгруппа K_2 K -вращений, порожденная направлением вектора T_i , некомпактна, а ее траектория есть всюду плотная кривая на поверхности Клиффорда. Подгруппа K_2 изоморфна группе переносов евклидовой прямой.

В дальнейшем нас будут интересовать только K -вращения, принадлежащие некомпактным однопараметрическим подгруппам. Особо отметим, что, пренебрегая всеми прочими K -вращениями, мы пренебрегаем множеством K -вращений меры нуль.

Рассмотрим задачу о построении правильной точечной системы на поверхности Клиффорда. Изобразим для этого развертку поверхности в виде квадрата со стороной a . Наложим этот квадрат на плоскую целочисленную решетку таким образом, чтобы базисные переносы этой решетки оказались параллельными некоторому K -вращению из выбранной нами подгруппы. Рассмотрим только те образы узлов целочис-

ленной решетки, которые при факторизации попадают внутрь квадрата. Этим способом мы получим аналог правильной точечной решетки, построенной только переносами на поверхности Клиффорда. Для практического изучения кристаллической структуры вполне достаточно ограничиться образами хотя и большого, но все-таки конечного числа узлов исходной целочисленной решетки, находящихся внутри достаточно большого квадрата (вместо этого соответственно можно уменьшить масштаб решетки).

Рассмотрим теперь преобразования поверхности Клиффорда, аналогичные поворотам федоровских групп. Посмотрим вначале, как преобразуется поверхность Клиффорда $K(a, r)$ для $r = \frac{\pi}{4}$ при центральной симметрии относительно одной из ее точек. Развертка этой поверхности представляет собой квадрат, а два семейства прямолинейных образующих — отрезки прямых, параллельных, диагоналям этого квадрата. Пусть центром симметрии будет точка, которая на развертке поверхности является центром квадрата. Тогда легко видеть, что при центральной симметрии эта поверхность Клиффорда переходит в себя. Действительно, при центральной симметрии поверхность Клиффорда K снова переходит в поверхность Клиффорда K_1 , но у поверхностей K и K_1 совпадают две пересекающиеся прямолинейные образующие (именно те, которые проходят через центр симметрии). Поэтому поверхности K и K_1 совпадают.

Таким образом, на поверхности Клиффорда $K(a, r)$, $r = \frac{\pi}{4}$ моделируются оси симметрии второго (L_2) и четвертого (L_4) порядков.

Далее рассмотрим поверхность Клиффорда $K(a, r)$, $r = \frac{\pi}{6}$ (другой ее радиус $r = \frac{\pi}{3}$). В точке O этой поверхности пересекаются две прямолинейные образующие l_1 и l_2 , полярные к ним прямые l_1^1 и l_2^1 лежат на поверхности Клиффорда K' , полярной к данной, и пересекаются в точке O' . Прямолинейные образующие l_1 и l_2 поверхности K , оси a_1 и a_2 поверхности K (они же будут и осями полярной поверхности K') и прямолинейные образующие l_1^1 и l_2^1 поверхности K' определяют четыре тройки равноотстоящих прямых. Каждая тройка образована парой полярных прямолинейных образующих и одной из осей. Известно [2], что каждая такая тройка определяет единственную поверхность Клиффорда, для которой они будут прямолинейными образующими. Таким образом, мы имеем комплекс из шести поверхностей Клиффорда (K и K' вместе с K_1, K_2, K_3, K_4), полученных для указанных троек прямых, попарно пересекающихся между собой по трем прямолинейным образующим, общим для выбранной пары.

Если теперь на поверхности K задать правильную точечную решетку, то она переносится на полярную поверхность K' , а также и на поверхности K_1, K_2, K_3, K_4 , имеющие с данной общие прямолинейные образующие. Заметим, что при центральной симметрии относительно точки O пересечения диагоналей прямоугольника развертки поверхности K построенный выше комплекс из шести поверхностей Клиффорда переходит в себя. Таким образом, в эллиптическом пространстве могут быть промоделированы оси симметрии третьего (L_3) и шестого (L_6) порядков.

Отметим, что моделирование в эллиптическом пространстве федоровских групп, привело к разбиению всех этих групп относительно поворотных осей на два больших класса: класс групп, моделируемых

на поверхности Клиффорда $K(a, r)$, $r = \frac{\pi}{4}$, где моделируются оси симметрии второго и четвертого порядков, и класс групп, моделируемых на поверхности Клиффорда $K(a, r)$, $r = \frac{\pi}{6}$, где моделируются оси симметрии третьего и шестого порядков. На наш взгляд, это находится в хорошем соответствии с законом кристаллографических пределов Е. С. Федорова, также разделяющего все множество кристаллических форм на два класса относительно осей симметрии четвертого и шестого порядков.

Рассмотрим построение решетчатых систем в эллиптическом пространстве с помощью K -вращений и центральных симметрий. Серия поверхностей Клиффорда, создающая в эллиптическом пространстве точечную решетку, аналогичную точечной решетке в евклидовом пространстве, получаемую переносами, порождена K -вращениями вокруг собственной прямолинейной образующей с фиксацией через определенные углы смещения [1] какой-либо выбранной поверхности, несущей точечную «плоскую» решетку. Такую точечную систему назовем K' -системой. Все поверхности Клиффорда K' -системы имеют одну общую прямолинейную образующую AA' , являющуюся их осью вращения. Прямолинейные образующие поверхностей Клиффорда составляющих K' -систему, отстоящие от линии AA' на расстоянии $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{6}$, образуют поверхность Клиффорда, имеющую AA' своей осью и переходящую в себя при K -вращениях эллиптического пространства, то есть неподвижную поверхность, так как ось AA' неподвижна. Оси поверхностей Клиффорда, образующих K' -систему, лежат на этой неподвижной поверхности.

Как показано выше, для поверхности Клиффорда радиуса $\frac{\pi}{6}$ мы имеем комплекс из шести поверхностей Клиффорда, расположенных определенным образом. Следовательно, K' -система, полученная K -вращениями поверхности Клиффорда этого радиуса, содержит такой комплекс, связанный и с неподвижной поверхностью Клиффорда. Этот комплекс при K -вращениях переходит в себя. Аналогично и для K' -систем, порождаемых K -вращениями поверхностей Клиффорда радиуса $\frac{\pi}{4}$.

Поскольку комплекс из шести поверхностей обладает вполне определенной конфигурацией, а каждая из поверхностей Клиффорда, входящая в данную K' -систему, также порождает аналогичный комплекс, определенным образом расположенный относительно неподвижного комплекса, K' -система сохраняет вполне определенную конфигурацию.

Для построения полной точечной решетки в эллиптическом пространстве к K' -системе необходимо применить центральные симметрии в каждой ее точке (аналогично поворотам в евклидовом пространстве), учитывая и сохранение ее конфигурации.

Рассмотрим это. Центральные симметрии, примененные к точкам K' -системы для поверхности Клиффорда радиуса $\frac{\pi}{6}$, воздействуют на эти точки следующим образом. Точки того комплекса, которому принадлежит точка A , полагаемая центром симметрии, переходят вновь в точки этого же комплекса. То есть он остается неподвижен. Покажем, что и любой другой комплекс из шести поверхностей Клиффорда, связанный с любой другой поверхностью Клиффорда данной K' -системы, переходит в себя при центральной симметрии в точке A , то есть в точке этой же K' -системы, но данному комплексу не принадлежащей. Дейст-

вительно, любая поверхность Клиффорда данной K' -системы имеет с неподвижной при K -вращениях поверхностью Клиффорда четыре общих прямых. Две общих прямолинейных образующих и две оси, причем ось одной есть прямолинейная образующая другой, и наоборот. Следовательно, любые две поверхности Клиффорда данной K' -системы связаны друг с другом через неподвижную при K -вращениях поверхность K_0 . То же самое относится и к комплексам из шести поверхностей Клиффорда. Таким образом, при центральной симметрии в точке A комплекса K_1 неподвижен не только он, но и комплекс K_0 , имеющий с K_1 четыре общих (значит неподвижных) прямых. А тогда и любой другой комплекс K_i , не содержащий точку A , также неподвижен при центральной симметрии в ней, поскольку имеет с K_0 четыре общих (значит неподвижных) прямых.

То есть при центральных симметриях K' -система переходит в себя, сохраняя конфигурацию, приобретенную ею при K -вращениях. Это же верно и для K' -систем, полученных K -вращениями поверхностей Клиффорда радиуса $\frac{\pi}{4}$. После применения центральных симметрий, таким образом, мы имеем систему поверхностей Клиффорда, которая может совмещаться с собой дважды и четырежды (для радиуса $\frac{\pi}{4}$) и дважды, трижды, четырежды и шестикратно (для радиуса $\frac{\pi}{6}$). Такую систему поверхностей Клиффорда, несущих решетку, назовем R' -системой.

Посмотрим, какую конфигурацию имеет K' -система и R' -система на евклидовой поверхности грани. Системы поверхностей Клиффорда и точек решетки на них для плоской грани будем называть K -системой и R -системой соответственно.

Предположив, что геометрия внутри кристалла эллиптическая, а точечные решетки располагаются на поверхностях Клиффорда, мы можем представить себе поверхности Клиффорда «уходящими» внутрь кристалла таким образом, что их оси ортогональны плоскостям граней. Основанием для такого взгляда может служить то, что собственная ось поверхности Клиффорда может нести нагрузку оси симметрии какого-либо порядка для точечной решетки на поверхности. Так, например, правильный шестиугольник на поверхности Клиффорда может быть получен K -вращениями. Поскольку поверхность Клиффорда топологически эквивалентна тору и изометрична ему, можно представить систему токов, «уходящих» и «выходящих» изнутри кристалла. Сечение же тором евклидовой плоскостью грани перпендикулярно его оси будет окружностью, на которой дискретно расположены точки решетки.

Схема расположения точек решетки на таком сечении, в предположении, что оно отражает распределение центров частиц (атомов), составляющих решетку реального кристалла, при сравнении с экспериментальными данными о расположении частиц на грани кристалла (электрограммы поверхностей (111), (100), (0001)) будет являться первой проверкой возможности применения эллиптической геометрии к изучению структур реальных кристаллов.

Итак, при сделанных выше допущениях K -система на грани кристалла проявится вполне очевидным образом. Все поверхности Клиффорда данной K' -системы имеют одну общую прямолинейную образующую, вокруг которой они вращаются. K -система на грани поэтому выглядит как серия окружностей, порожденных вращением одной из них вокруг точки A , лежащей на ней. Углы поворота могут быть различными, но для дальнейшего возьмем их одинаковыми, а число фиксированных положений окружности положим равным N , где N — число точек решетки.

ки, попавших на окружность. Неподвижная поверхность Клиффорда изобразится на грани окружностью того же радиуса с центром в точке A , совпадающей с центром симметрии K -системы. Центры других окружностей лежат на ней. Равенство длины радиуса окружностей либо $\frac{\pi}{6}$, либо $\frac{\pi}{4}$ делает невозможным изображение на евклидовой плоскости грани K -системы, образованной поверхностями Клиффорда с радиусом $\frac{\pi}{6}$. Поэтому рассматривать мы будем K -систему только для

поверхностей Клиффорда радиуса $\frac{\pi}{6}$. В рассмотрение попадают, таким образом, только точечные системы для граней, перпендикулярных осям третьего и шестого порядков, то есть (111) и (0001) .

Каждая из поверхностей Клиффорда, составляющих K -систему и на грани проявленная в виде окружности, входит в комплекс из шести

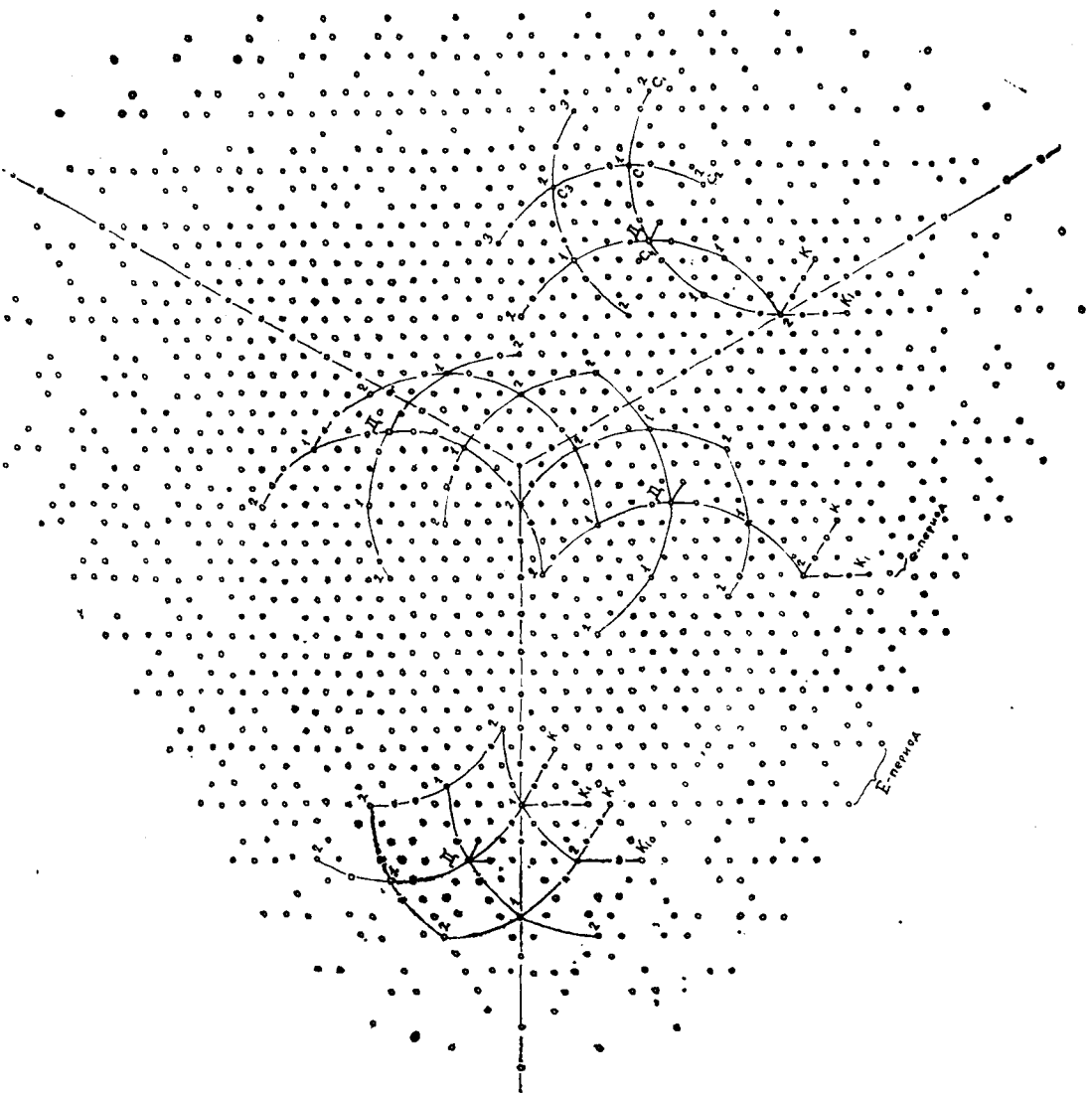


Рис. 1

поверхностей Клиффорда того же радиуса, имеющих попарно четыре общих прямых. При принятой трактовке поверхности Клиффорда такому комплексу на грани (на плоскости грани) соответствует шесть окружностей, имеющих попарно четыре общие точки, две на окружностях и центры, радиусы окружностей одинаковы и центр одной лежит на окружности другой. То есть мы имеем замкнутое кольцо окружностей.

Поскольку R -система переходит в себя и при K -вращениях, и при центральных симметриях, все такие кольца K -систем на ней ориентированы одинаково. То есть R -система может быть получена простым параллельным смещением K -системы из точки в точку кольца. Число подобных смещений равно, очевидно, $6m$ или $3m$, где m — число окружностей кольца. Для интерпретации оси симметрии шестого порядка смещение осуществляется по шестиугольному контуру, для интерпретации оси симметрии третьего порядка — по треугольному.

R -система для плоской грани перпендикулярной оси симметрии третьего порядка изображена на рис. 1.

R -система построена с помощью K -системы, содержащей 12 окружностей с 12 точками на каждой из окружностей через равные интервалы. Полагая точки полученной системы центрами частиц решетчатой системы реального кристалла, оценим полученную картину.

Первое, что является вполне очевидным, это характер распределения узлов решетки на R -системе моделирующей грани тетраэдра, например, в центральных частях R -системы узлы решетки располагаются строго упорядоченно и в полном соответствии с федоровскими группами, создавая решетку на евклидовой плоскости грани. В прибрежных участках R -системы видимая упорядоченность их расположения нарушается.

Определение. Зоной S назовем внутреннюю часть R -системы, ограниченную рядами плотнейшего расположения узлов, чередующихся строго через e -период (см. рис. 1). Зоной B назовем внешнюю часть R -системы.

Принципиальное различие между ними состоит в визуально наблюдаемой различной степени упорядоченности, хотя каждый узел решетки построен в соответствии с Φ -группой. Плотность расположения узлов в этих зонах также различна.

Отмеченные особенности распределения узлов решетки на R -системе находятся в хорошем соответствии с реально наблюдаемой различной степенью упорядоченности атомов внутри кристалла и в приповерхностных частях, различной ретикулярной плотностью частиц на разных участках одной и той же грани, нарушением периодичности расположения атомов в приповерхностных частях и, наконец, с решеткой, которая совпадает с электронограммами грани (111).

Далее, полагая внутреннюю геометрию кристалла эллиптической, мы приходим к интересному свойству кристаллического пространства — его геометрической анизотропии. Заключается оно в том, что на поверхности Клиффорда господствует евклидова геометрия [2]. Значит, узлы решетки, лежащие на одной и той же поверхности Клиффорда, связаны взаимоотношениями евклидовой геометрии, узлы, не лежащие на одной поверхности Клиффорда, не связаны таким образом. Это служит основанием для следующего определения.

Определение. K -прямой назовем любую эллиптическую винтовую линию $y = x \operatorname{ctg} \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, лежащую на поверхности Клиффорда, содержащей решетчатую систему.

Очевидно, что на развертке K -прямая есть отрезок прямой внутри прямоугольника развертки, а на K -системе или R -системе она выгля-

дит, как дуга окружности с радиусом, равным радиусу поверхности Клиффорда. Рассмотрим кратко модель роста кристалла, учитывая то, что K -прямая есть кратчайшая между узлами решетки.

Определение. Реакционно-способной частицей c_i относительно частицы c на R -системе назовем частицу, расположенную на кратчайшем расстоянии от частицы c , считая по K -прямым (R -частицы).

Расположение K -прямых для каждого узла нашей решетки однозначно и легко находимо (по построению). Расположение R -частиц также однозначно. Так, для узла D , интерпретированного как центр частицы, реакционно-способные частицы расположатся в узлах решетки с индексом 1; для этих узлов, в свою очередь, реакционно-способные частицы попадут в узлы с индексом 2 и так далее, считая по K -прямым. Кроме того, в число реакционно-способных частиц (см. рис. 1) попадут и частицы, расположенные относительно указанных, аналогично частицам K и K_1 , отстоящим от данных на величину E -периода. E -период есть период решетки, считая по K -прямым, e -период — это визуально наблюдаемый период плотнейшего расположения частиц.

Используя понятие R -частиц, мы будем рассматривать процесс роста кристалла, определив его следующим образом.

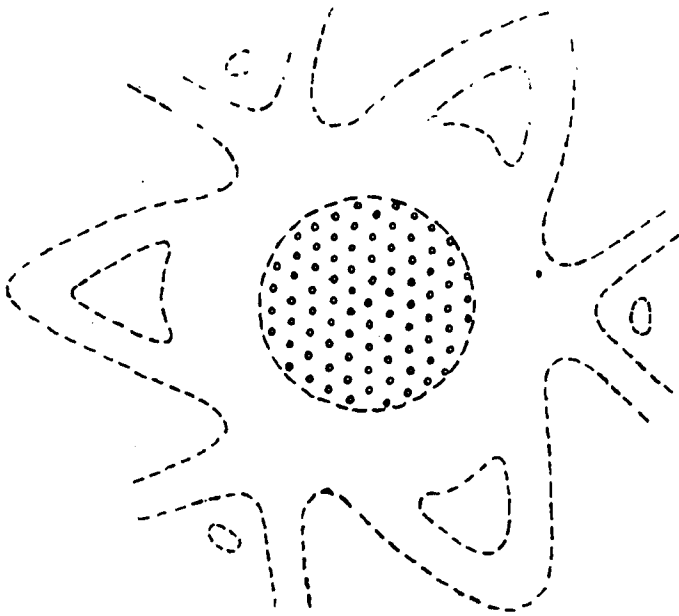


Рис. 2



Рис. 3

Определение. Ростом кристалла назовем процесс организации решетчатой структуры, протекающий в форме последовательной реализации R -частиц в «прореагировавшие» (присоединившиеся) с частицей (выбранной как центр кристаллизации) в соответствии с принципом

плотнейшей упаковки и федоровскими группами в эллиптическом пространстве.

Моделирование роста кристалла в направлении, нормальном к плоскости (111), достаточно просто и представительно с использованием R -системы. Пусть какая-либо ее точка (узел) будет центром кристаллизации. Найдя расположение K -прямых, для нее будем отмечать расположение R -частиц, попавших в соответственные узлы решетки. Для этих узлов расположение K -прямых также легко находимо и R -частицы «второго» поколения отмечаются в соответственных узлах. Прделав эту операцию достаточное число раз, чтобы картина была представительной и пригодной для оценки, сравним ее с данными эксперимента, полагая, что все отмеченные узлы представляют собой центры частиц. Такая модель должна, в принципе, соответствовать процессу роста кристалла самородного элемента кубической сингонии (например, кристаллам алмаза, меди, золота и т. д.).

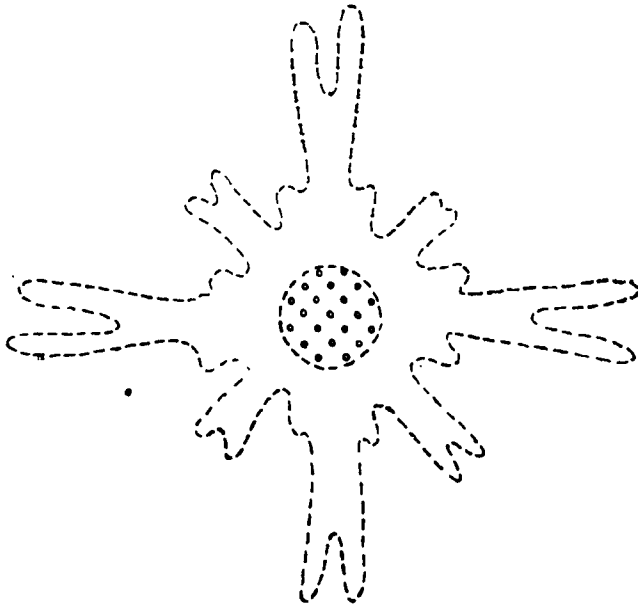


Рис. 4

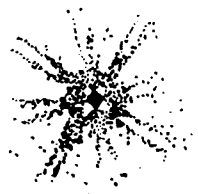


Рис. 5

Фигуры роста на грани (111), штриховка кристалла и, наконец, сама форма кристалла, возникающая при таком моделировании процесса роста, хорошо соответствует экспериментальному материалу и наблюдениям за природными минералами.

Совершенно аналогичным способом можно определить и процесс растворения (или травления) кристалла.

Определение. Процессом растворения (травления) кристалла на-

зовем процесс деорганизации решетчатой структуры, протекающий в форме последовательной реализации R -частиц относительно начальной точки растворения (травления) в прореагировавшие с веществом растворителя (травителя).

Реализация R -частиц происходит в полном соответствии с федоровскими группами в эллиптическом пространстве и также легко моделируема для грани (111) с использованием R -системы. Форма и морфология фигур травления, их ориентация и взаиморасположение и процессы их возникновения и изменения находятся в хорошем соответствии с экспериментом.

Поскольку напряжения в кристаллических структурах также следует считать распространяющимися в первую очередь по K -прямым, то и исследование форм фигур напряжений на грани (111), возникающих при приложении механического усилия (накол алмазной иглой), также можно проводить, используя R -систему. Так, например, теоретическая форма фигуры напряжений, возникающих в кристаллической структуре, изображена на рис. 2. Экспериментально полученная фигура напряжений [3] изображена на рис. 3. Соответствие с экспериментом, как видим, хорошее. Аналогичным образом можно промоделировать и форму фигур напряжений на грани (100), хотя это связано с некоторыми дополнительными построениями. Теоретически полученная форма фигуры напряжений изображена на рис. 4. Экспериментальной иллюстрацией к этому служит рис. 5. Соответствие, как это вполне очевидно, хорошее [4].

Подробное рассмотрение приведенных здесь примеров будет приложено в следующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руднев С. В. О геометрическом аппарате кристаллографии.— Томск, 1980. — 25 с. Рукопись представлена Томским политехническим ин-том. Деп. в ВИНТИ 24 июля 1980, № 4451—80.
2. Богомолов С. А. Введение в неевклидову геометрию Римана.— ГТТИ, 1934, с. 207—218.
3. Шубников А. В. Избранные труды по кристаллографии.— М.: Наука, 1975, с. 350—357.
4. Шаскольская М. П., Добрынинский Г. Ф. Фигуры напряжений на грани (100) кристалла.— Кристаллография, 1962, т. 7, вып. 1, с. 87—95.

РЕФЕРАТЫ НА ОПУБЛИКОВАННЫЕ СТАТЬИ

Гиперраспределения постоянного кручения. Соловьев А. Ф. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 3—19.

Введено понятие гиперраспределения постоянного кручения на римановом многообразии. Структура, определяемая таким распределением, аналогична контактной метрической структуре.

Изучается строение гиперраспределений постоянного кручения, обладающих постоянной L -секционной кривизной (они аналогичны контактным гиперраспределениям на контактных метрических многообразиях постоянной ϕ -голоморфной секционной кривизны). Доказан аналог теоремы Шура из кэлеровой геометрии. На основе классификации Танно (РЖМат, 1970, 6А540) полных односвязных многообразий Сасаки постоянной ϕ -голоморфной секционной кривизны получена частичная классификация полных связных односвязных римановых многообразий, допускающих нормальные гиперраспределения постоянного кручения и постоянной L -секционной кривизны. Библ. 9.

Гауссова и средняя кривизны индуцированных левоинвариантных метрик на двумерных подгруппах трехмерных неунимодулярных групп Ли. Кайзер В. В. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 20—23.

Дается ответ на вопрос: какими могут быть возможные значения гауссовой и средней кривизны двумерных аналитических подгрупп всех трехмерных связных неунимодулярных (РЖМат, 1977, 6А441) групп Ли по отношению к произвольно заданным на них левоинвариантным римановым метрикам. Исследуются также существование омбилических и вполне геодезических подгрупп и экстремальные значения гауссовой и средней кривизны. Унимодулярный случай рассмотрен в работе автора (РЖМат, 1982, 7А793ДЕП).

Библ. 6.

Вывод уравнений Эйлера-Лагранжа в подвижном репере. Корякина Е. Е. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 24—26.

Дается ответ на вопрос, как записать уравнения геодезических линий римановой метрики в подвижном репере.

Библ. 2.

О комплексах K_b прямых в проективном $2b$ -пространстве. Панчишина В. А. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 27—34.

В работе рассматриваются комплексы прямых K_b в проективном $2b$ -пространстве при $b \geq 4$. Они обладают в общем случае двумерными ассоциированными плоскостями. Определяется инвариантная цепь распределений на комплексе, находятся инвариантные точки на прямой, строится инвариантное оснащение Картана комплекса K_b . Построен пример частного класса комплексов, у которого второе звено цепи распределений инволютивно, а вторая ассоциированная плоскость трехмерна.

Библ. 6.

К дифференциальной геометрии m -распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства. Бочилло Г. П. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 35—42.

С использованием компонент внутреннего геометрического объекта второго порядка распределения Δ_m на многообразии M^{2n-1} всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства P_n ($m < n$) построено и геометрически охарактеризовано оснащение распределения Δ_m которое позволяет задать аффинную связность

на этом распределении. При построении использованы двойственность гиперплоского элемента самому себе, а также $(m-1)$ -распределения на M_{2n-1} , порождаемые Δ_m Библ. 10.

О комплексе K_2 прямых в пространстве P_5 . Гришанов Е. А., Кругляков Л. З. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 43—47.

Комплексом K_2 в P_5 называется 6-семейство прямых $l(6)$. Через каждую точку X прямой l проходит 2-конус $K(X)$ прямых комплекса K_2 . Касательное подпространство к конусу $K(X)$ для прямой l является 3-плоскостью $l_3(X)$, соответствующей в основном соответствия точке X . Пусть $k(X)$ — некоторый подконус конуса $K(X)$. Точку X прямой l , в которой плоскость $l_3(X)$ имеет касание второго порядка вдоль образующей l подконуса $k(X)$, назовем инфлексционным центром относительно подконуса $k(X)$. На прямой l имеется не более 16 инфлексционных центров относительно соответствующих подконусов. Построено оснащение и канонический репер для комплекса K_2 .

Библ. 3.

Допустимые комплексы K_0 плоскостей в P_5 . Кругляков Л. З., Лактионов С. А. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 48—50.

Комплексом K_0 плоскостей в P_5 называется 6-семейство плоскостей (РЖМат; 1981, 4А618). Комплекс называется допустимым, если для него определено основное соответствие и оно является постоянным. Он представляет собой в общем случае совокупность всех плоскостей, принадлежащих произвольному 3-семейству 3-плоскостей. Если через каждую прямую плоскости L комплекса проходит совокупность Ψ_2 торсов с одной и той же касательной гиперплоскостью, то комплекс называется вырожденным допустимым и представляет собой грасманово многообразие $Gr(2, 4)$. Сформулированы действенные результаты.

Библ. 7.

Касательные линейные комплексы линейчатого комплекса. Петин В. А. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 51—59.

В статье геометрически охарактеризованы некоторые линейные комплексы из пучка касательных линейных комплексов. Установлено проективное отображение луча линейчатого комплекса на пучок касательных в этом луче линейных комплексов (в пучке введена структура проективной прямой), что позволяет получить новые факты в теории комплексов.

Библ. 12.

О комплексе K_2 двумерных плоскостей, ассоциированном с распределением Δ_l на многообразии $Gr(1, n)$ всех прямых в A_n . Печников И. А. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 60—66.

Исследуется комплекс, порождаемый 2-плоскостью, инвариантно ассоциируемой с произвольной прямой $L_1 \in Gr(1, n)$ при задании распределения Δ_{l-1} на $Gr(1, n)$. Выделяются инвариантные распределения на этом комплексе. Рассматриваются геометрические конструкции, связанные с распределением Δ_{l-1} на комплексе K_2 2-плоскостей, индуцируемым распределением Δ_{l-1} на $Gr(1, n)$. Изучается основное соответствие в совокупности $L_2(\Psi_{l-1})$ интегральных 1-семейств 2-плоскостей распределения Δ_{l-1} на K_2 . Характеризуются частные классы распределений Δ_{l-1} на $Gr(1, n)$, для которых комплекс K_2 вырождается.

Библ. 4.

Изометрическое погружение области пространства B_6 . Бухтык М. С. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 67—72.

В касательном расслоении аффинного пространства A_3 определена эквивариантно-инвариантная метрика [РЖМат, 1983, 5А579]. Полученное полуриманово пространство B_6 не допускает аффинной связности без кручения, в которой метрический тензор переносится параллельно. Указан конус S_6 пространства ${}^6R_{12}$, изометричный области пространства B_6 . Найдены некоторые линии пространства B_6 , отображаемые при указанной изометрии на прямые конуса S_6 .

Библ. 6.

Конгруэнции плоскостей четырехмерного центроаффинного пространства. Оницук Н. М., Штатская И. В. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, 1. Дана центроаффинная классификация конгруэнций 2-мерных плоскостей 4-мерного пространства. Исследованы геометрические свойства конгруэнций плоскостей каждого класса.

Библ. 1.

Двумерные параболические поверхности в R_5^2 . Широбакина Н. В., Щербakov В. Н. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 79—88.

Для двумерной параболической поверхности V_2^1 в полувеклидовом пространстве R_5^2 построен полуканонический репер и доказано существование ряда подклассов класса V_2^1 . Среди них — поверхности, несущие аналог сети Кенигса, линейчатые поверхности с изотропными образующими и др.

Библ. 8.

Аналоги формулы Гаусса—Бонне в пространствах с вырожденными метриками. Сдвижков О. А. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 89—90.

Доказывается, что в полувеклидовых пространствах I_3 , F_3 , G_3 аналоги формулы Гаусса—Бонне имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i &= 2\pi; \\ \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i &= 0; \\ \iint_S K d\tau + \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i &= 0. \end{aligned}$$

Библ. 2.

Комплексы в трехмерном квазиэллиптическом пространстве. Цыренова В. Б. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 91—100.

Производится репераж комплекса прямых в трехмерном квазиэллиптическом пространстве. Выделяются классы, характеризующиеся совпадением инфлекссионных центров луча с его квазиэллиптическими центрами.

Библ. 5.

К теории поверхностей трехмерного неметрического флагового пространства. Бадяева З. П. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 101—106.

Произведен репераж и выделены важнейшие классы поверхностей в трехмерном неметрическом флаговом пространстве, в том числе флаговые поверхности переноса, флаговые цилиндрические поверхности и др.

Библ. 8.

Образы симметрии, косимметрии и простоты пространств над полями Галуа и «квадратом Галуа». Харитонов Н. И. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 107—112.

Определяются образы симметрии, косимметрии и простоты проективных, неевклидовых и симплектических пространств над конечными полями Галуа и над конечным кольцом, являющимся прямой суммой двух изоморфных полей Галуа, называемым «квадратом Галуа». Показывается, что в случае, когда порядок поля Галуа является квадратом, к образам симметрии добавляются n -цепи, а к образам косимметрии — эрмитовы квадратики. Для всех найденных образов находятся их стационарные подгруппы.

Библ. 8, ил. 2.

О применении эллиптической геометрии Римана к исследованию кристаллических структур. Руднев С. В., Ермолаев В. А. — Геометрический сб., 25. Томск: Изд-во ТГУ, 1984, с. 113—121.

Предположение, что геометрия внутри кристалла — эллиптическая, а плоские точечные решетки расположены на поверхностях Клиффорда трехмерного эллиптического пространства, позволяет дать удовлетворительное объяснение процессам роста и травления, а также фигурам напряжений на гранях кристалла.

Библ. 4, ил. 5.

СОДЕРЖАНИЕ

А. Ф. Соловьев. Гиперраспределения постоянного кручения	3
В. В. Кайзер. Гауссова и средняя кривизны индуцированных левонвариантных метрик на двумерных подгруппах трехмерных неунимодулярных групп Ли	20
Е. Е. Корякина. Вывод уравнений Эйлера—Лагранжа в подвижном репере	24
В. А. Панчишина. О комплексах K_b прямых в проективном $2b$ -пространстве	27
Г. П. Бочилло. К дифференциальной геометрии m -распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства	35
Е. А. Гришанов, Л. З. Кругляков. О комплексе K_2 прямых в пространстве P_5	43
Л. З. Кругляков, С. А. Лактионов. Допустимые комплексы K_0 плоскостей в P_5	48
В. А. Петин. Касательные линейные комплексы линейчатого комплекса	51
И. А. Печников. О комплексе K_2 двумерных плоскостей, ассоциированном с распределением Δ_{n-1} на многообразии $Gr(1, n)$ всех прямых в A_n	60
М. С. Бухтяк. Изометрическое погружение области пространства B_6	67
Н. М. Онишук, И. В. Штатская. Конгруэнции плоскостей четырехмерного центроаффинного пространства	73
Н. В. Широбакина, Р. Н. Щербakov. Двумерные параболические поверхности в R_5^2	79
О. А. Сдвижков. Аналоги формулы Гаусса—Бонне в пространствах с вырожденными метриками	89
В. Б. Цыренова. Комплексы в трехмерном квазиэллиптическом пространстве	91
З. П. Бадяева. К теории поверхностей трехмерного неметрического флагового пространства	101
Н. И. Харитонова. Образы симметрии, косимметрии и простоты пространств над полями Галуа и «квадратом Галуа»	107
С. В. Руднев, В. А. Ермолаев. О применении эллиптической геометрии Римана к исследованию кристаллических структур	113
Рефераты на опубликованные статьи	122

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 25

ИБ 1295

Редактор Л. И. Дюканова
Технический редактор Р. М. Подгорбунская
Корректор В. Г. Лихачева

Сдано в набор 18.04.83 г. Подписано в печать 15.01.85 г. КЗ 02008. Формат 70×108¹/₁₆.
Бумага типографская № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 8,0.
Усл. печ. л. 11,2. Уч.-изд. л. 10,2. Тираж 500 экз. Заказ 3613. Цена 1 р. 60 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Типография изд-ва «Омская правда», 644056, Омск, пр. Маркса, 91.

ПОПРАВКА

В статье Н. В. Широбакиной «К геометрии двумерных непараболических поверхностей в пятимерном полуевклидовом пространстве R_5^2 » (опубликованной в «Геометрич. сб.», вып. 21, 1980, с. 37—44) на с. 37 вместо слов «Плоскость называется непараболической, если она пересекается с плоскостью T_0 , в случае же невыполнения этого условия плоскость называется параболической [1, с. 335]» следует читать: «Двумерная плоскость, пересекающая плоскость абсолюта T_1 , называется параболической; плоскость, не пересекающая T_1 , называется непараболической».

44-559934

1 р. 60 к.

Томский госуниверситет 1878



Научная библиотека 00949689