ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 12

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1975

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 12

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1975

Настоящий двенадцатый выпуск «Геометрического сборника» содержит работы, обсуждавшиеся на геометрическом семинаре им. Н. Г. Туганова при кафедре геометрии Томского университета в 1969—1971 годах. Они посвящены проективной аффинной и центроаффинной геометрии пространств различных размерностей, приложениям геометрических методов к гидромеханике, а также некоторым вопросам истории математики.

Сборник предназначен для научных работников-геометров, а также для математиков других специальностей и механиков. Он представляет интерес для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

2-2-3

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ПАМЯТИ СЕРГЕЯ ПАВЛОВИЧА ФИНИКОВА

В 1974 году исполнилось 10 лет со дня смерти нашего незабвенного учителя и друга — Сергея Павловича Финикова.

Томские геометры широко пользуются его замечательными трудами, хотя всё еще недостаточно их знают. Лишь немногие из нас были лично знакомы с Сергеем Павловичем. Надеясь, что советские историки математики посвятят его трудам специальные монографии, мы ограничиваемся здесь публикацией двух непосредственных откликов на тяжелую утрату — перевода мемориальной статьи известного французского геометра и историка науки профессора П. Винченсини и надгробного слова советского геометра профессора Н. И. Кованцова.

П. Винченсини. Памяти великого геометра: Сергей Павлович Фиников (1883—1964)*.

27 февраля 1964 года в возрасте 81 года скончался выдающийся советский математик Сергей Фиников, почетный профессор Московского университета, один из самых крупных геометров последнего 50-летия, благородный друг Франции.

Два его ученика — профессора Московского университета — А. М. Васильев и Г. Ф. Лаптев в «Успехах математических наук» (XIX, 4 (118), 155—162) осветили главные этапы деятельности умершего ученого, показали богатство и плодотворность его работ, отметили его талант воспитателя, его постоянное стремление отстаивать свои принципы.

Но труды С. П. Финикова связаны с результатами французской математики конца прошлого века и первой половины нынешнего века так тесно, что дань уважения ему на французском языке является естественным актом справедливости и признательности. А с другой стороны, в эпоху, когда математика (и тем более геометрия) развиваются так, что часто приходится задаваться вопросом о том, какая судьба ждет в будущем те или иные ее установки, представляет несомненный интерес восстановление в памяти таких трудов, как труды С. П. Финикова, столь классических по внешности и столь современных по духу.

Бо́льшая часть геометрических работ XIX века и начала XX века тяготеет к задаче изгибания поверхностей. Исследования, которые породила эта проблема, оказали глубокое влияние на самые различные ветви математической науки. Это она была началом блестящих работ Г. Дарбу по интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных. Она привела Э. Бельтрами к разработке его теории дифференциальных параметров, введенных в науку Г. Ламе.

* (Перевод с французского выполнен Р. Щербаковым; оригинал напечатан в «Archives internationales d'histoire de sciences», 74—75, 1966).

и к известному предвосхищению абсолютного дифференциального исчисления Г. Риччи и Т. Леви-Чивита. Она преобладает в трудах Л. Бианки так же, как и в работах К. Гишара, которые стимулировали распространение идеи изгибания на многомерные многообразия с фундаментальными группами в гениальных работах Э. Картана.

Как всякая большая теория, теория изгибания многообразий, несмотря на то, что она была определена метрически, имеет солидную основу, защищающую ее от влияния моды и тенденций, и настолько важное содержание, что она, естественно, должна была привлекать внимание всех геометров.

Русские геометры, которые по причинам лингвистическим и географическим держались несколько в стороне от движения идей, вызванных задачей изгибания вне их страны, приступили к использованию этой проблемы в другом месте, более подходящем, без сомнения, к природе их гения. В 1878 г. на конгрессе французской ассоциации развития наук в сообщении «О кройке одежды», столь же блестящем, сколь и оригинальном, П. Л. Чебышев показал различные возможности «одевания» некоторой поверхности посредством ткани, образованной двумя системами прямолинейных нитей, изгибаемых как угодно, но нерастяжимых, связанных в точках пересечения и встречающихся под прямым углом, причем угол нитей может варьироваться при наложении ткани (без разрывов и складок) на поверхность.

Эта проблема ввела в рассмотрение множества всех таких сетей на некоторой поверхности, которые могли быть получены из нитей деформированной ткани; определние этих сетей дает одно из самых красивых геометрических приложений теории систем уравнений в частных производных.

Другой великий русский геометр К. М. Петерсон первым выяснил первостепенную роль другой сети — сопряженной сети, введенной Дюпеном и призванной играть важную роль в изучении изометрических преобразований поверхности. Он показал особую важность поверхностей, несущих сопряженные сети, остающиеся сопряженными при некотором непрерывном изгибании.

Как известно, полученные русскими геометрами результаты повсюду, а во Франции особенно, получили большой отзвук.

Достаточно, например, просмотреть первую часть второго тома «Лекций по дифференциальной геометрии» Л. Бианки, чтобы ощутить тот импульс, который дан геометрическим исследованиям понятием сохраняющейся сопряженной сети, и то влияние, которое это понятие оказало на продолжение и завершение исследований Л. Бианки и П. Калапсо (в Италии), Дарбу, Комбескюра, Коссера́, Кенигса и Гишара (во Франции) по теории изгибания поверхностей. И это влияние, начавшееся в рамках евклидовой геометрии, затем распространилось на проективно-дифференциальную геометрию, где оно проявилось столь же поразительно, как и непредвиденно в виде того, что Эли Картан назвал сетью проективного изгибания. Это понятие позволило прославленному французскому геометру в знаменитом мемуаре «О проективном изгибании поверхностей» (Ann. de l'Ecole Normale sup. (3), XXXIV, 1920) полностью решить проблему изгибания поверхностей в проективном пространстве.

В России работы Петерсона были исходной точкой научной деятельности С. Финикова и легли в основу его докторской диссертации «О изгибании поверхности на главном основании с сохраняющейся сопряженной сетью», защищенной в Москве в 1917 г.

Проблема изгибания поверхностей с сохранением сопряженности сети была развита С. Финиковым с совершенно новой точки зрения в полном соответствии с теми идеями, которые определяли геометрические исследования в начале XX века.

Рассматривая поверхность не как полностью заданную, а лишь абстрактно определенную при помощи ее ds^2, С. Фиников исследовал те поверхности, представленные этим ds^2, которые допускают непрерывное изгибание с сохранением сопряженности сети (эту сеть называют главным основанием изгибания). Это привело к построению теории изгибания поверхностей с сохранением сопряженной сети, покоящейся на некоторой совокупности формул и уравнений, систематическое употребление которых стало вскоре обязательным и обеспечило открытие большого числа фундаментальных результатов для развития различных теорий и решения разнообразных задач, связанных с общей проблемой изгибания.

Бóльшая часть работ С. Финикова, посвященных этой проблеме, была опубликована на французском языке, а некоторые и написаны в нашей стране во время пребывания его у нас в 1923—1924 гг. Публикация бóльшей части из них была доверена двум французским журналам и составила около 20 сообщений, представленных с 1924 по 1928 год в Парижскую Академию наук. Развернутое изложение дано в важных мемуарах в Annales de l'Ecole Normale sup., Journal des mathématiques pures et appliquées, Bulletin des sciences mathematiques.

96-я тетрадь «Memorial des Sciences mathématiques», опубликованная в 1939 г., представляет собой общий обзор, лучший и наиболее полный по сравнению с предшествующими, работ, порожденных понятием изгибания с сохранением сопряженной сети. Эта работа сразу стала общеизвестной и имела большой успех; в течение более четверти века она давала материал для исследования многочисленным геометрам всех стран и до наших дней сохраняет актуальность.

Понятие изгибания на главном сопряженном основании, о котором мы только что говорили, получила у С. Финикова естественное обобщение, которое получило название изгибания на кинематическом основании. Еще Г. Дарбу и Л. Бианки, а за ними многие другие геометры стали рассматривать на произвольной поверхности S кинематически сопряженные сети, исходя из кинематических представлений о качении по S какого-нибудь ее изгибания.

В мемуаре «Об изгибании поверхностей с сохраняющимися кинематическими сетями», опубликованном на французском языке в XXXIII томе (1926) московского «Математического сборника» (основные положения этого мемуара вошли в упомянутый выше мемуар в «Memorial des Sciences mathématiques») С. Фиников показал связи, существующие между понятиями гармонической и кинематической сопряженности, установил основы теории изгибания на кинематическом основании и доказал, что главное основание изгибания является не только сетью, сопряженной в обычном смысле, но и сетью кинематически сопряженной. Он открыл новый путь для исследований, в которые были вовлечены многие геометры, и недавние публикации еще раз подчеркнули богатые возможности развития этой идеи.

Глубокая осведомленность С. Финикова в классической дифференциальной геометрии позволила ему принять активное участие в родившемся в начале XX века движении, ставившем целью установление систематических связей между геометрией и теорией групп.

Следует заметить, что среди главных геометрий с фундаментальными группами (аффинная, конформная, проективная ...) наибольший интерес представляет проективно-дифференциальная геометрия. Причина этого предпочтения (отмеченная, между прочим, в цитированной выше статье А. М. Васильева и Г. Ф. Лаптева) состоит в том, что глубокие и простые факты обычной проективной геометрии угадываются за основными теоремами классической евклидовой дифференциальной геометрии, а большая часть соотношений последней находит настоящее объяснение в широких рамках проективной дифференциальной геометрии.

Главные работы С. Финикова по проективной дифференциальной геометрии отражены в трех основных трудах, опубликованных в Москве в 1948 и 1950, 1956 гг. под названиями «Метод внешних форм Картана», «Теория конгруэнций», «Теория пар конгруэнций».

Эти труды, имевшие большой международный резонанс, занимают место на первом плане в математической литературе. Общие теории, представленные в монографиях С. Финикова с постоянной заботой о глубине и ясности и примененные к большому числу конкретных задач, обеспечили им большую популярность.

Общеизвестен импульс, полученный многими отраслями математики и, в частности, дифференциальной геометрией, введением внешнего дифференциального исчисления Эли Картана.

Введя внешние дифференциальные формы ω_i вместо обычных дифференциалов для изучения бесконечно малого смещения подвижного репера, ассоциированного с образующим элементом некоторого многообразия, Эли Картан глубоко изменил эволюцию геометрической мысли, поставив на первое место те свойства фигуры определенного пространства, которые наиболее тесно связаны со структурой самого пространства.

Это радикальное изменение было, однако, встречено с некоторым скептицизмом.

Возможность ассоциировать развитие дифференциальной геометрии в ее наиболее конкретных частях с символикой внешних дифференциальных форм и правилами их исчисления казалась удивительной. Тот факт, например, что можно вдруг получить уравнения структуры пространства путем простого внешнего дифференцирования, содержал что-то таинственное. И нужен был весь авторитет Эли Картана и успехи, достигнутые им применением этого метода к многочисленным трудным проблемам, которые теперь оказались разрешимыми, чтобы преодолеть боязнь и внушить доверие колеблющимся.

С. Фиников одним из первых применил в своих исследованиях метод внешних дифференциальных форм. Он сделал этот метод более доступным, дав собственное изложение его, в котором выяснил его чисто геометрическую природу. Тем самым он в значительной степени содействовал распространению метода.

Сразу же после первой мировой войны он организовал в Москве группы математиков, занявшихся изложением метода Картана, его приложениями и распространением на все более широкие области дифференциальной геометрии. Это привело к созданию «Семинара Финикова» в 1933 г.

Многочисленные иностранные математики, сообщавшие на этом семинаре свои работы, находили там атмосферу искренней увлеченности и сердечности, и обмен идей в этой всегда внимательной и чрезвычайно симпатичной аудитории был весьма плодотворен.

Творчество С. Финикова слишком широко, чтобы его можно было охватить в кратком анализе, и мы ограничимся указанием лишь на некоторые главные сюжеты, вокруг которых оно развертывалось. Мы уже говорили о его работах по изгибанию поверхностей с сохранением сопряженных и кинематических сетей. К другому кругу идей, хорошо известному геометрам, относятся исследования о расслояемости.

Понятие расслоения (или организации в непрерывные семейства) множества дифференциальных элементов определенной природы, по существу, очень тесно связанное с проблемой интегрирования дифференциальных систем, а с другой стороны, являющееся руководящим в развитии самых современных исследований, возникло очень давно. Демулен в 1913 г. вновь привлек к нему внимание, рассмотрев в обычном пространстве семейства ∞^3 элементов касания, которые можно свести к семействам ∞^1 поверхностей так, что существует такая прямолинейная конгруэнция Δ, что плоскости элементов касания ∞^1 поверхностей, центрированные на одном и том же луче этой конгруэнции, проходят через одну и ту же прямую D. Множество этих прямых D образует с Δ пару расслояемых конгруэнций.

Пара произвольно взятых конгруэнций не является вообще расслояемой, но расслояемая пара конгруэнций представляет собой несомненный геометрический интерес.

Л. Бианки показал важную роль, которую играет понятие расслояемости конгруэнций в исследованиях по изгибанию поверхностей постоянной кривизны, а Г. Фубини распространил это понятие на проективную геометрию. Но только С. Фиников ясно показал все то, что геометрия может извлечь из систематического глубокого изучения расслояемости, и построил настоящую теорию множества проблем, основанных на этом понятии. В уже цитированном сочинении 1956 г. «Теория пар конгруэнций» можно найти наиболее полное изложение этой теории и там же, как раз в связи с расслояемостью, появились все те важнейшие дополнения, сделанные С. Финиковым в деле уточнения и распространения метода внешних форм Картана, на которые он неоднократно намекал ранее.

Большое значение имеют также результаты, полученные С. Финиковым по изгибанию прямолинейных конгруэнций с сохранением торсов, так же как и расширение, которое он дал классическому преобразованию Лапласа, введя «преобразования T», позволяющие преобразовывать не только поверхности, но и прямолинейные конгруэнции.

Открытие преобразований T оказало громадное влияние на развитие проективно-дифференциальной геометрии: многие геометры различных стран использовали его в своих работах и смогли, опираясь на него, ввести большое число новых важных геометрических конфигураций.

Хотя открытия в геометрии были наиболее существенной частью творчества С. Финикова, нельзя обойти молчанием важные дополнения, которые он внес в другие ветви математики. В частности, он внес уточнения в некоторые вопросы теории групп, развил классические результаты Рикье и Томаса по теории интегрирования дифференциальных систем и указал новый метод нахождения многомерных характеристик и особых решений этих систем.

Что касается общих черт математического творчества С. Финикова, то прежде всего следует отметить большую свободу духа, которая присуща его сочинениям.

В его сочинениях господствует геометрическое ви́дение фактов, которое предшествует и руководит введением аналитического аппарата и которое пытается предвидеть, прежде чем создавать. Следует сказать, что С. Фиников относится к тем геометрам, для которых никакая общая теория, которая может развиваться лишь на базе своих аксиом или чисто алгоритмически, не в состоянии поглотить классическую дифференциальную геометрию.

В последней имеются области несократимые и проблемы, которые можно трактовать только ее собственными методами. Среди них проблема изгибания, о которой шла речь в начале статьи, которой С. Фиников после стольких знаменитых математиков посвятил столько сил и которая открывает еще столько возможностей для дальнейшего развития, является примером поразительным.

С. Фиников был не только великим ученым, но и большим педагогом и — в наиболее благородном смысле этого слова — великим воспитателем. Его лекции были образцовыми. Труды иностранных мастеров занимали в них большое место, и никто не понимал лучше его, как много выигрывает человечество от дружеского сотрудничества и взаимного доверия ученых различных стран.

Он всегда оказывал заметное предпочтение Франции. Он свободно говорил на ее языке, поражал ее ученых знанием ее литературы и истории и любил вместе со своими французскими друзьями вспоминать о своем пребывании во Франции.

Начиная с 1960 г., когда уход в отставку увеличил время его досуга, он предпринял перевод нескольких сочинений по геометрии, в которых был наиболее ярко представлен французский гений (сочинения Эли Картана, Жана Лерэ, Андре Лихнеровича и Жана Фавара).

С. Фиников до конца дней своих воспитывал в своих многочисленных учениках, профессорствующих в различных университетах и институтах Советского Союза, чувства уважения, восхищения и любви, которые он питал к нашей стране.

Сергей Павлович Фиников

(Из речи, произнесенной Н. И. Кованцовым у гроба С. П. Финикова)

Долгий и славный путь прожил Сергей Павлович. Каждый из нас был бы счастлив, если бы к своему смертному часу мог увидеть сотни светящихся благодарностью лиц, увидеть творения рук своих, мог бы с чувством большого удовлетворения сказать себе, что жизнь прожита не даром и что время, отмеренное тебе судьбой, не брошено на ветер. Как знать, может быть, чувствовал себя счастливым и Сергей Павлович, когда перебирал в своей богатой памяти вехи своего замечательного жизненного пути?

А может быть он чувствовал себя несчастным? Может быть, терзало его острое чувство, острое сознание неудовлетворенности? Страшно коротка человеческая жизнь. И чем больше прожито лет, тем больше ощущаешь эту краткость, тем больше испытываешь горечь обиды на несправедливость судьбы, которая наделила тебя такой неуемной жаждой новизны и таким чудовищно малым временем для удовлетворения этой жажды.

Должно быть, именно эти чувства испытывал Сергей Павлович, когда до последнего дыхания, не покладая рук своих, с ненасытной жадностью и безмерной самоотверженностью создавал свои произведения, искал новых и новых форм своего самовыражения. Вероятно, ни один период в жизни Сергея Павловича не был столь продуктивным, как последние полтора-два десятка лет, когда, несмотря на приближающуюся и уже приблизившуюся старость, несмотря на то, что по нормам человеческой морали он уже имел безраздельное право не трудясь пользоваться результатами своих предшествующих усилий, он, ни в чем не уступая молодым, а во многом и значительно превосходя их, год за годом выпускал одну монографию за другой, год за годом увеличивал и без того большое количество своих учеников.

Как сквозь волшебное стекло вижу я тот далекий летний день, когда 18 лет назад двадцатилетним юношей переступил я порог Московского университета. Судьбе было угодно, чтобы Вячеслав Васильевич Степанов, тогдашний директор математического института при университете, направил меня к Сергею Павловичу.

Я вижу потом долгий ряд лет, когда я ежегодно по многу дней подряд общался с Сергеем Павловичем, беседовал с ним, слушал его выступления, читал ему робкие плоды своих неумелых изысканий. Я сохранил все письма, которые были присланы мне Сергеем Павловичем за все годы нашей многолетней дружбы. Их много, этих писем. Только сейчас я по-настоящему понимаю, какого труда стоило написать все эти письма, найти краткую и убедительную форму для того, чтобы наилучшим образом донести свою мысль до другого. Я помню, что за все годы не было ни единого случая, чтобы Сергей Павлович не ответил на мое письмо или на мою телеграмму. А таких, как я, у него было не мало. Какой же железной дисциплиной надо было обладать, чтобы в каждодневной суете помнить о необходимости дать ответ каждому, кто в этом ответе нуждается!

Я помню, наконец, свои последние встречи с Сергеем Павловичем на древней Киевской земле. Это было во время Первой Всесоюзной геометрической конференции. Участники конференции помнят то чудесное майское время, когда щедрое южное солнце как будто приветствовало своих гостей. Участники конференции помнят, как Сергей Павлович открывал эту конференцию, как они прислушивались к его слабому, но проникновенному голосу.

Больше мне не довелось видеть Сергея Павловича. Однако я, как и все те, кто когда-либо встречался с учителем, всегда помнил о нем, так же, как, я это знаю точно, он помнил обо всех нас. И вот это печальное известие, которое подкрадывалось исподволь, которому не хочется верить, но которое совершенно однозначно в своей жестокой неумолимости.

Киевские математики просили меня передать свое глубокое соболезнование по поводу невозвратимой утраты для советской геометрии, да и не только для нее. Скорбь о Сергее Павловиче навсегда останется в наших признательных и благодарных сердцах.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ k-ПСЕВДОФОКАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ СЕМЕЙСТВА d-ПЛОСКОСТЕЙ В P_N

Л. З. КРУГЛЯКОВ

Введение

В работе [5] введено понятие k-псевдофокального и дуально k-псевдофокального семейства d-мерных плоскостей L в N-мерном проективном пространстве P_N. В каждой d-плоскости L a-параметрического семейства $(L)_a$ рассматриваются подпространства $L_k \subset L$. С каждой плоскостью L_k связывается подпространство T^k [5], являющееся линейной оболочкой касательных $(d+a)$-плоскостей к поверхности S_{d+a}, описываемой плоскостью L, во всех точках плоскости L_k. Плоскость L_k названа k-псевдофокусом подмногообразия $\Psi^*{}_b$ (в смысле [3]), если касательное подпространство T^b этого подмногообразия совпадают с подпространством T^k. Соответствие $L_k \to \Psi_b^*$ в этом случае названо Π_b^k-соответствием, а семейство $(L)_a$ — k-псевдофокальным класса ρ, где $\rho = n - d - a(k+1) \geqslant 1$, n — размерность касательного подпространства [2] семейства $(L)_a$. k-псевдофокальное семейство реализуется при $a \geqslant \rho(d+1)$, причем $b = a - \rho(d-k)$.

Двойственным образом вводится понятие дуально k-псевдофокального семейства d-плоскостей $(\overline{L})_a$ порядка ρ, для которого имеет место $D\Pi_b^k$-соответствие между $(N-k-1)$-плоскостями $T_{N-k-1} \supset \overline{L}$ и подмногообразиям $\overline{\Psi}_b^*$, определенное совпадением фокуса плоскости T_{N-k-1} в $\overline{L}$ с фокусом [1] подмногообразия $\overline{\Psi}_b^*$. Оно реализуется при $k+1 < N-d \leqslant \dfrac{a}{\rho}$, где $\rho = d - a(k+1) - h^a \geqslant 1$, h^a — размерность фокуса семейства $(\overline{L})_a$ (для нефокального семейства $h^a = -1$), причем $b = a - \rho(N-d-k-1)$.

В предлагаемой работе указанные выше понятия переносятся на неголономные подмногообразия Ψ_b^* k-псевдофокального семейства $(L)_a$ и выясняются условия существования последовательности вложенных подмногообразий $\Psi_{b_1}^* \supset \Psi_{b_2}^* \supset \ldots \supset \Psi_{b_m}^*$ по одному и тому же k-псевдофокусу L_k. Такая последовательность подмногообразий называется интропсевдофокальной m-цепью по k-псевдофокусу L_k. Двойственным образом вводится понятие экстрапсевдофокальной m-цепи подмногообразий по каждой $(N-k-1)$-плоскости $T_{N-k-1} \supset \overline{L}$ дуально k-псевдофокального семейства $(\overline{L})_a$ порядка ρ и выясняются условия, при которых семейство $(\overline{L})_a$ обладает такой m-цепью.

§ 1. k-псевдофокальные подмногообразия Ψ_b семейства d-плоскостей

Рассмотрим a-семейство $(L)_a$ d-плоскостей L фокальное класса h_1^a в проективном пространстве P_N. При введении понятия k-псевдофокального семейства класса ρ в работе [5] нигде не использовались условия интегрируемости системы (2) дифференциальных уравнений семейства. Поэтому все полученные в [5] результаты справедливы и для неголономного подмногообразия Ψ_b (в смысле [3]) семейства (L_a), т. е. подмногообразие Ψ_b будет k-псевдофокальным класса ρ тогда и только тогда, когда

$$k < d,\ a > b \geqslant \rho(d+1), \tag{1}$$

где

$$\rho = \dim T^b - d - b(k+1) \geqslant 1, \tag{2}$$

$\dim T^b$ — размерность касательного подпространства подмногообразия Ψ_b. В этом случае устанавливается $\Pi_{b_1}^k$ — соответствие в подмногообразии Ψ_b: $L_k \to \Psi_{b_1}^*$,
причем

$$b_1 = b - \rho(d-k). \tag{3}$$

Это соответствие определяется совпадением касательного подпространства $T^k(\Psi_b)$ (линейной оболочки касательных $(d+b)$-плоскостей к точечному подмногообразию S_{d+b}^* в точках L_k, определенному теми же уравнениями, что Ψ_b) с подпространством T^{b_1} подмногообразия $\Psi_{b_1}^*$, для которого

$$\dim T^{b_1} = d + b(k+1). \tag{4}$$

Плоскость L_k названа в [5] k-псевдофокусом соответствующего подмногообразия $\Psi_{b_1}^*$.

Выясним, при каких условиях семейство $(L)_a$ фокальное класса h_1^a в P_N обладает k-псевдофокальными подмногообразиями Ψ_b класса ρ. Прежде всего заметим, что в силу (2) такое подмногообразие Ψ_b является фокальным класса

$$h_1^b = N - d - b(k+1) - \rho - 1. \tag{5}$$

Известно [6], что семейство $(L)_a$ обладает фокальными подмногообразиями Ψ_b класса h_1^b тогда и только тогда, когда

$$\mu_1 \equiv b(d+1) - N + d + h_1^b + 1 \geqslant 0,$$
$$\sigma_1 \equiv b(a-b) - \mu_1(h_1^b - h_1^a) \geqslant 0.$$

Внося сюда выражение для h_1^b из (5) и учитывая (1), получаем теорему.

Теорема 1. Фокальное класса h_1^a a-семейство d-плоскостей в P_N обладает неголономными k-псевдофокальными подмногообразиями Ψ_b класса $\rho \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда

$$k < d,\ \rho(d+1) \leqslant b < a, \tag{6}$$
$$b(a-b) \geqslant [b(d-k) - \rho] \cdot [N - b(k+1) - d - \rho - h_1^a - 1] > 0.$$

Заметим, что если

$$b(a-b) = [b(d-k) - \rho] \cdot [N - b(k+1) - d - \rho - h_1^a - 1],$$

то семейство $(L)_a$ обладает конечным числом k-псевдофокальных подмногообразий Ψ_b класса ρ.

Из теоремы 1 при $d = 1$ (тогда $k = 0$), $h_1^a = -1$, $\rho = 1$, получаем

Следствие. Нефокальное a-семейство прямых обладает псевдофокальными подмногообразиями Ψ_b $(b \geqslant 2)$ (класса 1) только при условии

$$N \leqslant \frac{b(a-b)}{b-1} + b + 2. \tag{7}$$

Таких подмногообразий будет конечное число, если

$$N = \frac{b(a-b)}{b-1} + b + 2. \tag{8}$$

Полагая в (8) $a - b = m(b-1)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, получаем

$$a = b + m(b-1),\ N = b(m+1) + 2\ (m = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Таким образом, a-семейство прямых в P_N обладает конечным числом псевдофокальных подмногообразий только при условиях (9).

Из (1), (7) и (8) следует: при $a + 2 \leqslant N \leqslant 2a$ семейство прямых или само является псевдофокальным $(N = a + 2)$, или обладает псевдофокальными Ψ_2^* (конечным числом при $N = 2a$). Из (7) видно, что а-семейство обладает псевдофокальными Ψ_{a-1}^*, если $N \leqslant a + 2 + (a-2)^{-1}$. Таких подмногообразий Ψ_{a-1}^* будет конечное число только при $a = 3$, $N = 6$.

§ 2. Интропсевдофокальная m-цепь подмногообразий

Рассмотрим теперь k-псевдофокальное a-семейство $(L)_a$ класса ρ, т. е. $a \geqslant \rho(d+1)$, где $\rho = \dim T - d - a(k+1) \geqslant 1$. Пусть плоскость $L_k \subset L$ является k-псевдофокусом подмногообразия $\Psi_{b_1}^*$, где $b_1 = a - \rho(d-k)$. В силу вышесказанного подмногообразие $\Psi_{b_1}^*$ является k-псевдофокальным класса ρ_1, если его касательное подпространство T^{b_1} имеет размерность $\dim T^{b_1} = d + a(k+1) = d + b_1(k+1) + \rho_1$, откуда $\rho_1 = \rho(d-k)(k+1)$, причем в силу (1) $b_1 \geqslant \rho_1(d+1)$. Плоскость L_k является k-псевдофокусом подмногообразия $\Psi_{b_2\rho_1}^* \subset \Psi_{b_1}^*$, где $b_2 = b_1 - \rho_1(d-k)$. Аналогично подмногообразие $\Psi_{b_2}^*$ является k-псевдофокальным класса ρ_2, если $\rho_2 = \rho_1(d-k)(k+1)$, $b_2 \geqslant \rho_2(d+1)$, причем L_k является k-псевдофокусом подмногообразия $\Psi_{b_3}^* \subset \Psi_{b_2}^*$, где $b_3 = b_2 - \rho_2(d-k)$. Продолжая эти рассуждения для подмногообразий $\Psi_{b_q}^* \subset \Psi_{b_{q-1}}^*$ $(q = 1, \ldots, m)$ и считая $\Psi_{b_0}^*$ самим семейством $(L)_a$, приходим к следующим соотношениям:

$$\rho_{\bar{q}} = \rho_{\bar{q}-1}(d-k)(k+1), \quad b_{\bar{q}} \geqslant \rho_{\bar{q}}(d+1), \tag{10}$$

$$b_q = b_{q-1} - \rho_{q-1}(d-k) \quad (q = 1, \ldots, m;\ \bar{q} = 1, \ldots, m-1), \tag{11}$$

причем $\rho_0 = \rho$, $b_0 = a$.

Определение 1. Систему вложенных подмногообразий $\Psi_{b_q}^* \subset \Psi_{b_{q-1}}^*$ $(q = 1, \ldots, m)$ k-псевдофокального семейства $(L)_a$ класса ρ в P_N назовем *интропсевдофокальной* m-цепью по k-плоскости $L_k \subset L$, если L_k является k-псевдофокусом подмногообразия $\Psi_{b_q}^*$ относительно $\Psi_{b_{q-1}}^*$ при всех $q = 1, \ldots, m$.

Имеет место

Теорема 2. k-псевдофокальное семейство $(L)_a$ класса ρ имеет по каждой k-плоскости $L_k \subset L$ интропсевдофокальную m-цепь тогда и только тогда, когда

$$(d+1)(k+1)^{m-1}(d-k)^{m-1} + \sum_{i=1}^{m-1}(k+1)^{i-1}(d-k)^i \leqslant \frac{a}{\rho} <$$

$$< (d+1)(k+1)^m(d-k)^m + \sum_{j=1}^{m}(k+1)^{j-1}(d-k)^j, \tag{12}$$

причем для подмногообразия $\Psi^*_{b_q}$

$$b_q = a - \rho \sum_{i=1}^{q} (k+1)^{i-1} (d-k)^i \quad (q = 1, ..., m). \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что подмногообразия $\Psi^*_{b_q}$ $(q = 1, ..., m)$ образуют интропсевдофокальную m-цепь по некоторой плоскости $L_k \subset L$. Тогда должны выполняться условия (10) и (11), которые эквивалентны

$$\rho_{q-1} = \rho (k+1)^{q-1} (d-k)^{q-1},$$

$$\frac{a}{\rho} \geqslant (d+1)(k+1)^{q-1} (d-k)^{q-1} + \sum_{i=1}^{q-1} (k+1)^{i-1} (d-k)^i; \tag{14}$$

$$b_q = a - \rho \sum_{i=1}^{q} (k+1)^{i-1} (d-k)^i \quad (q = 1, ..., m). \tag{15}$$

Если условие (14) выполняется для $q = m$, то существует интропсевдофокальная m-цепь. Чтобы эта цепь не была $(m+1)$-цепью, подмногообразие $\Psi^*_{b_m}$ не должно являться k-псевдофокальным, т. е. $\rho_m = \dim T^{b_m} - b_m (k+1) - d > \frac{b_m}{d+1}$. Подставляя сюда b_m из (15) учитывая (14) при $q = m$, получаем (12). Теорема доказана.

Из теоремы 2 работы [5] следует, что по каждой плоскости $L_k \subset L$ k-псевдофокального семейства класса ρ при условии (12) может быть построено конечное число интропсевдофокальных m-цепей.

При $k = 0$ из теоремы 2 получаем: псевдофокальное семейство $(L)_a$ класса ρ имеет по каждой точке $X \in L$ интропсевдофокальную m-цепь только при условиях:

$$d^{m-1} + \sum_{i=1}^{m} d^i \leqslant \frac{a}{\rho} < d^m + \sum_{j=1}^{m+1} d^j. \tag{16}$$

Для псевдофокального семейства прямых $(d = 1,\ k = 0)$ класса ρ условия (16) приводят к неравенству

$$\rho(m+1) \leqslant a < \rho(m+2).$$

Если k-псевдофокальное семейство (класса 1) обладает интропсевдофокальной m-цепью, причем хотя бы одно подмногообразие из $\Psi^*_{b_q}$ является k-псевдофокальным (соответствующее $\rho_q = 1$), то из (10) следует $k = 0$, $d = 1$, а из (16) — $a = m + 1$.

Таким образом, только псевдофокальное семейство прямых всегда обладает для каждой точки прямой интропсевдофокальной $(a-1)$-цепью, состоящей из псевдофокальных подмногообразий. Этот случай рассмотрен в работе [4] (стр. 74). Из этой же работы следует, что по каждой точке X псевдофокального семейства прямых определяется единственная интропсевдофокальная $(a-1)$-цепь.

§ 3. Дуально k-псевдофокальные подмногообразия Ψ_b семейства d-плоскостей

В этом и следующем параграфе будем рассматривать двойственные результаты.

Рассуждая так же, как и в § 1, получим, что подмногообразие $\overline{\Psi}_b$ семейства $(L)_a$ будет дуально k-псевдофокальным порядка ρ тогда и только тогда, когда

$$k+1<N-d\leqslant\frac{b}{\rho}, \tag{17}$$

где

$$\rho=d-b(k+1)-h^b\geqslant 1, \tag{18}$$

h^b — порядок фокальности подмногообразия $\overline{\Psi}_b$. В этом случае устанавливается $D\Pi^k_{b_1}$-соответствие в подмногообразии $\overline{\Psi}_b$:

$$T_{N-k-1}\to\overline{\Psi}^*_{b_1},$$

причем

$$b_1=b-\rho(N-d-k-1). \tag{19}$$

Это соответствие определяется совпадением пересечения плоскости $\overline{L}$ и фокуса плоскости T_{N-k-1} подмногообразия $\overline{\Psi}_b$ с фокусом подмногообразия $\overline{\Psi}^*_{b_1}\subset\overline{\Psi}_b$, причем размерность фокуса $\overline{\Psi}^*_{b_1}$ равна $\rho+h^b$. Плоскость $T_{N-k-1}\supset\overline{L}$ названа в [5] псевдофокальной $(N-k-1)$-плоскостью соответствующего подмногообразия $\overline{\Psi}^*_{b_1}$.

Выясним, при каких условиях семейство $(\overline{L})_a$ фокальное порядка h^a в P_N обладает дуально k-псевдофокальными подмногообразиями $\overline{\Psi}_b$ порядка ρ. Прежде всего заметим, что в силу (18) такое подмногообразие $\overline{\Psi}_b$ является фокальным класса

$$h^b=d-b(k+1)-\rho. \tag{20}$$

Известно [6], что семейство $(\overline{L})_a$ обладает фокальным подмногообразием $\overline{\Psi}_b$ порядка h^b тогда и только тогда, когда

$$\mu_2\equiv b(N-d)-d+h^b\geqslant 0, \tag{21}$$

$$\sigma_2\equiv b(a-b)-\mu_2(h^b-h^a)\geqslant 0. \tag{22}$$

Вносся сюда выражение h^b из (20) и учитывая (17), получаем теорему.

Теорема 3. Фокальное порядка h^a a-семейство d-плоскостей в P_N обладает неголономными дуально k-псевдофокальными подмногообразиями $\overline{\Psi}_b$ порядка $\rho=d-b(k+1)-h^b\geqslant 1$ тогда и только тогда, когда

$$k+1<N-d\leqslant\frac{b}{\rho}, \tag{23}$$

$$b(a-b)\geqslant[b(N-d-k-1)-\rho]\cdot[d-b(k+1)-\rho-h^a]>0.$$

Заметим, что если

$$b(a-b)=[b(N-d-k-1)-\rho]\cdot[d-b(k+1)-\rho-h^a],$$

то семейство $(\overline{L})_a$ обладает конечным числом дуально k-псевдофокальных подмногобразий $\overline{\Psi}_b$ порядка ρ.

Из теоремы 3 при $d=N-2$, $k=0$, $\rho=1$, $h^a=-1$ получаем.

Следствие. Нефокальное a-семейство $(N-2)$-плоскостей обладает дуально псевдофокальными подмногообразиями $\overline{\Psi}_b$ (порядка 1) при условии (7).

Подмногообразий $\overline{\Psi}_b$ будет конечное число, если $b(m+1)=N-2$, $a=N-2-m$ $(m=1, 2, \ldots, N-5)$.

Такие подмногообразия будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 4. Экстрапсевдофокальная m-цепь подмногообразий

Рассмотрим теперь дуально k-псевдофокальное a-семейство $(\bar{L})_a$ порядка ρ, т. е. $k+1<N-d\leqslant\frac{a}{\rho}$, где $\rho=d-a(k+1)-h^a\geqslant 1$. Пусть плоскость T_{N-k-1} является псевдофокальной $(N-k-1)$-плоскостью подмногообразия $\bar{\Psi}^*_{b_1}$, где $b_1=a-\rho(N-d-k-1)$. Из условия (18) предыдущего параграфа следует, что подмногообразие $\bar{\Psi}^*_{b_1}$ является дуально k-псевдофокальным порядка ρ_1, если $\rho_1=d-b_1(k+1)-h^{b_1}\geqslant 1$, где $h^{b_1}=h^a+\rho$ — размерность фокуса подмногообразия $\bar{\Psi}^*_{b_1}$. Откуда $\rho_1=\rho(N-d-k-1)(k+1)$, причем в силу (23) $b_1\geqslant\rho_1(N-d)$. Плоскость T_{N-k-1} является псевдофокальной $(N-k-1)$-плоскостью подмногообразия $\bar{\Psi}^*_{b_2}\subset\bar{\Psi}^*_{b_1}$ где $b_2=b_1-\rho_1(N-d-k-1)$, причем фокус $\bar{\Psi}^*_{b_2}$ имеет размерность $h^{b_2}=h^{b_1}+\rho_1$. Аналогично подмногообразие $\bar{\Psi}^*_{b_2}$ является дуально k-псевдофокальным порядка ρ_2, если $\rho_2=\rho_1(N-d-k-1)(k+1)$, $b_2\geqslant\rho_2(N-d)$, причем T_{N-k-1} является псевдофокальной $(N-k-1)$-плоскостью подмногообразия $\bar{\Psi}^*_{b_3}\subset\bar{\Psi}^*_{b_2}$, где $b_3=b_2-\rho_2(N-d-k-1)$. Продолжая эти рассуждения для подмногообразий $\bar{\Psi}^*_{b_q}\subset\bar{\Psi}^*_{b_{q-1}}$ $(q=1,\ldots,m)$ и считая $\bar{\Psi}^*_{b_0}$ самим семейством $(\bar{L})_a$, приходим к следующим соотношениям:

$$\rho_{\bar{q}}=\rho_{\bar{q}-1}(N-d-k-1)(k+1),\quad b_{\bar{q}}\geqslant\rho_{\bar{q}}(d+1),\tag{24}$$

$$(\bar{q}=1,\ldots,m-1),$$

$$b_q=b_{q-1}-\rho_{q-1}(N-d-k-1),\tag{25}$$

причем $\rho_0=\rho$, $b_0=a$.

Определение 2. Систему вложенных подмногообразий $\bar{\Psi}^*_{b_q}\subset\bar{\Psi}^*_{b_{q-1}}$ $(q=1,\ldots,m)$ дуально k-псевдофокального семейства $(\bar{L})_a$ порядка ρ в P_N назовем *экстрапсевдофокальной* m-цепью по $(N-k-1)$-плоскости $T_{N-k-1}\supset\bar{L}$, если T_{N-k-1} является псевдофокальной $(N-k-1)$-плоскостью подмногообразия $\bar{\Psi}^*_{b_q}$ относительно $\bar{\Psi}^*_{b_{q-1}}$ при всех $q=1,\ldots,m$.

Имеет место.

Теорема 4. Дуально k-псевдофокальное семейство $(\bar{L})_a$ порядка ρ имеет по каждой $(N-k-1)$-плоскости $T_{N-k-1}\supset\bar{L}$ экстрапсевдофокальную m-цепь тогда и только тогда, когда

$$(N-d)(k+1)^{m-1}(N-d-k-1)^{m-1}+\sum_{i=1}^{m-1}(k+1)^{i-1}(N-d-k-1)^i\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a}{\rho}<(N-d)(k+1)^m(N-d-k-1)^m+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(k+1)^{j-1}(N-d-k-1)^j,\tag{26}$$

причем для подмногообразия $\bar{\Psi}^*_{b_q}$

$$b_q=a-\rho\sum_{i=1}^{q}(k+1)^{i-1}(N-d-k-1)^i\tag{27}$$

$$(q=1,\ldots,m).$$

Доказательство теоремы 4 проводится с помощью условий (24) и (25), аналогично доказательству теоремы 2.

Заметим, что размерности фокусов подмногообразий $\bar{\Psi}^{*}_{b_q}$ удовлетворяют условиям: $h^{b_q} = h^{b_{q-1}} + \rho_{q-1}$

$$(q = 1, \ldots, m;\ b_0 = a,\ \rho_0 = \rho).$$

При $k = 0$ из (26) получаем условие

$$(N-d-1)^{m-1} + \sum_{i=1}^{m} (N-d-1)^i \leqslant \frac{a}{\rho} <$$

$$< (N-d-1)^m + \sum_{j=1}^{m+1} (N-d-1)^j, \qquad (28)$$

при котором дуально псевдофокальное порядка ρ семейство плоскостей $(\bar{L})_a$ имеет по каждой гиперплоскости $T_{N-1} \supset \bar{L}$ экстрапсевдофокальную m-цепь.

Из (28) и (18) при $d = N-2$ получаем

$$\rho(m+1) \leqslant a < \rho(m+2),$$
$$a = N - 2 - \rho - h^a.$$

Отсюда при $\rho = 1$, $h^a = -1$ следует $a = N - 2 = m + 1$. Из (27) при указанных условиях получаем $b_q = a - q$.

Итак, нефокальное $(N-2)$-семейство $(N-2)$-плоскостей $\bar{L}$ в P_N имеет по каждой гиперплоскости $T_{N-1} \supset \bar{L}$ единственную экстрапсевдофокальную $(N-3)$-цепь дуально псевдофокальных подмногообразий $\bar{\Psi}^{*}_{b}$ $(b = 1, \ldots, N-3)$, причем подмногообразие $\bar{\Psi}^{*}_{b}$ является фокальным порядка $h^b = N-b-3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. М. Гейдельман. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. Итоги науки. «Алгебра. Топология. Геометрия 1965», М., 1967, 323—374.
2. С. Е. Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей, I. Известия АН Арм. ССР, сер. мат. и физ., XVI, № 3, 1963, 3—22.
3. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометрический сб., 6 (Труды Томск. ун-та, 191), 1967, 179—194.
4. Л. З. Кругляков. О псевдофокальных семействах d-плоскостей в P_n. «Известия вузов, Математика», № 10 (89), 1969, 70—77.
5. Л. З. Кругляков. Обобщенные псевдофокальные семейства d-плоскостей в P_N. Известия вузов. «Математика», № 11, (114), 1971, 78—84.
6. Л. З. Кругляков. К проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. Доклады АН СССР, т. 196, № 2, 1971, 282—284.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. Е. ВАРЛАМОВ

В этой работе рассматриваются двумерные поверхности в пятимерном проективном пространстве P_5, у которых линии сопряженной сети вырождаются в одно семейство асимптотических (2-го порядка) линий. Двумерные поверхности в P_5, несущие одно семейство асимптотических, следуя В. Ролфу [4], будем называть параболическими поверхностями.

§ 1. Аналитическое построение канонического репера

К двумерной поверхности S_2 в P_5 присоединим репер $\{A_i\}$ $(i=0, 1, \ldots, 5)$, деривационные формулы которого запишем в виде

$$dA_i = \omega_i^j A_j \quad (j = 0, 1, \ldots, 5), \tag{1}$$

где ω_i^k удовлетворяют соотношениям:

$$D\omega_i^j = [\omega_i^m \omega_m^j] \quad (m = 0, 1, \ldots, 5);$$

$$\sum_{i=0}^{5} \omega_i^i = 0.$$

Помещая точку A_0 в текущую точку поверхности S_2, а точки A_1 и A_2 — в касательную плоскость L_2 в точке A_0, основные соотношения поверхности S_2 запишем в виде

$$\omega_\alpha^\sigma = \Lambda_{\alpha\beta}^\sigma \omega^\beta \; (\Lambda_{\alpha\beta}^\sigma = \Lambda_{\beta\alpha}^\sigma, \; \alpha, \beta = 1, 2; \; \sigma = 3, 4, 5). \tag{2}$$

Формы

$$\Phi^\sigma = \Lambda_{\alpha\beta}^\sigma \omega^\alpha \omega^\beta \tag{3}$$

называются асимптотическими формами поверхности S_2.

Как показал С. Е. Карапетян [5], с 2-семейством прямых в P_4 ассоциируется некоторый касательный конус (совокупность касательных 3-плоскостей всех проходящих через данный луч линейчатых поверхностей). С касательной плоскостью поверхности S_2 также можно ассоциировать некоторый касательный конус совокупность касательных гиперплоскостей ко всем однопараметрическим многообразиям плоскостей L_2. Уравнение такого конуса имеет вид

$$a^{\sigma\tau} x_\sigma x_\tau = 0, \tag{4}$$

где

$$a^{\sigma\sigma} = \Lambda_{11}^\sigma \Lambda_{22}^\sigma - (\Lambda_{12}^\sigma)^2,$$

$$a^{\sigma\lambda} = \Lambda^{\sigma}_{11}\Lambda^{\lambda}_{22} + \Lambda^{\lambda}_{11}\Lambda^{\sigma}_{22} - 2\Lambda^{\sigma}_{12}\Lambda^{\lambda}_{12}$$
$$(\sigma, \tau, \lambda = 3, 4, 5;\ \sigma \neq \lambda),$$

а x_σ — тангенциальные координаты гиперплоскости, проходящей через касательную плоскость $L_2 = (A_0 A_1 A_2)$ поверхности S_2 в точке A_0.

Так как

$$D \equiv \det\|a^{\sigma\tau}\| = \left(\frac{1}{2}\det\|\Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta}\|\right)^2, \tag{5}$$

то касательный конус поверхности S_2 вырождается тогда и только тогда, когда размерность соприкасающейся плоскости меньше пяти.

Поверхность S_2 обладает сопряженной сетью тогда и только тогда, когда

$$\det\|\Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta}\| = 0.$$

Если сопряженная сеть вырождается в одно семейство асимптотических (2-го порядка) линий, то асимптотические формы (3) можно привести к виду:

$$\Phi^3 = 2\omega^1\omega^2, \quad \Phi^4 = (\omega^1)^2, \quad \Phi^5 = 0. \tag{6}$$

Тогда соотношения (2) примут вид

$$\omega^3_1 = \omega^2, \quad \omega^3_2 = \omega^1, \quad \omega^4_1 = \omega^1, \quad \omega^4_2 = 0, \quad \omega^5_\alpha = 0. \tag{7}$$

Внешним дифференцированием соотношений (7) получим

$$\begin{gathered} \omega^5_3 = \Lambda^5_{31}\omega^1, \quad \omega^5_4 = \Lambda^5_{41}\omega^1 + \Lambda^5_{31}\omega^2, \quad \omega^1_2 = \Lambda^1_{21}\omega^1 + \Lambda^1_{22}\omega^2, \\ \omega^4_3 = \Lambda^4_{31}\omega^1 + \Lambda^4_{22}\omega^2, \quad 2\omega^2_1 - \omega^3_4 = c_1\omega^1 + c_2\omega^2, \\ \omega^1_1 + \omega^2_2 - \omega^0_0 - \omega^3_3 = c_2\omega^1 + c_3\omega^2, \quad \omega^0_0 - 2\omega^1_1 + \omega^4_4 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Из (6) следует, что соприкасающейся гиперплоскостью поверхности (A_0) является гиперплоскость $(L_2 A_3 A_4)$, а асимптотической (2-го порядка) линией поверхности (A_0) — линия $\omega^1 = 0$.

В силу (6) касательный конус поверхности (A_0) вырождается в пучок гиперплоскостей с центром в 3-плоскости $(L_2 A_4)$.

Определение 1. Центр пучка гиперплоскостей, в который вырождается касательный конус поверхности (A_0), называется центральной 3-плоскостью.

В силу (7) и (8) получаем

$$(d^3 A_0 L_2 A_3 A_4) = 2\omega^1\omega^2\omega^5_3 + (\omega^1)^2\omega^5_4 = (\omega^1)^2(2\Lambda^5_{31}\omega^2 + \omega^5_4). \tag{9}$$

Следовательно, асимптотическая (2-го порядка) линия является сдвоенной асимптотической (третьего порядка) линией, т. е. линией, у которой 3-плоскость, имеющая касание 3-го порядка в точке A_0, принадлежит соприкасающейся гиперплоскости поверхности (A_0).

Дальнейшая фиксация репера, проведенная аналитически, дает $\omega^j_i = \Lambda^j_{i\alpha}\omega^\alpha$, где $\Lambda^j_{i\alpha}$, кроме (6), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} \Lambda^1_{21} = \Lambda^4_{31} = \Lambda^5_{41} = \Lambda^2_{11} = \Lambda^2_{12} = \Lambda^3_{42} = \Lambda^3_{41} = 0, \quad \Lambda^1_{22} = \Lambda^5_{31} = 1; \\ \Lambda^2_{41} = \Lambda^2_{42} = \Lambda^2_{31} = \Lambda^0_{12} = \Lambda^0_{42} = \Lambda^0_{32} = \Lambda^2_{52} = \Lambda^1_{42} = 0, \quad \Lambda^2_{32} = 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Деривационные формулы (1) примут вид

$$dA_0 = \omega^0_0 A_0 + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2;$$
$$dA_1 = \omega^1_1 A_1 + \omega^3_1 A_3 + \omega^4_1 A_4;$$

$$dA_2 = \omega_2^0 A_0 + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3; \tag{11}$$
$$dA_\sigma = \omega_\sigma^i A_i,$$

причем

$$\omega_2^4 = \omega_\alpha^5 = \omega_1^2 = \omega_4^2 = \omega_1^0 = \omega_3^0 = 0, \tag{12}$$

$$\omega_2^3 = \omega_1^4 = \omega_3^5 = \omega_4^3 = \omega^1, \quad \omega_1^3 = \omega_2^1 = \omega_3^4 = \omega_4^5 = \omega_3^2 = \omega^2, \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \omega_4^0 = \Lambda_{41}^0 \omega^1, \quad \omega_5^2 = \Lambda_{51}^2 \omega^1, \quad \omega_4^1 = \Lambda_{41}^1 \omega^1, \\ \omega_2^0 = \Lambda_{2\alpha}^0 \omega^\alpha, \quad \omega_5^0 = \Lambda_{5\alpha}^0 \omega^\alpha, \quad \omega_5^\sigma = \Lambda_{5\alpha}^\sigma \omega^\alpha, \\ \omega_3^1 = \Lambda_{3\alpha}^1 \omega^\alpha, \quad \omega_5^1 = \Lambda_{5\alpha}^1 \omega^\alpha, \quad \omega_i^i = \Lambda_{i\alpha}^i \omega^\alpha. \end{gathered} \tag{14}$$

Внешним дифференцированием соотношений (12) и (13) получаем

$$\begin{gathered} \Lambda_{41}^0 + \Lambda_{32}^2 - \Lambda_{51}^2 = 0, \quad \Lambda_{32}^2 \Lambda_{21}^0 + \Lambda_{41}^0 - \Lambda_{52}^0 = 0, \quad \Lambda_{11}^1 - \Lambda_{31}^3 = \Lambda_{01}^0 - \Lambda_{21}^2, \\ \Lambda_{22}^2 - \Lambda_{32}^3 = \Lambda_{02}^0 = \Lambda_{12}^1, \quad \Lambda_{12}^1 - \Lambda_{42}^4 = \Lambda_{02}^0 - \Lambda_{12}^1, \quad \Lambda_{32}^3 - \Lambda_{52}^5 = \Lambda_{02}^0 - \Lambda_{12}^1, \\ \Lambda_{22}^0 + \Lambda_{11}^1 - 2\Lambda_{21}^2 - \Lambda_{32}^1 + \Lambda_{01}^0 = 0, \quad \Lambda_{32}^1 - \Lambda_{31}^3 + \Lambda_{41}^4 - \Lambda_{52}^4 - \Lambda_{21}^2 + \Lambda_{01}^0 = 0, \\ \Lambda_{41}^4 - \Lambda_{51}^5 = \Lambda_{01}^0 - \Lambda_{31}^2, \quad \Lambda_{41}^4 + \Lambda_{32}^3 - \Lambda_{42}^4 - \Lambda_{51}^3 - \Lambda_{12}^1 + \Lambda_{02}^0 = 0, \quad \Lambda_{31}^3 = \Lambda_{01}^0. \end{gathered} \tag{15}$$

Внешним дифференцированием соотношений (14) получаем пятнадцать независимых внешних квадратичных уравнений. В силу (15) заключаем, что независимых функций будет всего шестнадцать. Применяя теорему С. В. Бахвалова ([3], стр. 44) получаем, что двумерные параболические поверхности в P_5 существуют с произволом одной функции двух аргументов.

§ 2. Асимптотические касательные и осевые элементы параболической поверхности

Из (9) и (10) следует, что $\omega^1 = 0$ — двойная асимптотическая (3-го порядка) линия, $\omega^2 = 0$ — другая асимптотическая (3-го порядка) линия. Касательными к ним в точке A_0 являются прямые A_0A_2 и A_0A_1.

2-семейство прямых A_0A_2, касательных к асимптотической (2-го порядка) линия $\omega^1 = 0$, обладает одним сдвоенным семейством торсов. Действительно, из деривационных формул (11) следует, что

$$d(A_0A_{12} = (\ldots) \quad (A_0A_2) + \omega^1 (A_1A_2) + \omega_2^1 \ (A_0A_1) + \omega_2^3 (A_0A_3).$$

Отсюда касательным подпространством 2-семейства прямых A_0A_2 является 3-плоскость $A_0A_1A_2A_3$. Следовательно, 2-семейство прямых A_0A_2 является фокальным. Если $M = A_0 + tA_2$ — фокус прямой A_0A_2, то

$$\omega^1 + t\omega_2^1 = 0, \qquad t\omega_2^3 = 0.$$

Исключив из этой системы t, в силу соотношений (13) найдем уравнение для определения торсов

$$(\omega^1)^2 = 0.$$

Следовательно, 2-семейство прямых A_0A_2 обладает одним сдвоенным семейством торсов. Фокусом прямой A_0A_2 является точка A_0.

Из $(d^2A_0A_0A_1A_3A_4) \equiv \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = 2\omega^1\omega^2$ следует, что соприкасающиеся плоскости асимптотических (3-го порядка) линий принадлежат центральной 3-плоскости.

Асимптотическая касательная A_0A_1 описывает торс вдоль другой асимптотической линии 3-го порядка $\omega^1 = 0$. Действительно, из деривационных формул (11) имеем

$$d(A_0A_1) = (\ldots)(A_0A_1) + \omega^2(A_2A_1) + \omega_1^3(A_0A_2) + \omega_1^4(A_0A_4). \qquad (16)$$

Отсюда в силу соотношений (13) следует, что касательное подпространство к однопараметрическому многообразию прямых A_0A_1 вдоль линии $\omega^1 = 0$ является двумерным. Из (16) также следует, что плоскость $A_0A_1A_4$ является касательной плоскостью торса, описываемого касательными к линии $\omega^2 = 0$.

Так как $\omega^1 = 0$ — асимптотическая (2-го порядка) линия и $A_0A_1A_2$ — ее соприкасающаяся плоскость в точке A_0, то соприкасающиеся плоскости асимптотических (3-го порядка) линий пересекаются по касательной к асимптотической (2-го порядка) линии.

Из деривационных формул (11) имеем

$$d^3A_0|_{\omega^1=0} = (\ldots)A_0 + (\ldots)A_1 + (\ldots)A_2 + (\omega^2)^2(\omega_1^3A_3 + \omega_1^4A_4 + \omega_1^5A_5),$$

$$d^3A_0|_{\omega^2=0} = (\ldots)A_0 + (\ldots)A_1 + (\ldots)A_4 + (\omega^1)^2(\omega_4^2A_2 + \omega_1^3A_3 + \omega_4^5A_5),$$

$$d^4A_0|_{\omega^1=0} = (\ldots)A_0 + (\ldots)A_1 + (\ldots)A_2 + (\ldots)A_3 + (\omega^2)^3(\omega_3^4A_4 + \omega_3^5A_5),$$

$$d^4A_0|_{\omega^2=0} = (\ldots)A_0 + (\ldots)A_1 + (\ldots)A_3 + (\ldots)A_4 + (\omega^1)^3(\omega_3^2A_2 + \omega_3^5A_5).$$

Отсюда в силу соотношений (12) — (14) следует, что $A_0A_1A_2A_3$ и $A_0A_1A_3A_4$ являются 3-плоскостями, имеющими касание 3-го порядка с асимптотическими (3-го порядка) линиями $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ соответственно. Эти 3-плоскости пересекаются по плоскости $A_0A_1A_3$. $A_0A_1A_2A_3A_4$ и $A_0A_1A_3A_4A_5$ являются гиперплоскостями, имеющими соприкосновение 4-го порядка с асимптотическими (3-го порядка) линиями $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ соответственно. Эти гиперплоскости пересекаются по 3-плоскости $A_0A_1A_3A_4$.

Определение 2. Плоскость $A_0A_1A_3$ пересечения 3-плоскостей, имеющих касания 3-го порядка с асимптотическими (3-го порядка) линиями, называется осевой плоскостью, а 3-плоскость $A_0A_1A_3A_4$ пересечения гиперплоскостей, имеющих касания 4-го порядка с асимптотическими (3-го порядка), линиями осевой 3-плоскостью параболической поверхности.

Найдем фокусы осевой плоскости $A_0A_1A_3$ и осевой 3-плоскости $A_0A_1A_3A_4$. Если $M = x^0A_0 + x^1A_1 + x^3A_3$ — фокус плоскости $A_0A_1A_3$, то

$$\begin{aligned} x^0\omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^3\omega_3^2 &= 0,\\ x^1\omega_1^4 + x^3\omega_3^4 &= 0,\\ x^3\omega_3^5 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевое решение относительно x^0, x^1, x^3 тогда и только тогда, когда

$$\omega^2 \cdot \omega_1^4 \cdot \omega_3^5 = 0.$$

Отсюда в силу (13) следует, что осевая плоскость $A_0A_1A_3$ имеет два фокуса, один из которых является сдвоенным. Фокусами являются точки A_0 и A_1, фокальными линиями — асимптотические (3-го порядка) линии. Причем сдвоенная асимптотическая (3-го порядка) линия $\omega^1 = 0$ является сдвоенной фокальной линией.

Если $M = x^0A_0 + x^1A_1 + x^3A_3 + x^4A_4$ — фокус осевой 3-плоскости $A_0A_1A_3A_4$, то

$$\begin{aligned} x^0\omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^3\omega_3^2 + x^4\omega_4^2 &= 0,\\ x^3\omega_3^5 + x^4\omega_4^5 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы $\lambda = \omega^1 : \omega^2$, в силу (12) — (14) находим, что фокусная квадрика осевой 3-плоскости вырождается в две пересекающиеся по прямой A_1A_4 плоскости

$$x^3 = 0, \qquad x^0 + x^3\Lambda_{3\,2}^{2} = 0.$$

§ 3. Геометрическая характеристика репера

Из деривационных формул (11) следует, что касательной плоскостью фокальной поверхности (A_1) является плоскость $A_1A_3A_4$. Плоскость $A_1A_3A_4$ пересекается с осевой плоскостью $A_0A_1A_3$ по прямой A_1A_3.

Из деривационных формул (11) получим

$$d(A_1A_3) = (\ldots)(A_1A_3) + \omega_1^4(A_4A_3) + \omega_3^0(A_1A_0) + \omega_3^2(A_1A_2) + \\ + \omega_3^4(A_1A_4) + \omega_3^5(A_1A_5) + \omega_1^0(A_0A_3).$$

Отсюда в силу (12) прежде всего следует, что $A_1A_2A_3A_4A_5$ является касательной гиперплоскостью 2-семейства прямых A_1A_3. Из (13) и (14) следует, что $A_1A_2A_3A_4$ является касательной 3-плоскостью однопараметрического многообразия прямых A_1A_3 вдоль линии $\omega^1 = 0$, $A_1A_3A_4A_5$ — касательной 3-плоскостью вдоль линии $\omega^2 = 0$. 3-плоскость $A_1A_2A_3A_4$ пересекается с касательной плоскостью $A_0A_1A_2$ поверхности (A_0) по прямой A_1A_2. Прямая A_1A_2 пересекается с прямыми A_0A_1 и A_0A_2 в точках A_1 и A_2.

Плоскость $A_1A_4A_5$ является характеристикой 3-плоскости $A_1A_3A_4A_5$ относительно гиперплоскости $A_0A_1A_3A_4A_5$ ([12], стр. 47) при смещении вдоль линии $\omega^1 = 0$. На прямой A_1A_4 найдем точки $M_t = A_1 + tA_4$ такие, что касательные прямые в этих точках к некоторым линиям поверхностей (M_t) принадлежат 3-плоскости $A_0A_1A_4A_5$, проходящей через плоскость $A_1A_4A_5$ и точку A_0. Тогда

$$(dM_t A_0A_1A_4A_5) = 0$$

или в силу (12)

$$x^1\omega^1 + x^4\omega^2 = 0, \ t = x^4;\ x^1.$$

Следовательно, искомыми точками являются точки A_1 и A_4.

Уравнение 3-плоскости, принадлежащей гиперплоскости $A_0A_1A_3A_4A_5$ и проходящей через прямую A_0A_4, записываем в виде

$$x_n x^n = 0, \quad x^2 = 0, \ (n = 1, 3, 4). \tag{17}$$

Из деривационных формул (11) имеем

$$d(A_0A_4) = (\ldots)(A_0A_4) + \omega^1(A_1A_4) + \omega^2(A_2A_4) + \omega_4^n(A_0A_n). \tag{18}$$

Найдем 3-плоскости, являющиеся касательными к некоторым линейчатым поверхностям, проходящим через луч A_0A_4, и принадлежащие гиперплоскости $A_0A_1A_3A_4A_5$. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$x_1\omega^1 = 0,$$
$$x_1\omega_4^1 + x_3\omega_4^3 + x_5\omega_4^5 = 0.$$

Исключая из этой системы $\lambda = \omega^1 : \omega^2$, получаем, что существуют всего две 3-плоскости $A_0A_3A_4A_5$ и $A_0A_1A_3A_5$, являющиеся касательными к линейчатым поверхностям, проходящим через луч A_0A_4, и принадлежащие гиперплоскости $A_0A_1A_3A_4A_5$. 3-плоскость $A_0A_3A_4A_5$ пересекается с прямой A_1A_3 в точке A_3. Плоскость $A_1A_3A_5$ проходит через касательную к линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (A_3) и через точку A_1. Плоскость $A_1A_3A_5$ пересекается с прямой A_4A_5 в точке A_5.

В силу соотношений (13) при $\Lambda_{22}^1 = 0$ имеем

$$d(A_0A_2)|_{\omega^1=0} = (\ldots)(A_0A_2).$$

Так как $\omega^1 = 0$ — асимптотическая (2-го порядка) линия, A_0A_2 — асимптотическая касательная, то при $\Lambda_{22}^1 = 0$ параболическая поверхность S_2

вырождается в линейчатую поверхность. Отсюда следует, что при $\Lambda^1_{22}=1$ из рассмотрения исключается этот случай.

При $\Lambda^5_{31}=1$ из рассмотрения исключаются поверхности, принадлежащие соприкасающейся гиперплоскости. Действительно, из

$$d^3A_0 = \ldots + (2\omega^1\omega^2\omega^5_3 + (\omega^1)^2\omega^5_4)A_5$$

в силу (8) и (10) следует, что при $\Lambda^5_{31}=0$

$$(d^3A_0A_0A_1A_2A_3A_4)\equiv 0.$$

При $\Lambda^2_{32}=1$ из рассмотрения исключается случай $\Lambda^2_{32}=0$, когда характеристикой гиперплоскости $A_0A_1A_3A_4A_5$ при смещении ее вдоль линии $\omega^1=0$ является 3-плоскость $A_1A_3A_4A_5$.

§ 4. Инвариантные Г-линии, ассоциированные с парой поверхностей (A_0) и (A_1)

Л. А. Беломестных [1], рассматривая пару двумерных поверхностей в пятимерном проективном пространстве, выделила шесть инвариантных Г-линий на этих поверхностях. Найдем Г-линии для пары поверхностей (A_0) и (A_1).

Пусть $M_1 = x^1A_1 + x^2A_2$ — любая точка прямой A_1A_2. Каждой точке M_1 соответствует определенная линия на поверхности (A_0):

$$\lambda \equiv \frac{x^1}{x^2} = \frac{\omega^1}{\omega^2}, \tag{19}$$

Каждой точке $M_2 = x^3A_3 + x^4A_4$ прямой A_3A_4 также соответствует определенная линия на поверхности (A_1):

$$\mu \equiv \frac{x^3}{x^4} = \frac{\omega^1}{\omega^2}. \tag{20}$$

Гиперплоскость $(A_0A_1A_2A_5\ dM_1|_{\omega^1=\lambda\omega^2})$ пересекает прямую A_3A_4 в некоторой точке M_2, и каждой линии на поверхности (A_0) соответствует определенная линия на поверхности (A_1) и наоборот. Найдем такие линии на поверхностях (A_0) и (A_1), которые соответствуют однозначно. Из $dM_1 = \ldots + (x^2\omega^3_2 + x^1\omega^3_1)A_3 + x^1\omega^4_1A_4$ следует, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$x^1x^3\omega^1 - x^2x^4\omega^1 - x^1x^4\omega^2 = 0.$$

Отсюда в силу (19) и (20) следует, что на поверхности (A_0) существуют три инвариантные Г-линии, определяемые уравнением

$$(\omega^1)^3 - 2\,\omega^1(\omega^2)^2 = 0. \tag{21}$$

Таким же путем находим, что на поверхности (A_1) существуют три инвариантные Г-линии, определяемые уравнением

$$\omega^1\omega^2(\Lambda^0_{41}\omega^1 - \omega^2) = 0. \tag{22}$$

Таким образом, на каждой поверхности существуют по шесть инвариантных Г-линий. Из (21) и (22) следует, что асимптотические (3-го порядка) линии являются Г-линиями, причем асимптотическая (2-го порядка) линия — дважды Г-линия.

§ 5. Об одном классе параболических поверхностей

Пользуясь образами, ассоциированными с поверхностью, можно выделить некоторые классы параболических поверхностей. В этом параграфе отметим один из них.

Так как одна из асимптотических (3-го порядка) линий является дважды Г-линией, то можно рассмотреть класс, когда обе асимптотические линии являются дважды Г-линиями. В этом случае можно говорить, что существуют всего четыре Г-линии и касательные к ним в точке A_0 образуют гармоническую четверку. Из (21) и (22) следует, что такие параболические поверхности имеют следующее натуральное уравнение:

$$\lambda^0_{41} = 0. \qquad (23)$$

Уравнение касательного конуса поверхности (A_1) имеет вид

$$(x_5)^2 + \lambda^0_{41} x_0 x_2 = 0.$$

Следовательно, если асимптотические (3-го порядка) линии поверхности (A_0) являются дважды Г-линиями и касательные к Г-линиям образуют гармоническую четверку, то присоединенная поверхность (A_1) также является параболической поверхностью. Соприкасающейся гиперплоскостью поверхности (A_1) является гиперплоскость $(A_1A_2A_3A_4A_5)$, асимптотической (2-го порядка) линией является $\omega^2 = 0$.

Из деривационных формул (11) имеем

$$d(A_1A_4) = (\ldots)(A_1A_4) + \omega^3_1 (A_3A_4) + \omega^0_4 (A_1A_0) + \omega^3_4 (A_1A_3) + \omega^5_4 (A_1A_5).$$

Отсюда в силу (13) и (14) следует, что для поверхности (23) прямая A_1A_4 описывает торс при смещении вдоль линии $\omega^2 = 0$.

Из

$$d(A_3A_4) = (\ldots)(A_3A_4) + \omega^0_1 (A_3A_0) + \omega^1_4 (A_3A_1) + \omega^5_4 (A_3A_5) + \omega^1_3 (A_1A_4) + \omega^2_3 (A_2A_4) + \omega^5_3 (A_5A_4)$$

следует, что поверхность (A_1) будет параболической поверхностью (23) тогда и только тогда, когда касательное подпространство [5] прямой A_3A_4 принадлежит гиперплоскости $(A_1A_2A_3A_4A_5)$.

Наконец, поверхность (A_1) является параболической поверхностью (23) тогда и только тогда, когда фокусная квадрика 3-плоскости $(A_1A_2A_3A_4)$ вырождается в две пересекающиеся плоскости, одной из которых является плоскость $A_1A_3A_4$.

Из (23) и (24) следует, что $\omega^0_4 = 0$. Внешним дифференцированием этого соотношения получим $\Lambda^0_{51} = 0$. Тогда внешним дифференцированием соотношений (14) получив четырнадцать независимых внешних квадратичных уравнений. Так как всего имеется в данном случае четырнадцать независимых функций, то согласно теореме С. В. Бахвалова ([3], стр. 44), параболические поверхности (23) существуют с произволом четырнадцати функций одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Беломестных. О паре двумерных поверхностей в пятимерном проективном пространстве. IV Всесоюзная межвузовская конференция по геометрии (Тезисы докладов). Изд-во Тбилисского ун-та, 1969.

2. Е. Т. Ивлев. О поверхности m измерений в многомерном проективном пространстве. Геометрический сб., вып. 7 (Труды Томского ун-та, 196), 1968, 35—55.

3. Р. Н. Щербаков. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.

4. Rolf Walter. Uber zweidimensionale parabolische Flächen im vierdimensionalen affinen Raum. Teil I. «J. reine und angew. Math.», 1967, 227, 178—208.

5. С. Е. Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства. I. Известия АН Арм. ССР, 15 № 2, 1962, 25—43.

ТРУДЫ

ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О ПАРАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л. А. БЕЛОМЕСТНЫХ

В настоящей статье методом внешних форм [1] строится канонический репер пары двумерных поверхностей в P_5 и отмечается класс пар поверхностей, для которых канонический репер является в то же время каноническим В-репером произвольного 2-семейства прямых в P_5, построенным в [6].

§ 1. Аналитическое построение канонического репера

Рассмотрим в P_5 пару двумерных поверхностей, описываемых точками A_1 и A_2 с касательными плоскостями $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$. Присоединим к этой паре подвижной репер $\{A_i\}$, деривационные формулы которого запишем в виде

$$dA_i = \omega_i^k A_k,$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, зависящие от главных и вторичных параметров и удовлетворяющие уравнениям структуры [1]

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k] \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$$

и условию $\sum\limits_{i} \omega_i^i = 0$.

Проведенная обычным путем [1] аналитическая фиксация канонического репера приводит деривационные формулы к виду

$$dA_i = \Gamma_{i\alpha}^k \omega^\alpha A_k \quad (\alpha = 1,\ 2),$$

где обозначено $\omega_1^3 = \omega^1$, $\omega_2^4 = \omega^2$ и функции $\Gamma_{i\alpha}^k$ удовлетворяют соотношениям:

$$\Gamma^{\hat{r}}_{1\alpha} = \Gamma^{r}_{2\alpha} = \Gamma^{5}_{11} = \Gamma^{6}_{22} = 0,\ \Gamma^{2}_{51} = \Gamma^{2}_{52} = \Gamma^{1}_{61} = \Gamma^{2}_{61} = \Gamma^{4}_{51} = \Gamma^{3}_{62} = 0,$$

$$\Gamma^{5}_{12} = \Gamma^{6}_{21} = \Gamma^{6}_{51} = \Gamma^{5}_{62} = 1, \quad \Gamma^{4}_{52} = \Gamma^{3}_{61}, \quad \Gamma^{\hat{r}}_{32} = \Gamma^{\hat{r}}_{51}, \quad \Gamma^{r}_{41} = \Gamma^{r}_{62},$$

$$\Gamma^{1}_{11} - \Gamma^{5}_{51} - \Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{4}_{41} + \Gamma^{5}_{32} - \Gamma^{4}_{62} = 0,$$

$$\Gamma^{2}_{22} - \Gamma^{6}_{62} - \Gamma^{1}_{12} + \Gamma^{3}_{32} + \Gamma^{6}_{41} - \Gamma^{3}_{51} = 0,$$

$$\Gamma^{2}_{31}\Gamma^{3}_{52} - \Gamma^{2}_{62} + \Gamma^{4}_{52}\Gamma^{2}_{41} + \Gamma^{6}_{52}\Gamma^{2}_{61} = 0,\ \Gamma^{1}_{42}\Gamma^{4}_{61} - \Gamma^{1}_{51} + \Gamma^{4}_{52}\Gamma^{1}_{32} + \Gamma^{1}_{52}\Gamma^{5}_{61} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \Gamma^{i}_{i1} = \sum_{j=1}^{6} \Gamma^{j}_{j2} = 0, \quad \Gamma^{4}_{31}\Gamma^{3}_{42} - (1 - \Gamma^{4}_{52})^2 \neq 0,$$

и внешним квадратичным уравнениям:

$$\left[d\Gamma^k_{i\alpha},\ \omega^\alpha\right]+\Gamma^k_{i\alpha}\left(\left[\omega^\alpha_\alpha-\omega^{\alpha+2}_{\alpha+2},\ \omega^\alpha\right]+\left[\omega^\gamma,\ \omega^{\alpha+2}_{\gamma+4}\right]\right)-$$
$$-\left(\Gamma^j_{i\gamma}\Gamma^k_{j\alpha}-\Gamma^j_{i\alpha}\Gamma^k_{j\gamma}\right)\left[\omega^\alpha,\ \omega^\gamma\right]=0$$

(здесь $\hat{r}=2,\ 4,\ 6,\ r=1,\ 3,\ 5,\alpha,\ \gamma=1,\ 2,\ \alpha\neq\gamma^\alpha$ α-фиксировано). Произвол существования пары поверхностей в P_5 равен восьми функциям двух аргументов.

§ 2. Геометрическая характеристика канонического репера

Для прямой A_1A_2 семейства имеем $d[A_1A_2]=(...)\,[A_1A_2]+$ $+\omega^1\left([A_3A_2]+[A_1A_6]\right)+\omega^2\left([A_5A_2]+[A_1A_4]\right)$. Касательным 3-подпространством T_λ 1-семейства $\omega^1=\lambda\omega^2$ прямых A_1A_2 [2] является подпространство $T_\lambda\equiv(A_1A_2, A_5+\lambda A_3, A_4+\lambda A_6)$. Совокупность таких подпространств образует касательный гиперконус второго класса, огибающий [3] касательный гиперконус К второго порядка с прямолинейной вершиной A_1A_2, уравнение которого

$$x^3x^4-x^5x^6=0.$$

Отсюда следует, что 3-плоскости $A_1A_2A_4A_5$ и $A_1A_2A_3A_6$ при произведенной фиксации полярно сопряжены относительно этого гиперконуса. При этом из рассмотрения исключен случай $\Gamma^5_{12}=\Gamma^6_{21}=0$ вырождения касательного гиперконуса в две гиперплоскости.

Рассмотрим подмногообразие, определяемое уравнением

$$\frac{\omega^1}{\lambda^1}=\frac{\omega^2}{\lambda^2}, \tag{1}$$

где $\lambda^1:\lambda^2=\lambda$. Вдоль (1) точки A_1 и A_2 описывают линии с касательными A_1M_1 и A_2M_2, где $M_1=\lambda^1A_3+\lambda^2A_5$, $M_2=\lambda^2A_4+\lambda^1A_6$. Гирперплоскость T^1, проходящая через $A_1A_2A_3A_5$ и касательное подпространство T^1_λ прямых (A_1M_1) пересекает плоскость $A_2A_4A_6$ по прямой A_2M_2 тогда и только тогда, когда

$$\Gamma^6_{32}+(2-\Gamma^4_{52})\lambda+\Gamma^6_{31}\lambda^2-\Gamma^4_{31}\lambda^3=0. \tag{2}$$

Следовательно, в общем случае существует три подмногообразия, вдоль которых гиперплоскость T^1 пересекает плоскость $A_2A_4A_6$ по прямой A_2M_2. Аналогично получаются три подмногообразия, вдоль которых гиперплоскость T^2, проходящая через $A_1A_2A_4A_6$ и касательное подпространство T^2_λ прямых (A_2M_2), пересекает плоскость $A_1A_3A_5$ по прямой A_1M_1, если

$$\Gamma^5_{61}\lambda^3+(2-\Gamma^4_{52})\lambda^2+\Gamma^5_{42}\lambda-\Gamma^3_{42}=0. \tag{3}$$

Подмногообразия (2) и (3), соответствующие поверхностям $(A_\alpha$ $(\alpha=1,\ 2)$, будем называть T^α-подмногообразиями.

Рассмотрим еще одно подмногообразие, определяемое дифференциальным уравнением

$$\frac{\omega^1}{\mu^1}=\frac{\omega^2}{\mu^2},\ \ \mu^2:\mu^1=\mu. \tag{4}$$

Предполагается также, что $\mu\neq\lambda$. Вдоль подмногообразия (4) точки A_1 и A_2 описывают линии на поверхностях (A_1) и (A_2) с касательными A_1N_1 и A_2N_2, где

$$N_1=\mu^1A_3+\mu^2A_5,\ N_2=\mu^2A_4+\mu^1A_6.$$

Будем искать такие подмногообразия (1) и (4), которые удовлетворяют условиям: 1) касательное подпространство T^1_μ прямых (A_1M_1)

принадлежит гиперплоскости, проходящей через $A_1A_3A_5$ и A_2N_2; 2) касательное подпространство T^2_λ прямых (A_2N_2) принадлежит гиперплоскости, проходящей через $A_2A_4A_6$ и A_1M_1. Тогда имеют место соотношения:

$$\lambda(\Gamma^4_{31} - \Gamma^6_{31}\mu - \mu^2) = \mu^2\Gamma^6_{52} + \mu(1 - \Gamma^4_{52}),$$
$$\mu(\Gamma^3_{42} - \Gamma^5_{42}\lambda - \lambda^2) = \lambda^2\Gamma^5_{61} + \lambda(1 - \Gamma^4_{52}). \qquad (5)$$

Система (5) состоит из двух алгебраических независимых уравнений относительно μ и λ и имеет конечное число решений.

Исключая из (5) μ или λ, получим

$$\lambda\cdot\{\lambda^4[\Gamma^4_{31} + \Gamma^5_{61}(\Gamma^6_{31} - \Gamma^5_{61})] + \lambda^3[\ldots] + \lambda^2[\ldots] + [\ldots]\lambda +$$
$$+ \Gamma^3_{42}\cdot[\Gamma^4_{31}\Gamma^3_{42} - (1 - \Gamma^4_{52})^2]\} = 0,$$
$$\mu\cdot\{\mu^4[\Gamma^3_{42} + \Gamma^6_{52}(\Gamma^5_{42} - \Gamma^6_{52})] + \mu^3[\ldots] + \mu^2[\ldots] + \mu[\ldots] +$$
$$+ \Gamma^4_{31}[\Gamma^3_{42}\Gamma^4_{31} - (1 - \Gamma^4_{52})^2]\} = 0,$$

Каждому решению $(\lambda_\sigma, \mu_\sigma)$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, 5)$ в силу (1) и (4) соответствует пара подмногообразий, которую назовем Γ_α-подмногообразиями. Из этих уравнений видно, что подмногообразия $\omega^\alpha = 0$ образуют пару Γ_α-подмногообразий, что является их геометрической характеристикой, а прямые A_1A_3, A_2A_6 и A_1A_5, A_2A_4 определяются как касательные к линиям, описываемым точками A_1, A_2 вдоль $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$.

Выясним геометрический смысл фиксации прямых A_3A_5 и A_4A_6. Тогда вершины A_3, A_5 и A_4, A_6 репера определятся как точки пересечения указанных прямых с прямыми A_1A_3, A_1A_5 и A_2A_4, A_2A_6.

Имеем

$$d(A_1A_3A_5)|_{\omega^2=0} = (\ldots)(A_1A_3A_5) + \omega^1[\Gamma^4_{31}(A_1A_4A_5) +$$
$$+ \Gamma^6_{31}(A_1A_6A_5) + (A_1A_3A_6)],$$
$$d(A_2A_4A_6)|_{\omega^1=0} = (\ldots)(A_2A_4A_6) + \omega^2[\Gamma^3_{42}(A_2A_3A_6) +$$
$$+ \Gamma^5_{42}(A_2A_5A_6) + (A_2A_4A_5)].$$

Следовательно, касательное подпространство плоскости $A_1A_3A_5$ $(A_2A_4A_6)$ вдоль $\omega^2 = 0$ $(\omega^1 = 0)$ принадлежит гиперплоскости $A^2 = (A_1A_3A_4A_5A_6)$ $(A^1 = (A_2A_3A_4A_5A_6))$. Тогда прямые A_4A_6 и A_3A_5 характеризуются тем, что

$$A_4A_6 = A_2A_4A_6 \cap A^2, \quad A_3A_5 = A_1A_3A_5 \cap A^1.$$

При этом 2-семейство прямых (A_1A_5) и 2-семейство (A_2A_6) являются полуфокальными [4] с фокусами в точках A_1 и A_2 и торсами $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ соответственно.

Нормированием из рассмотрения исключены случаи $\Gamma^4_{52} = 0$ и $\Gamma^5_{62} = 0$ $(\Gamma^6_{51} = 0$ и $\Gamma^3_{61} = 0)$, когда гиперплоскости A^4 и A^5 $(A^6$ и $A^3)$ содержат касательные к линиям, описываемым точками A_5 и A_6 вдоль подмногообразия $\omega^1 = 0$ $(\omega^2 = 0.)$

2-семейство прямых (A_1A_2) можно рассматривать как трехмерную линейчатую поверхность S^1_3. Для определения ее фокальных смещений $d\rho : \omega^1 : \omega^2$ в точке $X = A_1 + \rho A_2$, как и в [2], имеем систему

$$\omega^1 - \lambda\omega^2 = 0,$$
$$\lambda\{\rho[\omega^5_3 + \rho(\Gamma^5_{61}\omega^1 + \omega^2)] - \Gamma^4_{31}\omega^1 - \rho\omega^4_6\} + \Gamma^6_{31}\omega^1 +$$
$$+ \omega^2 + d\rho + \rho\omega^6_6 - \rho(\omega^3_3 + \rho\Gamma^4_{52}\omega^1) = 0, \qquad (6)$$
$$\lambda\{\rho[\omega^5_5 + \rho(\omega^1 + \Gamma^5_{42}\omega^2)] - \rho\omega^4_4 - d\rho - \Gamma^4_{52}\omega^2\} +$$
$$+ \rho\omega^6_4 + \omega^1 + \Gamma^6_{52}\omega^2 - \rho(\omega^3_5 + \rho\Gamma^3_{42}\omega^2) = 0.$$

Эта система имеет в общем случае 3 решения $d\rho:\omega^1:\omega^2$, так как для $\lambda = \omega^1 : \omega^2$ получается кубическое уравнение

$$\Gamma^6_{52} + \rho(\Gamma^6_{42} - \Gamma^3_{52}) - \rho^2\Gamma^3_{42} + \lambda\,[2 - \Gamma^4_{52} + \rho\,(\Gamma^6_{62} - \Gamma^3_{32} + \Gamma^6_{41} - \Gamma^3_{51} + \Gamma^5_{52} - \Gamma^4_{42}) + \rho^2\Gamma^5_{42}] + \lambda^2\,[\Gamma^6_{31} + \rho\,(\Gamma^6_{61} - \Gamma^3_{31} + \Gamma^5_{51} - \Gamma^4_{41} + \Gamma^5_{32} - \Gamma^4_{62}) + \rho^2\,(2 - \Gamma^4_{52})] + \lambda^3\,[\rho^2\Gamma^5_{61} + \rho\,(\Gamma^5_{31} - \Gamma^4_{61}) - \Gamma^4_{31}] = 0. \quad (7)$$

Сравнивая с (2) и (3), видим, что каждой фокальной линии линейчатой поверхности S^1_3 в точке A_α соответствует такая линия поверхности (A_α), определенная T^α-подмногообразием, которая лежит на линейчатой поверхности 2-семейства, проходящей через фокальную линию поверхности S^1_3.

Асимптотические направления в точке $X = A_1 + \rho A_2$ линейчатой поверхности S^1_3, как и в [2], определяются из уравнений:

$$\begin{gathered}\rho\omega^2\,(\omega^1_1 + \omega^5_5 - \omega^2_2 - \omega^4_4) - \omega^2 d\rho + \rho\,[\omega^1\omega^5_3 + \\ + \rho\omega^2\,(\omega^1 + \Gamma^5_{42}\omega^2) + \rho\omega^1\,(\Gamma^5_{61}\omega^1 + \omega^2)] - (\omega^1)^2\,\Gamma^4_{31} - \\ - (\omega^2)^2\,\Gamma^4_{52} - \rho\omega^1\omega^4_6 = 0, \end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered}\rho\omega^1\,(\omega^2_2 + \omega^6_6 - \omega^1_1 - \omega^3_3) - \rho\,[(\omega^2)^2\,\Gamma^3_{42}\,\rho + \omega^2\omega^3_5 + \\ + \rho\Gamma^4_{52}\,(\omega^1)^2 - \omega^2\omega^6_4] + \omega^1 d\rho + 2\omega^1\omega^2 + \Gamma^6_{31}\,(\omega^1)^2 + \Gamma^6_{52}\,(\omega^2)^2 = 0.\end{gathered}$$

§ 3. Некоторые классы пар поверхностей

Отметим некоторые проективно-инвариантные классы пар поверхностей.

1. Потребуем, чтобы, по крайней мере, одно из фокальных направлений линейчатой поверхности S^1_3 в точке $X = A_1 + \rho A_2$ совпадало с одним из асимптотических направлений. Как показано в [2], в общем случае на луче A_1A_2 имеется восемь таких точек $M_\nu = A_1 + \rho_\nu A_2$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 8)$, определяемых уравнением

$$\begin{gathered}\rho^8\,\{8\,(\Gamma^3_{42}\,\Gamma^5_{61})^2 - (1 - \Gamma^4_{52})\,[\Gamma^3_{42}\,(3 - \Gamma^4_{52})^2 + \Gamma^5_{42}\,(2 - \Gamma^4_{52} + \Gamma^5_{42} - 4\Gamma^3_{42}\,\Gamma^5_{61})] - \\ - \Gamma^5_{61}\,(\Gamma^5_{42})^2\} + \ldots + \rho^0\,\{8\,(\Gamma^6_{52}\,\Gamma^4_{31})^2 - \Gamma^6_{52}\,(\Gamma^6_{31})^3 - \\ - (1 - \Gamma^4_{52})\,[\Gamma^4_{31}\,(3 - \Gamma^4_{52})^2 + \Gamma^6_{31}\,(2 - \Gamma^4_{52} + \Gamma^6_{31} - 4\Gamma^4_{31}\,\Gamma^6_{52})]\} = 0\end{gathered} \quad (9)$$

(члены степени 1—7 для краткости опущены). Рассмотрим случай, когда точки A_1 и A_2 входят в их число. Из (9) следует, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}8\,(\Gamma^3_{42}\,\Gamma^5_{61})^2 - (1 - \Gamma^4_{52})\,[\Gamma^3_{42}\,(3 - \Gamma^4_{52})^2 + \Gamma^5_{42}\,(2 - \Gamma^4_{52} + \\ + \Gamma^5_{42} - 4\Gamma^3_{42}\,\Gamma^5_{61})] - \Gamma^5_{61}\,(\Gamma^5_{42})^2 = 0, \\ 8\,(\Gamma^4_{31}\,\Gamma^6_{52})^2 - (1 - \Gamma^4_{52})\,[\Gamma^4_{31}\,(3 - \Gamma^4_{52})^2 + \Gamma^6_{31}\,(2 - \Gamma^4_{52} + \\ + \Gamma^6_{31} - 4\Gamma^4_{31}\,\Gamma^6_{52})] - \Gamma^6_{52}\,(\Gamma^6_{31})^3 = 0.\end{gathered} \quad (10)$$

Эти соотношения определяют частный класс пар поверхностей. Канонический репер пары поверхностей класса (10) совпадает с каноническим B-репером произвольного 2-семейства прямых (A_1A_2), построенным в работе [6]. Следовательно, найденный класс существует с произволом 6 функций двух аргументов.

2. Пара поверхностей $\Gamma^{\gamma+2}_{\alpha+2,\,\alpha} = 0$ характеризуется каждым из свойств: а) координатное подмногообразие $\omega^\alpha = 0$ совпадает с двумя из Γ_α-подмногообразий, б) гиперплоскость $A^{\gamma+2}$ является фокальной [5] для

касательной плоскости $A_\alpha A_{\alpha+2} A_{\alpha+4}$ вдоль фокального смещения $\omega^\gamma = 0$. Эта пара обладает еще следующими свойствами: 1) координатное подмногообразие $\omega^\gamma = 0$ соответствует одному из T^α-подмногообразий, 2) 2-семейство прямых $(A_\alpha A_{\alpha+2})$-полуфокальное [4] с фокусом в точке A_α и торсом $\omega^\gamma = 0$.

3. Пара поверхностей $\Gamma^\gamma_{\alpha+1,\alpha} = 0$ характеризуется тем, что поверхность (A_α) имеет четырехмерное соприкасающееся подпространство, совпадающее с гиперплоскостью A^γ.

4. Пара поверхностей $\Gamma^{\gamma+2}_{\alpha+2,\alpha} = \Gamma^{\gamma+4}_{\alpha+2,\alpha} = \Gamma^{\gamma+4}_{\alpha+4,\gamma} = 0$ характеризуется тем, что подмногообразия $\omega^\gamma = 0$ и $\omega^\alpha = 0$ соответствуют двум асимптотическим направлениям трехмерной линейчатой поверхности S^1_3 в точках A_α. Кроме того, эта пара обладает следующими свойствами: 1) подмногообразие $\omega^\gamma = 0$ $(\omega^\alpha = 0)$ соответствует двум совпавшим (одному) T^α-подмногообразиям, 2) подмногообразие $\omega^\gamma = 0$ $(\omega^\alpha = 0)$ соответствует трем (двум) совпавшим Γ_α-подмногообразиям, 3) в каждой точке луча 2-семейства прямых (A_1A_2) одно фокальное направление поверхности S^1_3 совпадает с одним ее асимптотическим направлением (этот класс 2-семейства прямых отмечен в работе [6]).

Широта классов 2, 3 — шесть функций двух аргументов, а широта класса 4 — две функции двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., 1948.

2. Л. З. Кругляков. Канонический репер нефокального 2-семейства прямых в P_5. Геом. сб. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 36—47.

3. С. Е. Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I). Изв. АН Арм. ССР, сер. физ-мат. наук, 16, № 3, 1963, 3—22.

4. Л. З. Кругляков. Полуфокальные 2-семейства прямых в P_5. Изв. вузов. «Математика», 11, 1967, 35—42.

5. М. А. Акивис. Фокальные образы поверхности ранга r. Изв. вузов. «Математика», 1, 1957, 9—19.

6. Л. З. Кругляков. Репераж системы подмногообразий 2-семейства прямых в P_5. Геометрический сб., 8 (Труды Томского ун-та, 205), 1972, 34—39.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ИСТОЛКОВАНИИ t-ФОКАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В. В. БЛАГОНРАВОВ

В. С. Малаховский назвал многообразием $(h, m, n)^k$ m-параметрическое многообразие алгебраических элементов порядка k в n-мерном проективном пространстве P_n, причем совокупность всех гиперплоскостей, содержащих алгебраические элементы данного многообразия, является h-параметрической.

В работе [1] для многообразий $(n, n, n)^k$, а в [2] для многообразий $(h, h, n)^2$ $(h < n)$ вводится понятие ассоциированного t-фокального алгебраического элемента. Его геометрическая характеристика дана в работе [1] для многообразий (3, 3, 3), а в [2] для многообразий $(3, 3, n)^2$.

Целью настоящей работы является введение понятия ассоциированного t-фокального многообразия для многообразий $(h, h, n)^k$ и его геометрическая характеристика. Разумеется, всегда $h \leqslant n$.

§ 1. t-фокусная поверхность многообразия Φ_x

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве h-параметрический геометрический образ [3], элементом которого служит гиперплоскость l_{n-1} и лежащее в ней проходящее (если $h < n$) через ее характеристику подпространство $l_{n-h-1+r}$ размерности $n-h-1+r$. При этом предполагается, что $h > r \geqslant 0$. Будем обозначать введенный геометрический образ Φ_x. Заметим, что при $h = n$ элемент не имеет характеристики и поэтому подпространством $l_{n-h-1+r}$ может служить любое подпространство гиперплоскости l_{n-1}.

Поместим вершины репера $A_1, \ldots, A_n$ в гиперплоскость l_{n-1}, вершины $A_{h-r+1}, \ldots, A_n$ в характеристику гиперплоскости l_{n-1}, а вершины $A_{h-r+1}, \ldots, A_n$ в подпространство $l_{n-h-1+r}$.

Так как данное многообразие h-параметрическое, то формы $\omega_r^{n+1} = \omega_r$ $(r = 1, \ldots, h)$ можно считать базисными. Тогда основная система дифференциальных уравнений нашего многообразия имеет вид

$$\begin{gathered}
\omega_{h+1}^{n+1} = \omega_{h+2}^{n+1} = \ldots = \omega_n^{n+1} = 0, \\
\omega_a^k = \Gamma_a^{kl}\,\omega_l, \\
\omega_{h-r+1}^1 = \Gamma_{h-r+1}^{1l}\,\omega_l, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\omega_h^{h-r} = \Gamma_h^{h-r,\,l}\,\omega_l.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексы $i, j, r, l, i_1, \ldots$ принимают значения $1, 2, \ldots, h$. Индексы a, b принимают значения $h+1, \ldots, n$; а индексы, обозначаемые греческими буквами, принимают значения $1, 2, \ldots n$.

Рассмотрим все смещения, при которых подпространство $l_{n-h-1+r}$ не выходит из гиперплоскости l_{n-1} Получим в общем случае невполне-интегрируемую систему уравнений Пфаффа

$$\omega_{h-r+1} = \omega_{h-r+2} = \ldots = \omega_h = 0, \tag{1.2}$$

которая выделяет в общем случае неголономное подмногообразие Ψ_{h-r} [3] нашего образа.

Будем обычным способом [4] искать фокальную поверхность для неголономного подмногообразия (1.2) плоскостей $l_{n-h-1+r}$. Получим следующую систему:

$$\begin{gathered}
x^1 = 0, \ \ldots, \quad x^{n-h+r} = 0, \quad x^{n+1} = 0, \\
(x^{h-r+1}\Gamma^{11}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{11}_n)\,\omega_1 + \ldots + (x^{h-r+1}\Gamma^{1h-r}_{h-r+1} + \ldots + \\
+ x^n\Gamma^{1h-r}_n)\omega_{h-r} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x^{h-r+1}\Gamma^{h-r\,1}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{h-r\,1}_n)\,\omega_1 + \ldots + \\
+ (x^{h-r+1}\Gamma^{h-r\,h-r}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{h-rh-r}_n)\,\omega_{h-r} = 0.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Для того, чтобы система (1.3) имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix}
x^{h-r+1}\Gamma^{11}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{11}_n & \ldots\ldots & x^{h-r+1}\Gamma^{1h-r}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{1h-r}_n \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
x^{h-r+1}\Gamma^{h-r1}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{h-r1}_n & \ldots\ldots & x^{h-r+1}\Gamma^{h-rh-r}_{h-r+1} + \ldots + x^n\Gamma^{h-rh-r}_n
\end{vmatrix} = 0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1. 4) определяет в подпространстве $l_{n-h-1+r}$ алгебраическую гиперповерхность порядка $h-r$. Назовем ее t-фокусной поверхностью многообразия Φ_x, а ее точки — t-точками.

В случае $r=0$ порядок поверхности (1.4) равен h, а сама поверхность есть обычная фокальная поверхность [4] h-параметрического многообразия характеристик. Система уравнений (1.2) в этом случае исчезает.

Если подпространство $l_{n-h-1+r}$ имеет размерность $n-2$, то порядок поверхности (1.4) равен единице, т. е. эта поверхность есть линейное подпространство размерности $n-3$.

§ 2. t-точки многообразия алгебраических элементов

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n многообразие $(h, h, n)^h$ алгебраических элементов.

Поместим вершины репера $A_1, \ldots, A_n$ в гиперплоскость элемента. Тогда его уравнения запишутся в виде

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_k} x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_k} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{2.1}$$

Предположим, что вершина репера A_1 не принадлежит (2. 1), тогда можно положить

$$a_{11\ldots1} = 1. \tag{2.2}$$

Система уравнений смежного к (2.1) алгебраического элемента записывается в виде

$$\{(1+k\Theta)a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}+da_{\alpha_1\ldots\alpha_K}-a_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_k}\omega^{\beta}_{\alpha_1}-\ldots-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\beta}\omega^{\beta}_{\alpha_k}\}\times$$
$$\times x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_k}=0,\quad x^{n+1}(1+\omega^{n+1}_{n+1})-x^{\alpha}\omega^{n+1}_{\alpha}=0,\tag{2.3}$$

где $D\Theta=0$.

При условии (2.2) система дифференциальных уравнений инвариантности алгебраического элемента, найденная В. С. Малаховским [1], принимает вид

$$\Delta a_{\alpha_1\ldots\alpha_K}\equiv da_{\alpha_1\ldots\alpha_K}-a_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_K}\omega^{\beta}_{\alpha_1}-\ldots-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}\beta}\omega^{\beta}_{\alpha_K}+$$
$$+ka_{\beta 1\ldots 1}\omega^{\beta}_{1}a_{\alpha_1\ldots\alpha_K}=0,\quad \omega^{n+1}_{\alpha}=0.\tag{2.4}$$

Так как семейство гиперплоскостей h-параметрическое, то формы $\omega^{n+1}_r=\omega_r\,(r=1,\ldots,h)$ можно считать базисными.

Тогда основная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\Delta a_{\alpha_1\ldots\alpha_K}=A^{r}_{\alpha_1\ldots\alpha_K}\omega_r,$$
$$\omega^{n+1}_{a}=\Gamma^{n+1r}_{a}\omega_r.\tag{2.5}$$

Лемма. Для того, чтобы некоторая точка поверхности (2.1) принадлежала пересечению поверхности со смежной вдоль некоторого подмногообразия, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала пересечению касательной $(n-2)$-плоскости к поверхности (2.1) в этой точке и смежной к ней вдоль того же подмногообразия.

Доказательство. Не умаляя общности, можно полагать, что точка, о которой говорится в лемме, есть вершина репера, например, A_2. Тогда

$$a_{22\ldots 2}=0.\tag{2.6}$$

В силу (2.5) и (2.4) получим

$$-ka_{22\ldots 2\alpha}\omega^{\alpha}_{2}=A^{r}_{22\ldots 2}\omega_r.\tag{2.7}$$

Пусть A_2 — точка пересечения поверхности (2.1) со смежной. Тогда из (2.3) и (2.5) получаем

$$x^{n+1}=0,$$
$$\omega_2=0,\tag{2.8}$$
$$A^{r}_{22\ldots 2}\omega_r=0.$$

Касательная плоскость к поверхности (2.1) в точке A_2 имеет уравнения:

$$a_{2\ldots 2\alpha}x^{\alpha}=0,$$
$$x^{n+1}=0.\tag{2.9}$$

Ее пересечение со смежной определяется системой уравнений:

$$x^{n+1}=0,$$
$$a_{22\ldots 2\alpha}x^{\alpha}=0,$$
$$x^1\omega_1+x^2\omega_2+\ldots+x^h\omega_h+x^{h+1}\omega_{h+1}+\ldots+x^n\omega^{n+1}_n=0,\tag{2.10}$$
$$B_1x^1+B_3x^3+\ldots+B_nx^n-x^2a_{2\ldots 2\gamma}\omega^{\gamma}_{2}=0.$$

Если точка A_2 удовлетворяет (2.10), то

$$a_{22\ldots 2\alpha}\omega^{\alpha}_{2}=0;$$

$$x^{n+1} = 0; \qquad (2.11)$$
$$\omega_2 = 0.$$

Из (2.7) видно, что (2.8) и (2.11) эквивалентны для любого подмногообразия. Лемма доказана.

Поместим вершины репера $A_{h+1},\ldots A_n$ в характеристику гиперплоскости $(A_1 \ldots A_n)$.

Рассмотрим все такие точки поверхности (2.1), в которых касательное подпространство к (2.1) проходит через характеристику $(A_{h+1},\ldots, A_n)$. Если $M(x^{1'}, x^{2'},\ldots, x^{n'}, 0)$ — такая точка, то

$$\begin{aligned}
&a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}h+1} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}n} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}} = 0,\\
&x^{n+1'} = 0,\\
&a_{\alpha'_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_K} = 0.
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Известно, что система r однородных уравнений с $n+1$ неизвестными при $r < n+1$ всегда имеет нетривиальное решение. В системе (2.12) $n-h+2$ уравнения, следовательно, при $h > 1$ она всегда имеет решения.

Так как, по крайней мере, одна из вершин репера всегда лежит вне касательной плоскости к поверхности (2.1) в точке M $(x^{1'}, \ldots x^{n'}, 0)$, то можно предположить, что это — вершина A_1. Тогда

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}} \neq 0. \qquad (2.13)$$

Касательное подпространство в точке M, удовлетворяющей системе (2.12), может быть задано $n-1$ линейно независимыми точками:

$$\begin{aligned}
&(-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}2} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}},\ a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}1} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}},\ 0,\ldots, 0),\\
&(-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}3} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}},\ 0,\ a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}1} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}},\ 0,\ldots, 0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}h} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}},\ 0,\ldots, 0,\ a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}1} x^{\alpha'_1},\ldots, x^{\alpha'_{K-1}},\ 0,\ldots, 0),\\
&A_{K+1},\ldots, A_n.
\end{aligned}$$

Определение. Назовем t-точкой поверхности (2.1) такую точку M этой поверхности, которая является t-точкой для многообразия Φ_x, элементом которого является гиперплоскость x^{n+1} и принадлежащая ей касательная плоскость к поверхности (2.1) в точке M.

Ясно, что t-точка удовлетворяет системе (2.12).

Подмногообразие (1.2) определяется в нашем случае системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}2} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}}\omega_1 + a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}1} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha_{K-1}}\omega_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}h} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}}\omega_1 + a_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}1} x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{K-1}}\omega_h = 0.
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

Система (2.14) содержит $h-1$ уравнений и, следовательно, является вполне интегрируемой.

Если точка M $(x^{1'}, \ldots, x^{n'}, 0)$ являтся t-точкой поверхности (2.1), то из леммы следует, что она определится (после исключения форм $\omega_1, \ldots, \omega_h$) системой, состоящей из (2.12), (2.14) и уравнения

$$A^r_{\alpha_1\ldots\alpha_\kappa}\omega_r x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_\kappa}=0. \tag{2.15}$$

Исключая $\omega_1, \ldots, \omega_h$ из систем (2.12) и (2.14), получаем

$$\begin{vmatrix} -a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\kappa-1}2}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}} & a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\kappa-1}1}x^{\alpha'_1}x^{\alpha'_2}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}} & 0\ldots & 0 \\ -a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\kappa-1}3}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}} & 0 & a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\kappa-1}1}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}} & 0\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\kappa-1}h}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}} & 0 & \ldots 0 & a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\kappa-1}1}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}} \\ A^1_{\alpha_1\ldots\alpha_\kappa}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_\kappa} & A^2_{\alpha_1\ldots\alpha_\kappa}x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_\kappa} & \ldots & A^h_{\alpha_1\ldots\alpha_\kappa}x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_\kappa} \end{vmatrix}=0 \tag{2.16}$$

Так как в силу (2.13) $a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\kappa-1}1}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_{\kappa-1}}=0$, то условие (2.16) эквивалентно условию

$$A^r_{\alpha_1\ldots\alpha_\kappa}x^{\alpha'_1}\ldots x^{\alpha'_\kappa}a_{r\beta_1\ldots\beta_{\kappa-1}}x^{\beta'_1}\ldots x^{\beta'_{\kappa-1}}=0. \tag{2.17}$$

Система уравнений (2.17), (2.12) при $h>2$ всегда имеет нетривиальные решения. Следовательно, при $h>2$ t-точки на элементе A^κ_{n-2} всегда существуют.

§ 3. Сравнение с результатами В. С. Малаховского

Рассмотрим изученное В. С. Малаховским многообразие $(h, h, n)^2$ ($h<n$ и продолжим для него начатую в § 2 фиксацию репера. Поместим вершины репера $A_1, \ldots, A_h$ в полярное подпространство для $(n-h-1)$-плоскости $(A_{h+1}, \ldots, A_n)$ относительно поверхности (2.1). Тогда система (2.17), (2.12) имеет вид

$$\begin{gathered} a_{ij}x^ix^j=0, \\ x^{h+1}=\ldots=x^n=0, \\ A^r_{ij}a_{r\kappa}x^ix^jx^\kappa=0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Уравнения

$$a_{ij}x^ix^j=0,\ \ x^{n+1}=0 \tag{3.2}$$

определяют рассмотренный в § 1 работы [2] инвариантный гиперконус второго порядка гиперплоскости $x^{n+1}=0$, вершиной которого является характеристическое подпространство.

В работе [2] В. С. Малаховским дается следующее определение t-фокальных точек многообразия $(h, h, n)^2$. Точка M называется t-фокальной для многообразия $(h, h, n)^2$, если она удовлетворяет системе

$$a_{ij}x^ix^j=0,\ \ x^{n+1}=0,\ \ b_{ij\kappa}x^ix^jx^\kappa=0, \tag{3.3}$$

где

$$b_{ij\kappa}=a_{r(i}A^r_{j\kappa)}-\frac{2(n-1)}{n(h+1)-2}A_{(i}a_{j\kappa)}, \tag{3.4}$$

$$A_i=A^1_{i1}+A^2_{i2}+\ldots+A^h_{ih}.$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (3.3) эквивалентна следующей:

$$a_{ij}x^ix^j=0,\ \ x^{n+1}=0,\ \ A^r_{ij}a_{r\kappa}x^ix^jx^\kappa=0. \tag{3.5}$$

Отсюда вытекает, что точка M конуса (3.2) является t-фокальной (в смысле определения В. С. Малаховского), если она проектируется из вершины конуса (3.2), в t-точку поверхности (2.1).

В работе [1] В. С. Малаховский называет точку M t-фокальной для многообразия $(n, n, n)^k$, если она удовлетворяет системе:

$$\begin{aligned} &a_{\alpha_1\ldots\alpha_K} x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_K} = 0, \\ &x^{n+1} = 0, \\ &b_{\alpha_1\ldots\alpha_{2K-1}} x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_{2K-1}} = 0, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

где

$$b_{\alpha_1\ldots\alpha_{2K-1}} = a_{\beta(\alpha_1\ldots\alpha_{K-1})} A^{\beta}_{\alpha_K\ldots\alpha_{2K-1}} - \frac{k}{n+\kappa} A_{(\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}} a_{\alpha_K\ldots\alpha_{2K-1})}, \qquad (3.7)$$

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}} = A^1_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}1} + A^2_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}2} + \ldots + A^n_{\alpha_1\ldots\alpha_{K-1}n}.$$

Отсюда видно, что система уравнений (3.6) эквивалентна системе (2.17), (2.12).

Следовательно, совокупность всех введенных В. С. Малаховским t-фокальных точек для многообразия $(n, n, n)^k$ совпадает с совокупностью всех t-точек этого многообразия.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометр. сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963. 28—42.

2. В. С. Малаховский. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов. Геометр. сб., 4 (Труды Томского ун-та, 176), 1964. 11—19.

3. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Геометр. сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 5—11.

4. Е. Т. Ивлев. О многообразии E $(0, n-m, m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m>2, n<m\ (m+1))$. Сибирский математический журнал, т. 8, № 5, 1967, 1143—1155.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТАХ НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

В. В. ВАСЕНИН

Изучение эквиаффинной теории неголономной поверхности было начато Р. Н. Щербаковым и М. О. Рахулой в работе [1]. В настоящей статье проводится обобщение основных геометрических фактов, установленных в [1], на n-мерный случай.

Деривационные формулы эквиаффинного репера, определяемого векторами $\overline{r}, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$, где $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n) = 1$, имеют вид

$$d\overline{r} = \omega^i \overline{e}_i, \quad d\overline{e}_i = \omega_i^k \overline{e}_k, \quad (i, j, k = \overline{1, n}), \tag{1}$$

причем $\sum_i \omega_i^i = 0$. Эти уравнения являются вполне интегрируемыми в силу уравнений структуры

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j]. \tag{2}$$

Здесь неголономная гиперповрехность трактуется как n-параметрическое многообразие, элемент которого состоит из точки P и инцидентной ей гиперплоскости π. Совмещая начало подвижного репера с точкой P, а гиперплоскость $x^n = 0$ с гиперплоскостью π, получим для вторичных форм [2]

$$\pi^i = \pi_\alpha^n = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n-1}).$$

Формы ω^i, ω_α^n станут главными. Выбирая как обычно, формы ω^i за базисные, выразим через них формы ω_α^n в виде

$$\omega_\alpha^n = a^n{}_i \omega^i. \tag{3}$$

Дифференцируя (3) внешним образом, мы обычным путем ([2], XIV) получим соотношения:

$$\delta a_{\alpha\beta}^n = a_{\alpha i}^n \pi_\beta^i + a_{\gamma\beta}^n \pi_\alpha^\gamma - a_{\alpha\beta}^n \pi_n^n \; (i = \overline{1, n});$$
$$\delta a_{\alpha n}^n = a_{\alpha i}^n \pi_n^i + a_{\gamma n}^n \pi_\alpha^\gamma - a_{\alpha n}^n \pi_n^n, \quad (\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n-1}), \tag{4}$$

где δ — дифференцирование по вторичным параметрам. Из (4) вытекает возможность следующей фиксации репера:

$$a_{\alpha n}^n = 0, \; det \| a_{\alpha\beta}^n \| \neq 0, \; \pi_n^\alpha = 0,$$
$$a_{\alpha\beta}^n = 0, \; (\beta \neq n - \alpha), \; a_{\alpha,n-\alpha}^n a_{\beta,n-\beta}^n - a_{n-\alpha,\alpha}^n a_{n-\beta,\beta}^n \neq 0. \tag{5}$$
$$\pi_\alpha^\beta = 0, \; (\alpha \neq \beta),$$

в силу которой формы ω_n^α и ω_α^β $(\alpha \neq \beta)$ стали главными. Следовательно, построен репер, канонизированный вплоть до нормирования векторов.

Соотношения (3) примут вид

$$\omega_\alpha^n = a_{\alpha,n-\alpha}^n \omega^{n-\alpha}. \tag{6}$$

Положим также

$$\omega_n^\alpha = a_{ni}^\alpha \omega^i, \quad \omega_\alpha^\beta = a_{\alpha i}^\beta \omega^i \quad (\alpha \neq \beta). \tag{7}$$

Дифференцируя (6) и (7) внешним образом, получим $\frac{(n-1)^2(n-2)}{2}$ конечных соотношений

$$\begin{gathered} a_{\alpha,n-\alpha}^n \left(a_{\gamma\beta}^{n-\alpha} - a_{\beta\gamma}^{n-\alpha}\right) + a_{n-\gamma,\gamma}^n a_{\alpha\beta}^{n-\gamma} - a_{n-\beta,\beta}^n a_{\alpha\gamma}^{n-\beta} = 0, \\ a_{\alpha,n-\alpha}^n \left(a_{n\beta}^{n-\alpha} - a_{\beta n}^{n-\alpha}\right) - a_{n-\beta,\beta}^n a_{\alpha n}^{n-\beta} = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

в которых нигде суммирование не предполагается. Заметим, что все коэффициенты a_{ij}^k являются относительными инвариантами, так как

$$\delta a_{ij}^k = a_{ij}^k \left(\pi_i^i + \pi_j^j - \pi_k^k\right). \tag{9}$$

Исключая отсюда вторичные формы, получим следующие абсолютные инварианты неголономной гиперповерхности:

$$\begin{gathered} J_1(\alpha) = a_{\alpha,n-\alpha}^n : a_{n-\alpha,\alpha}^n, \quad J_2(\alpha,\ \beta) = a_{n\alpha}^\alpha : a_{n\beta}^\beta, \\ J_2^1(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = a_{\alpha\beta}^\beta : a_{\alpha\gamma}^\gamma, \quad J^1(\alpha,\ \beta) = a_{\alpha n}^\beta : a_{n\alpha}^\beta, \\ J^1(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = a_{\alpha\gamma}^\beta : a_{\gamma\alpha}^\beta, \quad J_3(\alpha,\ \alpha,\ \beta) = a_{\alpha\alpha}^\beta a_{\beta\alpha}^\alpha : (a_{\alpha\beta}^\beta)^2, \\ J_3^1(\alpha,\ \beta) = a_{nn}^\alpha a_{\alpha\beta}^\beta : (a_{n\alpha}^\alpha)^2, \quad J_4(\alpha) = a_{\alpha n}^{n-\alpha} a_{\alpha,n-\alpha}^n : (a_{\alpha,n-\alpha}^{n-\alpha})^2, \\ J_5(\alpha,\ \beta) = a_{\alpha n}^\beta a_{\alpha\beta}^\beta : (a_{n\beta}^\beta)^2, \quad J_4(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\, a_{\alpha\gamma}^\beta a_{\alpha\beta}^\gamma : (a_{\alpha\gamma}^\beta)^2, \\ J_6(\beta,\ \alpha) = a_{nn}^\beta a_{\alpha\alpha}^\beta : (a_{n\alpha}^{\beta\,2}), \\ J_6^1(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = a_{\alpha\alpha}^\beta a_{\gamma\gamma}^\beta : (a_{\alpha\gamma}^\beta)^2, \\ J_7(\alpha,\ \beta) = \prod_{\alpha=1}^{\beta-1} a_{\alpha\beta}^\beta \prod_{\hat{\alpha}=\beta+1}^{n-1} a_{\hat{\alpha}\beta}^\beta a_{n\beta}^\beta a_{\beta\alpha}^\alpha. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь везде $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$ и нигде не предполагается суммирования. В силу соотношений (8) среди инвариантов (10) имеется только $\frac{(n-1)^2(n+2)}{2}$ независимых.

Расмотрим геометрический смысл фиксации (5). Поляритет Пантази [3] каждому смещению dP приводит в соответствие $(n-2)$-мерную характеристику гиперплоскости π при смещении по этому направлению. Уравнения этой характеристики имеют (в локальных координатах) вид

$$x^\alpha a_{\alpha,n-\alpha}^n \omega^{n-\alpha} + \omega^n = 0, \quad x^n = 0. \tag{11}$$

Известно, что аффинной нормали соответствует несобственная характеристика. Из (11) следует, что ось $\{\bar{r},\ \bar{e}_n\}$ совмещена с аффинной нормалью неголономной гиперповерхности. Каждой касательной к несущей линии одномерной полосы Ψ_1 неголономной гиперповерхности в поляритете Пантази соответствует $(n-2)$-мерная плоскость, касательная к несущим линиям полосы Ψ_{n-2}. (Полосой Ψ_k мы называем подмногообразие Ψ_k в смысле [4], состоящее из подмногообразий Ψ_1, несущие линии которых касаются плоскости π). В свою очередь одномерной характеристике полосы Ψ_{n-2} соответствует полоса Ψ_1^*. Требованием совпадения Ψ_1 с Ψ_1^* выделяется $n-1$ полос Ψ_1. В нечетномерных пространствах каждая из выделенных полос Ψ_1 принадлежит соответствующей ей Ψ_{n-2}. Такие полосы назовем асимптотическими. В четномерных пространствах кроме n—2 асимптотических полос имеется полоса, соответствующая полосе Ψ_{n-2}, содержащей асимптотические полосы. Эту полосу назовем осевой. Легко видеть, что при фиксации (5) все оси $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ в нечетномерных пространствах совмещаются с касательными к несущим линиям асимптотических полос. При $n = 2m$ с асимптотическими касательными совмещаются все оси $\{r, e_\alpha\}$ $(\alpha \neq m$, а ось $\{r, e_\alpha\}$ направляется по касательной к несущей линии осевой полосы.

Дадим геометрическую характеристику инвариантам (10). Для этого используем характеристики (11), а также характеристики гиперплоскостей $x^\alpha = 0$ при смещении $\omega^1 : ...: \omega^n$

$$x^i a^\alpha_{ij} \omega^j + \omega^\alpha = 0, \quad x^\alpha = 0. \tag{12}$$

Кроме того, будем использовать уравнения гиперконусов Малюса [1] для осей $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и $\{\bar r, \bar e_n\}$.

$$(K^{\beta\gamma}_\alpha) \qquad (x^\beta a^\gamma_{\alpha i} - x^\gamma a^\beta_{\alpha i})\, x^i = 0, \tag{13$_1$}$$

$$(K^{n\gamma}_\alpha) \qquad x^i x^n a^\gamma_{\alpha i} - x^\gamma x^{n-\alpha} a^n_{\alpha, n-\alpha} = 0, \tag{13$_2$}$$

$$(K^{\alpha\beta}_n) \qquad (x^\alpha a^\beta_{ni} - x^\beta a^\alpha_{ni})\, x^i = 0. \tag{13$_3$}$$

Введем также в рассмотрение гиперквадрику Q_i—геометрическое место точек пересечения касательных к несущим линиям подмногообразий Ψ_1 с гиперплоскостями, параллельными аффинной нормали и содержащими соответствующую характеристику гиперплоскости $x^i = 0$. Уравнения гиперквадрик Q_i имеют вид.

$$\begin{aligned} &(Q_\alpha) \qquad \sum_{\alpha'=1}^{\alpha-1} x^{\alpha'} x^i a^\alpha_{\alpha' i} + \sum_{\alpha''=\alpha+1}^{n} x^{\alpha''} x^i a^\alpha_{\alpha''\alpha} + x^\alpha = 0, \\ &(Q^n) \qquad x^\alpha x^{n-\alpha} a^n_{\alpha, n-\alpha} + x^n = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Инвариант $J_1(\alpha)$ противоположен по знаку сложному отношению, в котором асимптотические касательные $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и $\{\bar r, \bar e_{n-\alpha}\}$ делятся касательной к несущей линии полосы $\omega^{\hat i} = 0$, $\hat i \neq \alpha,\ n-\alpha$ и прямой, по которой 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_\alpha, \bar e_{n-\alpha}\}$ пересекает соответствующую ей характеристику.

Теорема 2. Инвариант $J_2(\alpha, \beta)$ есть простое отношение отрезков, отсекаемых на аффинной нормали характеристикой гиперплоскости $x^\alpha = 0$ вдоль асимптотической $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и характеристикой гиперплоскости $x^\beta = 0$ вдоль асимптотической $\{\bar r, \bar e_\beta\}$.

Теорема 3. Инвариант $J^1_2(\alpha, \beta, \gamma)$ есть простое отношение отрезков, отсекаемых на асимптотической $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ характеристиками гиперплоскостей $x^\beta = 0$ и $x^\gamma = 0$ вдоль асимптотических $\{\bar r, \bar e_\beta\}$ и $\{\bar r, \bar e_\gamma\}$.

Теорема 4. Каково бы ни было $\lambda \neq 0$, существует в общем случае два подмногообразия $\Psi_1 \{\omega^\alpha - t\omega^n = \omega^1 = \ldots = \omega^{\alpha-1} = \omega^{\alpha+1} = \ldots = \omega^{n-1} = 0\}$, такие, что касательная к несущей линии такого Ψ_1 и прямая, по которой 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_\alpha, \bar e_n\}$ пересекает характеристику гиперплоскости $x^\beta = 0$, делят асимптотическую касательную $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и аффинную нормаль в сложном отношении λ.

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что указанным свойством обладают подмногообразия Ψ_1, определяемые уравнениями:

$$\begin{gathered}(\omega^\alpha)^2 a^\beta_{\alpha\alpha} + (a^\beta_{\alpha n} + \lambda a^\beta_{n\alpha})\,\omega^\alpha\omega^n + \lambda a^\beta_{nn}(\omega^n)^2 = 0,\\ \omega^1 = \ldots = \omega^{\alpha-1} = \omega^{\alpha+1} = \ldots = \omega^{n-1} = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Следствие 1. Если $\lambda = -J^1(\alpha, \beta)$, то линии (15) делят гармонически асимптотическую касательную $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и аффинную нормаль.

Следствие 2. Если λ есть корень уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda(J^1(\alpha, \beta) - 2J_6(\alpha, \beta)) + (J^1(\alpha, \beta))^2 = 0, \tag{16}$$

то соответствующие ему Ψ_1 (15) совпадают.

Теорема 5. По произвольному отличному от нуля λ найдутся две полосы $\omega^\gamma + t\omega^\beta = \omega^1 = \ldots = \omega^{\gamma-1} = \omega^{\gamma+1} = \ldots = \omega^{\beta-1} = \omega^{\beta+1} = \ldots = \omega^n = 0$, такие, что касательная к несущей линии каждой из них вместе с прямой, по которой 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_\gamma, \bar e_\beta\}$ пересекает характеристику $x^\alpha = 0$, делят асимптотические $\{\bar r, \bar e_\gamma\}$ и $\{\bar r, \bar e_\beta\}$ в сложном отношении λ.

Уравнения этих полос имеют вид

$$\begin{gathered}a^\alpha_{\beta\beta}(\omega^\beta)^2 + (a^\beta_{\alpha\gamma} + 2\lambda a^\alpha_{\gamma\beta})\,\omega^\beta\omega^\gamma + \lambda a^\alpha_{\gamma\gamma}(\omega^\gamma)^2 = 0,\\ \omega^1 = \ldots = \omega^{\beta-1} = \omega^{\beta+1} = \ldots = \omega^{\gamma-1} = \omega^{\gamma+1} = \ldots = \omega^n = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Следствие 3. Если $\lambda = -J^1(\alpha, \beta, \gamma)$, то касательные к несущим линиям полос (17) гармонически сопряжены относительно соответствующих асимптотических.

Следствие 4. Если λ есть корень уравнения

$$\lambda^2 + 2\lambda(J^1(\alpha, \beta, \gamma) - 2J^1_6(\alpha, \beta, \gamma)) + (J^1(\alpha, \beta, \gamma))^2 = 0, \tag{18}$$

то полосы (17) совпадают.

Гиперквадрика Q_α (14) пересекается с 2-плоскостью $\{\bar r, \bar e_\alpha, \bar e_\beta\}$ по конике

$$\begin{gathered}(x^\beta)^2 a^\alpha_{\beta\beta} + x^\alpha x^\beta a^\alpha_{\beta\alpha} + x^\alpha = 0.\\ x^1 = \ldots = x^{\beta-1} = x^{\beta+1} = \ldots = x^{\alpha-1} = x^{\alpha+1} = \ldots = x^n = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Теорема 5. Отношение отрезка, соединяющего точку P с проекцией центра коники (19) на ось $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$, к отрезку, отсекаемому на этой оси характеристикой гиперплоскости $x^\beta = 0$, соответствующей асимптотической касательной $\{\bar r, \bar e_\beta\}$, противоположно по знаку инварианту $2J_8(\beta, \beta, \alpha)$.

Действительно, координаты центра коники (19) соответственно равны

$$x^\alpha = 2a^\alpha_{\beta\beta} : (a^\alpha_{\beta\alpha})^2, \quad x^\beta = -1 : a^\alpha_{\beta\alpha}, \tag{20}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Квадрика Q_α пересекает 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_\alpha, \bar e_n\}$ по конике

$$\begin{gathered}(x^n)^2 a^\alpha_{nn} + x^\alpha x^n a^\alpha_{n\alpha} + x^n = 0,\\ x^1 = \ldots = x^{\alpha-1} = x^{\alpha+1} = \ldots = x^{n-1} = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Для центра коники (21) имеем

$$x^\alpha = 2a^\alpha_{nn} : (a^\alpha_{n\alpha})^2, \quad x^n = -1 : a^\alpha_{n\alpha}. \tag{22}$$

Теорема 6. Отношение отрезка, соединяющего точку P с проекцией центра коники (21) на ось $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ к отрезку, отсекаемому на этой оси характеристикой гиперплоскости $x^\beta = 0$, соответствующей асимптотической касательной $\{\bar r, \bar e_\beta\}$, отличается от инварианта $2J_3^1(\alpha, \beta)$ только знаком.

Гиперконус Малюса $K_\alpha^{n, n-\alpha}$ сечет 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_{n-\alpha}, \bar e_n\}$ по паре прямых

$$(x^n)^2 a_{\alpha n}^{n-\alpha} + x^n x^{n-\alpha} a_{\alpha, n-\alpha}^{n-\alpha} - (x^{n-\alpha})^2 a_{\alpha, n-\alpha}^{n} = 0. \tag{23}$$

Отсюда следует, что прямые (23) делят асимптотическую касательную $\{\bar r, \bar e_{n-\alpha}\}$ и аффинную нормаль в сложном отношении

$$(1 + \sqrt{1 + 4J_4(\alpha)}) : (1 - \sqrt{1 + 4J_4(\alpha)}). \tag{24}$$

Гиперконус $K_\alpha^{\gamma\beta}$ пересекает 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_\beta, \bar e_\gamma\}$ по паре образующих, которые находятся из уравнения

$$a_{\alpha\gamma}^{\beta} (x^\gamma)^2 + (a_{n\beta}^{\beta} - a_{n\alpha}^{\alpha}) x^\beta x^\gamma - a_{\alpha\beta}^{\gamma} (x^\beta)^2 = 0. \tag{25}$$

Отсюда найдем сложное отношение b, в котором образующие (25) делят асимптотические касательные $\{\bar r, \bar e_\gamma\}$ и $\{\bar r, \bar e_\beta\}$

$$b = \frac{1 + \sqrt{1 + 4J_4^1(\alpha, \beta, \gamma) : [1 - J_2^1(\alpha, \beta, \gamma)]}}{1 - \sqrt{1 + 4J_4^1(\alpha, \beta, \gamma) : [1 - J_2^1(\alpha, \beta, \gamma)]}}. \tag{26}$$

Гиперконус $K_n^{\alpha\beta}$ сечет 2-плоскость $\{\bar r, \bar e_\alpha, \bar e_\beta\}$ по паре образующих

$$a_{n\alpha}^{\alpha} (x^\alpha)^2 + (a_{n\beta}^{\beta} - a_{n\alpha}^{\alpha}) x^\alpha x^\beta - a_{n\beta}^{\alpha} (x^\beta)^2 = 0. \tag{27}$$

Сложное отношение g, в котором эти прямые делят асимптотические касательные $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и $\{\bar r, \bar e_\beta\}$, вычисляется по формуле

$$g = \frac{1 + \sqrt{1 + 4J_5(\alpha, \beta) : (1 - J_2(\alpha, \beta))}}{1 - \sqrt{1 + 4J_5(\alpha, \beta) : (1 - J_2(\alpha, \beta))}}. \tag{28}$$

Характеристика гиперплоскости $x^\beta = 0$, соответствующая оси $\{\bar r, \bar e_\beta\}$, пересекает оси $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ $(\alpha \neq \beta)$ в точках $\bar A_\alpha = \bar r - (a_{\alpha\beta}^{\beta})^{-1} \bar e_\alpha$, а аффинную нормаль в точке $\bar A_n = \bar r - (a_{nn}^{\beta})^{-1} \bar e_n$, характеристика гиперплоскости $x^\alpha = 0$ вдоль оси $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ пересекает ось $\{\bar r, \bar e_\beta\}$ в точке $\bar B = \bar r - (a_{\beta\alpha}^{\alpha})^{-1} \bar e_\beta$. Объем параллелепипеда, у которого точка P и точки A_α, A_n и B являются вершинами, вычисляется по формуле

$$v = \{J_7(\alpha, \beta\}^{-1}. \tag{29}$$

Отметим некоторые эквиаффинно-инвариантные частные классы неголономных гиперповерхностей: 1) $J_2(\alpha, \beta) = 1$ — характеристика гиперплоскости $x^\beta = 0$ вдоль $\{\bar r, \bar e_\beta\}$ и характеристика гиперплоскости $x^\alpha = 0$ вдоль $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ пересекают аффинную нормаль в одной и той же точке; 2) $J_6(\alpha, \beta) = J^1(\alpha, \beta)$ — корни уравнения (16) совпадают; 3) $J_3(\beta, \beta, \alpha) = \mathrm{const}$ — отношение отрезка, соединяющего точку P с проекцией на ось $\{\bar r\ \bar e_\alpha\}$центра коники (19), к отрезку, отсекаемому на этой оси характеристикой гиперплоскости $x^\beta = 0$ вдоль $\{\bar r, \bar e_\beta\}$, постоянно; 4) $J_4(\alpha) = \mathrm{const}$ — сложное отношение, в котором прямые (23) делят ось $\{\bar r, \bar e_{n-\alpha}\}$ и аффинную нормаль, постоянно; 5) $J_5(\alpha, \beta) : (1 - J_2(\alpha, \beta)) = \mathrm{const}$ $(J_4^1(\alpha, \beta, \gamma) : [1 - J_2^1(\alpha, \beta, \gamma)] = \mathrm{const})$ — сложное отношение, в котором прямые (25) (27) делят оси $\{\bar r, \bar e_\alpha\}$ и $\{\bar r, \bar e_\beta\}$

($\{\bar{r}, \bar{e}_\gamma\}$ и $\{\bar{r}, \bar{e}_\beta\}$), постоянно. Каждый из отмеченных частных классов существует и определяется с произволом $n-2$ функции n аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков и М. О. Рахула. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геометр. сб., вып. 1 (Труды Томского ун-та, 160), 1962, 82—89.
2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
3. В. В. Васенин. К эквиаффинной теории неголономной гиперповерхности. Доклады 3-й Сибирекой конф. по матем. и мех., Томск, 1964, 184—185.
4. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометр. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ПАРЫ ЦЕНТРОАФФИННО-НАЛОЖИМЫХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПАРЕ КОМПЛЕКСОВ

Л. И. МАГАЗИННИКОВ, Г. И. ИВАНОВ

О. Майером в работе [2] введено понятие элемента центроаффинной дуги линейчатой поверхности, а в работе [1] им же определены пары центроаффинно-наложимых линейчатых поверхностей, как пары, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, а элементы центроаффинных длин дуг для соответствующих лучей равны. В работе [3] изучались центроаффинно-наложимые пары комплексов, т. е. такие комплексы, любая пара линейчатых поверхностей которых центроаффинно-наложима.

В данной работе изучаются некоторые частные случаи пар комплексов, связанные со свойствами их пар наложимых линейчатых поверхностей.

Любую пару комплексов с непараллельными соответствующими лучами и с определенным конечным центроаффинным расстоянием [3] между этими лучами можно задать в виде

$$R = A_1 + vA_3, \tag{1_1}$$

$$R = mA_1 + wA_2. \tag{1_2}$$

Включив векторы A_1, A_2 и A_3 в центроаффинный репер (O, A_1, A_2, A_3), где O — центр пространства, найдем элементы центроаффинных длин дуг линейчатых поверхностей первого и второго комплекса в виде

$$ds_1 = \frac{\omega_1^1 \omega_3^2 - \omega_1^2 \omega_3^1}{\omega_3^2}, \tag{2}$$

$$ds_2 = \frac{(\omega_1^1 + d\ln m)\,\omega_2^3 - \omega_1^3 \omega_2^1}{\omega_2^3}. \tag{3}$$

Условием $ds_1 = ds_2$ выделяется из пары комплексов совокупность всех центроаффинно-наложимых пар линейчатых поверхностей в паре комплексов. Это условие имеет вид:

$$\omega_2^3 \omega_3^2\, d\ln m - \omega_1^3 \omega_2^1 \omega_3^2 + \omega_1^2 \omega_3^1 \omega_2^3 = 0. \tag{4}$$

В работе изучается случай распадения кубической формы (4) на линейные множители специального вида, а именно случаи, когда в паре комплексов имеется три пары наложимых [3] неголономных конгруэнций [4], состоящих либо из уницентральных [7], либо из цилиндрических неголономных конгруэнций.

Исключая из рассмотрения случай, когда комплекс (1_1) цилиндроидальный [5], можем записать

$$
\begin{aligned}
\omega_1^1 &= a_1\,\omega_1^2 + b_1\,\omega_3^1 + c_1\,\omega_3^2,\\
\omega_2^1 &= a_2\,\omega_1^2 + b_2\,\omega_3^1 + c_2\,\omega_3^2,\\
\omega_2^3 &= a_3\,\omega_1^2 + b_3\,\omega_3^1 + c_3\,\omega_3^2,\\
\omega_1^3 &= a_4\,\omega_1^2 + b_4\,\omega_3^1 + c_4\,\omega_3^2,\\
d\ln m &= m_1\,\omega_1^2 + m_2\,\omega_3^1 + m_3\,\omega_3^2.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Подставляя эти соотношения в (4), получим

$$
\begin{aligned}
&(c_3m_3 - c_1c_4)(\omega_3^2)^3 + (a_3m_1 - a_2a_4)(\omega_1^2)^2\,\omega_3^2 +\\
&+ (m_1c_3 + m_3a_3 - a_4c_2 - a_2c_4)\,\omega_1^2\,(\omega_3^2)^2 +\\
&+ (m_2c_3 + m_3b_3 - b_4c_2 - b_2c_4)\,\omega_3^1\,(\omega_3^2)^2 +\\
&+ (b_3m_2 - b_2b_4)(\omega_3^1)^2\,\omega_3^2 + (m_1b_3 + m_2a_3 - a_2b_4 -\\
&- a_4b_2 + c_3)\,\omega_1^2\,\omega_3^1\,\omega_3^2 + a_3(\omega_1^2)^2\,\omega_3^1 +\\
&+ b_3\,\omega_1^2\,(\omega_3^1)^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Зададим произвольную пару линейчатых поверхностей, причем первая из них, т. е. принадлежащая комплексу (l_1) нецилиндроидальная (цилиндроидальной в работе [6] названа линейчатая поверхность, имеющая несобственную центральную линию [2]):

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \alpha\omega_3^2,\\
\omega_3^1 &= \beta\omega_3^2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Центральная точка первой линейчатой поверхности этой пары имеет радиус-вектор

$$R = A_1 - \alpha A_3, \tag{8}$$

а плоскость, проходящая через центр пространства параллельно асимптотической плоскости этой линейчатой поверхности, пересекает плоскость $(R, A_1, A_2) = 0$ по прямой

$$R = v(\beta A_1 + A_2). \tag{9}$$

Если векторы A_2 и A_3 как-либо занормировать, то (8) и (9) дают геометрический смысл функций α и β.

Поделив соотношение (4) на $(\omega_3^2)^3$, видим, что линейчатые поверхности пары (7) центроаффинно-наложимы, если α и β связаны соотношением

$$
\begin{aligned}
&(a_3m_1 - a_2a_4)\,\alpha^2 + (m_1c_3 + m_3a_3 - a_4c_2 - a_2c_4)\,\alpha +\\
&+ (b_3m_2 - b_2b_4)\,\beta^2 + (m_2c_3 + m_3b_3 - b_4c_2 - b_2c_4)\,\beta +\\
&+ a_3\alpha^2\beta + b_3\alpha\beta^2 + (m_1b_3 + m_2a_3 - a_2b_4 -\\
&- a_4b_2 + c_3)\,\alpha\beta + c_3m_3 - c_1c_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Если зафиксируем как-либо α, то из (10) в общем случае определится два значения β, т. е. какую бы мы ни взяли точку на луче первого комплекса пары, найдется две пары наложимых линейчатых поверхностей, причем первые линейчатые поверхности имеют центральные точки во взятой точке луча. Этот же результат можно сформулировать и так: если в паре неголономных конгруэнций первая конгруэнция уницентральна, то в общем случае в такой паре существует не более двух пар центроаффинно-наложимых нецилиндроидальных линейчатых поверхностей. Аналогично, если зафиксируем β, то в общем случае из (10) определится два значения α. Так как соотношением $\omega_3^1 = \beta\omega_3^2$ в паре комплексов выделяется пара неголономных конгруэнций, первая конгруэнция которой является цилиндрической, то приходим к такому результату: в любой паре неголономных конгруэнций, первая конгруэнция которой цилиндрическая, существует в общем случае не более двух пар наложимых нецилиндроидальных линейчатых поверхностей.

Зафиксируем какую-нибудь точку (8) на луче комплекса (I_1). Поставим задачу выяснить, может ли любая линейчатая поверхность, имеющая выбранную точку своей центральной точкой, входить в центроаффинно-наложимую пару линейчатых поверхностей. Это возможно лишь тогда, когда (10) есть тождество относительно β, т. е. если

$$\begin{gathered} a_3 = b_3 = 0, \\ b_2 b_4 = 0, \\ m_2 c_3 - b_4 c_2 - b_2 c_4 = 0, \\ c_3 - a_4 b_2 - a_2 b_4 = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Такую пару комплексов для краткости будем называть парой N. Замыкание уравнения $\omega_2^3 = c_3 \omega_3^2$ приводит к условию

$$a_4 b_2 - a_2 b_4 - c_3 = 0. \tag{12}$$

Последнее из соотношений (11) и (12) дает

$$a_2 b_4 = 0.$$

Если $a_2 = b_2 = 0$, то из (12) следует $c_3 = 0$, что приводит к вырождению комплекса (I_2) в плоскость. Исключая этот случай, т. е. полагая $c_3 \neq 0$, имеем $b_4 = 0$. Таким образом, исследуемая пара комплексов характеризуется соотношениями:

$$\begin{gathered} a_3 = b_3 = b_4 = 0, \\ m_2 = \frac{b_2 c_4}{c_3} = \frac{c_4}{a_4}, \\ c_3 = a_4 b_2. \end{gathered} \tag{13}$$

Можно показать обычным образом, что система (5) при условиях (13) имеет решение с произволом в одну функцию трех аргументов. При этом на функции a_1, b_1, c_1 никаких ограничений не возникает. Это значит, что любой комплекс (I_1) можно включить в пару рассматриваемого типа. Пусть комплекс (I_1) задан. Тогда главные формы луча комплекса (I_2) будут определяться из системы

$$\begin{gathered} \omega_2^1 = a_2 \omega_1^2 + \frac{c_3}{a_4} \omega_3^1 + c_2 \omega_3^2, \\ \omega_2^3 = c_3 \omega_3^2, \\ \omega_1^3 = a_4 \omega_1^2 + c_4 \omega_3^2, \\ d \ln m = m_1 \omega_1^2 + \frac{c_4}{a_4} \omega_3^1 + m_3 \omega_3^2, \end{gathered} \tag{14}$$

имеющей решение с тремя произвольными функциями двух аргументов. Поэтому к любому комплексу (I_1) можно с произволом в три функции двух аргументов присоединить комплекс (I_2) так, чтобы получающаяся при этом пара комплексов удовлетворяла условиям (13).

Из уравнения (6) видим, что при условии (13) совокупность всех пар наложимых линейчатых поверхностей удовлетворяет уравнению

$$\omega_3^2 \left[(c_3 m_3 - c_1 c_4)(\omega_3^2)^2 + (m_1 c_3 - a_4 c_2 - a_2 c_4)\, \omega_1^2 \omega_3^2 - a_2 a_4 (\omega_1^2)^2 \right] = 0.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае имеется три пары наложимых неголономных конгруэнций, причем первая конгруэнция в этих парах уницентральна, а так как при выполнении (13) из условия $[\omega_1^2, \omega_3^3] = 0$ следует $[\omega_1^3, \omega_2^3] = 0$, то и вторые неголономные конгруэнции этих пар также уницентральны, причем одна из этих пар состоит из цилиндроидальных линейчатых поверхностей, т. е. обе конгруэнции ее имеют несобственный уницентр, две же другие пары в общем случае состоят из уницентральных конгруэнций с собственным уницентром. Таким образом, если линейчатые поверхности пары (7) наложимы при любом β, то функция α определяется двумя способами. Так как при этом получается, что цилиндроидальные линейчатые поверхности пары комплексов соответствуют, то пары, состоящие из цилиндроидальных линейчатых поверхностей также следует причислить к центроаффинно-наложимым. Итак, на каждом из лучей пары комплексов существует три точки (две из них собственные, а одна несобственная) такие, что любая линейчатая поверхность, имеющая центральную точку в одной из этих трех точек, входит в пару центроаффинно-наложимых линейчатых поверхностей.

Пусть дана пара комплексов, соответствующие лучи которого

$$R = A_1 + vA_3, \tag{15_1}$$

$$R = A_1 + vA_2, \tag{15_2}$$

пересекаются, и при этом имеет место

$$a_3 = b_3 = 0, \tag{16_1}$$

$$b_4 = 0. \tag{16_2}$$

Как следствие из (16_1), (16_2) и уравнений структуры получаем

$$c_3 = a_4 b_2.$$

Условие (16_1) геометрически означает, что любой цилиндроидальной линейчатой поверхности комплекса (15_1) в комплексе (15_2) соответствует тавже цилиндроидальная линейчатая поверхность. Так как $D\omega_1^3 = b_4 [\omega_1^2, \omega_3^1, \omega_3^2]$ и $D\omega_1^2 = b_4 [\omega_1^2, \omega_3^1, \omega_3^2]$, то при $b_4 = 0$ комплекс расслаивается на голономные конгруэнции $\omega_1^2 = 0$, т. е. на уницентральные конгруэнции с уницентром в A_1, а комплекс (15_2) расслаивается также на уницентральные голономные конгруэнции $\omega_1^3 = 0$ с уницентром в этой же точке.

Непосредственно из последнего соотношения в (14) видим, что если дана пара комплексов (15) и выполнены условия (16), то с произволом в одну функцию двух аргументов можно подобрать такую функцию m (т. е. центроаффинное расстояние между соответствующими лучами), чтобы пара комплексов

$$R = A_1 + vA_3,$$
$$R = mA_1 + wA_2$$

была парой N.

Сформулируем полученные результаты.

В паре N комплексов и только в ней на каждом луче каждого из комплексов существует три точки такие, что любая линейчатая поверхность, имеющая центральной одну из этих точек, входит в пару центроаффинно-наложимых линейчатых поверхностей.

Чтобы пара комплексов

$$R = A_1 + vA_3,$$
$$R = mA_1 + wA_2, \tag{*}$$

каждый из которых нецилиндроидальный, была парой N, необходимо, чтобы в паре комплексов

$$R = A_1 + vA_3,$$
$$R = A_1 + wA_2,$$

1) цилиндроидальные линейчатые поверхности соответствовали, 2) каждый из комплексов пары расслаивался на ∞^1 уницентральных конгруэнций с уницентром в A_1. Если условия 1) и 2) выполнены, то функцию m можно определить с одной произвольной функцией двух аргументов, так что пара (*) будет парой N.

Любой комплекс можно включить в пару N, причем если один из комплексов задан, то второй определяется с тремя произвольными функциями двух аргументов.

Пусть пара комплексов (1) эквидистантна [3], т. е. $m = \text{const}$. Тогда из (13) получаем $c_4 = 0$, и пара будет характеризоваться системой

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= a_1 \omega_1^2 + b_1 \omega_3^1 + c_1 \omega_3^2, \\ \omega_2^3 &= c_3 \omega_3^2, \\ \omega_1^3 &= a_4 \omega_1^2, \\ \omega_2^1 &= a_2 \omega_1^2 + \frac{c_3}{a_4} \omega_3^1 + c_2 \omega_3^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Зададим комплекс (1_1). Тогда главные формы комплекса (1_2) определяются из системы

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= c_3 \omega_3^2, \\ \omega_1^3 &= a_4 \omega_1^2, \\ \omega_2^1 &= a_2 \omega_1^2 + \frac{c_3}{a_4} \omega_3^1 + c_2 \omega_3^2. \end{aligned} \tag{18}$$

При первом продолжении ее получаем конечное соотношение

$$a_4^2 - c_3 = 0. \tag{19}$$

С учетом (19) система (18) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} da_4 &= a_4 (\omega_2^2 - \omega_3^3) + \mu_2 \omega_1^2, \\ \omega_2^1 &= a_2 \omega_1^2 + a_4 \omega_3^1 - 2\mu_2 \omega_3^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Замыкание ее имеет вид

$$[d\mu_2 + \mu_2 (\omega_1^1 - \omega_2^2) - \mu_2 (\omega_2^2 - \omega_3^3),\ \omega_1^2] = 0,$$
$$[da_2 + 2a_2 (\omega_1^1 - \omega_2^2) + \mu_2 \omega_3^1,\ \omega_1^2] -$$
$$- [d\mu_2 - \mu_2 (\omega_2^2 - \omega_3^3) + \mu_2 (\omega_1^1 - \omega_2^2),\ \omega_3^2] = 0.$$

Отсюда следует, что система (18) имеет решение с двумя произвольными функциями одного аргумента. Таким образом, мы доказали, что к любому комплексу с произволом в две функции одного аргумента можно присоединить другой комплекс так, чтобы полученная пара была эквидистантной парой N.

Эквидистантная пара N комплексов геометрически характеризуется следующими свойствами: точка A_1 описывает поверхность, вырождающуюся в конус с вершиной в центре пространства и цилиндроидальные линейчатые поверхности в комплексах пары соответствуют.

Заметим, что если выполнены эти условия, то неголономные конгруэнции в парах наложимых конгруэнций будут уницентральными и в любой паре

$$R = A_1 + vA_3,$$
$$R = mA_1 + wA_2$$

комплексов, если

$$d \ln m = m_1 \omega_1^2 + m_3 \omega_3^2. \qquad (21$$

В этом случае функцию m можно выбрать с произволом в одну функцию двух аргументов. В общем случае, как мы видели,

$$d \ln m = m_1 \omega_1^2 + m_2 \omega_3^1 + m_3 \omega_3^2.$$

Условиями

$$m_1 \omega_1^2 + m_2 \omega_3^1 + m_3 \omega_3^2 = 0,$$
$$P\omega_1^2 + Q\omega_3^1 + R\omega_3^2 = 0 \qquad (22)$$

в паре комплексов выделяются так называемые эквидистантные пары линейчатых поверхностей, т. е. линейчатые поверхности, центроаффинное расстояние между соответствующими лучами которых постоянно. Если $m_2 = 0$, то все первые линейчатые поверхности этих пар имеют общую центральную точку. Мы доказали, что если пара комплексов

$$R = A_1 + vA_3,$$
$$R = mA_1 + wA_2$$

есть пара N, то пара

$$R = A_1 + vA_3,$$
$$R = mA_1 + wA_2$$

также является парой N, если все линейчатые поверхности пары (22) как в первом, так и во втором комплексе имеют общую центральную точку.

При выполнении условий (17) кубическая форма (6) принимает вид

$$\omega_3^2 \omega_1^2 (a_2 \omega_1^2 + c_2 \omega_3^2) = 0.$$

Отсюда видим, что в эквидистантной паре N комплексов любая линейчатая поверхность с центральной точки в A_1 первого комплекса наложима на линейчатую поверхность с центральной точкой в $mA_1 (m = \mathrm{const})$ второго комплекса, или, другими словами, уницентральные конгруэнции с уницентрами в A_1 и mA_1 входят в состав наложимых. В состав центроаффинно-наложимых входит также и пара линейчатых поверхностей $\omega_2^1 \omega = {}_3^1 = 0$. Это единственная пара линейчатых поверхностей, асимптотические плоскости которых параллельны.

Если потребовать еще дополнительно $c_2 = 0$, то форма (6) принимает вид $\omega_3^2 (\omega_1^2)^2 = 0$, т. е. наложимые пары линейчатых поверхностей составляют лишь пары цилиндроидальных линейчатых поверхностей и пары с центральными точками в A_1 и mA_1. Условие $c_2 = 0$ влечет за собой $\mu_2 = 0$, а в этом случае система (20), а потому и (18) имеет решение с одной произвольной функцией одного аргумента, т. е. к любому комплексу (1_1) второй комплекс можно присоединить с произволом в одну функцию одного аргумента так, чтобы в полученной паре форма (7) приняла вид $\omega_3^2 (\omega_1^2)^2 = 0$.

Потребуем, чтобы линейчатые поверхности пары (7) были центроаффинно-наложимы при любом α. Для краткости пару комплексов в этом случае будем называть парой M. Уравнение (10) должно быть тождеством относительно α, т. е. должны выполняться условия:

$$a_3 = b_3 = 0,$$

$$a_2 b_4 = 0,$$
$$m_1 c_3 - a_4 c_2 - a_2 c_4 = 0, \tag{23}$$
$$c_3 - a_4 b_2 - a_2 b_4 = 0.$$

Внешнее дифференцирование уравнения $\omega_2^3 = c_3\, \omega_3^2$ приводит к $a_2 b_4 = 0$. В случае $a_4 = b_4 = 0$ приходим к вырождению комплекса (I_2). Будем считать, что $a_4 b_4 c_3 \neq 0$. Тогда $a_2 = 0$ и пара N комплексов характеризуется системой

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1 = a_1\, \omega_1^2 + b_1\, \omega_3^1 + c_1\, \omega_3^2,\\
&\omega_1^3 = \frac{c_3}{b_2}\, \omega_1^2 + c_4\, \omega_3^2 + b_4\, \omega_3^1,\\
&\omega_2^1 = b_2\, \omega_3^1 + c_2\, \omega_3^2,\\
&\omega_2^3 = c_3\, \omega_3^2,\\
&d \ln m = \frac{c_2}{b_2}\, \omega_1^2 + m_2\, \omega_3^1 + m_3\, \omega_3^2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Обычным образом можно показать, что данная система имеет решение с произволом в одну функцию трех аргументов. Если комплекс (I_1) задан, то главные формы луча комплекса (I_2) определяются системой, состоящей из последних уравнений системы (24), с тремя произвольными функциями двух аргументов. Отсюда следует, что к любому комплексу можно присоединить другой комплекс так, чтобы получилась пара комплексов M.

В паре комплексов M имеется три пары наложимых неголономных конгруэнций, состоящих из цилиндрических конгруэнций. В рассматриваемом случае к комплексу (I_1) можно присоединить плоскости $(R, A_1, A_3) = 0$, $(R - A_1, \beta A_1 + A_2, A_3) = 0$, где β определяется двумя способами из (10) при условиях (23), а к комплексу (I_2) — плоскости $(R, A_1, A_2) = 0$, $(R - mA_1, (b_2\beta + c_2)A_1 + c_3 A_3, A_2) = 0$, так что любая линейчатая поверхность, асимптотическая плоскость которой совпадает с одной из написанных плоскостей, входит в пару центроаффинно-наложимых линейчатых поверхностей.

Пара комплексов M обладает следующими свойствами:

1) цилиндроидальные линейчатые поверхности соответствуют (это следует из того, что $a_3 = b_3 = 0$);

2) каждый из комплексов пары расслаивается на ∞^1 цилиндрических конгруэнций, все линейчатые поверхности которых имеют асимптотические плоскости; параллельные векторам A_2 и A_3. Действительно, в нашем случае

$$[D\omega_3^1, \omega_3^1] = 0 \text{ и } [D\omega_2^1, \omega_2^1] = 0.$$

Эти свойства являются необходимыми и достаточными для того, чтобы можно было подобрать функцию m так, чтобы пара комплексов (1) была парой M.

Если $c_2 \neq 0$, то среди пар M не содержатся эквидистантные пары комплексов. При $c_2 = 0$ легко доказать, что любой комплекс можно включить в эквидистантную пару M, причем если один из комплексов задать, то второй определится с произволом в одну функцию двух аргументов. В этом случае пара эквидистантных неголономных конгруэнций состоит из цилиндрических конгруэнций, или, другими словами, в каждом комплексе все линейчатые поверхности, входящие в пары (22), имеют общую асимптотическую плоскость.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Mayer. Congruentele de drepte in geometria centro-affina. Acad. R. P. R. Fil. Jasi, Stud cerc. sti, t. 1, 1950, 67—93.
2. О. Mayer. Géometrié centroaffine differentielle des surfaces. Ann, Sci, de l'univ de Jassy, t. 21, 1—4, 1935, p. 1—77.
3. Л. И. Магазинников, Р. Н. Щербаков. Центроаффинное изгибание комплексов. Anal. stiint. univ. «Al. J. Cuza» din Jasi, t. IX, 2, 1963, 402—422.
4. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометр. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194.
5. Л. И. Магазинников. Об одном центроаффинно-инвариантном классе комплексов. Сибирский математический журнал, т. V, № 4, 1964, 881—886.
6. Н. М. Онищук. Пара, состоящая из конгруэнции и поверхности в центроаффинном пространстве. Геометр. сб. 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 111—123.
7. Л. И. Магазинников. О некоторых центроаффинно-инвариантных классах комплексов прямых. Геометр. сб. 4 (Труды Томского ун-та, 176), 1964, 61—71.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ЦЕНТРОАФФИННО-НАЛОЖИМЫЕ ПАРЫ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕБИСЕКАНТНОЙ ПАРЕ КОМПЛЕКСОВ

Л. И. МАГАЗИННИКОВ

Пусть в центроаффинном пространстве задана пара линейчатых поверхностей с непараллельными соответствующими лучами. Эту пару будем называть небисекантной, если для любых соответствующих лучей не существует прямой, проходящей через центр пространства и пересекающей оба луча. Пара комплексов, все пары соответствующих линейчатых поверхностей которой небисекантны, называется небисекантной. О. Майером в [1] введено понятие центроаффинного расстояния между прямыми. С этой точки зрения небисекантные пары комплексов характеризуются тем, что центроаффинное расстояние между ее соответствующими лучами обращается в бесконечность.

В статье решается задача о возможности центроаффинного изгибания [2] некоторого комплекса в такой комплекс, чтобы образовавшаяся при этом пара была небисекантной.

Небисекантную пару комплексов можно задать в виде

$$R = A_1 + vA_3, \qquad (1_1)$$

$$R = A_3 + vA_2, \qquad (1_2)$$

где A_1, A_2, A_3 — некоторые векторные функции трех скалярных аргументов. Предполагается, что все векторы имеют начало в центре пространства O.

Пару комплексов (1) отнесем к реперу (O, A_1, A_2, A_3). Тогда формы $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \omega_2^1, \omega_2^3$ становятся главными. Положим $[\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_3^2] \neq 0$. Можно показать, что этим исключается случай вырождения комплекса (1_1) в совокупность касательных к конусу с вершиной в центре пространства. Теперь можем записать

$$\begin{aligned}
\omega_2^1 &= a_1 \omega_1^1 + b_1 \omega_1^2 + c_1 \omega_3^2, \\
\omega_2^3 &= a_2 \omega_1^1 + b_2 \omega_1^2 + c_2 \omega_3^2, \\
\omega_3^1 &= a_3 \omega_1^1 + b_3 \omega_1^2 + c_3 \omega_3^2, \\
\omega_3^3 &= a_4 \omega_1^1 + b_4 \omega_1^2 + c_4 \omega_3^2.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Замыкания эгих уравнений имеют вид

$$\begin{gathered}
[da_1 + a_1 a_3 \omega_1^3 + a_1 (\omega_1^1 - \omega_2^2) + a_2 \omega_3^1, \omega_1^1] + \\
+ [db_1 + a_1 b_3 \omega_1^3 - a_1 \omega_2^1 + 2b_1 (\omega_1^1 - \omega_2^2) + (b_2 + c_1) \omega_3^1, \omega_1^2] + \\
+ [dc_1 + (a_1 c_3 + b_1) \omega_1^3 + c_1 (\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1) + c_2 \omega_3^1, \omega_3^2] = 0,
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&[da_2 + (a_2a_3 + a_1)\,\omega_1^3 + a_2(\omega_3^3 - \omega_2^2),\ \omega_1^1] + \\
&+ [db_2 + (a_2b_3 + b_1)\,\omega_1^3 - a_2\,\omega_2^1 + \\
&+ b_2(\omega_1^1 - 2\omega_2^2 + \omega_3^3) + c_2\,\omega_3^1,\ \omega_1^2] + \\
&+ [dc_2 + (a_2c_3 + b_2 + c_1)\,\omega_1^3 + 2c_2(\omega_3^3 - \omega_2^2),\ \omega_3^2] = 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&[da_3 + a_3^2\,\omega_1^3 + (a_4 - 1)\,\omega_3^1,\ \omega_1^1] + [db_3 + (b_4 + c_2)\,\omega_3^1 + \\
&+ a_3b_3\,\omega_1^3 - a_3\,\omega_2^1 + b_3(\omega_1^1 - \omega_2^2),\ \omega_1^2] + \\
&+ [dc_3 + c_4\,\omega_3^1 + \omega_2^1 + (a_3c_3 + b_3)\,\omega_1^3 + \\
&+ c_3(\omega_3^3 - \omega_2^2),\ \omega_3^2] = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[da_4 + (a_3 + a_4a_3)\,\omega_1^3,\ \omega_1^1] + [db_4 + a_4b_3\,\omega_1^3 - \\
&- a_4\,\omega_2^1 + b_4(\omega_1^1 - \omega_2^2) + c_4\,\omega_3^1,\ \omega_1^2] + \\
&+ [dc_4 + (a_4c_3 + b_4 + c_3)\,\omega_1^3 + c_4(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \\
&+ \omega_2^3,\ \omega_3^2] = 0.
\end{aligned}
$$

Из (3) видим, что в общем случае система (2) определяет небисекантную пару комплексов с произволом в четыре функции трех аргументов.

Зададим в паре комплексов произвольную пару линейчатых поверхностей. Как обычно, линейчатую поверхность комплекса (l_1) будем называть первой. Центроаффинные длины дуг [1] каждой из этих линейчатых поверхностей можно найти по формулам:

$$
ds_1 = \frac{\omega_1^1\,\omega_3^2 - \omega_3^1\,\omega_1^2}{\omega_3^2},
\qquad
ds_2 = \frac{\omega_2^1\,\omega_3^3 - \omega_2^3\,\omega_3^1}{\omega_2^1}. \tag{4}
$$

Линейчатые поверхности названы О. Майером центроаффинно-наложимыми, если вдоль соответствующих лучей

$$ds_1 = ds_2.$$

Отсюда находим, что пару центроаффинно-наложимых линейчатых поверхностей в паре комплексов можно задать уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&(c_3c_2 - c_1c_4)(\omega_3^2)^3 - b_3b_1(\omega_1^2)^3 + \\
&+ (a_1b_3 - a_3b_1)\,\omega_1^1(\omega_1^2)^2 + (c_1 - c_1a_4 - \\
&- c_4a_1 + a_2c_3 + a_3c_2)\,\omega_1^1(\omega_3^2)^2 - \\
&- a_1a_3(\omega_1^1)^2\,\omega_1^2 + (a_1 - a_1a_4 + a_3a_2)(\omega_1^1)^2\,\omega_3^2 + \\
&+ (b_3b_2 - b_1b_4 - b_3c_1 - b_1c_3)(\omega_1^2)^2\,\omega_3^2 + \\
&+ (b_3c_2 + b_2c_3 - b_4c_1 - b_1c_4 - c_1c_3)(\omega_3^2)^2\,\omega_1^2 + \\
&+ (b_1 - c_3a_1 - c_1a_3 - a_4b_1 - a_1b_4 + a_2b_3 + \\
&+ b_2a_3)\,\omega_1^1\,\omega_1^2\,\omega_3^2 = 0,
\end{aligned} \tag{5_1}
$$

$$\alpha\omega_1^1 + \beta\omega_1^2 + \gamma\omega_3^2 = 0, \tag{5_2}$$

где α, β, γ — произвольные функции.

Потребуем, чтобы любая пара линейчатых поверхностей в паре комплексов (1) была центроаффинно-наложимой, т. е. чтобы уравнение (5_1) обратилось в тождество. В этом случае говорят, что комплексы (l_1) и и (l_2) центроаффинно-наложимы или что комплекс (l_1) допускает центроаффинное изгибание в комплекс (l_2) [2]. Считая, что ни один из комплексов пары не вырождается в специальный, получим

$$\begin{gathered} a_1 = 0,\ b_1 = 0, \\ a_2 = 0,\ a_3 = 0, \\ c_1 = b_2,\ a_4 = 1, \\ c_2 b_3 = c_1 b_4, \\ c_2 c_3 = c_1 c_4, \\ c_1 b_3 \neq 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Учитывая условия (6), уравнениям (2) можно придать вид

$$\begin{aligned} &\omega_3^1 = b_3\,\omega_1^2 + c_3\,\omega_3^2, \\ &\omega_2^1 = c_1\,\omega_3^2, \\ &\omega_3^3 - \omega_1^1 = \frac{c_2}{c_1}\,\omega_3^1, \\ &\omega_2^3 = c_1\,\omega_1^2 + c_2\,\omega_3^2, \\ &\qquad c_1 b_3 \neq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) не в инволюции. Продолжая ее, из (3) получаем

$$\begin{aligned} &dc_1 + c_1(\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1) + c_2\,\omega_3^1 = \alpha\omega_3^2, \\ &dc_2 + 2c_1\,\omega_1^3 + 2c_2(\omega_3^3 - \omega_2^2) = \\ &= \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_3^2, \\ &\omega_3^1 = b_3\,\omega_1^2 + c_3\,\omega_3^2, \\ &b_3(\beta c_1 + \alpha c_2) - c_3\alpha c_1 + 2c_1^3 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Замыкая последнюю систему, имеем

$$\begin{gathered} b_3[2\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_3^2 - 2c_1\,\omega_1^3,\ \omega_1^2] + [d\alpha + \\ + \alpha(2\omega_3^3 - 3\omega_2^2 + \omega_1^1) + c_3(2\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_3^2 - \\ - 2c_1\,\omega_1^3),\ \omega_3^2] = 0, \\ [d\alpha + \alpha(2\omega_3^3 - 3\omega_2^2 + \omega_1^1) + c_3\beta\omega_3^2 + \\ + 2\alpha c_3\,\omega_1^2,\ \omega_1^2] + [d\beta + 2\beta(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \\ + 2\alpha\omega_1^3 - 2c_1c_2\,\omega_1^2,\ \omega_3^2] = 0, \\ \left[db_3 + \left(\frac{c_2 b_3}{c_1} + c_3\right)\omega_3^1 + b_3(\omega_1^1 - \omega_2^2),\ \omega_1^2\right] + \\ + \left[dc_3 + \frac{c_2 c_3}{c_1}\,\omega_3^1 + b_3\,\omega_1^3 + c_3(\omega_3^3 - \omega_2^2),\ \omega_3^2\right] = 0, \\ b_3(\beta c_1 + \alpha c_2) - c_3\alpha c_1 + 2c_1^3 = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда следует, что система (8) в инволюции и имеет решение с произволом в одну функцию двух аргументов.

Нами доказано, что пара центроаффинно-наложимых небисекантных комплексов существует и определяется с одной произвольной функцией двух аргументов.

Из условия

$$[D\omega_3^2, \omega_3^2] = a_3 [\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_3^2], \quad [\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_3^2] \neq 0$$

следует, что при $a_3 = 0$ комплекс (1_1) расслаивается на ∞^1 голономных конгруэнций $\omega_3^2 = 0$, состоящая только из цилиндроидальных линейчатых поверхностей [4]. Такой комплекс изучался в работе [3] и впоследствии был назван цилиндроидальным. Таким образом, комплекс, допускающий центроаффинное изгибание в небисекантный с ним комплекс, является цилиндроидальным. Так как в паре центроаффинно-наложимых комплексов цилиндроидальные линейчатые поверхности соответствуют $(a_1 = b_1 = 0)$, то и второй комплекс в этой паре цилиндроидальный.

Как показано в работе [3], цилиндроидальный комплекс определяется с одной произвольной функцией двух аргументов, т. е. с таким же произволом, как и пара центроаффинно-наложимых небисекантных комплексов. Поэтому возникает вопрос; любой ли цилиндроидальный комплекс допускает центроаффинное изгибание?

Пусть задан произвольный цилиндроидальный комплекс

$$R = A_1 + vA_3.$$

В деривационных формулах некоторого ненормированного канонического репера (O, A_1, A_2, A_3) этого комплекса формы ω_i^k связаны соотношениями [3]:

$$\begin{aligned}
\omega_3^1 &= b\omega_1^2, \\
\omega_1^3 &= p_1 \omega_3^2, \\
\omega_2^3 &= p_4 \omega_1^2 + p_5 \omega_3^2, \\
\omega_2^1 &= p_2 \omega_3^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

Будем искать комплекс небисекантный с данным и центроаффинно-наложимый на него в виде

$$R = A_3 + v(A_1 + A_2 + A_3). \tag{11}$$

Требуя, чтобы комплекс (11) и данный были центроаффинно-наложимыми, получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1 - \omega_2^2 = c_1 \omega_3^2 - \omega_2^1 - \omega_1^3 + \omega_1^2 + \omega_3^2, \\
&\omega_3^3 - \omega_1^1 = \frac{c_2}{c_1} (\omega_3^1 - \omega_3^2) - \omega_1^2 + \omega_3^2,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&p_1 = c_2 - p_5 - c_1 - p_2 + \frac{c_2}{c_1} - 1, \\
&p_4 = c_1 + b - \frac{c_2}{c_1} b.
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, данный комплекс определяется системой уравнений (10) и (12). Замыкания уравнений (12) в силу соотношений (13) оказываются следствиями замыканий уравнений (10), т. е. любой цилиндроидальный комплекс допускает центроаффинное изгибание в небисекантный с ним также цилиндроидальный комплекс.

Комплексы в паре (1) неравноправны. На каждом луче комплекса (1_2) задана точка A_3. Поэтому (1_2) можно рассматривать как векторное поле, присоединенное к комплексу ([5], стр. 41). Точка A_3 является центром этого поля. Пусть задано произвольное векторное поле, присоединенное к комплексу. Направив вектор A_3 в центр поля, а вектор A_2

параллельно лучу несущего комплекса, такое поле всегда можно задать в виде

$$R = A_3 + vA_2. \tag{14}$$

Для поля (14) формы ω_3^1, ω_3^2, ω_3^3, ω_2^1, ω_2^3 являются главными. Выберем за независимые формы ω_3^1, ω_3^2, ω_3^3. Тогда

$$\begin{gathered}\omega_2^1 = p_1\omega_3^1 + c_1\omega_3^2 + q_1\omega_3^3,\\ \omega_2^3 = p_2\omega_3^1 + p_3\omega_3^2 + q_2\omega_3^3,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&[dp_1 + p_1(2\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - \omega_2^3 - c_1\omega_1^2 -\\ &- q_1\omega_1^3, \omega_3^1] + [dc_1 + c_1(\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1) -\\ &- p_1\omega_2^1 - q_1\omega_2^3, \omega_3^2] +\\ &+ [dq_1 + q_1(\omega_2^2 - \omega_1^1), \omega_3^3] = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&[dp_2 + p_2(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2) - p_3\omega_1^2 +\\ &+ (p_1 - q_2)\omega_1^3, \omega_3^1] + [dp_3 +\\ &+ 2p_3(\omega_3^3 - \omega_2^2) - p_2\omega_2^1 - q_2\omega_2^3 +\\ &+ c_1\omega_1^3, \omega_3^2] + [dq_2 - q_2\omega_2^2 +\\ &+ q_1\omega_1^3, \omega_3^3] = 0.\end{aligned}$$

Из первого соотношения в (16) видим, что функция q_1 является относительным инвариантом.

Уравнением $\omega_3^1 = \omega_2^1 = 0$ задается совокупность лучей комплекса (14), лежащих в плоскости

$$(\mathrm{R}, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = 0, \tag{17}$$

проходящей через центр пространства. Центр поля (точка A_3) описывает в плоскости (17) кривую, касательная к которой параллельна вектору $\frac{q_1}{c_1} A_2 + A_3$. Только при $q_1 = 0$ эта кривая вырождается в прямую линию. В этом случае поле определяется с одной произвольной функцией трех аргументов. В векторном поле $q_1 = 0$ фукция q_2 также является относительным инвариантом. Так как $[D\omega_2^1, \omega_2^1] = c_1 q_2 [\omega_3^3, \omega_3^1, \omega_3^2]$, то при $q_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ комплекс (14) — цилиндроидальный, невырождающийся в совокупность касательных к конусу с вершиной в центре пространства. Система (15) при $q_1 = q_2 = 0$ имеет решение с двумя произвольными функциями двух аргументов.

Путем фиксации одного из вторичных параметров условием $\pi_1^2 = 0$ можем получить $p_1 = 0$. Так как $\delta(R, A_1, A_3) = \pi_1^2(R, A_2, A_3)$, то плоскость $(R, A_1, A_3) = 0$ при этом определяется инвариантно. В поле $q_1 = 0$ ей можно дать следующую геометрическую характеристику. Любая неголономная конгруэнция несущего комплекса поля (14) с фокусом в точке A_3 задается уравнением

$$\omega_3^3 = \alpha\omega_3^1. \tag{18}$$

Центр поля на цилиндроидальной [4] линейчатой поверхности конгруэнции (18) описывает кривую, касательная к которой имеет уравнение

$$R = A_3 + v(A_1 + \alpha A_3)$$

и вместе с центром пространства определяет плоскость $(R, A_1, A_3) = 0$. Теперь нами геометрически охарактеризован комплекс

$$R = \lambda A_1 + vA_3, \tag{19}$$

где A_1 — любой вектор, параллельный плоскости $(R, A_1, A_3) = 0$. Пара комплексов (14) и (19) характеризуется тем, что оба эти комплекса цилиндроидальные, а их цилиндроидальные линейчатые поверхности соответствуют.

Разрешая по лемме Картана первое уравнение в (16), получаем

$$\omega_1^2 = p_4 \omega_3^1 + p_5 \omega_3^2. \tag{20}$$

Вводя обозначения

$$\frac{1}{p_4} = b_3, \quad -\frac{p_5}{p_4} = c_3,$$

$$b_3 p_2 = b_2, \quad p_2 c_3 + p_3 = c_2,$$

систему, состоящую из уравнений (15) и (20), можем привести к виду

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= c_1 \omega_3^2, \\ \omega_2^3 &= b_2 \omega_1^2 + c_2 \omega_3^2, \\ \omega_3^1 &= b_3 \omega_1^2 + c_3 \omega_3^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Мы положили $p_4 \neq 0$, исключив из рассмотрения те комплексы (19), которые вырождаются в совокупность касательных к конусу с вершиной в центре пространства.

Величина $c_1 - b_2$ также оказывается относительным инвариантом векторного поля. Точка

$$R_1 = \lambda\left(A_1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^3} A_3\right)$$

является центральной для любой линейчатой поверхности комплекса (19). В точке

$$R_2 = \lambda\left(A_1 + \frac{\omega_2^3}{\omega_2^1} A_3\right)$$

луч комплекса (19) пересекает плоскость, проходящая через центр пространства параллельно асимптотической плоскости произвольной линейчатой поверхности комплекса (14). Векторное поле, присоединенное к комплексу, удовлетворяющее условию $c_1 - b_2 = 0$, характеризуется тем свойством, что середина между точками R_1 и R_2 совпадает с одной и той же точкой, не зависящей от выбора линейчатой поверхности ни в комплексе (14), ни в комплексе (19).

Так как система (21) при $b_2 = c_1$ является частью системы (7), то комплексы, центроаффинно-наложимые на комплекс (1_1), содержатся среди комплексов вида (19). Требуя, чтобы комплексы (19) и (14) были центроафинно-наложимыми, мы, кроме уравнений (21), где нужно положить $b_2 = c_1$, получим еще уравнение

$$d \ln \lambda + \omega_1^1 - \omega_3^3 = -\frac{c_2}{c_1} \omega_3^1, \tag{22}$$

определяющее функцию λ с параметрическим произволом и порождающее дополнительные ограничения на поле (14). Система

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= c_1 \omega_3^2, \\ \omega_2^3 &= c_1 \omega_1^2 + c_2 \omega_3^2, \\ \omega_3^1 &= b_3 \omega_1^2 + c_3 \omega_3^2, \\ d \ln \lambda + \omega_1^1 - \omega_3^3 &= -\frac{c_2}{c_1} \omega_3^1 \end{aligned} \tag{23}$$

аналогична системе (7), совместность которой нами уже проверялась.

Комплексам (19), у которых функция λ удовлетворяет уравнению (22), можно дать дополнительную геометрическую характеристику. В точке

$$R_3 = \lambda\left(A_1 - \frac{d\ln\lambda + \omega_1^1}{\omega_3^1} A_3\right)$$

вектор A_2 касается произвольной линейчатой поверхности комплекса (19). В точке

$$R_4 = \lambda\left(A_1 + \frac{\omega_3^3}{\omega_3^1} A_3\right)$$

луч этого же комплекса пересекает плоскость, проходящая через центр пространства параллельно касательной плоскости к произвольной линейчатой поверхности в точке A_3 комплекса (14). Только при условии (22) середина между точками R_3 и R_4 не зависит от выбора линейчатых поверхностей в комплексах (14) и (19).

Таким образом, полностью геометрически охарактеризовано векторное поле, несущий комплекс которого допускает центроаффинное изгибание в небисекантный с ним комплекс.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Mayer. Geometrie centroaffine differentielle des surfaces. Ann. Sci, de l'univ, de Jassy, 21, 1—4, 1935, 1—77.

2. Л. И. Магазинников, Р. Н. Щербаков. Центроаффинное изгибание комплексов. Ann. stiint. univ. «Al. J. Cuza», Jasi, IX, f. 2, 1963, 409—422.

3. Л. И. Магазинников. Об одном центроаффинно-инвариантном классе комплексов. Сибирский математический журнал, т. V, № 1, 1964, 881—886.

4. Н. М. Онищук. Пара, состоящая из конгруэнций и поверхности в центроаффинном пространстве. Геом. сб., 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 111—123.

5. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во Киевского ун-та, 1963.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О ЦЕНТРОАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н. М. ОНИЩУК, О. И. ПРОТОПОПОВА

Трехпараметрическое семейство (комплекс) центральных кривых второго порядка обозначим $\mathfrak{m}_3$. В статье изучаются центроаффинные свойства распределений Δ_2 [1] на $\mathfrak{m}_3$, дается классификация распределений Δ_2, изучается один частный класс многообразий $\mathfrak{m}_3$.

Пусть O — центр пространства, C — центр коники, H — плоскость коники, $\{O;\ \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ — сопровождающий репер комплекса $\mathfrak{m}_3$, где $\boldsymbol{e}_0 = \overline{OC}$, векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ параллельны плоскости H и выбраны так, что уравнение коники имеет вид

$$(x^1)^2 + \varepsilon (x^2)^2 = 1,$$
$$x^0 = 1,$$
$$(\varepsilon = \pm 1).$$

Деривационные формулы репера суть

$$d\boldsymbol{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2),$$

где ω_α^β — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta].$$

Формы $\omega_0^0 \equiv \omega$, $\omega_i^0 \equiv \omega_i$, $\omega_0^i \equiv \omega^i$, $\omega_2^1 + \varepsilon\omega_1^2$, ω_1^1, ω_2^2 — главные формы $(i, j, k = 1, 2)$. Оставляя в стороне случай, когда точка C описывает многообразие меньше трех измерений, считаем формы ω, ω^i независимыми. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \omega_i &= b_{ij}\,\omega^j + c_i\,\omega, \\ \omega_1^1 &= b_{1j}^1\,\omega^j + c_1^1\,\omega, \\ \omega_2^2 &= b_{2j}^2\,\omega^j + c_2^2\,\omega, \\ \omega_2^1 + \varepsilon\omega_1^2 &= b_{2j}^1\,\omega^j + c_2^1\,\omega. \end{aligned} \tag{2}$$

§ 1. Распределения Δ_2 на $\mathfrak{m}_3$

Произвольное двумерное распределение Δ_2 на $\mathfrak{m}_3$ можно задать уравнением

$$\alpha_0\,\omega + \alpha_i\,\omega^i = 0, \tag{3}$$

где форма Пфаффа $\alpha_0\omega + \alpha_i\omega^i$ является относительно инвариантной, что возможно лишь при выполнении условий:

$$\delta\alpha_0 = \theta\alpha_0, \quad \delta\alpha_i = \pi_i^j\,\alpha_j + \theta\alpha_0, \tag{4}$$

где δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам.

С другой стороны условия (4) являются условиями инвариантности плоскости

$$\alpha_0 (x^0 - 1) + \alpha_i\,x^i = 0. \tag{5}$$

Таким образом, задание распределения (3) на $\mathfrak{m}_3$ можно геометрически интерпретировать как задание поля плоскостей H_0, проходящих через точки C. При $\alpha_0=0$ плоскость H_0 проходит через центр пространства. Такое распределение назовем специальным. Докажем, что многообразие $\mathfrak{m}_3$ с заданным специальным распределением Δ_2 существует. Подставляя в (4) значение $\alpha_0=0$ и исключая θ, получаем

$$\alpha_2(\delta\alpha_1-\pi_1^2\alpha_2)-\alpha_1(\delta\alpha_2+\varepsilon\pi_1^2\alpha_1)=0.$$

Тогда для поля геометрического объекта $\alpha_1:\alpha_2$ имеем

$$\alpha_2\,d\alpha_1-\alpha_1\,d\alpha_2-\omega_1^2\left((\alpha_2)^2-\varepsilon(\alpha_1)^2\right)=\mu_0\omega+\mu_i\omega^i. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2), (6) и применяя к ней критерий Картана, заключаем, что многообразие $\mathfrak{m}_2$ с заданным на нем специальным распределением Δ_2 существует и определится с произволом шести функций трех аргументов.

Для всякого неспециального распределения $\Delta_2(\alpha_0\neq 0)$ уравнение (3) и условие (4) приводятся к виду

$$\omega=\beta_i\,\omega^i \tag{7}$$

и

$$\delta\beta_i=\pi_i^j\beta_j,$$

где $\beta_i=-\alpha_i:\alpha_0$ и компоненты геометрического объекта β_i удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} d\beta_1-\omega_1^2\beta_2&=\nu_{1j}\,\omega^j+\nu_1\omega,\\ d\beta_2+\varepsilon\omega_1^2\beta_1&=\nu_{2j}\,\omega^j+\nu_2\omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Многообразие $\mathfrak{m}_3$ с заданным неспециальным распределением Δ_2 определяется с произволом семи функций трех аргументов.

Всякое интегральное многообразие $\mathfrak{m}_1\subset\mathfrak{m}_3$ системы уравнений (3) назовем допустимым многообразием заданного распределения (ср. [2]). Геометрически всякое допустимое $\mathfrak{m}_1$ характеризуется тем, что линия (C), описываемая центром C коники, на нем касается плоскости H_0.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_1'$ — два допустимых многообразия распределения Δ_2, а V_1 и V_1' — 1-семейства плоских элементов CH [3], соответствующие многообразиям $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_1'$. Многообразие $\mathfrak{m}_1'$ называется бисопряженным многообразию $\mathfrak{m}_1$, если V_1' сопряжено V_1 и их основные прямые в плоском элементе CH [3] сопряжены относительно коники. Многообразие $\mathfrak{m}_1$, для которого существует бисопряженное ему $\mathfrak{m}_1'$, называется основным многообразием для распределения Δ_2.

Теорема 1. Всякое неспециальное распределение Δ_2 имеет в общем случае два основных многообразия $\mathfrak{m}_1$ (действительных, мнимых или совпадающих).

Доказательство. Допустимое $\mathfrak{m}_1$ неспециального распределения Δ_2 определяется системой уравнений вида

$$\begin{aligned} \omega&=\beta_i\,\omega^i,\\ \lambda^2\omega^1-\lambda^1\omega^2&=0. \end{aligned} \tag{9}$$

Многообразие $\mathfrak{m}_1'$, у которого V_1' сопряжено V_1, определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \omega&=\beta_i\,\omega^i,\\ (b_{ij}+c_i\beta_j)\,\omega^i\lambda^j&=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Основные прямые в плоском элементе CH соответствующих им многообразий V_1 и V_1' имеют уравнения:

$$\lambda^2 x^1 - \lambda^1 x^2 = 0 \tag{11}$$

и

$$(b_{ij} + C_i \beta_j) \lambda^j x^i = 0. \tag{12}$$

С другой стороны, прямая

$$\lambda^1 x^1 + \varepsilon \lambda^2 x^2 = 0 \tag{13}$$

сопряжена прямой (11) относительно коники (1). Прямые (12) и (13) совпадают, а следовательно, многообразие $\mathfrak{m}_1$ является основным тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon (b_{12} + c_1\beta_2)(\lambda^2)^2 + \{\varepsilon (b_{11} + c_1\beta_1) - \\ - (b_{22} + c_2\beta_2)\} \lambda^1\lambda^2 - (b_{21} + c_2\beta_1)(\lambda^1)^2 = 0. \tag{14}$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Если для некоторого Δ_2 нет основных допустимых $\mathfrak{m}_1$, то будем говорить, что оно принадлежит к эллиптическому типу. Если для Δ_2 таких допустимых $\mathfrak{m}_1$ существует два или одно, то будем говорить, что оно принадлежит соответственно к гиперболическому или параболическому типу.

Аналогично теореме 1 доказывается.

Теорема 2. Существует только одно специальное распределение Δ_2 параболического типа, все другие специальные Δ_2 принадлежат к гиперболическому типу.

Специальное распределение Δ_2 параболического типа является инвариантным распределением многообразия $\mathfrak{m}_3$ и определяется уравнением

$$c_2\omega^1 - \varepsilon c_1 \omega^2 = 0. \tag{15}$$

С другой сторны, распределение (15) характеризуется тем, что основная прямая в плоском элементе CH многообразия V_1', соответствующего его бисопряженному допустимому $\mathfrak{m}_1$, параллельна характеристике плоскости H, полученной при смещении по

$$\omega^i = 0.$$

Одномерное же многообразие

$$\omega^i = 0.$$

характеризуется тем, что касательные к линии (C) его проходят через центр пространства.

Теорема 3. Огибающая плоскостей H_0 распределений Δ_2 параболического типа есть конус K второго порядка.

Для доказательства теоремы находим огибающую всех плоскостей (5), коэффициенты α_0, α_i которых удовлетворяют условию

$$\delta \equiv \{\varepsilon b_{11} - b_{22})\alpha_0 - \varepsilon c_1 \alpha_1 + c_2\alpha_2\}^2 - \\ - 4\varepsilon (c_2\alpha_1 - b_{21}\alpha_0)(b_{12}\alpha_0 - c_1\alpha_2) = 0,$$

являющемуся условием параболичности распределения Δ_2. Эта огибающая имеет уравнение

$$(c_2x^1 - \varepsilon c_1 x^2)(x^0 - 1) + b_{21}(x^1)^2 - \\ - (\varepsilon b_{11} - b_{22}) x^1x^2 - \varepsilon b_{12}(x^2)_2 = 0, \tag{16}$$

т. е. является конусом второго порядка с вершиной в точке C, проходящим через центр пространства. Теорема доказана.

Теорема 4. Распределение Δ_2 принадлежит к эллиптическому или гиперболическому, или параболическому типу в зависимости от того, пересекает ли плоскость H_0 конус K в одной точке C или по двум прямым или плоскость H_0 касается конуса K.

Действительно, плоскость (5) пересекает конус (16) лишь в точке C или по двум прямым или касается конуса в зависимости от того, будет ли величина δ меньше нуля, больше нуля или равна нулю. С другой стороны условия $\delta < 0$, $\delta > 0$, $\delta = 0$ являются условиями эллиптичности, гиперболичности или параболичности распределения Δ_2 (см. 14).

Теорема доказана.

Совокупность всех распределений Δ_2, для которых плоскости H_0 образуют пучок, будем называть пучком распределений Δ_2, а ось пучка плоскостей H_0 — осью пучка распределений.

Определение. Пучок распределений Δ_2 назовем эллиптическим, если ось этого пучка лежит внутри конуса K, гиперболическим, если ось пучка лежит вне конуса K, и параболическим, если ось пучка лежит на конусе K.

Из теоремы 4 следует: 1) эллиптический пучок не содержит распределений Δ_2 параболического типа, 2) гиперболический пучок содержит два распределения эллиптического типа, 3) параболический пучок содержит одно распределение параболического типа, 4) все специальные распределения образуют параболический пучок.

Соответствующие вычисления приводят нас к следующей теореме.

Теорема 5. Совокупность всех распределений Δ_2 гиперболического типа, для которых основные прямые в плоском элементе CH, соответствующие основным допустимым $\mathfrak{m}_1$, сопряжены относительно коники, является пучком эллиптического типа, если коника — эллипс, и пучком гиперболического типа, если коника — гипербола.

§ 2. Класс многообразий $\mathfrak{m}_3$ с распадающимся конусом K

Рассмотрим класс многообразий $\mathfrak{m}_3$, для которого конус K распадается на пару плоскостей. Условием распадения конуса K является обращение в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2}c_2 & \frac{1}{2}\varepsilon c_1 \\ -\frac{1}{2}c_2 & -b_{21} & \frac{1}{2}(\varepsilon b_{11}-b_{22}) \\ \frac{1}{2}\varepsilon c_1 & \frac{1}{2}(\varepsilon b_{11}-b_{22}) & \varepsilon b_{22} \end{vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель, получаем, что рассматриваемый класс многообразий $\mathfrak{m}_3$ выделяется условием

$$I \equiv c_1^2\, b_{21} - (b_{11} - \varepsilon b_{22})\, c_1 c_2 - \varepsilon c_2^2\, b_{12} = 0. \qquad (17)$$

Замыкая уравнения (2) и используя (17) получаем, что рассматриваемый класс многобразий существует и определяется с произволом четырех функций трех аргументов.

Теорема 6. При $c_i \neq 0$ только в классе многообразий $I = 0$ существует распределение Δ_2, для которого каждое допустимое $\mathfrak{m}_1$ является основным.

Доказательство. Из уравнения (14) следует, что основные допустимые $\mathfrak{m}_1$ для неспециального распределения Δ_2 не определены лишь тогда, когда

$$\begin{aligned} c_2\beta_1 + b_{21} &= 0, \\ c_1\beta_2 + b_{12} &= 0, \\ \varepsilon(b_{11} + c_1\beta_1) - (b_{22} + c_2\beta_2) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Исключая из этой системы $\beta_i (c_i \neq 0)$, получаем $I = 0$ и

$$\beta_1 = -b_{21} : c_2, \quad \beta_2 = -b_{12} : c_1.$$

Отсюда заключаем, что для класса $I = 0$ $(c_i \neq 0)$ (и только для него) существует неспециальное распределение Δ_2 с неопределенными основными многообразиями, это распределение имеет уравнение

$$\omega = -\frac{b_{21}}{c_2}\omega^1 - \frac{b_{12}}{c_1}\omega^2. \tag{19}$$

Среди специальных распределений Δ_2 не может быть таких, у которых основные подмногообразия не определены. Теорема доказана.

Теорема 7. В классе $I = 0\,(c_i \neq 0)$ одна из плоскостей, на которые распадается конус K, является плоскостью H_0 распределения с неопределенными основными многообразиями, а другая есть плоскость H_0 специального Δ_2 параболического типа.

Доказательство. Используя (7) получаем, что уравнение (16) представляется в виде

$$(c_2x^1 - \varepsilon c_1x^2)\,(c_1c_2\,(x^0 - 1) + c_1b_{21}x^1 + c_2b_{12}x^2) = 0,$$

т. е. конус K распался на плоскости

$$c_2x^1 - \varepsilon c_1x^2 = 0,$$

$$c_1\,c_2\,(x^0 - 1) + c_1b_{21}x^1 + c_2b_{12}x^2 = 0. \tag{20}$$

Первая из этих плоскостей является плоскостью H_0 для специального Δ_2 параболического типа, вторая — для Δ_2, определяемого уравнением (19). Теорема доказана.

Теорема 8. Лишь в классе $I = 0$ плоскость H_0 специального Δ_2 параболического типа проходит через аффинную нормаль трехпараметрического семейства плоских элементов.

Для доказательства теоремы достаточно найти уравнение аффинной нормали и показать, что она принадлежит плоскости (20) лишь при условии (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Номидзу. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., ИЛ, 1960.

2. V. Vagner. On the geometrical interpretation of the curvature vector of a non-holonomic V^2_3 in the three-dimensional Eudidean space. Математический сб., т. 4 (46), в. 2, 1938, 339—356.

3. Н. М. Онищук. Некоторые вопросы центроаффинной дифференциальной геометрии трехпараметрического семейства плоских элементов. «Известия вузов. Математика», № 5, 1973, 63—72.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О ВОЗМОЖНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО БАРОТРОПНОГО ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ЗАДАННЫМ ПОЛЕМ ПУЧКОВ НАПРАВЛЕНИЙ СКОРОСТИ

В. В. СЛУХАЕВ

1. Если задано нестационарное движение сплошной среды, у которого линии тока нестационарны, то в каждой точке M задан пучок (семейство векторов, зависящее от одного параметра) единичных векторов $n = |v|^{-1}v$, где v — вектор скорости. Будем говорить, что n — «вектор направления скорости».

Поле пучков единичных векторов называется нелинейным неголономным C_3^2 [2]. Так как с каждым пучком единичных векторов в точке M ассоциируется конус с вершиной в этой точке (он образован прямыми $r = M + \lambda n$), то геометрия многообразия C_3^2 эквивалентна геометрии «многообразия конусов» [3]. И, наконец, многообразие C_3^2 — это то же самое, что и рассмотренное в [4] «четырехпараметрическое поле направлений».

2. Пучок векторов n в даной точке M будем обозначать символом $C(M)$. Пусть G — область трехмерного евклидова пространства R_3, в которой задано многообразие C_3^2. Ассоциируем с каждой точкой M области G пучок ортонормированных реперов $\{M;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ такой, что

а) начало всех реперов пучка в точке M,

б) пучок векторов e_3 в точке M совпадает с пучком $C(M)$,

в) каждый вектор e_2 репера $\{M;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$ лежит в той касательной плоскости конуса $r = M + \lambda n$, которая проходит через образующую конуса, параллельную вектору e_3 этого репера.

Вектор e_1 при этих условиях определяется как вектор нормали к конусу. Построенный подвижной репер многообразия является каноническим для этого многообразия и был использован в [4]. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$\begin{aligned} dM &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3, \\ de_1 &= \omega_1^2 e_2 - \omega_3^1 e_3, \\ de_2 &= -\omega_1^2 e_1 - \omega^4 e_3, \\ de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega^4 e_3. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= b_1\omega^1 + b_2\omega^2 + b_3\omega^3, \\ \omega_1^2 &= c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + c_3\omega^3 + c_4\omega^4, \\ &[\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4] \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Формы Пфаффа [5] ω^i, ω_i^j удовлетворяют следующим уравнениям структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^h \omega_h^j],$$

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad \omega^4 = \omega_3^2 \tag{3}$$
$$(i, j, h = 1, 2, 3).$$

Система (2) является для многообразия C_3^2 системой основных соотношений [1] в каноническом репере.

Определение. Линию, которая в каждой точке M имеет касательную, параллельную одному из векторов пучка C (M), будем называть векторной линией многообразия C_3^2. Все векторные линии являются интегральными кривыми системы уравнений Пфаффа

$$\omega^1 = \omega^2 = 0 \tag{4}$$

3. Нестационарное поле единичных векторов n получается из многобразия C_3^2, если мы на каждом конусе C (M) зададим вектор n как функцию некоторого параметра t, отождествляемого обычно со временем. Нестационарное поле единичных векторов рассматривалось в работах [6, 7] и других, посвященных геометрии нестационарного движения жидкости.

При изучении нестационарного поля единичных векторов за базисные формы естественно выбирать ω^i и dt. Тогда система основных соотношений для построенного ранее канонического репера имеет вид (см. [6])

$$\begin{aligned} \omega^4 &= \omega_3^2 = p_i\,\omega^i + p_t\,dt, \\ \omega_3^1 &= q_i\,\omega^i, \\ \omega_1^2 &= r_i\,\omega^i + r_t\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

4. Согласно [1] подмногообразием Ψ_3 многообразия C_3^2 называется совокупность однопараметрических многообразий Φ_1 линейных элементов $\{M;\ e_3\}$, являющихся одномерными интегральными многообразиями [5] одного уравнения Пфаффа

$$s_i\,\omega^i + s_4\,\omega^4 = 0, \tag{6}$$

связывающего базисные формы ω^i, ω^4 многообразия C_3^2.

Подмногообразие Ψ_3 называется голономным, если уравнение (6) вполне интегрируемо и неголономным в противном случае. Задание голономного подмногообразия Ψ_3 расслаивает многообразие C_3^2 на ∞^1 трехпараметрических семейств линейных элементов.

Назовем подмногообразие Ψ_3 «особым», если в его уравнении (6) коэффициент $s_4 = 0$, и «неособым», если $s_4 \neq 0$. Геометрически это означает, что подмногообразие Ψ_3 является особым тогда и только тогда, когда среди принадлежащих ему однопараметрических семейств линейных элементов Φ_1 имеется пучок C (M), а неособым — тогда и только тогда, когда среди принадлежащих ему Φ_1 имеются векторные линии многообразия C_3^2, дополнительно оснащенные единичными касательными векторами.

Теорема 1. Задание нестационарного поля единичных векторов эквивалентно заданию голономного неособого подмногообразия в нелинейном неголономном многообразии C_3^2.

Доказательство. Задание голономного неособого Ψ_3 производится вполне интегрируемым уравнением вида (6), где $s_4 \neq 0$. В этом случае уравнение (6) эквивалентно следующему:

$$\omega^4 - m_i\,\omega^i = 0.$$

Но если это уравнение вполне интегрируемо, то форма, стоящая в левой части, пропорциональна полному дифференциалу (см. [8]), т. е. имеет вид

$$\omega^4 - m_i\,\omega^i = m_\tau\,d\tau, \tag{7}$$

где τ определяется с точностью до замены $\tau \to f(\tau)$.

Выбрав в качестве базиса формы ω^i и $d\tau$ и подставив выражение для ω^4 из (7) в (2), мы получим систему Пфаффа, только обозначениями отличающуюся от (5), что и доказывает теорему.

5. Рассмотрим теперь нестационарное движение жидкости, с полем скоростей $v = Ve_3$ и полем плотностей ρ. Полный дифференциал любого скаляра F, являющегося функцией точки и времени, представляется в виде

$$dF = F_i \omega^i + F_t dt,$$

где $F_t = \partial F / \partial t$.

Линии тока определяются уравнениями $\omega^1 = \omega^2 = dt = 0$, а траектории движения частиц — уравнениями $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 - Vdt = 0$ (см. [6]). Ускорение $\omega = dv/dt$ находится из условия $\omega\, dt \equiv dv \,(\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega^2, \omega^3 - Vdt)$, т. е.

$$\omega = V^2 q_3 e_1 + (V^2 p_3 + V p_t) e_2 + (V V_3 + V_t) e_3.$$

Запишем уравнение неразрывности $\partial\rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ в развернутом виде

$$\rho_t + \rho_3 V + \rho V_3 + \rho V (q_1 + p_2) = 0.$$

Для баротропного движения идеальной жидкости в консервативном поле внешних сил уравнение Эйлера имеет вид

$$\omega = \operatorname{grad}\left(-\Phi - \int \frac{dp}{\rho}\right),$$

(p — давление) откуда следует, что существует такая функция φ точки M и времени t, что $d\varphi = (\omega, dM) + \varphi_t dt$. Поэтому система из уравнения Эйлера и уравнения неразрывности эквивалентна следующей системе Пфаффа:

$$\begin{aligned} d\varphi &= V^2 q_3 \omega^1 + (V^2 p_3 + V p_t) \omega^2 + \\ &+ (V V_3 + V_t) \omega^3 + \varphi_t dt, \\ dV &= V_1 \omega^1 + V_2 \omega^2 + V_3 \omega^3 + V_t dt, \\ d\rho &= \rho_1 \omega^1 + \rho_2 \omega^2 + \rho_3 \omega^3 - \\ &- (\rho_3 V + \rho V_3 + \rho V (q_1 + p_2))\, dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Если некоторое многообразие C_3^2 может служить полем пучков направлений скорости для баротропного движения, то, как следует из теоремы 1, у этого многообразия C_3^2 можно выделить голономное неособое подмногообразие Ψ_3 так, что

$$\omega^4 = p_i \omega^i + p_t dt. \tag{9}$$

К полученному нестационарному полю направлений можно присоединить два нестационарных скалярных поля V и ρ таким образом, что будут выполняться уравнения (8).

Отсюда следует, что заданное многообразие C_3^2 является полем пучков направлений скорости для некоторого баротропного движения идеальной жидкости тогда и только тогда, когда система уравнений (8)—(9) в инволюции [5] относительно неизвестных функций φ, φ_t, V, ρ, V_i, V_t, ρ_i, p_i, p_t (q_i считаются заданными функциями точки M и времени t).

Теорема 2. Любое наперед заданное нелинейное неголономное многообразие C_3^2 может служить полем пучков направлений скорости для некоторого нестационарного баротропного движения идеальной жидкости. Произвол в построении такого движения на заданном C_3^2 — четыре функции от трех аргументов.

Доказательство. Дифференцируем внешним образом систему (8)—(9) с использованием уравнений структуры (3). После приведения подобных членов система внешних квадратичных уравнений приводится к виду

$$[\Delta V_1, \omega^1] + [\Delta V_2, \omega^2] + [\Delta V_3, \omega^3] + [\Delta y_1, dt] = 0,$$
$$[\Delta \rho_1, \omega^1] + [\Delta \rho_2, \omega^2] + [\Delta \rho_3, \omega^3] + [\Delta y_2, dt] = 0,$$
$$[\Delta p_1, \omega^1] + [\Delta p_2, \omega^2] + [\Delta p_3, \omega^3] + [\Delta y_3, dt] = 0,$$
$$[\Delta x^2, \omega^2] + [\Delta x_3, \omega^3] + [\Delta \varphi_t, dt] = 0. \qquad (10)$$

В этой системе независимые формы — ω^i и dt, а неизвестные формы — те, у которых перед буквой с индексом стоит Δ, причем

$$\Delta V_i = dV_i + \Theta_i, \quad \Delta \rho_i = d\rho_i + \alpha_i,$$
$$\Delta p_i = dp_i + \beta_i, \quad \Delta x_2 = V^2 dp_3 + V dp_t + \xi,$$
$$\Delta x_3 = V dV_3 + dV_t + \eta, \quad \Delta y_1 = \Delta x_3 - V dV_3,$$
$$\Delta y_2 = V d\rho_3 - \rho dV_3, \quad \Delta y_3 = V^{-1} dx_2 - V dp_3,$$
$$\Delta \varphi_t = d\varphi_t,$$

где Θ_i, α_i, β_i, ξ, η — некоторые формы, конкретный вид которых не имеет значения.

Легко видеть, что все неизвестные формы, кроме Δy_i, независимые, поэтому система (10) удовлетворяет условию теоремы, доказанной в [9]. Из этой теоремы следует, что система (10) в инволюции и широта ее решения — четыре функции от трех аргументов. Теорема доказана.

Заметим в заключение, что аналогичная задача, для случая когда многообразие C_3^2 вырождается в v_3^2 (пучок C (M) в каждой точке M — плоский) и поле внешних сил не является консервативным, решалась в работе [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометр. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191). 1967, 179—194.
2. W. Wagner. Differential geometry of non-linear non-holonomic manifolds in the three-dimensional Euclidean space. Матем. сб., 8 (50), 1940, 3—40.
3. Г. Георгиев. Дифференциальная геометрия многообразия конусов в трехмерном пространстве. Anal. stiin. ale Univ.« Al. J. Cuza», Iasi, t. 8, s. 1, f. 2, 1962, 353—367.
4. В. М. Финкельштейн. Неголономные комплексы четырехпараметрического поля направлений. Геометр. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 99—111.
5. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
6. С. С. Бюшгенс. Геометрия неустановившегося потока совершенной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, серия матем. 24, № 2, 1960, 171—202.
7. Г. Георгиев. Дифференциально-геометрические приложения к некоторым нестационарным процессам гидродинамики. Българска академия на науките. Изв. Матем. инст., 6 (1962), 101—120.
8. П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М — Л., ГИТТЛ, 1947.
9. В. В. Васенин и Р. Н. Щербаков. О системах квадратичных внешних дифференциальных уравнений. Сибирский математический журнал, XII (1971), 491—496.
10. C. Acker. Mouvements barotropes nonstationares d'un fluide ideal. Anal. stiin. Univ. «Al. J. Cuza», Jasi, s. I, t. 14, f. 2 (1968), 405—414.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ БАРОТРОПНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В. В. СЛУХАЕВ

В статье рассматриваются стационарные движения идеальной жидкости. Предполагается, что плотность зависит только от давления (т. е. движение баротропное) и поле внешних сил — консервативное.

Движение вполне определено, если в каждой точке r задан вектор скорости v и скаляр ρ — плотность, удовлетворяющие уравнениям движения и неразрывности

$$\omega = -\operatorname{grad}\left(\Phi + \int \frac{dp}{\rho}\right),$$
$$\operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{0.1}$$

здесь ω — ускорение, p — давление, Φ — потенциал внешних сил. Из первого уравнения видно, что поле скоростей v для баротропного движения не может быть произвольным (поле ускорений — потенциальное). Классы векторных полей, которые могут быть полями скоростей для движения идеальной жидкости, были найдены А. А. Фридманом [1, 2]. Аналогичная задача для несжимаемой вязкой жидкости была решена Б. И. Извековым [3], а для бароклинных движений идеальной жидкости — Р. Беркером [4].

Дальнейшее развитие этой идеи состояло в переходе от кинематики к геометрии. Геометрической основой стационарного движения является поле единичных векторов n, параллельных и одинаково направленных с вектором скорости v, т. е. таких, что

$$V = Vn,\ V = |v|. \tag{0.2}$$

Будем называть поле n «полем направлений скорости». Задание этого поля эквивалентно заданию конгруэнции линий тока.

Следуя Г. Георгиеву [5], «геометрическими условиями совместности» для данного движения будем называть условия, наложенные на поле n, необходимые и достаточные для того, чтобы поле n было полем направлений скорости для этого движения. Геометрические условия совместности для произвольного движения идеальной несжимаемой жидкости были найдены С. С. Бюшгенсом в работах [6—7]. Для некоторых классов движений несжимаемой жидкости эти условия были найдены Г. Георгиевым [8, 9] и В. П. Долговых [10]. Геометрическая точка зрения на поток жидкости последовательно проводилась в обзоре [11].

В данной статье задача о геометрических условиях совместности решается для произвольных стационарных баротропных движений идеальной жидкости ($\Phi \neq 0$) и идеального газа ($\Phi = 0$). Все рассматриваемые в статье функции предполагаются аналитическими. Некоторые результаты этой работы анонсированы в заметке [23].

§ 1. Геометрические условия совместности для движения в произвольном консервативном поле внешних сил

1. Подвижной репер векторного поля. Пусть в области G трехмерного евклидова пространства R_3 задано стационарное движение с полем скоростей v и полем плотностей ρ. Отнесем область G к естественному подвижному реперу поля v. Этот репер устроен следующим образом: начало репера r — произвольная точка области G, вектор $e_3 = n(r)$, вектор e_2 направлен по главной нормали линии тока (векторной линии поля n), вектор e_1 направлен по бионормали этой же линии. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$dr = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j, \tag{1.1}$$
$$(i, j, h = 1, 2, 3).$$

Формы Пфаффа ω^i и ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства [12]

$$D\omega^i = [\omega^j, \omega_j^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^h, \omega_h^j]. \tag{1.2}$$

Кроме того, матрица форм ω_i^j кососимметричная

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \tag{1.3}$$

а формы ω^i линейно независимые

$$[\omega^1, \omega^2, \omega^3] \neq 0. \tag{1.4}$$

В силу (1.3) из форм ω_i^j существенны только три ω_3^2, ω_3^1, ω_1^2, а в силу того, что репер геометрически вполне определен, эти формы являются линейными комбинациями линейно независимых форм ω^i. Запишем эти линейные комбинации в виде

$$\omega_3^2 = a_i \omega^i, \quad \omega_3^1 = b_i \omega^i, \quad \omega_1^2 = c_i \omega^i. \tag{1.5}$$

Так как вектор e_2 направлен по главной нормали линии тока, то

$$b_3 = 0. \tag{1.6}$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i формул (1.5) являются инвариантами единичного векторного поля e_3. Так, например, инвариант a_3 есть кривизна линии тока, c_3 — ее кручение, $H = b_1 + a_2$ — средняя кривизна поля e_3 [13].

Подставляя (1.5) и (1.6) в первую группу уравнений (1.2), получим

$$\begin{aligned} D\omega^1 &= x[\omega^2, \omega^3] + b_1[\omega^3, \omega^1] + c_1[\omega^1, \omega^2], \\ D\omega^2 &= -a_2[\omega^2, \omega^3] + y[\omega^3, \omega^1] + c_2[\omega^1, \omega^2], \\ D\omega^3 &= -a_3[\omega^2, \omega^3] + z[\omega^1, \omega^2]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь обозначено

$$x = -b_2 - c_3, \quad y = a_1 - c_3, \quad z = a_1 - b_2. \tag{1.8}$$

Инварианты x, y, z, как видно из (1. 7), являются скалярами неголономности [14] для векторных полей e_1, e_2, e_3 соответственно. Если $x = 0$, то поле e_1 голономное, т. е. локально существует семейство поверхностей, ортогональных полю e_1. Аналогичные утверждения справедливы для $y = 0$ и $z = 0$.

Полный дифференциал любой функции f точки r можно представить как линейную комбинацию базисных форм ω^i.

$$df = f_i \omega^i. \tag{1.9}$$

Из равенства $df = (\mathrm{grad} f, dr)$ следует, что f_i — это проекции $\mathrm{grad} f$ на оси подвижного репера. Дифференцируя (1.9) внешним образом, используя (1.7) и обозначая $df_i = f_{ij}\omega^j$, получим

$$\begin{gathered}
f_{32} - f_{23} + xf_1 - a_2 f_2 - a_3 f_3 = 0,\\
f_{13} - f_{31} + b_1 f_1 + y f_2 = 0,\\
f_{21} - f_{12} + c_1 f_1 + c_2 f_2 + z f_3 = 0.
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Из теоремы Пуанкаре [12] следует, что правая часть равенства (1. 9) будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда выполнены равенства (1. 10).

Подставляя (1. 5)—(1. 6) во вторую группу уравнений структуры (1.2), получим

$$\begin{aligned}
&a_{32} - a_{23} + a_1 x - a_2^2 - a_3^2 - b_2 c_3 = 0,\\
&a_{13} - a_{31} + a_1 b_1 + a_2 y + b_1 c_3 = 0,\\
&a_{21} - a_{12} + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 z + b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0,\\
&-b_{23} + b_1 x - b_2 a_2 + a_2 c_3 - a_3 c_2 = 0,\\
&b_{13} + b_1^2 + b_2 y + a_3 c_1 - a_1 c_3 = 0,\\
&b_{21} - b_{12} + b_1 c_1 + b_2 c_2 + a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0,\\
&c_{32} - c_{23} + c_1 x - c_2 a_2 - c_3 a_3 + a_3 b_2 = 0,\\
&c_{13} - c_{31} + c_1 b_1 + c_2 y - a_3 b_1 = 0,\\
&c_{21} - c_{12} + c_1^2 + c_2^2 + c_3 z + b_1 a_2 - a_1 b_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Этим соотношениям должны удовлетворять коэффициенты a_i, b_i, c_i для того, чтобы дифференциальные уравнения (1.5) определяли единичное векторное поле $e_3 = n$.

2. Постановка задачи. В подвижном репере дивергенция и ротор любого вектора $m = m^i e_i$ могут быть вычислены с помощью равенств

$$\begin{gathered}
D(m, dr) = (\mathrm{rot}\, m, \Sigma),\\
D(m, \Sigma) = \mathrm{div}\, m\, [\omega^1, \omega^2, \omega^3],
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где Σ — элемент площади

$$\Sigma = [\omega^2, \omega^3]\, e_1 + [\omega^3, \omega^1]\, e_2 + [\omega^1, \omega^2]\, e_3. \tag{2.2}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{gathered}
\mathrm{rot}\, v = (V_2 - a_3 V)\, e_1 - V_1 e_2 + V z e_3,\\
\mathrm{div}\, v = V_3 + VH,\\
\mathrm{div}\, \rho v = V\rho_3 + \rho V_3 + \rho V H.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, дополнительный нижний индекс у скалярной величины означает, что берется проекция градиента этой величины на соответствующую ось подвижного репера, т. е. V_i находятся из равенства $dV = V_i \omega^i$, ρ_i — из равенства $d\rho = \rho_i \omega^i$ и т. д.

Вычислим вектор ускорения ω. Так как $dr/dt = v$, то $dt \equiv \omega^3 (\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega^2)$. Отсюда следует, что $\omega\omega^3 \equiv de_3 (\mathrm{mod}\, \omega^1, \omega^2)$, т. е. что

$$\omega = V^2 a_3 e_2 + V V_3 e_3. \tag{2.4}$$

Из этого равенства и из (2. 3) следует, что система уравнений гидромеханики (0. 1) эквивалентна следующей системе уравнений Пфаффа:

$$
\begin{aligned}
d\varphi &= e^{2U}(a_3\omega^2 + U_3\omega^3),\\
dU &= U_1\omega^1 + U_2\omega^2 + U_3\omega^3,\\
d\gamma &= \gamma_1\omega^1 + \gamma_2\omega^2 - (U_3 + H)\,\omega^3,\\
d\varphi &= -d\Phi - \rho^{-1}dp,\ U = \ln V,\ \gamma = \ln\rho.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Задача о геометрических условиях совместности формулируется следующим образом: найти условия, которым должны удовлетворять инварианты a_i, b_i, c_i поля $n = e_3$, необходимые и достаточные для того, чтобы система уравнений (2.5) была бы в инволюции [12] относительно неизвестных функций φ, U, γ, U_i, γ_1, γ_2.

В такой формулировке задача сводится к одной из задач метода дифференциальных связей [15, 16]. Роль основной системы уравнений играет система (1. 5), определяющая единичное векторное поле, а система (2. 5) представляет собой систему дифференциальных связей.

3. Движения с заданным U_3. Предположим для начала, что $U_3 = (\text{grad}\ \ln V,\ e_3)$ является заданной функцией точки z.

Тогда

$$\theta = a_3\omega^2 + U_3\omega^3 \tag{3.1}$$

является заданной формой. Назовем ее «первой присоединенной формой».

Геометрические условия совместности будут существенно различными в зависимости от того будет ли $U_3 \neq 0$ или $U_3 = 0$. В случае, если $U_3 \neq 0$, обозначим

$$
\begin{aligned}
D\theta &= \xi_1[\omega^2, \omega^3] + \xi_2[\omega^3, \omega^1] + \xi_3[\omega^1, \omega^2],\\
\Theta &= \theta + \frac{1}{2U_3}(\xi_2\omega^1 - \xi_1\omega^2).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Форму Θ назовем „второй присоединенной формой“.

Теорема 1. Стационарное баротропное движение идеальной жидкости e_3 и заданной проекцией $U_3 \neq 0$ логарифмического градиента модуля скорости на направление скорости возможно тогда и только тогда, когда

(а) первая присоединенная форма θ интегрируема ($[D\theta, \theta] = 0$),

(б) вторая присоединенная форма замкнута ($D\Theta = 0$).

При выполнении этих условий поле скоростей определяется единственным образом (с точностью до умножения на константу) и $dU = \Theta$

Доказательство. С учетом (3.1) система уравнений (2.5) может быть представлена в виде

$$
\begin{aligned}
&d\varphi = e^{2U}\theta, \quad dU = U_1\omega^1 + (U_2 - a_3)\,\omega^2 + \theta,\\
&d\gamma = \gamma_1\omega^1 + (\gamma_2 - U_3^{-1}a_3)\,\omega^2 + \theta.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Дифференцируя внешним образом первое уравнение этой системы с использованием второго, получим

$$2U_1\ [\omega^1, \theta] + 2(U_2 - a_3)[\omega^2, \theta] + D\theta = 0.$$

Отсюда с помощью (3. 1) и (3. 2) находим, что правая часть первого уравнения будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда

$$[D\theta,\ \theta] = 0,\ 2U_1U_3 = \xi_2,\ 2(U_2 - a_3)\ U_3 = -\xi_1, \tag{3.4}$$

но при этих условиях система (3.3) принимает вид

$$d\varphi = e^{2U}\theta, \quad dU = \Theta,$$

$$d\gamma = \gamma_1\omega^1 + (\gamma_2 - U_3^{-1} a_3)\omega^2 + \theta.$$

Дифференцируя эту систему внешним образом, получим

$$2[\Theta, \theta] + D\theta = 0, \quad D\Theta = 0,$$

$$[\Delta\gamma_1, \omega^1] + [\Delta\gamma_2, \omega^2] = 0, \tag{3.5}$$

где вид форм $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ не имеет значения. Важно только, что $\Delta\gamma_1 = d\gamma + (...)$, а $\gamma_2 = d\gamma_2 + (...)$. В первые два уравнения системы (3.5) неизвестные функции не входят, а третье, взятое отдельно — в инволюции. Следовательно, для того чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы первые два уравнения представляли собой тождества. Учитывая (3.2) и (3.4), их можно представить в следующем виде:

$$[D\theta, \theta] = 0, \quad D\Theta = 0.$$

Условия (а) и (б) теоремы этим доказаны. Так как поле e_3 —задано, а dU находится через инварианты поля и заданную функцию U_3, то $\ln V$ находится с точностью до постоянного слагаемого, а V — с точностью до постоянного множителя. Плотность ρ находится с произволом в одну функцию от двух аргументов. Теорема доказана.

Условиям (а) и (б) теоремы можно придать более геометрическую форму, если рассматривать векторные поля

$$i = k + U_3 e_3, \quad I = i + \frac{1}{2U_3}[\mathrm{rot}\, i, e_3], \tag{3.6}$$

где

$$k = a_3 e_2$$

— вектор кривизны линии тока.

Тогда $\theta = (i, dr)$, $\Theta = (I, dr)$ и условия (а) и (б) эквивалентны следующим:

(а′) поле векторов i — голономное,

(б′) поле векторов I — потенциальное.

Векторы i и I назовем первым и вторым присоединенным вектором соответственно.

Заметим, что при $U_3 = -H$ из этой теоремы вытекают результаты С. С. Бюшгенса [7], а при $U_3 = -(H + \gamma_3)$ — результаты Г. Георгиева [8] и В. П. Долговых [10].

Рассмотрим теперь случай, когда $U_3 = 0$.

Теорема 2. Стационарное баротропное движение идеальной жидкости с равной нулю проекцией градиента модуля скорости на направление скорости возможно тогда и только тогда, когда

$$[\mathrm{rot}\, k, e_3] = 0. \tag{3. 8}$$

Если все линии тока прямые, то V определяется с произволом в одну функцию от двух аргументов, а конгруэнция линий тока может быть произвольной. Если же кривизна линий тока отлична от нуля, то V определяется с произволом в одну функцию от одного аргумента. Единичные векторные поля, удовлетворяющие условию (3. 8), существуют с произволом в четыре функции от двух аргументов.

Доказательство. Г. Георгиев в работе [9] установил, что движение, о котором говорится в условии теоремы, существует тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$y = 0, \; a_{33} + a_2 a_3 = 0. \tag{3.0}$$

Однако геометрическая характеристика этих соотношений, приведенная в [9], довольно сложна. Вычисляя rot k, с помощью (3. 7) и (2. 1) — (2. 2) находим, что

$$\operatorname{rot} k = -(a_{33} + a_2 a_3) e_1 + a_3 y e_2 + (a_{31} + a_3 c_2) e_3. \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что если линии тока не являются прямыми ($a_3 \neq 0$), то соотношения (3. 9) эквивалентны (3. 8). Таким образом, первая часть теоремы следует из результатов Г. Георгиева.

Если все линии тока прямые, то $a_3 = 0$ и так как $U_3 = 0$ по условию теоремы, то система уравнений (2.5) принимает вид: $d\varphi = 0$, $dV = V_1\omega^1 + V_2\omega^2$, $d\gamma = \gamma_1\omega^1 + \gamma_2\omega^2 - H\omega^3$. Справедливость теоремы очевидна.

Если же $a_3 \neq 0$, то как показано в [9],

$$dU = -\frac{1}{2}\left[(\ln a_3)_1 + c_2\right]\omega^1 + U_2\omega^2. \tag{3.11}$$

Конечное соотношение, возникающее при внешнем дифференцировании этого уравнения, является следствием (3. 9) и (1. 11), поэтому замыкание (3. 11) имеет вид

$$[dU_2 + \eta, \omega^2] = 0,$$

где вид формы η не имеет значения. Отсюда следует, что U_2 (а значит, и U) определяется с произволом в одну функцию от одного аргумента.

Осталось найти широту класса единичных векторных полей, у которых $[\operatorname{rot} k, e_3] = 0$. Продолжая [12] первое уравнение системы (1. 5) и учитывая (3. 8) и (1. 8), получаем систему

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + a_1\omega^3,\\
\omega_3^1 &= b_1\omega^1 + b_2\omega^2,\\
da_1 &= a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 + a_{13}\omega^3,\\
da_2 &= a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2 + a_{23}\omega^3,\\
da_3 &= a_{31}\omega^1 + a_{32}\omega^2 + a_{33}\omega^3.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь a_{ij} $(i \neq j)$ связаны первыми тремя уравнениями системы (1. 11). Дифференцируя эту систему внешним образом, получаем систему внешних квадратичных уравнений

$$[dc_1, \omega^1] + [dc_2, \omega^2] = \tilde{A}_1[\omega^2, \omega^3] + \tilde{A}_2[\omega^3, \omega^1] + \tilde{A}_3[\omega^1, \omega^2],$$

$$[db_1, \omega^1] + [db_2, \omega^2] = \tilde{B}_1[\omega^2, \omega^3] + \tilde{B}_2[\omega^3, \omega^1] + \tilde{B}_3[\omega^1, \omega^2],$$

$$[da_{11}, \omega^1] + [da_{12}, \omega^2] + [da_{13}, \omega^3] = \tilde{C}_1[\omega^2, \omega^3] + \tilde{C}_2[\omega^3, \omega^1] + \tilde{C}_3[\omega^1, \omega^2],$$

$$[da_{12}, \omega^1] + [da_{22}, \omega^2] + [da_{32}, \omega^3] = \tilde{D}_1[\omega^2, \omega^3] + \tilde{D}_2[\omega^3, \omega^1] + \tilde{D}_3[\omega^1, \omega^2],$$

$$[da_{13}, \omega^1] + [da_{32}, \omega^2] = \tilde{E}_1[\omega^2, \omega^3] + \tilde{E}_2[\omega^3, \omega^1] + \tilde{E}_3[\omega^1, \omega^2].$$

Вид коэффициентов, стоящих в правых частях уравнений этой системы, не имеет значения, важно только, что

$$\tilde{C}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{E}_3 = 0. \tag{3.13}$$

Будем строить цепь интегральных элементов по Кэлеру [12]. При построении трехмерного интегрального элемента приходится учитывать (3. 13). После этого оказывается, что цепь неособая и ее характеры

$s_1 = 5$, $s_2 = 4$, $s_3 = 0$. Поэтому согласно теореме Кэлера [12] система (3. 12) в инволюции и широта ее решения — четыре функции от двух аргументов. Теорема доказана.

Как показано в [9], для движений с $U_3 = 0$ поверхности, ортогональные полю векторов кривизны k (которое, как следует из равенства $y = 0$, голономно), являются поверхностями тока, и линии тока обязаны быть геодезическими на этих поверхностях.

4. Определение функции U_3. Теперь покажем, как можно определить U_3 с помощью поля e_3 направлений скорости.

Будем предполагать, что $a_3 \neq 0$, так как при $a_3 = 0$ все линии тока прямые; задача была решена В. П. Долговых [10], который доказал, что любая прямолинейная конгруэнция может быть принята за конгруэнцию линий тока стационарного баротропного движения, у которого $U_3 = 0$. Если же $U_3 \neq 0$, то конгруэнция линий тока — произвольная нормальная конгруэнция $(z = 0)$.

Отметим также следующий, давно известный (см., напр., [17]) результат.

Если поле e_3 голономное $(z = 0)$, то оно всегда может служить полем направлений скорости для потенциального баротропного стационарного движения идеальной жидкости. У голономного векторного поля уравнением $\omega^3 = 0$ определяется семейство поверхностей, ортогональных полю. Для построения потенциального движения достаточно взять любую функцию F точки r такую, что ее поверхности уровня определяются уравнением $\omega^3 = 0$. Тогда $v = \operatorname{grad} F$, а функция F определяется с точностью до замены $F \to \Psi(F)$.

С помощью (1. 9)—(1. 10) из первого уравнения (2. 5) получаем

$$U_1 = A + BU_3, \quad U_{31} = -2AU_3 - 2BU_3^2 + C,$$
$$U_{32} = D + 3a_3U_3 - 2U_2U_3, \tag{4.1}$$

где обозначено

$$A = -\frac{1}{2} a_3^{-1}(a_{31} + a_3c_2), \quad B = -\frac{1}{2} a_3^{-1} z,$$
$$C = a_3 y, \quad D = a_{33} + a_2 a_3. \tag{4.2}$$

Если поле e_3 голономное, то $z = 0$. Из (1. 8) и (1. 11) получаем, что $A = 0$. Поэтому

$$U_1 = 0, \; U_{31} = ya_3,$$
$$U_{32} = D + 3a_3U_3 - 2U_2U_3.$$

Первое равенство означает, что у любого голономного баротропного стационарного движения grad V лежит в соприкасающейся плоскости линии тока.

Применяя (1. 9)—(1. 10) к уравнению

$$dU = U_2\omega^2 + U_3\omega^3, \tag{4.4}$$

получим, что

$$y(a_3 - U_2) = 0, \tag{4.5}$$
$$U_{21} = -c_2U_2,$$
$$U_{23} = D - a_2U_2 + 2a_3U_3 - 2U_2U_3.$$

Если $U_2 = a_3$, то из (2,3) получаем, что rot $v = 0$ и движение потенциальное.

Если же $y=0$, то с учетом (4. 3) и (4. 5) получим, что продолжением уравнения (4.4) является система

$$dU_2 = -c_2U_2\omega^1 + U_{22}\omega^2 + (D - a_2U_2 + 2a_3U_3 - 2U_2U_3)\,\omega^3,$$
$$dU_3 = (D + 3a_3U_3 - 2U_2U_3)\,\omega^2 + U_{33}\omega^3.$$

После внешнего дифференцирования этих уравнений возникают два конечных соотношения, которые, однако, оказываются тождествами в силу $y=z=0$ и (1. 11). Система квадратичных уравнений принимает вид

$$[dU_{22} + \varepsilon_1,\ \omega^2] = 0,\ \ [dU_{33} + \varepsilon_2,\ \omega^3] = 0,$$

где вид форм ε_1 и ε_2 не имеет значения. Эта система в инволюции и широта ее решения — две функции от двух аргументов. С таким же произволом определяется и U. Так как y — это скаляр неголономности для поля e_2 (или для $k=a_3e_2$), то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Всякое голономное поле e_3 может служить полем направлений скорости для стационарного баротропного движения идеальной жидкости. При этом, если поле векторов кривизны κ неголономное ($y \neq 0$), то движение обязательно потенциальное и модуль скорости V определяется с произволом в одну функцию от одного аргумента. Если же поле k — голономное, то кроме потенциального, возможно еще движение, у которого $\operatorname{rot} v = (V_2 - Va_3)e_2$. В этом случаае V определяется с произволом в две функции от одного аргумента.

Для определения функции U_3 у неголономного движения с помощью (4. 1) второе уравнение ситемы (2. 5) представим в виде

$$dU = (A + BU_3)\,\omega^1 + U_2\omega^2 + U_3\omega^3. \tag{4. 6}$$

Применяя (1. 9)—(1.10) к этому уравнению, получаем

$$\begin{aligned} U_{33} &= E + FU_2 + GU_3 - 2U_3^2, \\ U_{21} &= L - c_2U_2 + NU_3 - 2BU_2U_3, \\ U_{23} &= P - a_2U_2 + QU_3 - 2U_2U_3, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$\begin{aligned} &E = B^{-1}(A_3 + Ab_1 - C), \quad F = -B^{-1}y, \\ &G = -B^{-1}(B_3 + Bb_1 + 2A), \quad L = A_2 + BD - Ac_1, \\ &N = B_2 - Bc_1 - \frac{5}{2}z, \quad P = D + Ax, \\ &Q = 2a_3 + Bx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Из уравнения

$$dU_3 = U_{31}\omega^1 + U_{32}\omega^2 + U_{33}\omega^3 \tag{4. 9}$$

с помощью (1. 9)—(1.10) и равенств (4. 1) и (4. 7) получаем

$$\begin{aligned} -FU_{22} &= R_0 + S_0U_2 + T_0U_3 + 2FU_2^2, \\ X + YU_2 + ZU_3 &= 0, \\ A^* + B^*U_3 &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} &R_0 = E_2 + DG + Cx - D_3 - Da_2, \\ &S_0 = F_2 - 4Fa_3 - 2E, \quad T_0 = G_2 - 5D - GA_3, \\ &X = C_3 + Cb_1 + Dy - 2AE - FL - CG - E_1, \\ &Y = Fc_2 - 2AF + F_1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$Z = 2A_3 + 2Ab_1 - 3C - N - G_1,$$
$$A^* = D_1 + 3Ca_1 + 2AD + Cc_1 + Dc_2 + Ez - C_2,$$
$$B^* = 6Aa_3 + 2A_2 + 4BD + Gz - 2L - 2Ac_1.$$

С помощью (1. 11) можно показать, что $A^* = B^* = 0$, так что третье уравнение системы (4. 10) является тождеством.

Если $y \neq 0$, то $F \neq 0$ и U_{22} находится из первого уравнения (4. 10). В этом случае, применяя (1. 11) к уравнению

$$dU_2 = U_{21}\omega^1 + U_{22}\omega^2 + U_{23}\omega^3, \qquad (4.\ 12)$$

с помощью (4. 7) получим

$$\begin{aligned} -yU_{22} &= R^* + S^*U_2 + T^*U_3 + 2yU_2^2,\\ X^* + Y^*U_2 &+ Z^*U_3 = 0, \qquad (4.13)\\ X^{**} + Y^{**}U_2 &+ Z^{**}U_3 = 0,\end{aligned}$$

где

$$R^* = L_3 + EN + La_2 + Lb_1 - P_1 - Pc_2 - CQ,$$
$$S^* = c_{23} - a_{21} - b_1c_2 + FN - 2BE + 2C,$$
$$T^* = N_3 + GN + Na_2 + 2AQ + 2L + Nb_1 - Qc_2 - 2BP - Q_1,$$
$$X^* = P_2 - 2\tilde{R}a_2 + DQ + \tilde{R}_3 - P\tilde{S} - E\tilde{T} + Lx - Pa_3,$$
$$Y^* = -a_{22} + a_2a_3 - c_2x - 2D - \tilde{S}_3 - F\tilde{T} + 4P - \tilde{S}a_2, \qquad (4.14)$$
$$Z^* = Q_2 + 2Qa_3 + Nx - 2\tilde{T}a_2 - 2\tilde{R} - Q\tilde{S} - \tilde{T}_3 - G\tilde{T},$$
$$X^{**} = \tilde{R}_1 + L\tilde{S} + C\tilde{T} + 2\tilde{R}c_2 + Lc_1 + Pz - L_2 - DN,$$
$$Y^{**} = c_{22} - c_{11} - a_2z + \tilde{S}_1 + \tilde{S}c_2 - 4L,$$
$$Z^{**} = \tilde{T}_1 + 2\tilde{T}c_2 + N\tilde{S} + 2B\tilde{R} + Nc_1 - 2A\tilde{T} - 3Na_3,$$

где

$$\tilde{R} = -F^{-1}R_0, \quad \tilde{S} = -F^{-1}S_0, \quad \tilde{T} = -F^{-1}T_0.$$

Таким образом, если $y \neq 0$, то обозначая $R = R_0 - B^{-1}R^*$, $S = S_0 - B^{-1}S^*$, $T = T_0 - B^{-1}T^*$ из (4.10) и (4.13) получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &R + SU_2 + TU_3 = 0,\\ &X + YU_2 + ZU_3 = 0,\\ &X^* + Y^*U_2 + Z^*U_3 = 0,\\ &X^{**} + Y^{**}U_2 + Z^{**}U_3 = 0.\end{aligned}\right. \qquad (4.15)$$

Если же $y = 0$, то $F = 0$, $Y = 0$ и получаем систему из трех линейных уравнений (два последних уравнения системы (4. 13) содержат U_{22i} и здесь приводятся)

$$\left\{\begin{aligned} &R_0 + S_0U_2 + T_0U_3 = 0,\\ &R^* + S^*U_2 + T^*U_3 = 0,\\ &X + ZU_3 = 0.\end{aligned}\right. \qquad (4.16)$$

В любом случае (и при $y \neq 0$, и при $y = 0$) функция определяется единственным образом. В результате получаем теорему.

Теорема 4. Если поле e_3 неголономное, то на нем можно построить не более одного стационарного движения идеальной жидкости. Необходимым условием возможности такого движения является совместность системы (4. 15) при $y \neq 0$ или системы (4. 16) при $y = 0$.

Из результатов этого пункта следует, что для определения возможности стационарного движения с заданным неголономным полем e_3 направлений скорости следует найти U_3 из системы (4. 15) или (4. 16) (если, конечно, они совместны), а затем проверить условия $[D\theta, \theta]=0$ и $D\Theta = 0$, если $U_3 \neq 0$ и условие $[\text{rot } k, e_3] = 0$, если $U_3 = 0$. Эти условия представляют собой некоторые соотношения на инварианты поля e_3.

5. Некоторые следствия из основных теорем. В этом пункте рассматриваются приложения теорем 1—4 к некоторым специальным классам единичных векторных полей.

Из теоремы 4 следует, что если поле e_3 может служить полем направлений скорости и для движения с $U_3 = 0$, и для движений с $U_3 \neq 0$, то это поле обязательно голономное. Отсюда и из теоремы 2 вытекает, что такое поле e_3 определяется уравнениями:

$$z = 0 \qquad [\text{rot } k, e_3] = 0. \tag{5. 1}$$

Покажем, что в этом случае обязательно $\text{rot } k = 0$. В самом деле из равенства $z = 0$ и равенств (1. 8) и (1. 11) следует, что $a_{31}+a_3c_2=0$. Но тогда из (5. 1) и (3. 10) следует, что $\text{rot } k = 0$.

Рассмотрим теперь неголономные единичные векторные поля, у которых $\text{rot } k = 0$.

Теорема 5. Если у неголономного единичного векторного поля $\text{rot } k = 0$, то у баротропных движений, которые можно построить на этом поле как на поле направлений скорости, модуль скорости V есть произвольная функция от Ψ, где $\text{grad } \Psi = k$.

Доказательство. Если $\text{rot } k=0$, то из теоремы 2 следует, что возможны движения с $U_3=0$, а тогда из теоремы 4 следует, что $dU=U_2\omega^2$. Так как $(k, dr) = a_3\omega^2 = d\Psi$, то $dU = U_\Psi \, d\Psi$. Отсюда следует, что U — произвольная функция от Ψ, но $U = \ln V$, и поэтому V — тоже произвольная функция от Ψ. Теорема доказана.

В частности, возможно движение с $V = \text{const}$ и винтовое движение, которое получается при $\ln V = \Psi$.

Перейдем к рассмотрению квазиплоских единичных векторных полей e_3, т. е. таких полей, у которых линии тока лежат в семействе параллельных плоскостей. В этом случае $e_1 = \text{const}$ и $b_i = c_i = 0$. Система уравнений (1.5) принимает вид

$$\omega^1_3 = 0, \quad \omega^2_1 = 0, \quad \omega^2_3 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 + a_3\omega^3. \tag{5.2}$$

Внешнее дифференцирование уравнений $\omega^2_1 = 0$ и $\omega^1_3 = 0$ никаких новых соотношений не дает. Как и ранее, a_3 — кривизна линии тока. Кроме того, a_1 — скаляр неголономности поля e_2 и одновременно скаляр неголономности поля e_3, так как из (1.8) и 5.2) следует, что $y = z = a_1$. Если $a_1 = 0$, то из (1.11) следует, что $a_{21} = 0$ и $a_{31} = 0$, т. е. поле e_3 плоское (все инварианты не меняются при переходе от одной плоскости к другой). Для инварианта a_2 имеем $a_2 = H = k$, где k — кривизна ортогональных траекторий линий тока (эти траектории являются векторными линиями поля e_2).

Из теоремы 2 следует, что квазиплоское поле e_3 может служить полем направлений скорости баротропного стационарного движения идеальной жидкости с $U_3 = 0$ в двух случаях:

1) если все линии тока прямые $(a_3 = 0)$,

2) если поле плоское ($a_1 = 0$) и логарифмическая производная кривизны линий тока при смещении вдоль самой линии тока равна кривизне ортогональной траектории с обратным знаком ($(\ln a_3)_3 = -a_2$).

Рассмотрим квазиплоское поле, удовлетворяющее уравнениям

$$a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,\ a_{22} + a_{33} = 0, \tag{5.3}$$

и дадим этим соотношениям геометрическую характеристику. Ясно, что каждое квазиплоское поле может быть построено следующим образом: следует взять поле векторов e_3 в некоторой фиксированной плоскости π_0; тогда в каждой из параллельных ей плоскостей вектор e_3 в точке $r = r_0 + \lambda e_1$ получается из вектора e_3 в точке r_0, лежащей в плоскости π_0, поворотом на некоторый угол α. В общем случае $\alpha = \alpha(\lambda, \mu^1, \mu^2)$, где μ^1, μ^2 — какие-либо координаты в плоскости π_0. Простое вычисление показывает, что $\omega^1 = d\lambda$, $a_1 = d\alpha/d\lambda$. Отсюда следует, что первые два равенства (5. 3) означают, что α является функцией только от λ. Геометрическая характеристика последнего из равенств (5. 3) легко следует из геометрической характеристики инвариантов a_2 и a_3.

Рассмотрим, возможно ли баротропное движение с полем направлений скорости (5. 3). Так как это поле неголономное, то применяя теорему 4, получим

$$z = 6a_1a_3 + 2a_3^{-2}a_1a_2a_{33} - 2a_3^{-1}a_1a_{23} - 2_3^{-1}a_1a_{32},$$
$$X = aZ,\ Y = 0.$$

Отсюда и из (4. 10) получаем, что $U_3 = -a_2$, $\theta = a_3\omega^2 - a_2\omega^3$, $D\theta = 0$, $\Theta = \theta$. Поэтому из теоремы 1 следует, что движение возможно и $dU = a_3\omega^2 - a_2\omega^3$. Отсюда и из (2. 3) следует, что $\operatorname{rot} v = Va_1e_3$, т. е. движение винтовое. Так как $a_2 = H$, то $U_3 = -H$ и возможно движение идеальной несжимаемой жидкости. Такое движение рассматривалось С. А. Чаплыгиным в одной из неопубликованных работ (см. [18]).

§ 2. Геометрические условия совместности для стационарных движений идеального газа

6. Движения идеального газа с полем направлений скорости общего вида. Будем считать, что движение идеальной жидкости является движением идеального газа, если $\Phi = 0$.

В этом случае к системе (2.5) следует добавить уравнение

$$d\gamma = \xi d\varphi. \tag{6.1}$$

Исследуем, какой вид примут геометрические условия совместности в этом случае, предполагая, что поле направлений скорости — общего вида, т. е. $a_3 \neq 0$ и $[\operatorname{rot} k, e_3] \neq 0$.

В n° 5 было замечено, что в этом случае возможны только такие движения, у которых $U_3 \neq 0$.

Из уравнения (6.1) находим, что

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -a_3\left(1 + \frac{H}{U_3}\right)$$

отсюда следует, что

$$d\gamma = -\left(1 + \frac{H}{U_3}\right)(a_3\omega^2 + U_3\omega^3), \tag{6.2}$$

так как квадрат скорости звука $\varkappa^2$ равняется

$$\varkappa^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\frac{d\varphi}{d\gamma} = U_3e^{2U}(U_3 + H)^{-1},$$

то квадрат числа Маха M находится следующим образом:

$$M^2 = (1 + U_3^{-1} H). \tag{6.3}$$

Назовем форму

$$\Omega = M^2 \theta \tag{6.4}$$

«третьей присоединенной формой». Из теоремы 1 следует

Теорема 6. Стационарные баротропные движения идеального газа с заданным полем направлений скорости и заданной проекцией $U_3 \neq 0$ логарифмического градиента модуля скорости на направление скорости возможно тогда и только тогда, когда:

(а) первая присоединенная форма θ интегрируема $([D\theta, \theta] = 0)$,

(б) вторая и третья присоединенные формы замкнуты $(D\theta = 0$, $D\Omega = 0)$.

При этом $dU = \Theta$, $d\gamma = -\Omega$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1.

Из (6.3) следуют также следующие результаты

Теорема 7. Критическое $(M = 1)$ стационарное баротропное движение идеального газа, у которого $U_3 \neq 0$, возможно тогда и только тогда, когда поле e_3 направлений скорости — минимальное $(H = 0)$.

Теорема 8. Стационарное баротропное движение идеального газа с постоянным числом Маха возможны тогда и только тогда, когда U_3 только постоянным множителем отличается от средней кривизны H поля направлений скорости.

Если представить $H = \beta U_3$, то из (6.3) видно, что должно быть $\beta > 1$. При $\beta = -1$ получается движение идеальной несжимаемой жидкости, а при $\beta < -1$ получаются движения с мнимой скоростью звука.

Из (6.1) и (6.2) следует, что

$$\xi = -(1 + U_3^{-1} H) e^{-2U}. \tag{6}$$

Дифференцируя (6.1) внешним образом, получаем

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 U_3 - \xi_3 a_3 = 0.$$

Находя ξ_i и пользуясь значениями U_1, U_{31} и U_{32}, справедливыми для любого баротропного движения (формулы (4.1) и (4.2)), получаем дополнительные геометрические условия совместности в виде

$$\begin{gathered} zU_3^3 + (a_{31} + a_3 c_2) U_3^2 + a_3 H_1 U_3 - a_3^2 y H = 0, \\ H a_3 U_{33} - 2U_2 U_3^3 + 2a_3 U_3^3 + \\ + (H_2 - a_3 H - H_3) U_3^2 - H (a_{33} + a_2 a_3) U_3 = 0. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Рассмотрим для примера критическое движение, у которого $U_3 \neq 0$. Согласно теореме 7 поле направлений такого движения — минимальное $(H = 0)$ и условия (6.6) сводятся к следующим:

$$U_2 = a_3, \quad zU_3 + a_{31} + a_3 c_2 = 0. \tag{6.7}$$

Теорема 9. Критическое стационарное баротропное движение идеального газа, у которого $U_3 \neq 0$, обязательно либо винтовое, либо потенциальное. В любом случае зависимость давления от плотности имеет вид $p = \beta^* - \beta_2 \rho^{-1}$ (газ Чаплыгина). Здесь β и β^* — константы.

Доказательство. Если поле e_3 направлений скорости — неголономное $(z \neq 0)$, то вычисляя $\operatorname{rot} v$, находим, что $\operatorname{rot} v = V z e_3$, т. е. движение винтовое. Если же поле e_3 — голономное $(z = 0)$, то из (4.1)—(4.3) следует, что справедливо равенство $a_{31}+a_3c_2=0$. Второе уравнение (6.7) исчезает. Так как $\text{rot}\ v=0$, то движение потенциальное. Его можно построить следующим образом. Рассмотрим произвольное семейство минимальных поверхностей и произвольную функцию $F(r)$ такую, что эти поверхности являются ее поверхностями уровня. Тогда $v=\text{grad}\ F$. Ясно, что модуль скорсти V опредлеяется с произволом в одну функцию от одного аргумента. Из (4.2) следует, что $U_1=0$. Тогда из (2.5) и (6.2) получаем

$$-dp=\rho V dV,\ \ V d\rho+\rho dV=0.$$

Интегрируя эту систему, получаем указанную в условии теоремы зависимость между плотностью и давлением. Теорема доказана.

В заключение заметим, что если для единичного векторного поля e_3 выполняется соотношение $[\text{rot}\ k,\ e_3]\neq 0$ и хотя бы одно из соотношений $z\neq 0$, $H_1\neq 0$, $a_3\neq 0$ и $y\neq 0$, то зависимость $p=p(\rho)$ определяется единственным образом по известным линиям тока. В самом деле, если поле e_3 неголономное, то функция U_3 определяется единственным образом, причем если $[\text{rot}\ k,\ e_3]\neq 0$, то $U_3\neq 0$, но тогда из теоремы 1 следует, что поле v восстанавливается единственным образом, а тогда из теоремы 6 вытекает, что единственным образом (с точностью до констант), определяются функции φ, γ, а следовательно, и зависимость $p=p(\rho)$. Если поле e_3 голономное, то $z=a_{31}+a_3c_2=0$. Поэтому из первого уравнения (6.6) получаем, что $U_3=H_1^{-1}\ a_3yH$ и предыдущее рассуждение остается в силе. Функция U_3 не определяется из первого уравнения (6.6), если $H=0$ или $H_1=y=z=0$. В первом случае требуемый результат следует из теоремы 9. Второй случай требует особого исследования, которое в этой работе мы делать не будем.

7. Баротропные движения идеального газа, у которых поле направлений скорости удовлетворяет условию $[\text{rot}\ k,\ e_3]=0$. Если поле единичных векторов удовлетворяет условию $[\text{rot}\ k,\ e_3]=0$, то оно может служить полем направлений скорости баротропного движения жидкости, у которого $U_3=0$.

Рассмотрим, какие дополнительные геометрические условия совместности возникают в этом случае.

Теорема 10. Поле единичных векторов e_3 может служить полем направлений скорости для стационарного баротропного движения идеального газа с $U_3=0$ тогда и только тогда, когда поле e_3 минимальное $(H=0)$ и $[\text{rot}\ k,\ e_3]=0$. При этом плотность ρ и скорость звука α постоянны на поверхностях, ортогональных полю k.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что баротропное движение идеальной жидкости с заданным полем направлений скорости при условии $U_3=0$ возможно тогда и только тогда, когда $[\text{rot}\ k,\ e_3]=0$. Дополнительные условия совместности для движения идеального газа следуют из уравнения (6.1). При $U_3=0$ из (2.5) и (6.1) получаем, что $\gamma_1=H=0$.

Условие

$$H=0 \tag{7.1}$$

и является дополнительным геометрическим условием совместности. В самом деле, для любого баротропного движения идеальной жидкости, у которого $U_3=0$, выполняются соотношения (3.9), (3.11). Кроме того, из (5,2) и (6.1) следует, что

$$d\varphi=-\alpha^2 d\gamma,$$

где α^2 — квадрат скорости звука и

$$\alpha^2=\gamma_2^{-1}e^{2U}a_3. \tag{7.2}$$

Поэтому

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = 0. \tag{7.3}$$

Легко проверить, что эти равенства суть тождества и новых геометрических условий совместности не дают. Так как y—скаляр неголономности поля e_2 и $y = 0$, то существует семейство поверхностей, ортогональных полю e_2 (а следовательно, и полю $k = a_3 e_2$). Уравнение этого семейства поверхностей: $\omega^2 = 0$. Отсюда и из (7.3) следует, что $d\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \omega^2)$; а из третьего уравнения (5.2) при $\gamma_1 = U_3 = H = 0$ вытекает, что $d\rho \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \omega^2)$. Следовательно, вдоль поверхностей семейства $\omega^2 = 0$ скорсть звука и плотность постоянны. Теорема доказана.

Очевидно, что ρ определяется с произволом в одну функцию от одного аргумента. Поэтому зависимость $p = p(\rho)$ может быть произвольной. Важно только, чтобы у функций p и ρ были общие поверхности уровня (это должны быть поверхности, ортогональные полю k). Так как эти поверхности являются поверхностями тока, то из теоремы следует также, что у баротропных движений газа с $U_3 = 0$ число Маха M постоянно вдоль каждой линии тока. Этот результат был получен С. С. Бюшгенсом в [19] для случая, когда зависимость $p = p(\rho)$ политропная.

Теорема 11. Если поле e_3 направлений скорости стационарного баротропного движения идеального газа минимальное и $\mathrm{rot}\ k = 0$, то число Маха постоянно вдоль каждой из поверхностей семейства $\omega^2 = 0$.

Доказательство. Если $\mathrm{rot}\ k = 0$, то условие $[\mathrm{rot}\ k, e_3] = 0$ также выполняется, и мы находимся в сфере применимости предыдущей теоремы. Следовательно, вдоль каждой из поверхностей семейства $\omega^2 = 0$ скорость звука постоянна. Но из $a_{31} + a_3 c_2 = 0$ и из (3.11) следует, что $U_1 = 0$. Поэтому V также постоянно вдоль этих поверхностей, что и доказывает теорему.

Заметим, что, в частности, на таком поле направлений можно построить и критическое движение ($M = 1$).

Теорема 12. Если у критического стационарного движения идеального газа $U_3 = 0$, то $\mathrm{rot}\ k = 0$.

Доказательство. Если $U_3 = 0$, то из теоремы 10 следует, что $d\alpha = 0$ вдоль поверхностей семейства $\omega^2 = 0$. Если движение критическое ($M = 1$), то должно быть $dU \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \omega^2)$. Тогда $U_1 = 0$, т. е. $a_{31} + a_3 c_2 = 0$. Подставляя это соотношение в (3.10) и учитывая, что $[\mathrm{rot}\ k, e_3] = 0$, получаем, что $\mathrm{rot}\ k = 0$. Теорема доказана.

Эта теорема вместе с теоремой 9 дает геометрическое описание стационарных баротропных критических движений идеального газа. Эти движения делятся на три класса.

1. Потенциальное движение, ортогональное семейству минимальных поверхностей.

2. Винтовое движение с минимальным полем направлений скорости.

Зависимость плотности от давления у движений этих классов имеет вид

$$p = -\beta^2 p^{-1} + \beta^* \quad (\beta = \mathrm{const}, \ \beta^* = \mathrm{const})$$

(газ Чаплыгина).

3. Движение с постоянной величиной скорости вдоль каждой линии тока ($U_3 = 0$). Поле направлений скорости минимальное ($H = 0$) и поле векторов кривизны линий тока потенциальное ($\mathrm{rot}\ k = 0$). Модуль скорсти V, скорость звука и плотность постоянны вдоль каждой из эквипотенциальных поверхностей поля k. Зависимость давления от плотности произвольная. Существует бесчисленное множество (произвол —

две функции от одного аргумента) критических движений с одними и теми же линиями тока.

Этот результат является обобщением теорем С. С. Бюшгенса [19] и E. Storchi [20]. С. С. Бюшгенс получил третий класс для случая политропной зависимости давления от плотности. E. Storchi получил первый и третий классы для плоских критических движений.

Заметим еще, что найденные С. С. Бюшгенсом [6] геометрические условия совместности для стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости, у которого $U_3 = 0$, в точности совпадают с геометрическими условиями совместности для движения идеального газа с $U_3 = 0$. (В [6], кроме $H = 0$ и $[\operatorname{rot} k, e_3] = 0$, приведено еще одно условие, но оно является следствием первых двух). Отсюда следует

Теорема 13. Если на поле единичных векторов e_3 как на поле направлений скорости можно построить стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости с $U_3 = 0$, то на этом же поле можно построить и стационарное баротропное движение идеального газа с $U_3=0$ произвольной зависимостью давления от плотности.

Заметим, что для движений с $U_3 \neq 0$ аналогичная теорема неверна.

Рассмотрим в качестве примера движения идеального газа, у которых $U_3 = 0$, а все линии тока — винтовые линии. Так как a_3 — кривизна линии тока и $\zeta a_3 \neq 0$, а c_3—кручение, то движение с винтовыми линиями тока характеризуется условиями $a_{33} = c_{33} = 0$. Вместе с (3.9) — (3.11) и $H = b_1 + a_2 = 0$ эти условия приводят к следующей системе определяющих соотношений:

$$b_1 = a_2 = c_3 - a_1 = a_{33} = a_{13} = 0.$$

Используя (1.11), получаем $c_2 = a_3 c_1 - a_1^2 = 0$ и система (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= a_3^{-1} a_1^2 \omega^1 + a_1 \omega^3, \\ \omega_3^1 &= b_2 \omega^2, \\ \omega_3^2 &= a_1 \omega^1 + a_3 \omega^3, \end{aligned} \tag{7.5}$$

а продолженная [12] система принимает вид

$$\begin{aligned} da_2 &= (a_1 c_1 + a_1 a_3 - a_3 b_2 + b_2 c_1)\, \omega^2, \\ da_3 &= (2a_1 b_2 + a_1^2 + a_3^2)\, \omega^2, \\ db_2 &= b_{22} \omega^2. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Внешнее дифференцирование первых двух уравнений дает тождества, а внешнее дифференцирование третьего приводит к уравнению $[db_{22}, \omega^2] = 0$, которое в инволюции и широта его решения — одна функция от одного аргумента. Такова же широта решения систем (7.6) и (7.5).

Рассмотрим геометрическую структуру этого движения. Вычисления с помощью (7.5) и (1.7) показывают, что $D\omega^2 = 0$, т. е. ω^2 — полный дифференциал. Обозначим $\omega^2 = ds$. Так как $de_2 \equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}$, то векторные линии поля e_2 прямые. Так как $\omega^2 = ds$, то конгруэнция этих векторных линий нормальная. Найдем, какие поверхности являются интегральными поверхностями уравнения $ds = 0$. Рассмотрим для этого векторное поле

$$l = a_3 e_1 - a_1 e_3. \tag{7.7}$$

В каждой точке вектор l лежит в касательной плоскости поверхности семейства $ds = 0$, проходящей через эту точку. Так как $dl \| l$, то поле l состоит из параллельных векторов. Это возможно тогда и только тогда, когда $ds = 0$ — семейство параллельных цилиндров. Так как на этих цилиндрах лежат винтовые линии, то цилиндры — круговые, а так как у них общие нормали (конгруэнция векторных линий поля e_2 — конгруэнция нормалей к любому цилиндру), то $ds=0$ — семейство круговых цилиндров с общей осью.

Найдем расстояние R от произвольной точки r до общей оси всех цилиндров. Оно найдется из условия $d(r+Re_2) \parallel e_2$, так как ось является вырожденной фокальной поверхностью [21] конгруэнции векторных линий поля e_2. Вычисления показывают, что

$$R=\frac{a_3}{a_1^2+a_3^2}. \tag{7.8}$$

Из (7.7) получаем, что угол σ наклона между вектором e_3, касательным к линии тока, и вектором l образующей цилиндра равен

$$\sigma=\operatorname{arctg}\frac{a_3}{a_1}. \tag{7.9}$$

Из последних двух равенств с помощью (7.6) получаем

$$\begin{gathered} a_1=\frac{\sin 2\sigma}{2R}, \quad a_3=\frac{\sin^2\sigma}{R}, \\ c_1=\cos^2\sigma, \quad ds=dR, \\ d\sigma/dR=b_2. \end{gathered} \tag{7.10}$$

С учетом последнего из равенств (7.6) получаем, что b_2 (а стало быть, и σ) — произвольная функция от R. Суммируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 14. Стационарное баротропное движение идеального газа, у которого все линии тока суть винтовые линии, а модуль скорости не меняется вдоль каждой линии тока, возможно тогда и только тогда, когда линии тока лежат на семействе цилиндров с общей осью. Угол σ между касательной к линии тока и образующей цилииндра, модуль скорости V и плотность ρ являются произвольными функциями от радиуса цилиндра R.

Отметим, что С. С. Бюшгенс [7], исходя из других соображений, получил движение идеальной несжимаемой жидкости с такими же линиями тока.

Среди полученных движений можно отметить следующие более частные классы:

1. Винтовое движение характеризуется тем, что

$$\frac{d\ln V}{dR}=\frac{\sin^2\sigma}{R}.$$

2. Геликоидальное движение [22] характеризутеся тем, что

$$\frac{d\sigma}{dR}=\frac{\sin 2\sigma}{2R},$$

так как при этом поле e_3 голономное, то согласно теореме 9 возможно критическое потенциальное движение $U_3 \neq 0$ и теми же самыми линиями тока. Эквипотенциальными поверхностями поля скоростей v будут геликоиды.

3. Вообще же критическое движение характеризуется равенством

$$\frac{d\rho}{dR}+\rho a_3=0.$$

4. Квазитвердое движение [5] характеризуется тем, что

$$\frac{d\sigma}{dR} + \frac{\sin 2\sigma}{2R} = 0.$$

В этом случае тензор деформации равен нулю и газ движется, как твердое тело, без изменения расстояния между движущимися частицами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фридман. О движении сжимаемой жидкости. Избранные труды. М., «Наука», 1966, 12—18.
2. А. А. Фридман. Теория движения сжимаемой жидкости и ее приложения к атмосферным движениям. Избранные труды. М., «Наука», 1966, 178—226.
3. Б. И. Извеков. Об условиях динамической возможности движения вязкой несжимаемой жидкости. Математ. сб., 32, № 1 (1964), 58—100.
4. R. Bercker. Sur les equations de compatibilite relatives au mouvement d'un gas. Comp. Rend. des seances de L'Acad. des. sciences, Paris, 242, № 3 (1956), 342—344.
5. Г. Георгиев. Дифференциально-геометрические приложения к некоторым нестационарным процессам гидродинамики. Болг. акад. на науките. Изв. матем. инстит., VI (1962) 101—120.
6. С. С. Бюшгенс. Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Известия Акад. наук СССР. Серия матем. 12, № 5 (1948), 481—512.
7. С. С. Бюшгенс. О линиях тока. Доклады Акад. наук СССР, 84, № 5 (1952), 861—864.
8. Gh. Gheorghiev. Cîteva aspecte geometrice legate de miscarea permanenta a unor fluide ideale, Anal. stiin. Univ. «Al. J. Cuza», Jasi, 2, № 1—2 (1956), 69 — 81.
9. Gh. Gheorghiev. Despre unele miscari permanente ale fluidelor în care liniile de curent sînt isotachee. Acad. R. P. Romania, Studii si cercetari stiin. matemat., 8, № 2, (1957), 157—161.
10. В. П. Долговых. О геометрии поля скоростей стационарного баротропного течения идеальной сжимаемой жидкости. III Межвузовская конференция по проблемам геометрии. Казань, 1967, 49—50.
11. В. В. Слухаев и Р. Н. Щербаков. Геометрия векторного поля и ее приложение к гидромеханике. Итоги исследований по математике и механике за 50 лет. Томск, 1967, 99—107.
12. С. П Фиников. Метод внешних форм Картана. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
13. С. С. Бюшгенс. Геометрия векторного поля. Известия Акад. наук СССР. Серия математ., 10, №1 (1946), 73—96.
14. V. Vagner. On the geometrical interpretation of the curvature vector of a non-holonomic V_3 in the three-dimensional Euclidean space. Математ. сб., 4 (46), № 2 (1938), 339—356.
15. Н. Н. Яненко. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. Труды IV Всесоюзного математ. съезда, 2 (1964), 247—252.
16. Б. Л. Рожественский и Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
17. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе. Теоретическая гидродинамика, часть 1, М., 1963.
18. Н. Н. Кочина. Об одном классе вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости. Приклад. математ. и мех., 19, № 6 (1955), 756—760.
19. С. С. Бюшгенс. Критическая поверхность адиабатического потока, Доклады АН СССР, 58, № 4, (1974), 365—368.
20. E. Storchi. Comportamento dei fluidi perfetti inregioni a velocita sonica, Rend. Inst. Lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. natur., 88, № 2, (1955), 389—404.
21. С. П. Фиников. Теория конгруэнций. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
22. Дж. Серрин. Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
23. В. В. Слухаев. К геометрической теории стационарного движения жидкости. Доклады АН СССР, 196, № 3, (1971), 549—552.

6. Заказ 4731

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ КВАЗИТВЕРДЫХ ДВИЖЕНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Г. ГЕОРГИЕВ, М. ИГНАТ

Введение. Недавно мы занимались квазитвердыми движениями в гидродинамике [5] и в магнитной гидродинамике [4] и нашли некоторые их геометрико-кинематические свойства. В нашей интерпретации если v — поле скоростей, то квазитвердые движения определяются тем, что симметрическая часть ковариантной производной равна нулю, то есть

$$\nabla({}_i v_{ji}) = 0, \ (i,i = 1, 2, 3).$$

Необходимое и достаточное условие того, что векторное поле является полем скоростей квазитвердого движения, состоит в том, чтобы оно было ортогональным к неголономной плоскости и чтобы вектор grad log v, где $v = |\bar{v}|$ совпадал, с точностью до знака, с вектором кривизны линий тока поля.

Были установлены и другие замечательные свойстваа. Например, при этом движении имеет $\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v} = 0$. Установлено существование некоторого квазитвердого нестационарного гидродинамического движения с произволом одной функции двух аргументов.

Введенные таким образом квазитвердые движения обобщаются естественным образом (n° 1), даются аналогичные характерные свойства и, при некоторых частных условиях, получаются изотропные конгруэнции линий, введенные впервые Т. Леви-Чивита [6] и исследованные позже В. И. Смирновым [7], С. С. Бюшгенсом [2] и т. д., а также биортогональные конгруэнции [2].

1. Определения. Будем рассматривать регулярные векторные поля $\bar{v}\,(M, t)$, определенные в некоторой ограниченной связной области $\Delta(E_3 \times R_t)$, предполагая их аналитичность в $(M, t) \in \Delta$.

Определение 1. Регулярное векторное поле $\bar{v}(M, t)$ называется полем скоростей обобщенного квазитвердого движения, если компоненты симметрической части его ковариантной производной по отношению к ортонормированному подвижному реперу, присоединенному к v, удовлетворяют условияю

$$\nabla\ ({}_i v_j) = 0, i \neq j,$$

то есть матрица этих компонент будет диагональной.

Определение 2. Векторное поле v есть поле скоростей почти квазитвердого движения, если оно удовлетворяет условиям определения 1, а также

$$\nabla_1 v_1 = \nabla_2 v_2 = \nabla_3 v_3 = \lambda \neq 0,$$

то есть матрица компонент $(\nabla_{(i} v_{j)} = \lambda I$ (I — единичная матрица).

Замечания:

1) если

$$\lambda = 0, \tag{3}$$

то получаем обыкновенные квазитвердые движения, которые исключаются из рассмотрения;

2) координатные условия (1) и (2) имеют внутренний смысл, так как они относятся к компонентам симметрического тензора второго порядка по отношению к какому-либо подвижному реперу, присоединенному к $\bar{v}$; так, например, если $\bar{v} = vI_3$, то I_1, I_2 ортогональны к $\bar{v}$ и нормированы. Истолкования, данные в последующем, подтверждают это.

2. Аналитический аппарат. К каждой точке M и моменту t, причем $(M, t) \in \Delta$, присоединяем ортономированный трехгранник I_j $(j = 1, 2, 3)$ с вершиной в M. Как известно [3], для произвольного элементарного смещения в пространстве параметров Δ (имеющего четыре измерения) можно записать

$$dM = \omega^k J_k, \; dJ_k = \bar{\omega} \times J_k, \text{ где } \bar{\omega} = pJ_1 + qJ_2 + rJ_3, \tag{4}$$

а ω^k — регулярные формы Пфаффа, удовлетворяющие условию $\omega^1 \wedge \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge dt \neq 0$ (5) в каждой точке области Δ. Имеем также

$$p = \bar{p} \cdot d\bar{M} + p_t dt, \; q = \bar{q} \cdot d\bar{M} + q_t dt, \; r = \bar{r} \cdot d\bar{M} + r_t dt. \tag{6}$$

Введенные функции p_i, q_i, r_i, p_t, q_t, $r_t (i = 1, 2, 3)$ зависят от четырех аргументов; они удовлетворяют следующим условиям интегрируемости, которые выводятся из структурных уравнений евклидова пространства [8]:

$$\operatorname{rot} \bar{p} + \bar{q} \wedge \bar{r} = 0, \; \operatorname{rot} \bar{q} + \bar{r} \wedge \bar{p} = 0, \; \operatorname{rot} \bar{r} + \bar{p} \wedge \bar{q} = 0, \tag{7}$$

$$\dot{\bar{p}} + q_t \bar{r} - r_t \bar{q} = \operatorname{grad} p_t, \; \dot{\bar{q}} + r_t \bar{p} - p_t \bar{r} = \operatorname{grad} q_t, \tag{8}$$

$$\dot{\bar{r}} + p_t \bar{q} - q_t \bar{p} = \operatorname{grad} r_t,$$

где

$$\dot{\bar{p}} = \frac{\partial p_k}{\partial t} J_k + p_k \frac{\partial J_k}{\partial t}, \quad \frac{\partial J_1}{\partial t} = J_2 r_t - J_3 q_t \text{ и т. д.} \tag{9}$$

Пусть дано регулярное векторное поле $\bar{v}(M, t)$; выбираем присоединенный к нему подвижной трехгранник (M, I_j) так, чтобы

$$v = vI_3, \tag{10}$$

тогда известные линейные дифференциальные операторы выражаются следующим образом:

$$\begin{gathered} \nabla v = v_1 J_1 + v_2 J_2 + v_3 J_3, \; \operatorname{div} \bar{v} = v_3 + v(q_1 - p_2), \\ \operatorname{rot} \bar{v} = (vp_3 + v_2) J_1 + (vq_3 - v_1) J_2 - v(p_1 + q_2) J_3, \\ (\bar{v}, \nabla) \bar{v} = v [v (q_3 J_1 - p_3 J_2 + v_3 J_3], \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$|\bar{v}| = v, \; dv = v_j \omega^j + v_t dt \tag{12}$$

и

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = v(q_t J_1 - p_t J_2) + v_t J_3. \tag{13}$$

Что касается тензора деформации скорости $\dot{S}(\bar{v})$, то есть симметрической матрицы $(\nabla_{(i}v_{j)})$, то при выборе репера (10) она имеет вид

$$\dot{S}(v) = \begin{pmatrix} vq_1 & \frac{v}{2}(q_2 - p_1) & \frac{1}{2}(v_1 + vq_3) \\ \frac{v}{2}(q_2 - p_1) & -vp_2 & \frac{1}{2}(v_2 - vp_3) \\ \frac{1}{2}(v_1 + vq_3) & \frac{1}{2}(v_2 - vp_3) & v_3 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

3. Обобщенные квазитвердые движения. При выборе (10) подвижного репера (M, I_j) этот последний является присоединенным к полю $\bar{v}$, а потому условия (1) определения 1 в силу (14) будут иметь вид

$$p_1 = q_2, \ (\log v)_1 = -q_3, \ (\log v)_2 = p_3. \qquad (15)$$

Что касается последних двух, то они выражаются также и через

$$\operatorname{Grad} \log v = p_3 J_2 - q_3 J_1 = -\frac{\partial J_3}{\partial \omega^3}, \qquad (16)$$

где Grad $\log v$ есть ортогональная к v компонента $\nabla \log v$. Отсюда следует, что вектор $\nabla \log v$ находится в соприкасающейся плоскости линий тока; более того, Grad $\log v$ совпадает, до знака, с вектором кривизны этих линий; простое вычисление дает, что

$$\frac{\partial J_3}{\partial \omega^3} = \frac{1}{2v^2} \operatorname{rot} \bar{v} \times \bar{v}. \qquad (17)$$

А это показывает, что линии тока обобщенного квазитвердого движения в каждый момент t являются геодезическими на многообразии (вообще неголономном) огибаемом плоскостью Ламба (исключаются из рассмотрения винтовые потоки).

В частном случае, когда обобщенное квазитвердое движение будет и почти бернуллиевым движением, то есть если в каждый момент t плоскости Ламба огибают однопараметрическое семейство поверхностей*), тогда имеем $p_1 + r_3 = 0$, а из (15) следует, что и $g_2 + r_3 = 0$. Следовательно, такие движения характеризуются соотношением (16) и тем, что линии тока образуют биортогональную конгруэнцию [2]. В этом случае нетрудно сформулировать соответствующую трехстороннюю теорему. Впредь исключаются из рассмотрения также медленные движения, для которых $(\bar{v}, \nabla)\bar{v} = 0$, или подробнее $p_3 = q_3 = 0$, $v_3 = 0$. Из первых двух условий видно, что линии тока являются прямыми. Сделанное ограничение позволяет нам выбрать в качестве канонического репера поля трехгранник Френе его линий тока, и тогда $q_3 = 0$, а из (15_2) следует, что $(\log v)_1 = 0$. С другой стороны, условие (15_1) показывает, что $\bar{n}$ и $\bar{b}$, то есть направление главной нормали и бинормали линий тока, являются биссектрисами асимптотических направлений на многообразии M_v ортогональном полю $\bar{v}$. Это следует из того, что вообще асимптотические направления многообразия M_{J_3} даны соотношением [1]

$$p_2 m^2 + (p_1 - q_2) m - q_1 = 0.$$

Иначе говоря, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ являются касательными к линиям кривизны второго рода на многообразии M_v.

---

* Так как квазитвердые движения являются и бернуллиевыми, то есть $\operatorname{rot} \bar{v} \times \bar{v} = \triangle L$.

Это последнее свойство вместе с (16) вполне характеризует поле скоростей какого-либо обобщенного квазитвердого движения, линии тока которого не являются прямыми.

Поскольку у нас $\nabla \log v = p_3 I_2 + (\log. v)_3 I_3$ при сделанном выборе канонического репера, то применяя оператор rot, сразу получаем

$$2p_1 (\log v)_3 = p_{3,1} + p_3 r_2, \tag{18}$$

С другой стороны, из условий интегрируемости (7) после некоторых выкладок получаем, что $p_{3,1} = r_2 p_3 - 2(p_2 + q_1) r_3$, а поэтому имеем

$$p_1 (\log v)_3 = r_2 p_3 - (p_2 + q_1) r_3. \tag{18'}$$

Если $p_1 \neq 0$, то есть поле скоростей $\bar{v}$ не будет ортогонально семейству поверхностей, то тогда имеем следующую замечательную формулу

$$\nabla \log v = p_3 J_2 + \frac{1}{p_1} [r_2 p_3 - (p_2 + q_1) r_3] J_3, \tag{19}$$

которая выражает grad log. v через кривизну и кручение $(-p_3, r_3)$ линий тока и через инварианты ортогонального к ним многообразия M_v.

П р и л о ж е н и е. Пусть $\bar{v}$—поле скоростей стационарного движения идеальной баротропной жидкости, находящейся под действием консервативных сил. В этом случае уравнения движения будут бернуллиевыми, т. е.

$$\text{rot}\, \bar{v} \times \bar{v} = \nabla L. \tag{20}$$

Если движение, происходящее в области Δ, будет обобщенным квазитвердым, то (20) будут иметь вид

$$2v^2 p_3 J_2 = -\nabla L. \tag{21}$$

Применяя к обеим частям (21) оператор rot, получаем

$$2p_1 (\log v)_3 - p_{3,3} + p_3 p_2 = 0, \quad -p_3 (p_1 + r_3) = 0, \quad p_{3,1} + p_3 r_2 = 0. \tag{22}$$

Так как $p_3 \neq 0$, то имеем $p_1 + r_3 = 0$ и, следовательно после $\bar{v}$ в этом случае определяет биортогональную конгруэнцию линий тока.

Сопоставляя (18) и (22_3), находим, что $p_1 (\log v)_3 = 0$.

Случай а). $p_1 = 0$. Из (15_1) и (22_2) имеем $q_2 = r_3 = 0$; это показывает, что линии тока будут плоскими кривыми $r_3 = 0$) и что плоскости их трехгранника Френе огибают триортогональную систему поверхностей. Далее, из условий совместимости (7) вытекают следующие замечательные соотношения:

$$r_2 p_3 = 0, \quad p_{3,1} = p_{2,1} = 0. \tag{23}$$

Так как мы предположили, что $p_3 \neq 0$, то $r_2 = 0$, а это показывает, что одно из семейств линий кривизны системы поверхностей M_v будет одновременно и геодезическими линиями. Итак, в данном случае триортогональная система поверхностей трехгранника Ферне состоит из системы плоскостей ортогональных к I_1, а на остальных двух системах поверхностей одно из семейств их линий кривизны будет геодезическим. Кроме того, проекция вектора кривизны линий тока на вектор I_2 равна $(-p_3)$, а кривизны векторных линий полей $n = I_2$ и I_3 вдоль I_1, остаются неизменными $(p_{3,1} = p_{2,1} = 0)$. В этом случае будем иметь формулу

$$\nabla \log v = p_3 J_2 + \frac{1}{2} [(\log p_3)_3 - p_2] J_3, \tag{24}$$

истолкование которой следует из вышесказанного.

Случай б). $(\log v)_3 = 0$. Это показывает, что вдоль линий тока величина скорости остается неизменной. Тогда $\nabla \log v = p_3 I_2$, откуда легко выводится, что компонента $\nabla \log p_3$, ортогональная к $\bar{n}$, равна

$$\mathrm{Grad} \log p_3 = p_2 I_3 - r_2 I_1 \tag{25}$$

и, в частности, имеем

$$(\log p_3)_1 = -r_2. \tag{26}$$

Так как из условий интегрируемости следует, что $p_{3,1} = r_2 p_3 - 2r_3 (p_2 + q_1)$, то справедливо следующее соотношение:

$$r_2 p_3 - r_3 (p_2 + q_1) = 0 \tag{27}$$

между конечными инвариантами поля $\bar{v}$. Отсюда, между прочим, следует, что при условии $\left(\frac{p_2 + q_1}{r_2}\right)_{,3} = 0$ линии тока будут винтовыми цилиндрическими кривыми.

4. Почти квазитвердые движения. При сделанном выборе (10) подвижного репера (M, I_j) с учетом (14) условия (1) и (2) определения (14) выражаются, очевидно, через (15), а также через

$$(\log v)_3 = q_1 = -p_2 \neq 0. \tag{28}$$

Имея в виду (11), (15) и (28), в этом случае $\mathrm{div}\, \bar{v} = 3vq_1 = -3vp_2 \neq 0$, а также

$$-\nabla \log v = \frac{\partial J_3}{\partial \omega^3} + p_2 J_3, \tag{29}$$

последнее соотношение можно переписать и в виде

$$\nabla \log v = \bar{p} \times \bar{b}. \tag{29'}$$

При выборе трехгранника Френе линий тока каноническим репером поля $\bar{v}$ имеем

$$(\log v)_1 = q_3 = 0, \tag{30}$$

что приводит нас к соотношению

$$\nabla \log v = p_3 I_2 - p_2 I_3. \tag{29''}$$

Условия (15) и (28) дают, между прочим,

$$p_1 - q_2 = p_2 + q_1 = 0, \tag{31}$$

а это показывает, что конгруэнция линий тока в каждый момент t будет изотропной (впредь исключаем изотропные конгруэнции прямых); иначе говоря, $M_{\bar{v}}$ в данном случае будет неголономной сферой.

С учетом (30) и (31) условия интегрируемости (7) приводят нас к тому, что

$$p_{3,1} = r_2 p_3, \ p_{3,2} + p_3 (p_3 + r_1) = 0. \tag{32}$$

С другой стороны, применяя оператор rot к (29), получаем

$$p_{3,1} + p_3 r_2 + 2p_1 p_2 = 0, \ p_{3,3} + p_{2,2} = 0, \ p_{2,1} + p_3 (p_1 + r_3) = 0. \tag{33}$$

Сопоставляя (32_1) и (33_1), получаем следующее замечательное конечное соотношение между инвариантами поля:

$$p_3 r_2 + p_2 p_1 = 0, \tag{34}$$

которое дает возможность определить кривизну p_3 линий тока.

В частности, если $p_1 = 0$, то линии тока ортогональны однопараметрическому семейству сфер и из (34) следует, что $r_2 = 0$ (так как

$p_3 \neq 0$). Это показывает, что главная нормаль линий тока касательна к геодезическим линиям, то есть к семейству больших окружностей данной системы сфер.

В данном случае при соответствующем выборе канонического репера следствия определения, выбора репера и условий интегрируемости (7), можно выразить сжато так:

$$\begin{aligned} \nabla p_1 &= p_{3,3}J_1 + p_3(r_3 - p_1)J_2 + p_1p_2J_3, \\ \nabla p_2 &= p_3(p_1 + r_3)J_1 - p_{3,3}J_2 + (p_2^2 - p_1^2 - r_1p_3)J_3, \\ \nabla p_3 &= r_2p_3J_1 - p_3(p_3 + r_1)J_2 + p_{3,3}J_3. \end{aligned} \tag{35}$$

Итак, сейчас можно дать следующее характерное свойство почти квазитвердых движений: их линии тока образуют изотропную конгруэнцию (при $t = \text{const}$), а $\nabla \log v$ дан соотношением (29′). При сделанном выборе канонического репера получается конечное соотношение (34) и дифференциальные условия (35).

Ввиду применений, следующих ниже, полезно заранее рассмотреть внимательно случай, когда почти квазитвердые движения будут в то же время и почти бернуллиевыми. Так как тогда $p_1 + r_3 = 0$, из (34) имеем $p_3r_2 - p_2r_3 = 0$. Отсюда следует, что при $\left(\frac{r_2}{p_2}\right)_3 = 0$ линии тока будут винтовыми цилиндрическими кривыми.

Далее, из (35) и дифференциальных следствий (34) выводится соотношение

$$p_1[p_2(\log p_3)_3 + p_1^2 + r_1p_3 - p_2^2] = 0.$$

Возможны два случая.

Случай а) $p_1 = 0$. При этом линии тока будут ортогональны к однопараметрической системе сфер и $r_3 = 0$, а тогда в силу (34) и $r_2 = 0$. В этом случае плоскости трехгранника Френе линий тока огибают триортогональную систему поверхностей, состоящую из одной системы сфер оргтогональной к конгруэнции окружностей ($p_{3,3} = 0$), одной системы плоскостей и системы поверхностей вращения. В данном случае все условия интегрируемости поставленной задачи выражаются сжато так:

$$\begin{aligned} \nabla p_2 &= (p_2^2 - r_1p_3)J_3, \quad \nabla p_3 = -p_3(p_3 + r_1)J_2, \\ \nabla r_1 &= r_1J_1 + (r_1^2 + p_1^2)J_2 + p_2(r_1 + p_3)J_3. \end{aligned} \tag{36}$$

Случай б). $p_1 \neq 0$; поскольку $p_2 \neq 0$ то имеем

$$(\log p_3)_3 = p_2 - \frac{r_1p_3 + p_1^2}{p_2}, \tag{37}$$

откуда вытекает, между прочим, что линии тока будут иметь постоянную кривизну тогда и только тогда, когда удовлетворено условие $p_2^2 = p_1^2 + r_1p_3$.

5. Приложение 1. Почти квазитвердое стационарное движение идеальной жидкости является частным случаем приложения п. 3. Но здесь, имея в виду (28), $(\log v)_3 \neq 0$, исключается случай б). Остается рассмотреть случай а), когда $p_1 = 0$. Сопоставляя (24) и (29)″, получаем, что

$$(\log p_3)_3 = -p_2. \tag{38}$$

Но из (35) следует, что $p_{3,3} = 0$, а тогда из (38) $p_2 = 0$, что также противоречит (28). Итак, почти квазитвердые стационарные движения идеальной жидкости не имеют места.

Приложение 2. Стационарные движения вязкой жидкости, являющиеся одновременно почти квазитвердыми и почти бернуллиевыми. В данном случае уравнения гидродинамики имеют вид

$$\operatorname{div}(\rho\bar{v}) = 0, \tag{39}$$

$$\operatorname{rot}\bar{v}\times\bar{v} = \nabla L + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla\operatorname{div}\bar{v} + \frac{\mu}{\rho}\triangle\bar{v}. \tag{40}$$

Имея в виду (28), сведем (39) к условию

$$(\log\rho)_3 = 3p_2. \tag{41}$$

Затем вычислим операторы $\nabla\operatorname{div}\bar{v}$ и $\operatorname{rot}^2\bar{v}$

$$\nabla\operatorname{div}\bar{v} = -3v\{p_3(p_1+r_3)J_1 + (p_2p_3 - p_{3,3})J_2 - (p_1^2 + p_1p_3)J_3\}, \tag{42}$$

$$\operatorname{rot}^2\bar{v} = 4v[-p_3(p_1+r_3)J_1 + p_{3,3}J_2 + (p_3r_1 + p_1^2)J_3]. \tag{43}$$

Отсюда можно сразу заметить, что при квазитвердом движении имеем следующую замечательную формулу:

$$\frac{1}{3}\nabla\operatorname{div}\bar{v} - \frac{1}{4}\operatorname{rot}^2\bar{v} = -vp_2p_3J_2 \tag{44}$$

или, что то же

$$\frac{1}{3}\nabla\operatorname{div}\bar{v} = \frac{1}{4}\operatorname{rot}^2\bar{v} + \frac{\operatorname{div}\bar{v}}{6}\frac{\bar{v}\times\operatorname{rot}\bar{v}}{v^2}, \tag{44'}$$

так как $\bar{v}\times\operatorname{rot}\bar{v} = 2v^2p_3J_2$.

Пользуясь известной формулой

$$\operatorname{rot}^2\bar{v} = \nabla\operatorname{div}\bar{v} - \triangle\bar{v}, \tag{45}$$

выводим

$$\triangle\bar{v} = -4vp_3p_2J_2 - \frac{1}{3}\nabla\operatorname{div}\bar{v},$$

а тогда уравнение движения (40) принимает вид

$$\left(\frac{4\mu}{\rho}p_2 - 2v\right)vp_3J_2 = \nabla L + \frac{2\mu+3\lambda}{\rho}\nabla\operatorname{div}\bar{v}. \tag{46}$$

Но мы знаем, что движение будет и почти бернуллиевым, если

$$p_1 + r_3 = 0, \tag{47}$$

что следует очевидно и из (46).

Итак, в данном случае все найденные кинематико-геометрические соображения, выведенные в конце предыдущего параграфа, можно сейчас использовать.

Так, например, в случае б), когда $p_1 \neq 0$, на основе соотношения (37), $\nabla\operatorname{div}\bar{v}$ будет дано сейчас простой формулой

$$\nabla\operatorname{div}\bar{v} = \Lambda(J_2 - p_2J_3), \tag{48}$$

где

$$\Lambda = -\frac{3v}{p_2}(p_1^2 + r_1p_3). \tag{49}$$

Вообще для почти квазитвердых движений после несложных выкладок получаем

$$\frac{1}{4v}\operatorname{rot}^3\bar{v} = [p_2^2p_3 - p_2p_{3,3} + p_3(p_1^2 + r_1p_3)]J_1 -$$

$$-p_2p_3(p_1+r_3)J_2 + p_3[2p_2r_2 + p_3(p_1+r_3)]J_3. \tag{50}$$

В случае б) и $(p_1 + r_3 = 0)$ имеем

$$\frac{1}{8vp_3}\operatorname{rot}^3 \bar{v} = (p_1^2 + r_1 p_3) J_1 + p_2 r_2 J_3. \tag{51}$$

В случае а) имеем $\operatorname{rot}\bar{v} = 2vp_3 J_1$, и, следовательно, вектор $\operatorname{rot}\bar{v}$ направлен по бинормали линий тока. Находим также $\operatorname{rot}^2\bar{v} = 4vp_3 r_1 J_3$, то есть $\operatorname{rot}^2\bar{v} \times \bar{v} = 0$, в то время как $\operatorname{rot}^3\bar{v} = 4vp_3(p_2^2 + p_3 r_1) J_1$, то есть

$$\operatorname{rot}^3\bar{v} \times \operatorname{rot} v = 0.$$

Было бы интересно проследить, имеет ли место формула

$$\operatorname{rot}^{k+2}\bar{v} \times \operatorname{rot}^k \bar{v} = 0 \tag{52}$$

для всех целых $k > 0$.

Дифференциальные следствия уравнения движения (46) получаем, применяя оператор rot: одно из них совпадает с (47), а из остальных двух можно будет определить $(\log\rho)_1$ и $(\log\rho)_2$, которые вместе с (41) дадут $\nabla\log\rho$; применяя к этому последнему выражению оператор rot, получим все условия совместимости.

Приложение 3. Нестационарные движения идеальной жидкости, являющиеся одновременно почти квазитвердыми и почти бернуллиевыми. В данном случае уравнения гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v}) = 0, \quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{v} = \nabla L. \tag{53}$$

У нас эти уравнения выражаются через соотношения:

$$\frac{1}{v}(\log\rho)_t + (\log\rho)_3 = 3p_2, \tag{54}$$

$$v_t J_3 + v(q_t J_1 - p_t J_2) - 2v^2 p_3 J_2 = \nabla L. \tag{55}$$

Дифференциальные следствия последнего уравнения, выражающиеся теоремой Гельмгольца

$$\frac{\partial\operatorname{rot}\bar{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{v} \times \bar{v}) = 0, \tag{56}$$

дают

$$\begin{gathered} 2[(\log v)_t + p_{3,t} - p_1 q_t] + v[3p_2 p_3 - p_{3,3}] = 0, \\ 2(p_3 r_t + p_1 p_t) - vp_3(p_1 + r_3) = 0, \\ -2[p_3 q_t - (\log v)_t p_1 - p_{,t}] + v(p_{3,1} + p_3 r_2) = 0. \end{gathered} \tag{57}$$

Учитывая, что движение в то же время и почти бернуллиево (и имеют место все следствия предыдущего параграфа), приходим к разбору случаев а) и б).

Случай а). В данных условиях (57) дает

$$2[(\log v)_t p_3 + p_{3,t}] + 3p_2 p_3 v = 0, \; p_3 r_t = 0, \; -2p_3 q_t = 0. \tag{57'}$$

Так как $p_3 \neq 0$, то имеем

$$(\log v)_t + (\log p_3)_t + \frac{3}{2}vp_2 = 0, \; r_t = q_t = 0. \tag{57''}$$

Из последних двух соотношений вытекает, что $\dfrac{dI_1}{dt} = 0$, а это значит, что направление бинормалей траекторий частиц стационарно.

Итак, неустановившееся движение жидкости ламинарно и происходит в системе плоскостей, ортогональных к J_1, при помощи формул (7) и (8), вычисляются условия интегрируемости нашей задачи, которые можно выразить сжато так:

$$dp_2 = (p_2^2 - r_1p_3)\,\omega^3 + p_tr_1dt,$$

$$dp_3 = -p_3\left\{(p_3 + r_1)\omega^2 + \left[(\log v)_t + \frac{3}{2}vp_2\right]dt\right\},$$

$$dr_1 = r_{1,1}\omega^1 + (r_1^2 + p_2^2)\,\omega^2 + p_2(r_1 + p_3)\,\omega^3 + p_2p_tdt, \tag{58}$$

$$d(\log v)_t = \left\{p_2p_t + p_3\left[(\log v)_t + \frac{3}{2}vp_2\right]\right\}\omega^2 + p_t(r_1+p_3)\,\omega^3 + (\log v)_{tt}\,dt,$$

$$dp_t = -p_t(p_3 + r_1)\,\omega^2 + \left\{p_2p_t - p_3\left[(\log v)_t + \frac{3}{2}vp_2\right]\right\}\omega^3 + p_{tt}dt.$$

Что касается существования и общности решений исследуемых нами движений, то это сводится к исследованию инволютивности следующей системы Пфаффа, частичным продолжением которой является система (58)

$$dp = p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_tdt,\quad dq = -p_2\omega^1,\quad dr = r_1\omega^1,$$

$$d(\log v) = p_3\omega^2 - p_2\omega^3 + (\log v)_t\,dt,\quad d(\log \rho) = (\log \rho)_1\,\omega^1 +$$

$$+ (\log \rho)_2\,\omega^2 + \left[3p_2 - \frac{1}{v}(\log \rho)_t\right]\omega^3 + (\log \rho)_t\,dt, \tag{59}$$

$$dL = -v(p_t + 2vp_3)\,\omega^2 + v_t\omega^3 + L_tdt.$$

В этой системе $S_0 = 6$, $N = 9$, а числа Картана [8] суть

$$S_1 = 6,\ S_2 = 2,\ S_3 = 1.$$

Система (59) — в инволюции, и ее регулярные решения зависят от одной функции трех аргументов.

В случае б) ограничимся исследованием существования регулярных решений, что сводится к исследованию следующей системы Пфаффа:

$$dp = p_1\omega^1 + p_2\omega^2 + p_3\omega^3 - \frac{p_3}{p_1}r_tdt,\quad dq = -p_2\omega^1 + p_1\omega^2 + q_tdt,$$

$$dr = r_1\omega^1 - \frac{p_2p_1}{p_3}\,\omega^2 - p_1\omega^3 + r_tdt,\quad d(\log v) =$$

$$= p_3\omega^2 - p_2\omega^3 + (\log v)_t\,dt,\quad d(\log \rho) = (\log \rho)_1\omega^1 +$$

$$+ (\log \rho)_2\,\omega^2 + \left[3p_2 - \frac{1}{v}(\log \rho)_t\right]\omega^3 + (\log \rho)_t\,dt, \tag{60}$$

$$dL = vq_t\omega^1 - v(p_t + 2v^2p_3)\,\omega^2 + v_t\omega^3 + L_tdt.$$

В (60_1) было использовано условие (57_2), которое здесь имеет вид $p_3r_t + p_1p_t = 0\ (p_1 \neq 0)$.

В этой системе $S_0 = 6$, $N = 11$; $S_1 = 6$, $S_2 = 4$, $S_3 = 1$. Итак, как и в предыдущем случае, произвольность регулярных решений будет зависеть от одной функции трех аргументов.

Приложение 4. О сферических и плоских движениях жидкости. В связи с изотропностью конгруэнции линий тока и поля единичных векторов касательных к этим кривым отметим возможность исследования сферических и плоских движений жидкостей как частных случаев движения вдоль неголономной сферы или неголономной плоскости. Если после скоростей $\overline{v} = vI_3$, где (M, I_j) — подвижной репер, присоединенный к полю $\overline{v}$, то I_1 можно выбрать по нормали к неголономному многообразию, вдоль которого течет жидкость в данный момент времени.

Матрица мгновенных вращений поля нормалей I_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} q_2 & q_3 & q_1 \\ r_2 & r_3 & r_1 \\ p_2 & p_3 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что в момент $t = \text{const}$ движение жидкости будет движением вдоль неголономной сферы при условиях $q_2 = r_3$, $q_3 = -r_2$, то есть поле нормалей I_1 будет касательным к линиям изотропной конгруэнции; если же $q_2 = r_3 = 0$, $q_3 + r_2 = 0$, то жидкость течет вдоль однопараметрической системы сфер.

В случае, когда $q_2 = r_3$ и $q_3 = r_2 = 0$ течение жидкости в данный момент $t = \text{const}$ происходит вдоль неголономной плоскости; и наконец, если же $q_2 = r_3 = q_3 = r_2 = 0$, то течение происходит вдоль однопараметрической системы плоскостей. Для того чтобы неустановившееся движение было ламинарным в однопараметрической системе сфер или плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы имели место еще и соотношения $p_t = r_t = 0$.

В каждом из этих случаев следует иметь в виду и условия интегрируемости (7) и (8), а для конкретных жидкостей присоединять уравнения гидродинамики и их дифференциальные следствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Бюшгенс. Геометрия векторного поля. Известия Акад. наук СССР, серия мат., 10, 1946, 73—96.
2. С. С. Бюшгенс. К теории конгруэнций линий. ДАН СССР, 97, 1954, 381—384.
3. Г. Георгиев. Дифференциально-геометрические приложения к некоторым нестационарным процессам гидродинамики. Известия матем. института (Болгарская Акад. наук), 6, 1962, 101—120.
4. G. Gheorghiev e M. Jgnat. Su alcuni moti intrinseci notevoli nella magnetoidrodinamica. Atti dei Lincei, 48, 1970, fasc. 1, 57—63, fasc. 2, 215—219.
5. G. Gheorghiev e M. Jgnat. Su alcuni moti intrinseci notevoli nella idrodinamica. Atti dei Lincei, 48, 1970, fasc. 3, 317—323, fasc. 4, 417—421.
6. T. Levi-Civita. Sulle congruenze di curve. Atti dei Lincei, serie V, 8_1, 1899.
7. В. И. Смирнов. О сопряженных функциях. Вестн. Ленинградск. ун-та, серия мат.-физ.-хим., № 3, 1953, 3—12, № 11, 1953, 3—12, № 5, 1954, 3—17.
8. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М., 1948.

ТРУДЫ

ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ, У КОТОРОГО ВТОРОЙ АБСОЛЮТНЫЙ ИНВАРИАНТ РАВЕН НУЛЮ

В. М. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

1. Четырехпараметрическим полем направлений («полем») называется четырехпараметрический образ Φ_4 [1], элементом которого является прямая («луч») с заданной на ней точкой («начало луча»). Пусть M — начало луча. Конус с вершиной в точке M, образованный лучами поля, называется начальным. Метрический репер поля построен в [2] следующим образом: начало репера помещено в точку M, вектор e_3 направлен по лучу, а вектор e_1 — по нормали к начальному конусу.

Деривационные формулы канонического репера поля имеют вид

$$dM = \omega^k e_k, \ de_j = \omega_j^k e_k, \ \omega_j^k = -\omega_k^j, \tag{1}$$

где

$$\omega_3^1 = b_k \omega^k, \ \omega_1^2 = c_i \omega^i, \tag{2}$$

причем

$\omega_3^2 \equiv \omega^4$, $[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4] \pm 0$, $(j, \ k = 1, \ 2, \ 3; \ i = 1, \ 2, \ 3, \ 4)$

и все функции, а следовательно, и дифференциальные формы считаются вещественнозначными и удовлетворяющими обычным требованиям локальной дифференциальной геометрии.

Основная система дифференциальных уравнений поля, получаемая замыканием формул (2) с учетом (1), имеет вид

$$\begin{gathered}
[db_1 + b_2(b_3 - c_2)\omega^2 - b_2c_3\omega^3 + (c_1 - b_2c_4)\omega^4, \ \omega^1] + \\
+ [db_2 + b_1c_1\omega^1 + b_1(b_2 + c_3)\omega^3 + (b_3 + c_2 + b_1c_4)\omega^4, \ \omega^2] + \\
+ [db_3 - (b_1^2 + b_3^2)\omega^1 + (c_3 - b_2)\omega^4, \ \omega^3] = 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
[dc_1 - (c_1^2 + c_2^2 - b_2c_3 + b_1c_2c_4 - b_2c_1c^4)\omega^2 - (c_2c_3 - b_1c_1 - b_3c_3)\omega^3, \ \omega^1] + \\
+ [dc_2 + (c_1c_3 + b_2c_1 - b_2c_3c_4 + b_3c_2c_4)\omega^3 - b_2c_4^2\omega^4, \ \omega^2] + \\
+ [dc_3 + c_4(b_3c_1 - b_1c_3)\omega^1 - (c_2 + b_3 + b_3c_4^2)\omega^4, \ \omega^3] + \\
+ [dc_4 + (c_2c_4 + b_1 + b_1c_4^2)\omega^1 + (b_2 - c_3 - c_1c_4)\omega^2, \ \omega^4] = 0,
\end{gathered}$$

причем

$$D\omega^1 = [\omega_1^2\omega^2] - [\omega_3^1\omega^3], \ D\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega^4],$$

$$D\omega^3 = [\omega_3^1\omega^1] + [\omega^4\omega^2], \ D\omega^4 = [\omega_3^1\omega_1^2].$$

2. Поле

$$b_1 = b_2 = 0, \tag{4}$$

очевидно, характеризуется обращением в нуль второго абсолютного инварианта i_2 [2]:

$$i_2 = \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_4^2 + 1}.$$

Из системы (3) при $b_1 = b_2 = 0$ следует, что $c_1 = 0$ и $b_3 = c_2$. При $b_1 = b_2 = c_1 = 0$, $b_3 = -c_2$ система (3) принимает вид:

$$[\Delta c_2 \omega^3] = 0, \ [\Delta c_2 \omega^2] + [\Delta c_3 \omega^3] + [\Delta c_4 \omega^4] = 0, \tag{5}$$

где

$$\Delta c_2 = dc_2 + c_2^2 \omega^1 - c_2^2 c_4 \omega^3 - c_3 \omega^4,$$
$$\Delta c_3 = dc_3 + 2c_2 c_3 \omega^1 + c_2 c_4^2 \omega^4,$$
$$\Delta c_4 = dc_4 + c_2 c_4 \omega^1 - 2c_3 \omega^2.$$

Обычным путем можно установить, что эта система в инволюции и определяет поле с произволом в одну функцию двух аргументов, что, впрочем, вытекает из указанного в п. 7 безынтегрального построения. Ниже, в пп. 3—6, будут рассмотрены другие свойства поля (4).

3. Конгруэнция [2]

$$\omega^3 = \omega^4 = 0 \tag{6}$$

в произвольном поле $\{M, e_3\}$ характеризуется тремя условиями: 1) вдоль нее начало луча перемещается ортогонально лучу e_3; 2) один из ее торсов является цилиндром; 3) нормаль второго торса параллельна вектору e_2. Так как абсцисса торса конгруэнции (6) равна $-b_1^{-1}$, а нормаль к цилиндру конгруэнции параллельна вектору $n \parallel (b_1 e_1 + b_2 e_2)$, то при $b_2 = 0$ конгруэнция (6) является нормальной, а при $b_1 = 0$ — бицилиндрической.

Чтобы конгруэнция (6) вырождалась в связку параллельных прямых, необходимо и достаточно, как видно из (1), чтобы выполнялись условия (4).

Из (1) следует, что вдоль (6) при условии (4) плоскость

$$(R - M, \ e_1, \ e_2) = 0 \tag{7}$$

неподвижна. Так как система (6) в поле (4) вполне интегрируема, то это поле расслаивается на ∞^2 конгруэнций (6) и, следовательно, двупараметрическое семейство плоскостей (7) огибает некоторую поверхность.

4. Присоединяя к четырехпараметрическому полю направлений канонический репер (e_1, e_2, e_3) так, чтобы вектор e_3 описывал рассматриваемое поле, мы получаем еще два четырехпараметричских поля направлений: поле $\{M, e_1\}$ и поле $\{M, e_2\}$. Как уже отмечалось в работе [3], при $c_4 = 0$ начальный конус вырождается в плоскость и совокупность лучей поля $\{M, e_1\}$ вырождается в комплекс. Покажем, что возможен еще один случай вырождения поля $\{M, e_1\}$ в комплекс, а именно поле (4). В самом деле, рассмотрим торс $\omega_2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$, $\omega^1 = ds$ поля $\{M, e_1\}$. Его деривационные формулы имеют вид

$$\frac{dM}{ds} = e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = c_1 e_2 - b_1 e_3, \quad \frac{de_2}{ds} = -c_1 e_1, \quad \frac{de_3}{ds} = b_1 e_1.$$

Очвидно, данный торс вырождается в прямую тогда и только тогда, когда

$$b_1 = c_1 = 0. \tag{8}$$

Следовательно, условие (8) является достаточным, чтобы совокупность лучей поля $\{M, e_1\}$ вырождалась.

Из (3) и (8) следует, что

$$b_2 \cdot c_4 = 0.$$

Здесь возможны два случая: $c_4 = 0$ и $c_4 \neq 0$. Первый случай (поле $b_1 = c_1 = c_4 = 0$) был рассмотрен в работе [3], причем наличие условий $c_4 = 0$ и $b_1 = c_1 = 0$ привело к тому, что совокупность лучей $\{M, e_1\}$ выродилась в конгруэнцию. Если же $c_4 \neq 0$, то $b_2 = 0$ и мы приходим к условиям (4).

Ниже рассматривается поле, характеризующееся условиями:

$$b_1 = b_2 = 0, \; c_4 \neq 0. \tag{4'}$$

5. Соотношения (4′) можно получить и из других соображений. Рассмотрим задачу: при каких условиях поле $\{M, e_3\}$ расслаивается на конгруэнции, вдоль которых

$$(dM, \mathbf{e}_3) = 0, \; de_1 = 0, \tag{9}$$

т. е.

$$\omega^3 = 0, \quad c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + c_4\omega^4 = 0, \quad b_1\omega^1 + b_2\omega^2 = 0.$$

При $c_4 \neq 0$ ранг полученной системы равен двум, лишь когда $b_1 = b_2 = 0$. При этом конгруэнция, вдоль которой выполняются условия (9), определяется соотношениями:

$$\omega^3 = 0, \; c_2\omega^2 + c_4\omega^4 = 0. \tag{10}$$

Нетрудно установить, что множество точек M лучей конгруэнции (10) образует цилиндрическую поверхность (T), у которой образующая направление по вектору e_1, а ортогональная направляющая (l) определяется системой $\omega^1 = \omega^3 = 0$, $c_2\omega^2 + c_4\omega^4 = 0$. Вдоль (10) лучи поля $\{M, e_3\}$ образуют конгруэнцию нормалей к цилиндру T. Так как вдоль (10) при $b_1 = b_2 = 0$, $c_4 \neq 0$ лучи поля $\{M, e_1\}$ образуют цилиндрическую поверхность, и оно расслаивается на ∞^2 конгруэнций (10), то совокупность лучей поля $\{M, e_1\}$ при $b_1 = b_2 = 0$, $c_4 \neq 0$ образует комплекс (K).

Замечание. Если потребовать, чтобы поверхность T была круговым цилиндром с постоянным вдоль всего поля радиусом, т. е. чтобы $c_4 \cdot c_2^{-1} = \text{const}$, то получится частный класс поля (4′), рассмотренный в работе [4].

6. Пусть $M_t = M + te_1$ — точка на луче e_1. Тогда

$$dM_t = (\omega^1 + dt)\, e_1 + (\omega^2 + t\omega_1^2)\, e_2 + (\omega^3 - t\omega_3^1)\, e_3. \tag{11}$$

Отсюда находим уравнение торсов поля $\{M, e_1\}$

$$\omega^2\omega_1^2 + \omega^2\omega_3^1 = 0,$$

которое с учетом (4′) принимает вид

$$\omega^3(c_3\omega^3 + c_4\omega^4) = 0.$$

Если левая часть уравнения торсов комплекса распадается в произведение линейных множителей, то, как отмечено в [2], комплекс является либо специальным, либо цилиндрическим. Чтобы решить, какой именно из них, нужно рассмотреть конгруэнцию торсов [2] комплекса, имеющих общий фокус. Если этот фокус является собственным, то комплекс специальный, в противном случае, цилиндрический.

При $b_1 = b_2 = 0$ вдоль $c_3\omega^3 + c_4\omega^4 = 0$, как видно из (11), все линейчатые поверхности поля $\{M, e_1\}$ имеют общий фокус M_t (его абсцисса равна $-c_2^{-1}$). Таким образом, доказано, что комплекс K при $c_2 \neq 0$ является специальным.

Если же $c_2 = 0$, то из системы (5) вытекает, что $c_3 = 0$, и следовательно,

$$b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0. \tag{12}$$

Тогда каждое из полей $\{M, e_1\}$, $\{M, e_2\}$ и $\{M, e_3\}$ вырождается в цилиндрический комплекс. Безынтегральное построение поля (12) было дано в работе [5].

7. Чтобы построить поле $b_1 = b_2 = 0$, $c_2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$, рассмотрим произвольный специальный комплекс. Его деривационные формулы имеют вид

$$dA = \omega^1 I_1 + \omega^3 I_3, \; dI_1 = \omega_1^2 I_2 - \omega_3^1 I_3, \tag{13}$$

$$dI_2 = -\omega_1^2 I_1 - \omega_3^2 I_3, \; dI_3 = \omega_3^1 I_1 + \omega_3^2,$$

причем

$$\omega_1^2 = x_1 \omega^1 + x_3 \omega_3^2, \; \omega^3 = -x_3 \omega^1 - x_6 \omega_3^2.$$

Полагая

$$M = A + t(I_1 \cos\varphi + I_3 \sin\varphi), \; e_3 = I_2,$$

$$e_1 = I_1 \cos\varphi + I_3 \sin\varphi, \; e_2 = I_1 \sin\varphi - I_3 \cos\varphi,$$

находим

$$dM = \Omega^k e_k, \; de_1 = \Omega_1^2 e_2 - \Omega_3^1 e_3,$$

$$de_2 = -\Omega_1^2 e_1 - \Omega^4 e_3, \; de_3 = \Omega_3^1 e_1 + \Omega^4 e_2,$$

где

$$\Omega^1 = \omega^3 \sin\varphi + dt, \; \Omega^2 = -\omega^3 - td\varphi + t\omega_3^1,$$

$$\Omega^3 = t(\omega_1^2 \cos\varphi + \omega_3^2 \sin\varphi), \; \Omega^4 = -\omega_1^2 \sin\varphi + \omega_3^2 \cos\varphi,$$

$$\Omega_3^1 = -(\omega_1^2 \cos\varphi + \omega_3^2 \sin\varphi), \; \Omega_1^2 = -d\varphi + \omega_3^1.$$

Полагая $\Omega_3^1 = b_i \Omega^i$, $\Omega_1^2 = c_i \Omega^i$, получаем, что

$$b_4 = b_1 = b_2 = c_1 = 0, \; b_3 = -c_2 \neq 0, \; c_4 \neq 0.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что формы Ω^i удовлетворяют уравнениям структуры поля, не накладывая при этом никаких ограничений на функции x_1, x_3, x_6. Следовательно, комплекс (13) является произвольным. Итак, чтобы построить поле $b_1 = b_2 = 0$, $c_2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$, нужно взять произвольную поверхность и в каждой ее точке построить пучок прямых, касающихся поверхности, затем направить вектор e_3 ортогонально плоскости пучка и каждую точку прямой пучка считать началом луча.

Теперь легко установить, что семейство плоскостей (7) огибает несущую поверхность [2] комплекса K, а поверхность T (п. 5) — это цилиндр комплекса K, причем кривая l — его ортогональная направляющая. Таким образом, мы получили безынтегральное построение поля (4′) при $c_2 \neq 0$. Все другие подклассы поля (4) были построены в работах [3] и [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179—194.

2. В. М. Финкельштейн. Неголономные комплексы четырехпараметрического поля направлений. Геом. сб. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 99—111.

3. В. М. Финкельштейн. О некоторых классах четырехпараметрических полей направлений, связанных с неголономной поверхностью, ортогональной произвольной конгруэнции. «Изв. вузов, Математика», 6, 1967, 109—116.

4. В. М. Финкельштейн. О расслоении четырехпараметрических полей направлений на некоторые вполне геодезические подмногообразия. Геом. сб. 7 (Труды Томского ун-та, 196), 1968, 171—174.

5. В. М. Финкельштейн. Некоторые классы четырехпараметрических полей направлений. Геом. сб. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 112—125.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА И РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, М. Л. ЧЕРНОВА

1. О геометрическом решении линейных и квадратных уравнений. Основой геометрической алгебры послужила геометрическая арифметика пифагорейцев. Основной задачей геометрической алгебры было решение уравнений. С помощью построения прямоугольника, равновеликого данному, легко решалось линейное уравнение вида $ab = cx$.

В «Началах» Евклида даны теоремы ([1], предложения $II_{5,6}$, VI_{28}, т. 1, стр. 65, 67; 205), используя которые можно построить с помощью циркуля и линейки корни некоторых квадратных и биквадратных уравнений. Для решения задач, сводящихся к кубическим уравнениям, греки использовали новый метод — метод конических сечений ([2], стр. 281—291). Математики стран ислама предложили несколько способов решения квадратных уравнений. Один способ встречается в алгебраическом трактате ал-Хорезми. Например ([3], стр. 30—31), для уравнения $x^2 + 10x = 39$ он строил квадрат, стороной которого является «корень», т. е. x. Продолжая все его стороны, как указано на рис. 1, откладывая на продолжениях отрезки, длины которых равны «5» — половине «числа корней», ал-Хорезми строил большой квадрат, площадь которого равна сумме площадей исходного квадрата, т. е. x^2, двух прямоугольников с площадями, равными $5x$, и второго квадрата с площадью 25. Так как по условию $x^2 + 10x = 39$, то площадь большого квадрата равна $39 + 25 = 64$. Следовательно, сторона большого квадрата равна 8, а $x = 8—5 = 3$. Если применить приведенное рассуждение к уравнению $x^2+ax=b$, то получится современное правило

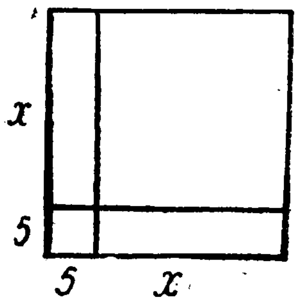

Рис. 1

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}. \tag{1}$$

(Рассматривались только положительные корни уравнений). У ал-Хорезми был и другой вариант решения этой задачи с рис. 2.

Другой способ геометрического решения квадратных уравнений $x^2 + ax = b$, использующий предложение II_6 книги «Начал» Евклида, выражающееся в виде $(\alpha + \beta)\beta + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)^2$, встречается в алгебраическом трактате Сабита ибн Корры [4]. Строился квадрат со стороной равной x и прямоугольник с площадью ax (рис. 3). Получался прямоугольник, площадь которого в силу уравнения $x^2+ax=b$ равна b. При $\alpha=a$; $\beta=x$ из последнего тождества получается то же правило (1), что и у ал-Хорезми. Оба метода геометрического решения квадратных уравнений изложены в алгебраическом трактате Хайяма

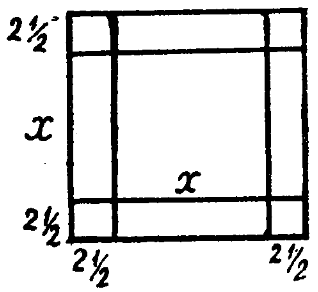

Рис. 2

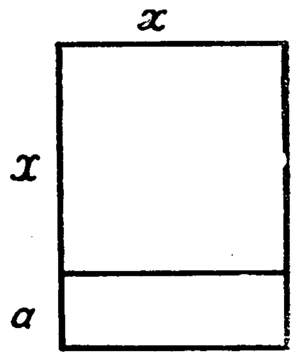

Рис. 3

([5], стр. 77—80). Там приведена также классификция кубических уравнений с положительными коэффициентами и способ решения каждого вида по античному методу с помощью конических сечений. По поводу решения кубических уравнений в радикалах Хайям прозорливо писал: «Может быть, кто-нибудь, кто придет после нас, узнает это для случая, когда имеется не только три первых разряда, а именно: число, вещь и разряд» ([5], стр. X, ср. стр. 72).

2. Формула бинома на Востоке и в Европе. Разбиение квадрата на два квадрата и два прямоугольника у ал-Хорезми является геометрическим истолкованием частного случая формулы бинома $(a+b)^n$ при $n=2$. В общем виде формула бинома встречается у восточных математиков Насир ад-Дина ат-Туси [6] и Гияс ад-Дина ал-Каши ([7], стр. 31—34). Возможно, что ат-Туси и ал-Каши заимствовали это правило из недошедшего до нас трактата Хайяма «Проблемы арифметики» ([5], стр. 74—75 и 248). Геометрическое истолкование правила бинома для $n=3$ на Востоке еще не применялось к решению кубических уравнений, несмотря на то, что для решения кубических уравнений, сводящихся к квадратным, Хайям использовал геометрические представления, основанные на разложении параллелепипедов ([5], стр. 80—82).

Формула бинома встречается в Европе у немецких коссистов. В одной из первых рукописей коссистов, известной под названием *Initius Algebras* [8], приводятся словесные формулировки формулы бинома при $n=3, 4, \ldots, 9$. Биноминальные коэффициенты получаются здесь путем возведения в степень числа 10001 ([8], стр. 542). Изложение формулы бинома в этой рукописи отличается от изложения этой формулы у ал-Туси и ал-Каши тем, что последние излагали эти формулы в виде добавления к способу извлечения корней любой степени для приближенного выражения дробной части корня, а здесь эти правила составляют основной материал, который, правда, тоже применяется для извлечений корней. Интересно, что в прологе рукописи *Initius Algebras* указывается, что эта книга является обработкой арабского сочинения, переведенного на греческий, затем с греческого на латынь, а затем с латыни на немецкий, причем у итальянцев она называлась «книгой о вещи» ([18], стр. 449). Поэтому весьма возможно, что сведения о формуле бинома попали к коссистам через ученика ал-Каши Ала-ад Дина ал-Кушчи, переехавшего из Самарканда в Стамбул и находившегося там в контакте с греками, которые переводили сочинения математиков Самаркандской школы на греческий и латинский языки.

3. «Куб Кристофа» и решение кубических уравнений. Уже в рукописи *Initus Algebras* дается геометрическая интерпретация формулы бинома при $n=3$ с помощью разложения куба на два куба с объемами a^3 и b^3, три параллелепипеда с объемами a^2b и три параллелепипеда с объемами ab^2 ([8], стр. 530). В дальнейшей коссистской литературе правило разложения куба на два куба и шесть параллелепипедов получило название «Куба Кристофа», по имени Криштяна (Кристофа) Рудольфа, поместившего изображение этого куба на последней странице своей «Алгебры» [9]. Михаэль Штифель в своей обработке «Алгебры» Рудольфа пишет, что Рудольф, помещая свой куб, тем самым как бы хотел сказать читателю: «Дальше надо излагать кубическую алгебру, о которой я здесь тебе ничего не сказал. Если сможешь изучить часть кубической алгебры, я хочу дать тебе дружеский совет с помощью этого куба» ([9], л. 480 об.). Упомянув о кубе Кристофа, Штифель показал, как с его помощью составлять и решать специальные типы кубических уравнений. Вначале Штифель применяет куб Кристофа к вычислению кубов «биномиалей» (Binomia) и «вычетов» (*Residua*) — выражений вида $x \pm \sqrt{y}$, где x и y — положительные числа, например $(3+\sqrt{2})^3 = 45+\sqrt{1682}$ ([9], л. 480 об.). Рассматривая затем последовательно стороны большего и меньшего кубов как неизвестные (при известном объеме всего куба), путем своеобразного представления средних пропорциональных Штифель получил два вида кубических уравнений. Рассуждения Штифеля сводятся к следующему: если сторону бóльшего входящего куба обозначить через x, а меньшего через y, то объем всего куба $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+ y^3 = 45+\sqrt{1682}$ (рис. 4). Учитывая, что сумма объемов бóльшего куба и параллелепипедов, определяющихся меньшими средне пропорциональными, составляет бóльшую часть объема всего куба, а меньшего куба и параллелепипедов, определяющихся бóльшими средне пропорциональными, — меньшую часть объема куба можно записать

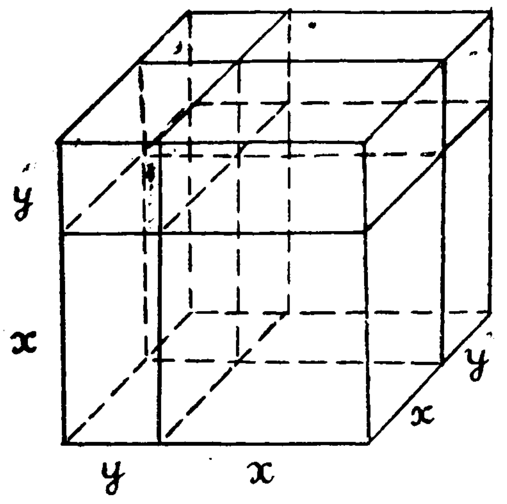

Рис. 4

$$x^3+3xy^2=45,$$
$$x^3+3x^2y=\sqrt{1682}, \qquad (2)$$

откуда

$$(x^3+3xy^2)^2-(y^3+3x^2y)^2=2025-1682=343... \qquad (3)$$

Так как левую часть последнего равенства можно представить как $x^2(-y^2)^3$, будем иметь

$$x^2 - y^2 = \sqrt[3]{343} = 7... \tag{4}$$

С другой стороны, $xy^2 = x^3 - (x^2 - y^2)x$ (рис. 5). Учитывая равенство (4), получим $xy^2 = x^3 - 7x$. Аналогично получим $x^2y = y^3 + (x^2 - y^2)y$ (рис. 6), откуда, используя равенства (4), найдем $x^2y = y^3 + 7y$. Подставляя найденные выражения для xy^2 и x^2y в равенства (2),

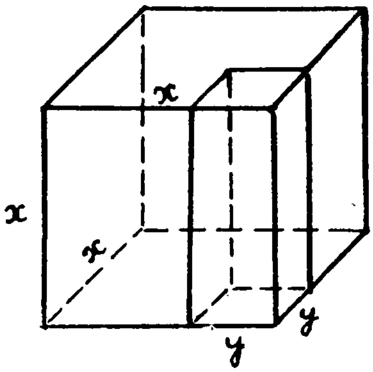

Рис. 5

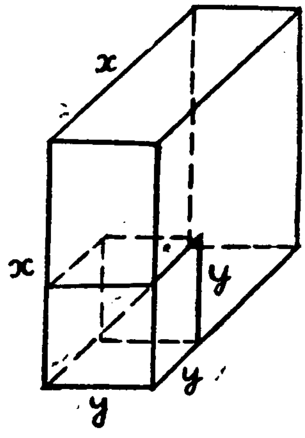

Рис. 6

ожно получить два кубических уравнения, рассмотренные Штифелем,

$$4x^3 - 21x = 45, \tag{5}$$

$$4y^3 - 21y = \sqrt{1682}. \tag{6}$$

Уравнения Штифеля можно привести к видам:

$$x^3 = px + q, \tag{7}$$

$$x^3 + px = q, \tag{8}$$

где p и q — положительные числа, которые рассматривали Тарталья и Кардано.

Решение кубических уравнений в радикалах в работах итальянских математиков XVI в. было предметом изучения многих математиков (см., например [10], [11]). Несмотря на это, мы не располагаем сведениями о методе, которым пришли к формулам решения дель Ферро и Тарталья. Штифель, предложив метод решения полученных им уравнений, в конце отметил, что он обосновал правило дель Ферро. Решение Штифеля сводится к следующему. Аналогично тому, как в свое время ал-Хорезми для решения квадратного уравнения находил площадь построенного им квадрата, а затем его сторону, Штифель при решении обоих своих уравнений вначале восстанавливал биномиаль, равную объему всего куба, а затем, извлекая из нее кубический корень, находил ребро этого куба, части которого определяют решения уравнений (5) и (6). Для определения объема куба, учитывая сказанное выше, Штифель коэффициент при первой степени неизвестной делил на три, результат возводил в куб и прибавлял к квадрату свободного члена. Прибавляя далее квадратный корень из результата к свободному члену, он получал искомый объем: $45 + \sqrt{1682}$. Для извлечения кубического корня из биноминали $45 + \sqrt{1682}$ (большая часть — рациональное число, Штифель предлагал извлечь из разности квадратов ее частей кубический корень ($\sqrt[3]{2025 - 1682} = \sqrt[3]{343} = 7$), а затем найти число, после прибавления которого к найденному корню получится квадратное число (см. (4)). Дополнительно требуется, чтобы на прибавляемое число делился квадрат иррациональной части. (Из равенства (2) следует $(y^3+3x^2y)^2 = 1682$, откуда $y^2(y^2+3x^2) = 1682$; следовательно, 1682 должно делиться на прибавляемое число y^2). Квадратные корни из полученного квадратного числа и прибавляемого числа составляют искомый корень: $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}} = 3+\sqrt{2}$. Рациональная его часть—3—корень уравнения (5), иррациональная—$\sqrt{2}$—корень уравнения (6).

Таким образом, Штифель сводил решение кубических уравнений вида (7) и (8) к извлечению кубических корней из биномиалей. Штифель изложил правила извлечения кубических корней из биномиалей всех трех видов. Кроме того, он предложил аналогичные правила для извлечения корня любой степени из биномиалей ([9], л. 484—485).

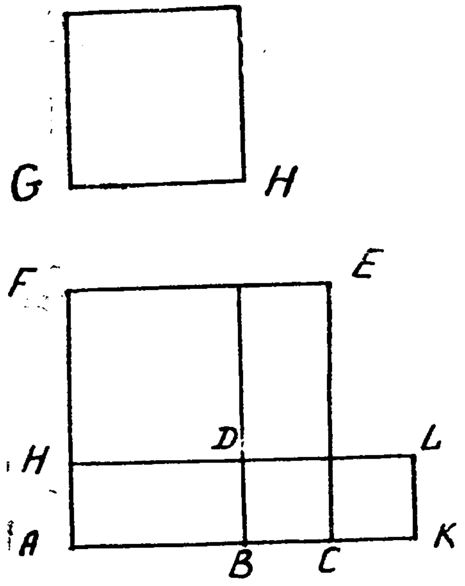

Рис. 7

Немецкий историк математики Тропфке писал, что в течение 50 лет после Штифеля, решение кубических уравнений в Германии не излагалось ([12], стр. 142).

Тарталья в своем «Общем трактате о числе и мере» также связывал решение кубических уравнений с извлечением корней [10], что позволяет высказать предположение, что рассуждения Тартальи также основывались на рассмотрении «куба Кристофа». Это предположение подкрепляется геометрическим доказательством Кардано, приведенным в гл. XI «*Ars Magna*» [13].

Уравнение $x^3+6x=20$ Кардано формулирует: «куб GH и шесть ребер GH равны 20». Для его решения он строит два куба AE и CL (рис. 7), «разность которых равна 20», а «произведение ребра AC на ребро CK—2, т. е. треть числа вещей». Затем откладывается $BC=CK$ и доказывается, что «оставшаяся линия AB равна GH, т. е. значению вещи, которая по предположению есть GH». Представляя большой куб в виде суммы куба AB, малого куба и шести параллелепипедов, Кардано доказывает, что $AB = AC—BC$ удовлетворяет данному уравнению ([11], стр. 462).

Хариг [10] показал, что геометрическим методом можно легко вывести формулу Тартальи, а не только доказать ее справедливость. Несколько упрощая рассуждения Харига, можно представить этот вывод следующим образом. Если мы представим неизвестное x в виде разности длин ребер большого и малого кубов: $x = u—v$, то

$$u^3 = x^3+v^3+3x^2v+3xv^2. \tag{9}$$

Но сумму объемов параллелепипедов можно представить в виде $3x^2v+3xv^2 = 3xv(x+v) = 3xuv$, что легко заметить и на „кубе Кристофа". Тогда равенство (9) примет вид

$$x^3+3uvx = u^3-v^3. \tag{10}$$

Сравнивая уравнения (10) и (8), мы находим, что $p = 3uv$, $q = u^3-v^3$, откуда и получается решение Тартальи. Аналогично для решения уравнения (7) следует представить x в виде суммы $u+v$. Тогда

$$(u+v)^3 = u^3+v^3+3u^2v+3uv^2 = x^3.$$

Так как $3u^2v+3uv^2 = 3uv(u+v) = 3uvx$,

$$x^3 = 3uvx + u^3 + v^3.$$

Полагая $p = 3uv$; $q = u^3+v^3$, получаем решение Тартальи уравнения (7).

Доказательство Кардано и рассуждения Штифеля, дошедшие до нас в полном виде, делают вероятным предположение, что рассуждения, с помощью которых итальянские математики пришли к правилу Тартальи, использовали геометрическую алгебру. Это подтверждается и следующими словами Кардано по поводу правила Тартальи: «Так как я сознавал, что тот отдел, который передал мне Тарталья, был открыт им с помощью геометрического доказательства, то я думал, что это и есть царский путь, ведущий ко всем отделам» ([10], стр. 72).

Возможно, что Штифель и Кардано пользовались геометрической интерпретацией формулы бинома для решения кубических уравнений, так как в то время еще не было буквенной алгебры, с помощью которой формула Тартальи легко выводится. По этой же причине они рассматривали кубические уравнения с данными числовыми коэффициентами. Интересно отметить, что Штифель не ограничился разложением трехмерного куба. Используя предложенные им многомерные обобщения куба ([9], стр. 9—9 об.), Штифель обобщил и геометрическую интерпретацию формулы бинома, данную Рудольфом, на биномы при $n>3$: «Так же как квадратные биномы разлагаются на 4 части, а кубические на 8 частей, квадрато-квадратные биномы разлагаются на 16 частей, сверхтелесные — 32 части и подобно этому идет по двукратной прогрессии» ([9], л. 482 об.).

Таким образом, открытие решения кубических уравнений в радикалах явилось результатом развития двух идей: геометрической алгебры и формулы бинома, которая получила геометрическую интерпретацию у коссистов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евклид. Начала, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1—3, М.—Л., 1948—1950.
2. И. Г. Башмакова. Лекции по истории математики в Древней Греции. «Историко-математические исследования», вып. XI, 1958, стр. 281—291.
3. Мухаммад аль-Хорезми. Математические трактаты, перевод Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда. Ташкент, 1964.
4. P. Luskey. Tabit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen, Ber. d. math.-phys. kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 93, 1941, s. 93—114.
5. Омар Хайам. Трактаты, перевод Б. А. Розенфельда под. ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича. М., 1964.
6. Насир ад-Дин ат-Туси. Сборник по арифметике с помощью доски и пыли, перевод С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда. «Историко-математические исследования», вып. XV. М., 1963, 431—444.
7. Джемшид Гиясэддин ал-Каши. Ключ арифметики. «Трактат об окружности», перевод Б. А. Розенфельда. М., 1956.
8. Algebra des Initius Algebras ad Ylem Geometram Magistrum suum, herausg. M. Gurtze, Abhandlungen der Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 13 1902, s. 435—609.
9. M. Stifel. Die Coss Christoffs Rudolffs mit schöner Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, Königsperg, 1553.
10. Г. Э. Гариг. Спор Тарталья и Кардано о кубических уравнениях и его общественные основы. Архив истории науки и техники, вып. VII. Л., 1935, стр. 67—105.
11. D. E. Smith. History of Mathematics, v. II. Boston, 1925.
12. J. Tropfke. Geschichte der Elementar Mathematik. Berlin—Leipzig, 1933, 37.
13. Hieronimi Cardani. Artis Magnae sive de Regulis algebraicis. lib. unus., 1545.

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 244 Серия механико-математическая

ОБ ОДНОЙ НЕУДАЧНОЙ ПУБЛИКАЦИИ

Р. Н. ЩЕРБАКОВ

В № 9 журнала «Известия вузов. Математика» за 1972 г. напечатана статья В. С. Малаховского «К геометрии касательно оснащенных подмногообразий» [1], содержащая объявление ошибочными или «некорректными» «большого числа работ, использующих те или иные понятия этого метода» — имеется в виду метод репеража подмногообразий (МРП).

Автор этой статьи заявляет: «некорректность метода репеража подмногообразий неизбежно проявляется в любой конкретной работе, написанной с использованием его понятий».

Таких работ в 1951—1972 гг. у нас и за рубежом опубликовано (по неполным данным) более 200. Автор указанной статьи подвергает «анализу» 13 работ, вышедших в свет в 1952—1967 годах, не затрагивая более поздние публикации (в том числе книгу [2]), а также свои собственные работы (например, [3]).

Математический аппарат, изложенный автором в § 1—4 статьи и представляющий собой основу критической части, состоит из шести определений и пяти теорем. Формулировки теорем дословно совпадают с формулировками теорем предыдущей статьи автора [4], а доказательства заменены ссылками на эту работу. Однако система определений, принятая автором в данной статье, существенно отличается от принятой в [4]. Например, определение подмногообразия Ψ_m (а вокруг него то и сосредоточена вся «критика») не воспроизведено таким, как в [4] (определение 4.1*)), а заменено описательным определением без номера, заканчивающимся словами «такое множество иногда называют ... подмногообразием Ψ_m». В этом описании фигурирует выражение

$$\widetilde{\Theta}^\alpha = (\delta^\alpha_\beta + B^\alpha_\beta)\, \Theta^\beta$$

снабженное номером (4.3), где B^α_β и Θ_β — линейные дифференциальные формы, как явствует из формул (1.7) и (4.2), а δ^α_β — константы. Однако автор и $\widetilde{\Theta}_a$ называет формами, т. е. однородными многочленами, и даже заявляет, что «эквивалентность систем форм Θ_α и $\widetilde{\Theta}_\alpha$ обеспечивает возможность (?) рассмотрения...», хотя согласно его же определению 2 эквивалентными могут быть только линейные дифференциальные формы. Если же отвлечься от попыток В. С. Малаховского

*) См. о нем [5].

включить в определение понятия Ψ_m, не зависящего от вторичных параметров вообще, требование «инвариантности» относительно замены тех или иных из этих параметров, то становится ясно, что его «множество Ψ_m» и есть «подмногообразие Ψ_m», т. е. совокупность однопараметрических интегральных многообразий некоторой системы Пфаффа (у него она названа «вспомогательной» и снабжена номером 4.1). То, что в общем случае (когда система Пфаффа не вполне интегрируема) подмногообразие Ψ_m неголономно и не является многообразием (геометрическим образом) в обычном смысле слова, давно и хорошо известно: термин «неголономное» (нецелое) как раз и подчеркивает его отличие от голономного (целого). Таким образом, В. С. Малаховский усложнил и запутал определение элементарного понятия «неголономное подмногообразие», употребляемое с 1963 г. и вполне согласующееся с общепринятыми с 1926 г. терминами «неголономное многообразие», «неголономный образ», «неголономное пространство» (см. [2], ч. 1, гл. 3, § 4; там же библиография вопроса).

Уже отсюда видно, что научная основа «критики» весьма сомнительна. Более подробный анализ определений и теорем (и их доказательств) В. С. Малаховского, содержащихся в [4], дан в статье [5]. Повторять его здесь нет необходимости. Новая же система определений и рекомендаций, данных в работе [1], после небольших уточнений сводится к системе терминов и рекомендаций метода репеража подмногообразий (см. [10], [6]); вследствие чего все выкладки в конкретных примерах, приведенных В. С. Малаховским, полностью совпадают с теми, которые приведены в критикуемых им работах (он сам подчеркивает это в [4]). Например, «геометрический образ Φ_{pm}» по В. С. Малаховскому «является многообразием Φ_p с заданным m-мерным распределнием Δ_m». Но если учесть, что «геометрический образ» и «многообразие» у него — синонимы (см. [1], § 1), а «m-мерное распределение» как раз задается системой Пфаффа, то становится очевидным, что Φ_{pm} совпадает с «геометрическим образом Φ_p, отнесенным к подмногообразию Ψ_m», о котором идет речь в МРП (см. например, [7], определение 7, цитируемое в [1]). Следует отметить, что сама идея рассматривать голономную конструкцию, соответствующую неголономному подмногообразию, еще в 1966 г. отчетливо сформулирована и сопоставлена с МРП в [13]. Так же легко устанавливается, что «репер R^*» В. С. Малаховского идентичен полуканоническому реперу геометрического образа Φ_p, т. е. каноническому реперу подмногообразия Ψ_m. От того, что репер R^* назван «индуцированно каноническим репером образа Φ_{pm}», его геометрическое строение, конечно, не меняется. Вся «разница» между МРП и теорией «касательно оснащенных многообразий фигур» сводится к тому, что в МРП произвольное подмногообразие сразу задается простейшими (в конкретных случаях даже координатными) уравнениями (например, $\Omega^a=0$), а В. С. Малаховский сначала пишет $A^\alpha_\xi \Omega^\xi + \Omega^\alpha = 0$ (§1, (1.16), а потом «приводит к нулю все A^α_ξ » (стр 57; в его примерах роль A^α_ξ играют λ_i, которые тоже приводятся к нулю). Впрочем, в работе [7] (§ 4) фигурируют буквы $A^в_a$ в том же количестве, что и A^α_ξ (только я не называю их геометрическим объектом).

Итак терминология «теории касательно оснащенных многообразий фигур» сводится к терминологии МРП, а соответствующие понятия или совпадают или эквивалентны (т. е. по одному единственным образом определяется другое и наоборот). Как же В. С. Малаховский доказывает «некорректность основных понятий МРП», как обещано в заголовке § 5, или «некорректность основных его положений»? Он поступает очень просто*). Сначала приводится 7 цитат из работ [7] и [11] (хотя первая по содержанию покрывает вторую и является, в свою очередь, частью книги [2]) — это занимает две страницы. А затем на полутора страницах эти цитаты «анализируются», и автор приходит к цитированному выше объявлению МРП некорректным. Затем следует перечисление еще нескольких работ (уже без цитат) и указывается, что в одних местах этих работ не все вторичные параметры фиксированы, а в других местах — все; в этом усматривается противоречие (хотя такие «противоречия» можно найти в любой работе, где ведется канонизация репера по Картану). Наконец, он «подробнее» (в 15 строках!) рассматривает работу [8] о комплексе прямых и приходит к заключению, что любая точка луча комплекса может служить центром или фокусом той или иной неголономной конгруэнции комплекса. Это совершенно верно, так как и точек на луче и неголономных конгруэнций имеется бесчисленное множество, но В. С. Малаховский заявляет, что указанное утверждение «не имеет смысла». При этом сам В. С. Малаховский в § 4 работы [4] и в § 3 работы [1] (пример 2) получает эти же самые точки, исходя из того же самого уравнения ($\omega^1 = 0$ в [8] и $\Theta \equiv \omega^1 + \lambda_i \omega_3^i|_{\lambda_i=0} = 0$ в силу (4. 1) в [1]). В последнем параграфе он таким же способом «расправляется» с тремя работами иностранных геометров, а также с одностраничными тезисами [9], не дождавшись подробной публикации [10].

Какими же аргументами В. С. Малаховский подкрепляет свою «критику»? Таких аргументов всего три.

Наиболее часто (девять раз) употребляется обращение к теореме 5, которой якобы противоречат как те работы, в которых сформулированы «основные положения МРП», так и те, в которых эти положения используются. Логическую несостоятельность этого аргумента нетрудно установить. В работе [1] отсутствуют как доказательства этой теоремы, так и указания на то, к каким конкретно неверным результатам привело «противоречие теореме 5», которая гласит: «Система пфаффовых уравнений $\Theta^\alpha = 0$ тогда и только тогда определяет множество Ψ_m, когда система форм Θ^α относительно инвариантна». Поэтому вероятнее всего, что теорема 5 просто не имеет отношения к указанным работам. В самом деле, если исходить из описательного определения «множества Ψ_m», данного В. С. Малаховским в начале § 4, то в него уже включено «условие относительной инвариантности», и тогда теорема 5 становится тривиальной. Если же исходить из определения подмногообразия Ψ_m, принятого в МРП, то в нем вообще не участвуют вторичные параметры, тогда как условие инвариантности (4.2), имеющее вид $\delta\Theta^\alpha = B^\alpha_\beta \Theta^\beta$ содержит операцию δ, означающую дифференцирование как раз по вторичным параметрам (см. § 1; как применять это дифференцирование не к функциям, а к дифференциальным формам, не указано ни здесь ни в [4]).

Итак, формально мы уже можем «пренебречь» теоремой 5, как не относящейся к делу. Однако в ходе построения полуканонических реперов (как и при любом процессе канонизации репера) все же фигурируют системы Пфаффа, коэффициенты которых зависят не только от переменных, которые входят под знаком дифференциала, но еще и от других параметров. Иными словами, речь идет о том, что́ определяет система вида

$$Q_i^a du^i = 0, \qquad (*)$$

*) Смысл словосочетаний «положения метода», «характеристика метода», «некорректность понятий» (может быть следует читать — некорректность определений?) остается неясным.

где Q_i^a — функции не только от u^i, но и еще от каких-либо параметров v^j. Ясно, что если параметры v^j считаются независимыми от u^i (и функции Q_i представлены явными конкретными выражениями), то всякое решение системы (*), вообще говоря, зависит от v^j. Независимость всех решений от v^j (т. е. «инвариантность» системы (*) относительно их изменений) будет иметь место только в том случае, когда система (*) будет эквивалентна системе Пфаффа, вообще не содержащей v^j (в этом случае иногда говорят, что v^j «входят несущественно»). Именно такую независимость решений от вторичных параметров и постулирует В. С. Малаховский .... Однако применять этот постулат в МРП (и вообще при канонизации репера по Картану) нет смысла, ибо рассматриваются только буквенные уравнения общего вида и после окончания построения полуканонического репера (или того или иного этапа канонизации по Картану) оставшиеся вторичные параметры (в МРП они называются полувторичными) считаются произвольными функциями первичных переменных u^i. При этом в МРП как раз важно, чтобы оставшиеся полувторичные параметры входили существенно, ибо только тогда система $\Theta^\alpha = 0$ может определять любое (произвольное) подмногообразие Ψ_m геометрического образа. Именно поэтому число полувторичных параметров равно числу существенных коэффициентов системы $\Theta^\alpha = 0$.

Вопрос же о том, при каких условиях система $\Theta^\alpha = 0$ будет давать одно и то же Ψ_m при любых значениях полувторичных параметров (или любой параметризации геометрического образа), в МРП и не ставится. В теории В. С. Малаховского этого тоже нет. В самом деле, он обеспечивает «относительную инвариантность» системы $\Theta^\alpha = 0$ за счет «фиксации» некоторых вторичных параметров (соответствующих полувторичным в МРП), а именно посредством «приведения к нулю всех величин A_ξ^α с помощью уравнений (2. 1)» (так сказано на стр. 57; конечно, это делается не «с помощью (2.1)», а с помощью (1.14), где участвуют δA_ξ^α, а не dA_ξ^α; впрочем (2.1) и (1.14) эквивалентны, так как $A_{\xi i}^\alpha$ никак не определены). Но такая фиксация в общем случае эквивалентна объявлению соответствующих вторичных параметров произвольными функциями первичных (В. С. Малаховский формулирует так: «превращение групповых параметров в первичные» — см. стр. 57). Итак, совершенно очевидно, что всякая буквенная система Пфаффа относительно дифференциалов главных параметров определяет и подмногообразие Ψ_m, и распределение Δ_m, и m-оснащение (последнее, конечно, геометрически неоднозначно). А при достаточном числе существенных букв — любое Ψ_m, любое Δ_m, любое m-оснащение ... Утверждать же, что система $\Theta^\alpha = 0$ вообще не определяет никакого Ψ_m, никакого распределения, никакого оснащения так же нелепо, как утверждать, что некоторое буквенное уравнение относительно декартовых координат точки не определяет никакой линии или поверхности, так как при разных значенях этих букв получаются различные линии или поверхности. Таким образом, пресловутая теорема 5 вообще неверна. Она будет иметь смысл только после замены слова «определяет» словами «определяет одно и то же при любых значениях вторичных параметров», но тогда никакого противоречия с МРП не будет ...

Второй аргумент фигурирует в п. 4 и по существу сводится к первому. В. С. Малаховский пишет, что в работе [7] «с одной стороны, m' выделенных вторичных параметров не фиксируются в течение всего процесса канонизации репера, с другой — они считаются неизвестными функциями первичных параметров», и усматривает в этом «противоречивые утверждения». Видимо, он невнимательно прочел даже те строки из моей работы, которые сам цитирует. Ведь у меня не «с одной стороны» и «с другой стороны», а «в течение процесса канонизации» (п. 4, 5) и «после того, как фиксация всех неполувторичных форм завершена» (п. 6). Никакого «противоречия» нет: в процессе канонизации (т. е. в процессе построения полуканонического репера) полувторичные параметры не фиксируются, а после окончания процесса они фиксируются, т. е. объявляются произвольными функциями первичных. Но ведь во всех работах, где производится та или иная канонизация репера, в процессе канонизации те или иные вторичные параметры остаются нефиксированными, а потом они фиксируются. Если это — противоречие, то все работы школы Картана-Финикова (в том числе и § 2 работы [1] — там такая же ситуация) некорректны. Удивительно только, как в них получаются правильные результаты ...

Чтобы объяснить, как же в МРП «некорректным методом» получаются правильные результаты, В. С. Малаховский прибегает в п. 6 к третьему аргументу: он обвиняет авторов «большинства работ» (здесь почему-то не всех) в том, что они (авторы) «не подчеркивают того факта, что соответствующие исследования относятся не к многообразию Φ_p, а к геометрическому образу $\Phi_{p,m}$», что они «создают впечатление, что изучается только геометрический образ Φ_p» и вообще производят «подмену предмета исследования». Но ведь $\Phi_{p,m}$ определяется через Φ_p и распределение, распределение определяет однопараметрические интегральные подмногобразия на Φ_p, совокупность последних снова определяет $\Phi_{p,m}$ (с точностью до замены фигуры $\overset{(p)}{F}_m$ на эквивалентную) и т. д. Таким орбазом, все «относится» к многообразию Φ_p. С другой стороны, никто не отрицает, что в работах, где применяется МРП, наряду с Φ_p изучаются еще и подмногообразия (например, наряду с поверхностью — линии на поверхности) и индуцируемые ими оснащения (например, совокупность касательных к семейству линий на поверхности) ... Однако исходный предмет исследования остается и ничем не подменяется. Если следовать В. С. Малаховскому, то получится, что все, кто изучает поверхность с помощью репера Дарбу, только «создают впечатление», а на самом деле изучают семейство ортогональных трехгранников...

Повторив несколько раз эти три аргумента, В. С. Малаховский переходит к «категорическим императивам», т. е. к запрещениям такого рода: «нельзя говорить о полуканоническом репере» (хотя «можно» говорить о репере R^*, который полностью совпадает с полуканоническим), «нельзя называть величины B^j_α, $B^j_{k\alpha}$ инвариантами» (хотя в число таких величин попадает, например, геодезическая кривизна), «невозможно выразить инварианты канонического репера через инварианты полуканонического репера» (хотя хорошо известно, что любой такой инвариант можно подсчитать в терминах любого репера с помощью формул перехода) и т. д. Здесь уже комментарии излишни.

Чувствуя шаткость своей критики, В. С. Малаховский заготовил запасный аргумент: «... устранение некорректностей фактически упраздняет и сам метод как таковой». Итак, все можно поправить, но тогда не будет метода. Отвечать серьезно на такие «аргументы» невозможно. Я позволю себе сослаться на «традиционного профессора математики», у которого, как утверждает Д. Пойа, «в конце концов можно кое-чему поучиться». Этот профессор говорит: «Метод — это прием, которым Вы пользуетесь дважды» [12]. Так вот, МРП есть не что иное, как «прием» Дарбу, повторенный при $p>2$ с использованием идей неголономной геометрии. Поэтому упраздняя МРП, В. С. Малаховскому придется «упразднить» и «прием Дарбу», которым широко пользовался наш общий учитель Н. Г. Туганов...

Исходя из сказанного выше, я считаю своим долгом заявить, что все претензии В. С. Малаховского к работам, в которых используется МРП (как к тем, которые он цитировал, так и ко всем другим, в том числе его собственным), и к самому методу совершенно неосновательны. Это не означает, конечно, что в указанных работах нет отдельных погрешностей или ошибок, но ни одной из них В. С. Малаховский не обнаружил. Никаких же «принципиальных ошибок», которые «проявляются в любой работе», метод репеража подмногообразий не содержит.

Поступила 26.9.73.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Малаховский. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий. «Известия вузов. Математика», 9, (124), 1972, 54—65.
2. Р. Н. Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, Изд-во Томского ун-та, 1971.
3. В. С. Малаховский. Репераж точечных подмногообразий в трехмерном конформном пространстве. Геометрический сб., 1 (Труды Томского ун-та, 160), 1962, 123—130.
4. В. С. Малаховский. Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур. Труды Калининградского ун-та, 2, 1971, 5—19.
5. В. В. Слухаев, Р. Н. Щербаков. Замечания по поводу статьи В. С. Малаховского «Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур». Геометрический сб., 9 (Труды Томского ун-та, 212), 1972, 224—235.
6. Р. Н. Щербаков. Об одной «новой» теории. Материалы третьей научной конф. по матем. и мех., 1, Томск, 1973, 86—89.
7. Р. Н. Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геометрический сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 177—194.
8. Р. Н. Щербаков. Эквиаффинный полуканонический репер комплекса прямых. Геометрический сб., 1 (Труды Томского ун-та, 160), 1962, 61—89.
9. Р. Н. Щербаков, В. В. Слухаев. Репераж и расслоения. Третья республиканская конф. математиков Белоруссии. Тезисы докладов, 1, Минск, 1971, 74—75.
10. Р. Н. Щербаков, В. В. Слухаев. Репераж и расслоения. Геометрический сб., 9 (Труды Томского ун-та, 212), 1972, 5—9.
11. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Геометрический сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 5—11.
12. Д. Пойа. Математическое открытие. М., «Наука», 1970, 92.
13. Gh. Gheorghiev, I. Popa. Sur la méthode du «reperage» et la théorie des variétés «equiparametriques». C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, 911—914.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СЕМИНАР Н. Г. ТУГАНОВА В ТОМСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В 1971-1974 гг. на заседаниях семинара были обсуждены следующие доклады.

4/II 1971. **Е. Т. Ивлев.** О проективно-инвариантных линиях многомерной поверхности с заданным оснащением.

11/II 1971. **В. В. Слухаев.** О дифференциальной геометрии стационарного движения идеальной жидкости.

18/II. 1971. **М. В. Бразевич.** Об одном проективно-инвариантном классе пар конгруэнций в P_3.

25/II 1971. **А. Е. Масленков.** Об одном 2-семействе пар непересекающихся линейных подпространств в A_4.

4/III 1971. **В. И. Машанов.** (Иркутск), **Л. З. Кругляков** (Омск). Основные определения и обозначения в многомерной дифференциальной геометрии однородных пространств.

18/III 1971. **Л. З. Кругляков** (Омск). О касательных подпространствах и характеристиках семейств d-плоскостей в проективном пространстве.

25/III 1971. **И. Г. Мулин** (Абакан). О некоторых классах римановых пространств со специальной структурой тензора кривизны.

1/IV 1971. **Н. Н. Горбанев.** О некоторых классах квазистационарных потоков.

8/IV 1971. **А. Е. Масленков.** Некоторые частные классы многообразий E (L_2 1, 2).

15/IV 1971. **В. И. Машанов** (Иркутск). О паре линейчатых поверхностей.

22/IV 1971. **В. А. Труппов** (Иркутск). Некоторые вопросы теории (2n — 2)-параметрических многообразий нуль-пар в A_n.

29/IV 1971. **И. Е. Болдырева** (Новосибирск). О 2-семействах пар прямых в P_5.

6/V 1971. **Л. В. Львова** (Барнаул). Линейчатая геометрия квазиэллиптического пространства.

13/V 1971. **В. В. Слухаев, Р. Н. Щербаков.** Репераж и расслоения.

20/V 1971. **Л. З. Кругляков** (Омск), **В. И. Машанов** (Иркутск). О трансверсалях в многомерном проективном пространстве.

27/V 1971. **Л. З. Кругляков** (Омск). О характеристических многообразиях семейства d-плоскостей в проективном пространстве.

9/IX 1971. **Е. Е. Вольпер.** Алгебраические многообразия семейства пар плоскостей.

16/IX 1971. **Е. Т. Ивлев.** Дифференциальная геометрия эквипараметрических многообразий в проективном пространстве, связанных с многомерной поверхностью.

30/IX 1971. **Е. М. Горбатенко.** Алгебраический вариант теоремы Фробениуса.

21/X 1971. **М. В. Бразевич.** Об одной классификации пар комплексов в P_3

28/X 1971. **Л. З. Кругляков.** Семейства d-плоскостей в P_n, обладающие торсами.

18/XI 1971. **А. П. Ерохина.** О преобразованиях Егорова.

25/XI 1971. **И. А. Печников.** О некоторых основных понятиях неголономной дифференциальной геометрии.

16/XII 1971. **В. В. Слухаев, Р. Н. Щербаков.** Дифференциально-топологические аспекты метода Картана.

10/II 1972. **Л. В. Рыбченко.** О парах 2-семейств прямых в P_4.

17/II 1972. **Л. А. Зернышкина** (Владивосток). Однопараметрические подмногообразия комплекса винтовых линий.

24/II 1972. **Р. Н. Щербаков.** По поводу статьи В. С. Малаховского «Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур».

2/III 1972. **В. В. Кайзер.** Проективно-дифференциальная геометрия многообразия $E(0, n-2, n)$ в n-мерном проективном пространстве.

16/III 1972. **Н. М. Онищук.** О неголономном многообразии Ψ_m гиперплоских элементов в n-мерном центроаффинном пространстве $(m<n)$.

30/III 1972. **В. В. Слухаев.** Замечания по поводу статьи В. С. Малаховского «Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур».

6/IV 1972. **В. В. Слухаев.** О дифференциальных системах на расслоенном многообразии.

13/IV 1972. **Л. З. Кругляков.** Об a-семействах прямых в P^{q+2}.

20/IV 1972. **В. А. Труппов** (Иркутск). Геометрическая характеристика касательного m-мерного элемента многообразия нуль-пар в A_n.

4/V 1972. **Е. М. Горбатенко.** К теореме Картана о продолжении.

11/V 1972. **В. А. Труппов** (Иркутск). Некоторые вопросы теории многообразий вырожденных нуль-пар в A_n

1/VI 1972. **Ю. Ф. Борисов** (Новосибирск). О погружении римановых пространств в евклидовы.

1/VI 1972. **Ю. Ф. Борисов** (Новосибирск). Хроногеометрия.

7/IX 1972. **Н. Н. Горбанев.** О сравнении стационарного и квазистационарного потоков идеальной жидкости.

14/IX 1972. **Л. В. Рыбченко** (Иркутск). О псевдофокальных семействах прямых P_n.

23/IX 1972. **В. В. Благонравов.** Подмногообразия грассмановых расслоений над гиперповерхностью.

5/X 1972. **И. А. Печников.** Аффинная дифференциальная геометрия пфаффовых семейств параболических цилиндров.

2/XI 1972. **Л. З. Кругляков.** О пятой всесоюзной геометрической конференции.

9/XI 1972. **А. Е. Масленков.** Индуцированные связности на псевдоконгруэнции -пар плоскостей в 4-мерном пространстве.

23/XI 1972. **Е. М. Горбатенко.** Мое отношение к пресловутому условию инвариантности и мое понимание метода репеража подмногообразий.

30/XI 1972. **В. Д. Пластинина** (Иркутск). Локально-метрические свойства конгруэнции проективных нормалей поверхности в трехмерном пространстве.

2/XII 1972. **Р. М. Гейдельман** (Москва). Основы проективной теории многомерных линейчатых поверхностей и фокальные преобразования поверхности.

14/XII 1972. **Э. М. Кондакова.** Об одном частном классе многообразий $E(0, n-1, n)$.

21/XII 1972. **В. Б. Ким.** Трехпараметрическое многообразие, элемент которого состоит из плоской кубики и точки.

25/I 1973. **Р. Н. Щербаков.** Об одной ошибочной статье В. С. Малаховского.

3/II 1973. **Ю. Е. Боровский** (Новосибирск). Некоторые понятия теории схем Гротендика.

8/II 1973. **Н. В. Амишева** (Кемерово). Многообразия центральных квадратичных элементов в эквиаффинном пространстве.

15/II 1973. **Т. П. Романькова.** О конгруэнциях прямых в n-мерном центроаффинном пространстве.

1/III 1973. **Л. Э. Гербсоммер.** Распределение Δ_2 на многообразии $\mathfrak{M}_6$ пар точек в трехмерном аффинном пространстве.

15/III 1973. **Г. И. Иванов.** Об одном классе конгруэнций парабол.

22/III 1973. **Б. С. Сушников.** О многообразии E (1, 2, 2) в P_4.

29/III 1973. **Н. Р. Щербаков, Л. З. Кругляков.** Геометрия k-псевдофокального семейства d-мерных плоскостей в проективном пространстве.

5/IV 1973. **В. В. Васенин** (Иркутск). Об основных комплексах ассоциированных с неголономной гиперповерхностью в A_n.

5/IV 1973. **В. И. Машанов** (Иркутск). О многообразиях касательных подпространств d-плоскости a-семейства.

12/IV 1973. **Е. Е. Вольпер.** Расслояемость пары семейств плоскостей.

19/IV 1973. **В. В. Слухаев** (Кемерово). Об особенностях дифференциальных систем.

20/IV 1973. **Е. А. Арайс.** Реализация алгоритма Э. Картана на базе системы «Автоаналитик» на БЭСМ-6.

26/IV 1973. **Н. Н. Горбанев.** Некоторые классы единичных векторных полей.

10/V 1973. **Э. Д. Барыктабасов.** Неголономные конгруэнции в трехмерном аффинном пространстве.

17/V 1973. **Г. Д. Толстова, Р. Н. Щербаков.** Репераж подмногообразий и задача Бианки в эквиаффинной теории конгруэнций коник.

17/V 1973. **Л. З. Кругляков.** О k-комплексах и классификации семейств d-плоскостей в P_N.

24/V 1973. **М. Р. Вайнтруб.** О комплексах окружностей (1,3).

13/IX 1973. **А. Б. Руденко.** Геометрия над алгеброй четверть-кватернионов.

20/IX 1973. **Н. П. Чупахин, Л. З. Кругляков.** О геометрии псевдофокальных a-семейств плоскостей в пространстве P_{a+3}.

27/IX 1973. **А. Е. Масленков.** $L(a^n)$- и $l(r)$-связности на многообразии $(E)_2$.

4/X 1973. **Б. А. Розенфельд** (Москва). Геометрия групп Ли.

11/X 1973. **Н. Н. Козик.** Сечения главных и однородных расслоений.

18/X 1973. **В. В. Кайзер, Л. З. Кругляков.** Касательные подпространства и характеристики высших порядков пфаффовых многообразий d-плоскостей в P_N.

СОДЕРЖАНИЕ

Томск. Изд-во ТГУ, 1975 г., 112 с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 12

Главный редактор **В. С. Сумарокова**

Технический редактор **Р. М. Подгорбунская**

Корректор **Л. И. Дюканова**

К305346 Сдано в набор 21/XII-74 г. Подписано к печати 7/VIII-75 г.
Формат 70×108¹/₁₆; п. л. 7, уч.-изд. л. 9; усл. п. л. 9,8.
Заказ 4731 Тираж 700 Цена 90 коп.

Издательство ТГУ. Томск-29, ул. Никитина, 17.
Томск, типография изд-ва «Красное знамя»

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
12	21 снизу	$\Psi^{*}_{b_3}\,\rho_1$	$\Psi^{*}_{b_2}$
13	3 снизу	Ψ_b	$\bar{\Psi}_b$
19	16 снизу	$d\,(A_0A_{12})$	$d\,(A_0A_2)$
19	6 снизу	$A_1A_3A_4$	$A_1A_2A_4$
21	17 сверху	12	2
25	4 сверху	γ^{a}	γ_{1}
39	19 сверху	$a^{\alpha}_{n\alpha}$	$a^{1}_{n\gamma}$
64	8 сверху	x^2	x_2
75	20 сверху	$z = \ldots - 2_3^{-1}$	$Z = \ldots - 2a_3^{-1}$
81	15 снизу	Рожественский	Рождественский
82	10 сверху	$\nabla\,({}_iv_{ji}) = 0\,(i,\ i$	$\nabla_{(i}v_{j)} = 0,\ (i,\ j$
82	7 снизу	$\nabla\,({}_iv_j) = 0,\ i \neq j$	$\nabla_{(i}v_{j)} = 0,\ i \neq j \quad (1)$
83	14 сверху	I_j	J_j
84	1 снизу	ΔL	∇L
85	8 снизу	Ферне	Френе
87	20 снизу	оргтогональный	ортогональный
91	7 и 9 снизу	*Jgnat*	*Ignat*
106	26 сверху	орбазом	образом
109	3 сверху	P^{q+2}	P_{a+2}
111	1 сверху	подмногообразия	подмногообразиях

Цена 90 коп.