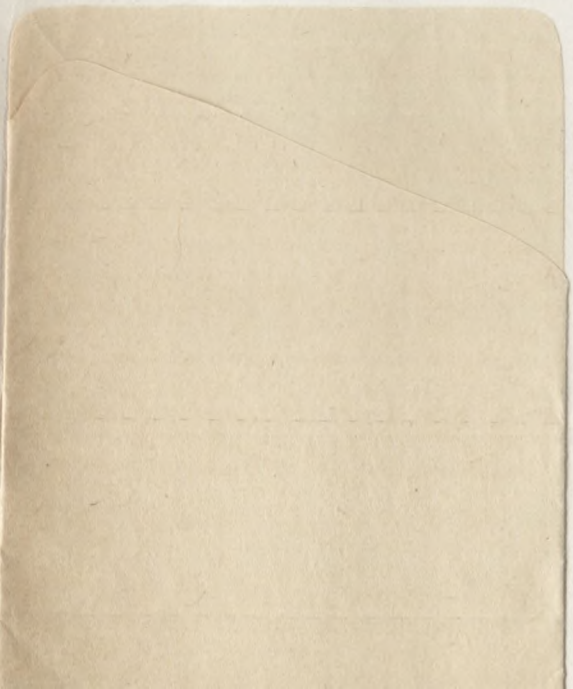
Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1972

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 8

1-2128838

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1972

513

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Восьмой выпуск «Геометрического сборника» содержит работы, выполненные участниками геометрического семинара Н. Г. Туганова при кафедре геометрии Томского университета в 1966—1967 гг. Большая часть статей посвящена той же тематике, что и работы, опубликованные в предыдущих выпусках.

Работы Г. Е. Варламова, М. Б. Исабекова, Л. И. Магазинникова, Н. М. Онищук и В. А. Петина относятся к исследованиям по теории поверхностей и многообразий вырожденных и невырожденных нуль-пар.

В работах Г. П. Бочилло, В. И. Матвеенко и Н. Т. Мочернюка исследуются многообразия, элементами которых являются алгебраические многообразия определенного вида. Вопросам дифференциальной геометрии 2-семейств прямых в пятимерном проективном пространстве посвящена работа Л. З. Круглякова. Теории векторных полей в евклидовом пространстве посвящены работы В. П. Долговых и В. М. Финкельштейна. В конце сборника дан обзор работы семинара за 1966—1970 гг. Сборник предназначен для научных работников, интересующихся вопросами дифференциальной геометрии, а также смежных с ней дисциплин, в частности гидромеханики. Бо́льшая часть статей доступна и студентам, специализирующимся по геометрии.

Редакторы выпуска: профессор Р. Н. Щербаков, профессор В. С. Малаховский, доцент Е. Т. Ивлев

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ СОВЕТ

А. П. Бычков (председатель), проф. М. П. Кортусов (зам. председателя), доц. Э. С. Воробейчиков (зам. председателя), доц. А. И. Зубков (ученый секретарь), Л. Г. Мордовина (директор издательства), проф. Г. А. Медведев, проф. Р. Н. Щербаков, доц. А. Д. Колмаков, проф. В. И. Гаман, проф. А. Б. Сапожников, проф. М. А. Кривов, проф. В. А. Пегель, проф. А. А. Положий, проф. В. А. Хахлов, проф. М. В. Тронов, проф. В. В. Серебренников, проф. А. И. Ким, проф. И. М. Разгон, доц. А. П Бородавкин, проф. Ф. З. Канунова, проф. В. С. Флеров, проф. А. К. Сухотин, М. Р. Филимонов (директор научной библиотеки), секретарь парткома университета доц. М. П. Якубеня.

Индекс 2-2-3

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

О ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ШЕСТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. Е. ВАРЛАМОВ

Настоящая статья посвящена построению полуканонического репера поверхности S_2 в смысле [7] в шестимерном проективном пространстве P_6.

§ 1. Построение полуканонического репера поверхности S_2 в P_6

Рассмотрим в P_6 двумерную поверхность S_2. Деривационные формулы некоторого репера, состоящего из аналитических точек A_0, A_1, ..., A_6, запишем в виде:

$$dA_i = \omega_i^\kappa A_\kappa,\ i, j, \kappa = 0, 1, \ldots, 6, \tag{1}$$

где ω_i^κ — дифференциальные формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры:

$$D\omega_i^\kappa = [\omega_i^j \omega_j^\kappa] \tag{2}$$

и соотношению

$$\omega_i^i = 0 \text{ (по } i \text{ суммировать)}. \tag{3}$$

Поместим точку A_0 в текущую точку поверхности S_2, а точки A_0, A_1, A_2 расположим в касательной плоскости L_2 к этой поверхности в точке A_0. Тогда система дифференциальных уравнений поверхности S_2 запишется в виде:

$$\omega_0^\lambda = 0 \quad (\lambda, \mu, \nu = 3, 4, 5, 6). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) внешним образом и применяя лемму Картана [1], получаем

$$\omega_\alpha^\mu = \Lambda_{\alpha\gamma}^{\mu}\,\omega^\gamma \left(\Lambda_{\alpha\gamma}^{\mu} = \Lambda_{\gamma\alpha}^{\mu};\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2\right). \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем независимые формы обозначаются ω^α.

Уравнение гиперплоскости L_5, проходящей через плоскость L_2, запишем в виде:

$$x_\lambda x^\lambda = 0, \tag{6}$$

где x_λ — тангенциальные координаты гиперплоскости L_5, x^λ — координаты текущей точки этой гиперплоскости. Пусть гиперплоскость L_5 является соприкасающейся плоскостью [3] поверхности S_2 в точке A_0. Тогда из

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega^\alpha A_\alpha, \\ d^2A_0 &= (\ldots)^0 A_0 + (\ldots)^\alpha A_\alpha + \Lambda_{\alpha\beta}^{\lambda}\,\omega^\alpha \omega^\beta A_\lambda \end{aligned} \tag{7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

получаем

$$x_\lambda \Lambda^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0. \tag{8}$$

Пусть координатная гиперплоскость $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ является соприкасающейся плоскостью поверхности S_2 в точке A_0, т. е. $L_5 = (A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$. Тогда из (8) следует, что

$$\Lambda^6_{\alpha\beta} = 0, \quad \Delta = det \parallel \Lambda^{\rho}_{\alpha\beta} \parallel \neq 0 \, (\rho, \sigma, \tau = 3, 4, 5). \tag{9}$$

При этом из рассмотрения исключается случай $\Delta = 0$, когда размерность гиперплоскости L_5 меньше пяти. Из (9) и (5) следует, что

$$\omega^6_\alpha = 0. \tag{10}$$

Дифференцируя (10) внешним образом и применяя лемму Картана, получаем

$$\omega^6_\rho = \Lambda^6_{\rho\alpha} \omega^\alpha. \tag{11}$$

Обозначим

$$a^{\rho\sigma} = \Lambda^\rho_{11} \Lambda^\sigma_{22} + \Lambda^\sigma_{11} \Lambda^\rho_{22} - 2\Lambda^\rho_{12} \Lambda^\sigma_{12} \, (\rho \neq \sigma), \tag{12}$$

$$a^{\rho\rho} = \Lambda^\rho_{11} \Lambda^\rho_{22} - \Lambda^\rho_{12} \Lambda^\rho_{12}.$$

Тогда из (5) обычным путем [1] находим следующие соотношения для $\delta a^{\rho\rho}$ и $\delta a^{\rho\sigma}$:

$$\delta a^{\rho\rho} = -2a^{\rho\rho} (\pi^0_0 - \pi^1_1 - \pi^2_2 + \pi^\rho_\rho) - a^{\rho\tau} \pi^\rho_\tau,$$

$$\delta a^{\rho\sigma} = -a^{\rho\sigma} (2\pi^0_0 - 2\pi^1_1 - 2\pi^2_2 + \pi^\rho_\rho + \pi^\sigma_\sigma) - \tag{13}$$

$$- a^{\tau\sigma} \pi^\rho_\tau - 2a^{\sigma\sigma} \pi^\rho_\sigma - a^{\tau\rho} \pi^\sigma_\tau - 2a^{\rho\rho} \pi^\sigma_\rho$$

($\rho \neq \sigma$, $\rho \neq \tau$, $\tau \neq \sigma$, по ρ, σ, τ не суммировать).

Пользуясь соотношениями (13), обычным путем [8] проводим следующую фиксацию:

$$a^{33} = a^{44} = a^{45} = a^{35} = 0, \; a^{34} = a^{55} = 1, \tag{14}$$

$$\pi^4_3 = \pi^3_4 = 0, \quad 2\pi^4_5 + \pi^5_3 = 2\pi^3_5 + \pi^5_4 = 0,$$

$$\pi^0_0 - \pi^1_1 - \pi^2_2 + \pi^5_5 = 0, \quad \pi^3_3 + \pi^4_4 - 2\pi^5_5 = 0. \tag{15}$$

Так как формы ω^4_3 и ω^3_4 стали главными, то можно положить

$$\omega^4_3 = \Lambda^4_{3\alpha} \omega^\alpha,$$

$$\omega^3_4 = \Lambda^3_{4\alpha} \omega^\alpha. \tag{16}$$

Дифференцируя внешним образом соотношения (16) и (11), обычным путем находим

$$\delta\Lambda^4_{3\alpha} - \Lambda^4_{3\alpha} (\pi^3_3 - \pi^4_4 + \pi^\alpha_\alpha) - \Lambda^4_{3\beta} \pi^\beta_\alpha + \Lambda^6_{3\alpha} \pi^4_6 = 0,$$

$$\delta\Lambda^3_{4\alpha} - \Lambda^3_{4\alpha} (\pi^4_4 - \pi^3_3 + \pi^\alpha_\alpha) - \Lambda^3_{4\beta} \pi^\beta_\alpha + \Lambda^6_{4\alpha} \pi^3_6 = 0, \tag{17}$$

$$\delta\Lambda^6_{\rho\alpha} + \Lambda^6_{\rho\alpha} (\pi^0_0 - \pi^\alpha_\alpha - \pi^\rho_\rho + \pi^6_6) - \Lambda^6_{\sigma\alpha} \pi^\sigma_\rho = 0$$

($\alpha \neq \beta$, $\rho \neq \sigma$, по α, β, ρ — не суммировать!)

Пользуясь соотношениями (17), проводим следующую фиксацию:

$$\Lambda^6_{31} \Lambda^4_{32} - \Lambda^6_{32} \Lambda^4_{31} = 0, \quad \Lambda^4_{31} \Lambda^6_{52} - \Lambda^4_{32} \Lambda^6_{51} \neq 0, \quad \pi^5_3 = 0, \tag{18}$$

$$\Lambda^6_{41} \Lambda^3_{42} - \Lambda^6_{42} \Lambda^3_{41} = 0, \quad \Lambda^3_{41} \Lambda^6_{52} - \Lambda^3_{42} \Lambda^6_{51} \neq 0, \quad \pi^5_4 = 0, \tag{19}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Lambda^3_{42}\Lambda^4_{11} - \Lambda^3_{41}\Lambda^4_{12} = 0, \quad \Lambda^6_{42}\Lambda^3_{11} - \Lambda^6_{41}\Lambda^3_{12} \neq 0, \quad \pi^3_6 = 0, \tag{20}$$

$$\Lambda^4_{31}\Lambda^3_{12} - \Lambda^4_{32}\Lambda^3_{11} = 0, \quad \Lambda^6_{32}\Lambda^4_{11} - \Lambda^6_{31}\Lambda^4_{12} \neq 0, \quad \pi^4_6 = 0. \tag{21}$$

Так как формы ω^5_ρ, ω^ρ_5, ω^ρ_6 $(\rho \neq 5)$ стали главными, то можно положить

$$\omega^5_\rho = \Lambda^5_{\rho\alpha}\omega^\alpha, \tag{22}$$

$$\omega^\rho_5 = \Lambda^\rho_{5\alpha}\omega^\alpha, \quad (\rho \neq 5) \tag{23}$$

$$\omega^\rho_6 = \Lambda^\rho_{6\alpha}\omega^\alpha. \tag{24}$$

Из соотношений (24) обычным путем находим

$$\delta\Lambda^3_{6\alpha} + \Lambda^3_{6\alpha}(\pi^0_0 - \pi^\alpha_\alpha + \pi^3_3 - \pi^6_6) - \Lambda^3_{7\alpha}\pi^7_6 - \Lambda^3_{5\alpha}\pi^5_6 - \Lambda^3_{6\beta}\pi^\beta_\alpha = 0 \tag{25}$$

$(\alpha \neq \beta$, по α — не суммировать).

Пользуясь соотношениями (25), проводим следующую фиксацию:

$$\Lambda^3_{61}\Lambda^3_{12} - \Lambda^3_{62}\Lambda^3_{11} = 0, \quad \Lambda^3_{51}\Lambda^3_{12} - \Lambda^3_{52}\Lambda^3_{11} \neq 0, \quad \pi^5_6 = 0 \tag{26}$$

Так как форма ω^5_6 стала главной, то можно положить

$$\omega^5_6 = \Lambda^5_{6\alpha}\omega^\alpha. \tag{27}$$

Из соотношений (27), (22), (23) обычным путем находим:

$$\delta\Lambda^\rho_{5\alpha} + \Lambda^\rho_{5\alpha}(\pi^0_0 - \pi^\alpha_\alpha - \pi^\rho_\rho + \pi^5_5) - \Lambda^\rho_{5\beta}\pi^\beta_\alpha - \Lambda^\rho_{7\alpha}\pi^7_5 = 0,$$

$$\delta\Lambda^5_{\rho\alpha} + \Lambda^5_{\rho\alpha}(\pi^0_0 - \pi^\alpha_\alpha - \pi^\rho_\rho + \pi^5_5) + \Lambda^5_{\rho\beta}\pi^\beta_\alpha - \Lambda^5_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\rho = 0,$$

$$\delta\Lambda^5_{6\alpha} + \Lambda^5_{6\alpha}(\pi^0_0 - \pi^\alpha_\alpha + \pi^5_5 - \pi^6_6) - \Lambda^5_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_6 - \Lambda^5_{6\beta}\pi^\beta_\alpha = 0.$$

$(\alpha \neq \beta, \quad \rho \neq 5$, по α, ρ, β — не суммировать!)

С помощью этих соотношений проводим следующую фиксацию:

$$\Lambda^5_{\lambda\alpha} = 0, \quad \pi^\alpha_\lambda = 0 \quad (\lambda \neq 5), \tag{28}$$

$$\Lambda^3_{51}\Lambda^4_{12} - \Lambda^3_{52}\Lambda^4_{11} = 0, \quad \Lambda^4_{51}\Lambda^3_{12} - \Lambda^4_{52}\Lambda^3_{11} = 0, \quad \Lambda^3_{11}\Lambda^4_{12}\Lambda^4_{11}\Lambda^5_{12} \neq 0,$$

$$\pi^\alpha_5 = 0. \tag{29}$$

Так как формы ω^α_λ стали главными, то можно положить

$$\omega^\alpha_\lambda = \Lambda^\alpha_{\lambda\beta}\omega^\beta. \tag{30}$$

Отсюда обычным путем находим

$$\delta\Lambda^\alpha_{\lambda\alpha} + \Lambda^\alpha_{\lambda\alpha}(\pi^0_0 - \pi^\lambda_\lambda) + \Lambda^\beta_{\lambda\alpha}\pi^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{\lambda\beta}\pi^\beta_\alpha - \pi^0_\lambda = 0, \tag{31}$$

$$\delta\Lambda^\beta_{\lambda\alpha} + \Lambda^\beta_{\lambda\alpha}(\pi^0_0 + \pi^\beta_\beta - \pi^\alpha_\alpha - \pi^\lambda_\lambda) + \Lambda^\alpha_{\lambda\alpha}\pi^\beta_\alpha - \Lambda^\beta_{\lambda\beta}\pi^\alpha_\beta = 0 \tag{32}$$

(по α, β, λ не суммировать, $\alpha \neq \beta$).

Пользуясь соотношениями (31) и (32), проводим следующую фиксацию:

$$\Lambda^2_{\lambda 2} + \Lambda^1_{\lambda 1} = 0, \qquad \pi^0_\lambda = 0, \tag{33}$$

$$\Lambda^2_{\lambda 1} = \Lambda^1_{\lambda 2} \neq 0, \qquad \pi^0_0 + \pi^\beta_\beta - \pi^\alpha_\alpha - \pi^\lambda_\lambda = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{34}$$

Так как формы ω^0_λ стали главными, то можно положить

$$\omega^0_\lambda = \Lambda^0_{\lambda\alpha}\omega^\alpha.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда обычным путем находим

$$\delta\Lambda^0_{\lambda\alpha} + \Lambda^0_{\lambda\alpha}(2\pi^0_0 - \pi^\alpha_\alpha - \pi^\lambda_\lambda) - \Lambda^0_{\lambda\beta}\pi^\beta_\alpha + \Lambda^\beta_{\lambda\alpha}\pi^0_\beta + \Lambda^\alpha_{\lambda\alpha}\pi^0_\alpha = 0 \qquad (35)$$

($\alpha \neq \beta$, по α, λ, β не суммировать).

Пользуясь этими соотношениями, проводим следующую фиксацию:

$$\Lambda^0_{5\alpha} = 0, \qquad \pi^0_\alpha = 0, \qquad (36)$$

чем и завершается аналитическое построение полуканонического репера поверхности S_2 в P_6 в смысле [7]. При этом формы π^2_1 и π^1_2 остались нефиксированными и являются полувторичными в смысле [6].

Компоненты ω^j_i деривационных формул (1) построенного полуканонического репера определяются по формулам:

$$\omega^j_i = \Lambda^j_{i\alpha}\omega^\alpha, \qquad (37)$$

где

$$\omega^\lambda_0 = 0, \qquad \omega^6_\alpha = 0, \qquad \omega^0_5 = 0, \qquad \omega^5_\lambda = 0 \quad (\lambda \neq 5); \qquad (37')$$

$$\Lambda^3_{11}\Lambda^3_{22} - \Lambda^3_{12}\Lambda^3_{12} = 0, \quad \Lambda^4_{11}\Lambda^4_{22} - \Lambda^4_{12}\Lambda^4_{12} = 0, \quad \Lambda^5_{11}\Lambda^5_{22} - \Lambda^5_{12}\Lambda^5_{12} = 1,$$

$$\Lambda^5_{11}\Lambda^4_{22} + \Lambda^4_{11}\Lambda^5_{22} - 2\Lambda^4_{12}\Lambda^5_{12} = 0, \quad \Lambda^3_{11}\Lambda^5_{22} + \Lambda^5_{11}\Lambda^3_{22} - 2\Lambda^3_{12}\Lambda^5_{12} = 0,$$

$$\Lambda^3_{11}\Lambda^4_{22} + \Lambda^3_{22}\Lambda^4_{11} - 2\Lambda^3_{12}\Lambda^4_{12} = 1, \quad \Lambda^6_{32}\Lambda^4_{31} - \Lambda^6_{31}\Lambda^4_{32} = 0, \qquad (38)$$

$$\Lambda^6_{42}\Lambda^3_{41} - \Lambda^6_{41}\Lambda^3_{42} = 0, \quad \Lambda^3_{41}\Lambda^4_{12} - \Lambda^3_{42}\Lambda^4_{11} = 0, \quad \Lambda^4_{31}\Lambda^3_{12} - \Lambda^4_{32}\Lambda^3_{11} = 0,$$

$$\Lambda^3_{11}\Lambda^3_{62} - \Lambda^3_{12}\Lambda^3_{61} = 0, \quad \Lambda^3_{51}\Lambda^4_{12} - \Lambda^3_{52}\Lambda^4_{11} = 0, \quad \Lambda^4_{51}\Lambda^3_{12} - \Lambda^4_{52}\Lambda^3_{11} = 0,$$

$$\Lambda^2_{\lambda 2} + \Lambda^1_{\lambda 1} = 0, \quad \Lambda^2_{\lambda 1} = \Lambda^1_{\lambda 2} \neq 0, \quad \Lambda^\mu_{\alpha\gamma} = \Lambda^\mu_{\gamma\alpha}, \quad \Lambda^i_{i\alpha} = 0.$$

Дифференцируя соотношения (37′) внешним образом, получим следующие соотношения:

$$\Lambda^\tau_{\alpha 1}\Lambda^6_{\tau 2} - \Lambda^\tau_{\alpha 2}\Lambda^6_{\tau 1} = 0, \qquad \Lambda^\alpha_{\lambda 1}\Lambda^5_{2\alpha} - \Lambda^\alpha_{\lambda 2}\Lambda^5_{\alpha 1} + \Lambda^0_{\lambda 1}\Lambda^5_{02} - \Lambda^0_{\lambda 2}\Lambda^5_{01} = 0,$$

$$\Lambda^\alpha_{51}\Lambda^0_{\alpha 2} - \Lambda^\alpha_{52}\Lambda^0_{\alpha 1} + \Lambda^\lambda_{51}\Lambda^0_{\lambda 2} - \Lambda^\lambda_{52}\Lambda^0_{\lambda 1} = 0. \qquad (38')$$

Из (38) и (38′) следует, что независимых функций $\Lambda^j_{i\alpha}$, входящих в (37), будет 33. Дифференцируя соотношения (37) внешним образом, получаем 27 независимых внешних квадратичных уравнений. Следовательно, в силу теоремы С. В. Бахвалова [4] поверхность S_2 в P_6, отнесенная к произвольной сети линий, определяется с произволом 6 функций двух аргументов.

§ 2. Геометрическая характеристика элементов полуканонического репера S_2 в P_6

Построенный аналитически в предыдущем параграфе полуканонический репер поверхности S_2 в P_6, как будет показано в этом параграфе, является простым и естественным с геометрической точки зрения.

1. Конусы T^2_4 и t^2_4. Уравнения любой 4-плоскости, проходящей через плоскость L_2 и принадлежащей гиперплоскости L_5, запишем в виде:

$$x_\rho x^\rho = 0, \qquad x^6 = 0 \quad (\rho = 3, 4, 5). \qquad (39)$$

Будем искать те линии на S_2, вдоль которых эта 4-плоскость содержит L_2 и бесконечно близкую к ней. Из

$$d(A_0A_1A_2) = (\ldots)(A_0A_1A_2) + \omega^\rho_1(A_0A_\rho A_2) + \omega^\rho_2(A_0A_1A_\rho) \qquad (40)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

следует, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$x_\rho \Lambda^\rho_{\alpha\beta}\omega^3 = 0. \tag{41}$$

Система (41) имеет нетривиальное решение относительно ω^3 тогда и только тогда, когда

$$det \parallel x_\rho \Lambda^\rho_{\alpha\beta} \parallel = 0$$

или

$$a^{\rho\tau} x_\rho x_\tau = 0, \qquad x^6 = 0, \tag{42}$$

где $a^{\rho\tau}$ определяются по формулам (12). Таким образом, совокупность всех 4-плоскостей гиперплоскости L_5, содержащих L_2 и бесконечно близкую к ней вдоль соответствующих линий на S_2, является четырехмерным конусом T_4^2 класса 2 с вершиной $A_0A_1A_2$. Этот конус определяется уравнением (42). Каждой 4-плоскости конуса T_4^2 соответствует линия на S_2, вдоль которой эта 4-плоскость из L_5 содержит L^2 и бесконечно близкую к ней. Эта линия определяется одним из дифференциальных уравнений (41). Уравнение (42) конуса T_4^2 в силу (14) принимает вид:

$$x^2_5 + 2x_3x_4 = 0. \tag{43}$$

Геометрически это означает, что 4-плоскости $(L_2A_3A_5)$ и $(L_2A_4A_5)$ принадлежат конусу T_4^2. Находя полюс 4-плоскости $A_0A_1A_2A_3A_5$ $(A_0A_1A_2A_4A_5)$ относительно конуса T_4^2 в смысле [5], получаем, что координатная 3-плоскость $A_0A_1A_2A_3$ $(A_0A_1A_2A_4)$ является полюсом 4-плоскости $A_0A_1A_2A_3A_5$ $(A_0A_1A_2A_4A_5)$ относительно конуса T_4^2. 4-плоскость $(L_2A_3A_4)$ содержит 3-плоскости (L_2A_3) и (L_2A_4). 3-плоскость (L_2A_5) является полюсом 4-плоскости $(L_2A_3A_4)$ относительно конуса T_4^2.

Покажем, что совокупность полюсов всех 4-плоскостей U $(x_3x_4x_5)$ относительно конуса T_4^2 образует четырехмерный конус t_4^2 второго порядка с вершиной L_2 и трехмерными плоскими образующими, определяемый уравнением:

$$(x^5)^2 + 2x^3x^4 = 0. \tag{44}$$

Пусть U $(x_3x_4x_5)$ — некоторая 4-плоскость конуса T_4^2. Тогда x_3, x_4 и x_5 удовлетворяют уравнению (43). Полюс V этой 4-плоскости относительно конуса T_4^2 в тангенциальных координатах (y_3, y_4, y_5) определится из условия:

$$x_3y_4 + x_4y_3 + x_5y_5 = 0, \; x^6 = 0. \tag{45}$$

Так как 4-плоскость U принадлежит T_4^2, то полюс V принадлежит 4-плоскости U. Следовательно, тангенциальные координаты полюса V (y_3, y_4, y_5) удовлетворяют уравнению

$$y^2_5 + 2y_3y_4 = 0, \tag{46}$$

а точечные координаты x^3, x^4, x^5 полюса V и тангенциальные координаты 4-плоскости U удовлетворяют уравнениям:

$$x_3x^3 + x_4x^4 + x_5x^5 = 0, \; x^6 = 0. \tag{47}$$

Так как уравнения (45) и (47) эквивалентны, то

$$y_4 = tx^3, \; y_3 = tx^4, \; y_5 = tx^5, \tag{48}$$

где $t \neq 0$. Из (46) и (48) следует что совокупность полюсов всех 4-плоскостей U $(x_3x_4x_5)$ относительно конуса T_4^2 образует четырехмерный конус t_4^2, определяемый уравнением (44). Так как каждая 3-плоскость конуса t_4^2 является полюсом соответствующей 4-плоскости конуса T_4^2, то конус T_4^2 класса 2 огибает конус t_4^2 порядка 2.

2. Фокусы конуса t_4^2.

Определение 1. 3-плоскость, принадлежащая первой дифференциальной окрестности конуса t_4^2 при некотором (фокальном) смещении,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

называется фокусом конуса t_4^2. При этом смещении первая дифференциальная окрестность данной 3-плоскости принадлежит некоторой 4-плоскости, которая является полярой этой 3-плоскости относительно конуса t_4^2.

Теорема 1. Конус t_4^2 имеет шесть фокусов и шесть фокальных смещений.

Доказательство. Пусть 3-плоскость

$$L_3(x) = (L_2,\ x^3A_3 + x^4A_4 + x^5A_5),$$

проходящая через L_2 и принадлежащая L_5, является фокусом конуса t_4^2. Тогда эта 3-плоскость и бесконечно близкая к ней при некотором смещении h принадлежат некоторой 4-плоскости

$$L_4(y) = \left(L_2,\ y_3(A_4A_5) + y_4(A_5A_3) + y_5(A_3A_4)\right),$$

которая является полярой 3-плоскости $L_3(y)$ относительно t_4^2. Следовательно, $L_4(y)$ принадлежит конусу T_4^2. Поэтому $L_4(y)$ при смещении h содержит L_2 и бесконечно близкую к ней. Пусть $M = A_0 + x^\alpha A_\alpha$ — любая точка из L_2. Тогда из $dM = (\ldots)^0 A_0 + (\ldots)^\alpha A_\alpha + x^\alpha\omega_\alpha^\sigma A$ следует, что

$$y_\sigma x^\alpha \omega_\alpha^\sigma = 0.$$

Отсюда в силу (48) находим

$$x^4x^\alpha\omega_\alpha^3 + x^3x^\alpha\omega_\alpha^4 + x^5x^\alpha\omega_\alpha^5 = 0. \tag{49}$$

Так же, как и в [9], находим, что алгебраическое многообразие, принадлежащее конусу t_4^2 и бесконечно близкому к нему, при некотором смещении в силу (49) определится системой:

$$\begin{cases} (x^5)^2 + 2x^3x^4 = 0, \quad x^6 = 0, \\ x^\tau\omega_\tau^6 = 0, \\ (\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_5^5)\,x^3x^4 + \omega_3^4\,(x^4)^2 + \omega_4^3\,(x^3)^2 + \omega_3^5x^4x^5 + \omega_5^4x^3x^5 = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Отсюда в силу (20), (21) и (29) следует, что координатные 3-плоскости (L_2A_3) и (L_2A_4) являются фокусами конуса t_4^2. Соответствующие этим фокусам фокальные смещения определяются дифференциальными уравнениями $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_1^4 = 0$. Таким образом, фиксации (20), (21) и (29) геометрически характеризуются тем, что 3-плоскости (L_2A_3) и (L_2A_4) являются фокусами конуса t_4^2. При этом из рассмотрения исключаются случаи $(a^{55} = 0,\ a^{34} = 0)$ вырождения конуса T_4^2. Найдем остальные фокусы конуса t_4^2. Пусть $x^3 = 1$, $x^5 = x$, $x^4 = -\dfrac{x^2}{2}$. Исключая $\omega^2 : \omega^1 = \lambda$ из (50), получим, что x удовлетворяют уравнению четвертой степени

$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0, \tag{51}$$

где

$$b_0 = \Lambda_{41}^6\Lambda_{52}^3 - \Lambda_{42}^6\Lambda_{51}^3 - \Lambda_{41}^3\Lambda_{52}^6 + \Lambda_{42}^3\Lambda_{51}^6,$$

$$b_1 = \Lambda_{31}^6\Lambda_{42}^6 - \Lambda_{32}^6\Lambda_{41}^3 - \Lambda_{31}^3\Lambda_{42}^6 + \Lambda_{41}^6\Lambda_{32}^3 - \Lambda_{41}^4\Lambda_{42}^6 + \Lambda_{42}^4\Lambda_{41}^6 + 2\Lambda_{51}^5\Lambda_{42}^6 - 2\Lambda_{52}^5\Lambda_{41}^6 + 2\Lambda_{51}^3\Lambda_{52}^6 - 2\Lambda_{51}^6\Lambda_{52}^3,$$

$$b_2 = 2\Lambda_{31}^3\Lambda_{52}^6 - 4\Lambda_{51}^5\Lambda_{52}^6 + 4\Lambda_{52}^5\Lambda_{51}^6 - 2\Lambda_{41}^4\Lambda_{52}^6 - 2\Lambda_{32}^3\Lambda_{51}^6 - 2\Lambda_{42}^4\Lambda_{51}^6,$$

$$b_3 = 2\Lambda_{31}^3\Lambda_{32}^6 - 2\Lambda_{32}^3\Lambda_{31}^6 + 2\Lambda_{41}^4\Lambda_{32}^6 - 2\Lambda_{42}^4\Lambda_{31}^6 + 4\Lambda_{52}^5\Lambda_{31}^6 - 4\Lambda_{51}^5\Lambda_{52}^6 - \Lambda_{31}^4\Lambda_{41}^6 + \Lambda_{32}^4\Lambda_{42}^6 - \Lambda_{51}^4\Lambda_{52}^6 + 4\Lambda_{52}^4\Lambda_{51}^6,$$

$$b_4 = 4\Lambda_{31}^6\Lambda_{52}^4 - 4\Lambda_{32}^6\Lambda_{51}^4 - \Lambda_{31}^4\Lambda_{52}^6 + \Lambda_{32}^4\Lambda_{51}^6.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В общем случае (51) имеет четыре решения. Итак, конус t_4^2 имеет шесть фокусов и шесть фокальных смещений. Теорема доказана.

Определение 2. Линия на поверхности S_2, соответствующая фокальному смещению конуса t_4^2, называется фокальной линией.

Из теоремы 1 следует, что через каждую точку поверхности S_2 проходят принадлежащие ей 6 фокальных линий.

2. Характеристики соприкасающейся гиперплоскости L_5.

Пусть точка $N = A_0 + x^\alpha A_\alpha + x^z A_z$ описывает характеристику гиперплоскости L_5 вдоль фокальной линии $\omega_1^3 = 0$ ($\omega_1^4 = 0$). Тогда

$$(dNL_5)\,|_{\omega_1^3 = 0\,(\,\omega_1^4 = 0\,)} = 0$$

или в силу (37′)

$$x^3\omega_3^6 + x^4\omega_4^6 + x^5\omega_5^6\,|_{\omega_1^3 = 0\ (\omega_1^4 = 0)} = 0. \tag{52}$$

Отсюда в силу (18) — (21) заключаем, что при фиксации (20) из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{41}^6\Lambda_{12}^3 - \Lambda_{42}^6\Lambda_{11}^3 = 0$, когда характеристикой гиперплоскости L_5 вдоль фокальной линии $\omega_1^3 = 0$ является 4-плоскость $(L_2A_3A_4)$. При фиксации (21) из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{31}^6\Lambda_{12}^4 - \Lambda_{32}^6\Lambda_{11}^4 = 0$, когда характеристикой гиперплоскости L_5 вдоль фокальной линии $\omega_1^4 = 0$ является 4-плоскость $(L_2A_3A_4)$. При фиксации (19) из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{51}^6\Lambda_{42}^3 - \Lambda_{52}^6\Lambda_{41}^3 = 0$, когда характеристикой гиперплоскости L_5 вдоль фокальной линии $\omega_1^4 = 0$ является 4-плоскость $(L_2A_4A_5)$. При фиксации (18) из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{51}^6\Lambda_{32}^4 - \Lambda_{52}^6\Lambda_{31}^4 = 0$, когда характеристикой гиперплоскости L_5 вдоль фокальной линии $\omega_1^3 = 0$ является 4-плоскость $(L_2A_3A_5)$.

3. 3-плоскость (L_2A_6). Уравнение гиперплоскости, проходящей через 3-плоскость (L_2A_5), запишем в виде:

$$x_3x^3 + x_4x^4 + x_6x^6 = 0. \tag{53}$$

Эта гиперплоскость содержит первую дифференциальную окрестность 3-плоскости (L_2A_5) в силу

$$d\,(L_2A_5) = \ldots + \omega_5^3\,(L_2A_3) + \omega_5^4\,(L_2A_4) + \omega_5^6\,(L_2A_6)$$

тогда и только тогда, когда

$$x^3\Lambda_{5\alpha}^3 + x^4\Lambda_{5\alpha}^4 + x^6\Lambda_{5\alpha}^6 = 0$$

вдоль некоторого смещения. Отсюда в силу (20) следует, что фиксация (29) геометрически характеризуется тем, что гиперплоскостью, проходящей через 3-плоскость (L_2A_5) и бесконечно близкую к ней вдоль фокального смещения $\omega_1^4 = 0$ является гиперплоскость

$$x^3 = 0. \tag{54}$$

Гиперплоскость

$$x^4 = 0 \tag{54′}$$

характеризуется как гиперплоскость, проходящая через 3-плоскость (L_2A_5) и бесконечно близкую к ней при фокальном смещении $\omega_1^3 = 0$. Следовательно, 4-плоскость $(L_2A_5A_6)$ геометрически характеризуется тем, что она принадлежит одновременно гиперплоскостям (54) и (54′).

Пусть точка $M = A_0 + x^\alpha A_\alpha + x^5A_5 + x^6A_6$ описывает характеристику 4-плоскости $(L_2A_5A_6)$ при фокальном смещении $\omega_1^3 = 0$ относительно гиперплоскости $x^3 = 0$ [3]. Тогда из

$$(dM,\ A_0A_1A_2A_4A_5A_6)\,|_{\omega_1^3 = 0} = 0$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

в силу (14), (26) находим, что

$$x^5 = 0.$$

Следовательно, фиксация (27) геометрически характеризуется тем, что характеристикой 4-плоскости $(L_2A_5A_6)$ при фокальном смещении $\omega_1^3 = 0$ относительно гиперплоскости $x^3 = 0$ является 3-плоскость (L_2A_6). При этом из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{51}^3\Lambda_{12}^3 - \Lambda_{52}^3\Lambda_{11}^3 = 0$, когда 4-плоскость $(L_2A_5A_6)$ является характеристикой гиперплоскости $x^3 = 0$ при фокальном смещении $\omega_1^3 = 0$.

4. Инвариантный выбор ребер A_0A_λ.

Пусть точка $M = A_0 + x^\alpha A_\alpha + x^3A_3 + x^5A_5$ описывает характеристику 4-плоскости $(L_2A_3A_5)$ при фокальном смещении $\omega_1^4 = 0$ относительно гиперплоскости $x^6 = 0$ [3]. Тогда

$$(dMA_0A_1A_2A_3A_5)\,|_{\omega_1^4 = 0} = 0.$$

Отсюда в силу (38) получаем, что искомой характеристикой является 3-плоскость

$$x^6 = 0, \qquad x^4 = 0, \qquad x^3\Lambda_{11}^3 + x^5\Lambda_{12}^3 = 0. \tag{55}$$

Аналогично получаем, что 3-плоскость

$$x^6 = 0, \qquad x^3 = 0, \qquad x^4\Lambda_{11}^4 + x^5\Lambda_{12}^4 = 0 \tag{56}$$

является характеристикой 4-плоскости $(L_2A_4A_5)$ при фокальном смещении $\omega_1^3 = 0$ относительно гиперплоскости $x^6 = 0$. Фиксация (29) геометрически характеризуется тем, что ребро A_0A_5 принадлежит одновременно характеристикам (55) и (56). При этом из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{11}^4\Lambda_{12}^3 - \Lambda_{12}^4\Lambda_{11}^3 = 0$, когда фокальные смещения $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_1^4 = 0$ соответствуют.

Найдем B-характеристику [3] 3-плоскости (L_2A_λ) $(\lambda \neq 5)$ относительно гиперплоскости $x^5 = 0$. Пусть точка $M = A_0 + x^\alpha A_\alpha + x^\lambda A_\lambda$ $(\lambda \neq 5$, по λ не суммировать!) описывает искомую B-характеристику. Тогда $x^\beta\Lambda_{\beta\alpha}^5 + x^\lambda\Lambda_{\lambda\alpha}^5 = 0$ $(\lambda = 5$, по λ не суммировать!). Отсюда следует, что фиксация (28) геометрически характеризуется тем, что прямые A_0A_λ $(\lambda \neq 5)$ являются B-характеристиками 3-плоскости (L_2A_λ) $(\lambda \neq 5)$ относительно гиперплоскости $x^5 = 0$.

5. Фокальная квадрика 4-плоскости $L^4 = (A_0A_3A_4A_5A_6)$.

Пусть $R = A_0 + x^\lambda A_\lambda$ фокус 4-плоскости L^4 в смысле [3]. Тогда

$$(dRL^4) = 0$$

при некотором фокальном смещении. Отсюда находим

$$(1 + x^\lambda\Lambda_{\lambda\alpha}^\alpha)\,\omega^\alpha + x^\lambda\Lambda_{\lambda\alpha}^3\omega^3 = 0 \quad (\alpha \neq \beta, \text{ по } \alpha, \beta \text{ не суммировать}). \tag{57}$$

Система (57) имеет нетривиальное решение относительно ω^1 и ω^2 тогда и только тогда, когда

$$(x^\lambda)^2(\Lambda_{\lambda1}^1\Lambda_{\lambda2}^2 - \Lambda_{\lambda1}^2\Lambda_{\lambda2}^1) + x^\lambda x^\mu(\Lambda_{\lambda1}^1\Lambda_{\mu2}^2 + \Lambda_{\lambda2}^2\Lambda_{\mu1}^1 - \Lambda_{\lambda1}^2\Lambda_{\mu2}^1 - \Lambda_{\lambda2}^1\Lambda_{\mu1}^2) +$$
$$+ x^\lambda(\Lambda_{\lambda1}^1 + \Lambda_{\lambda2}^2) + 1 = 0. \tag{58}$$

Это есть уравнение фокальной квадрики 4-плоскости L^4. Каждой точке этой квадрики соответствует смещение, определенное из (57). Точка пересечения фокальной квадрики с прямыми A_0A_λ называется B-фокусами [3] этих прямых, а соответствующие им фокальные смещения — B-фокальными смещениями. Фиксации (33) и (34) геометрически характеризуются тем, что вершины A_λ выбираются на ребрах A_0A_λ так, что они вместе с A_0 гармонически делят B-фокусы прямых A_0A_λ. При этом в силу (57) из рассмотрения исключается случай $\Lambda_{\lambda1}^2 = \Lambda_{\lambda2}^1 = 0$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

когда, по крайней мере, одна из координатных линий соответствует B-фокальному смещению.

Фиксация (36) геометрически характеризуется тем, что гиперплоскость

$$Q = (\Lambda^1_{51}A_1 + \Lambda^2_{51}A_2,\quad \Lambda^1_{52}A_1 + \Lambda^2_{52}A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6),$$

проходящая через касательную 2-плоскость к поверхности A_5, описываемой точкой A_5, и через точки A_3, A_4, A_6 пересекает 2-плоскость L_2 по прямой $A_1\,A_2$. Этим завершается геометрическая характеристика построенного аналитически полуканонического репера поверхности S_2 в P_6.

§ 3. Некоторые классы

Построенный полуканонический репер поверхности S_2 может быть применен к изучению различных классов систем подмногообразий. Рассмотрим некоторые из них.

1. Рассмотрим систему S подмногообразий, отнесение к которой характеризуется соотношением

$$\Lambda^1_{\lambda 1} = 0 \quad (\lambda - \text{фиксированное}). \tag{59}$$

При этом из (31) следует, что $\pi^2_1 + \pi^1_2 = 0$ и построенный репер становится полуканоническим репером многообразия в смысле [6]. Система S подмногообразий геометрически характеризуется тем, что линии $\omega^1 - \omega^2 = 0$ и $\omega^1 + \omega^2 = 0$ — B-фокальные линии. Следовательно, для системы S касательные к координатным и к B-фокальным линиям в точке образуют гармоническую четверку.

2. Рассмотрим систему R_1 подмногообразий, отнесение к которой характеризуется следующим соотношением:

$$\Lambda^3_{11} = 0. \tag{60}$$

При этом $\pi^2_1 = 0$ и построенный репер становится полуканоническим репером в смысле [6]. Система R_1 подмногообразий геометрически характеризуется тем, что координатная линия $\omega^1 = 0$ — фокальная.

3. Система R -подмногообразий, отнесение к которой характеризуется соотношениями

$$\Lambda^3_{11} = \Lambda^4_{22} = 0,$$

геометрически характеризуется тем, что координатные линии — фокальные. При этом $\pi^2_1 = \pi^1_2 = 0$ и построенный репер становится каноническим, который назовем R-репером.

4. Рассмотрим систему Γ-подмногообразий, отнесение к которой характеризуется соотношениями (59) и (60). При этом $\pi^2_1 = \pi^1_2 = 0$ и построенный репер становится каноническим, который назовем Γ-репером. Система Γ-подмногообразий геометрически характеризуется тем, что координатная линия $\omega^2 = 0$ — фокальная, а линия $\omega^1 = 0$ является сопряженной к ней относительно B-фокальных линий $\omega^1 - \omega^2 = 0$ и $\omega^1 + \omega^2 = 0$.

Рассмотрим поверхность S_2 в R или Γ-репере и произведем следующую классификацию поверхностей S_2 в P_6 по наличию определенного числа фокусов конуса t^2_4:

1. Класс $b_0 = 0$ ($b_4 = 0$) геометрически характеризуется тем, что конус t^2_4 имеет пять фокусов, один из которых двойной. Произвол существования этого класса равен трем функциям двух аргументов.

2. Класс $b_0 = b_1 = 0$ ($b_3 = b_4 = 0$) геометрически характеризуется тем, что конус t^2_4 имеет четыре фокуса, один из которых тройной. Произвол существования данного класса равен двум функциям двух аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3. Класс $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ $(b_2 = b_3 = b_4 = 0)$ геометрически характеризуется тем, что конус t_4^2 имеет три фокуса, один из которых четырехкратный. Произвол существования данного класса равен одной функции двух аргументов.

4. Класс $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ $(b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0)$ геометрически характеризуется тем, что конус t_4^2 имеет два фокуса, один из которых пятикратный. Произвол существования данного класса равен двадцати семи функциям одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.
2. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Труды Московского математического об-ва», т. 2, ГИТТЛ, М., 1953, 275—383.
3. Ивлев Е. Т. О поверхности m-измерений в многомерном проективном пространстве. Геом. сб., 7 («Труды Томского ун-та», 196), 1968, 35—54.
4. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.
5. Щербаков Р. Н., Малаховский В. С. Краткий курс аналитической геометрии, Томск, 1964.
6. Щербаков Р. Н. О методе репеража подмногообразий. Геом. сб., 3 («Труды Томского ун-та», 168), 1963, 5—11.
7. K. Svoboda, V. Havel, I. Kola' r. La méthode du répérage des systemes de sous-variétés. Comment. Math. Univ. Carolinae, 5, 4 (1964), 183—201.
8. Остиану Н. М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl., 1962, 7, № 2, 232—240.
9. Малаховский В. С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов. Геом. сб., 4 («Труды Томского ун-та», 176), 1964, 11—20.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

О КОНГРУЭНЦИИ КОНУСОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. П. БОЧИЛЛО

1. В работе [1] изучаются в n-мерном проективном пространстве P_n h-параметрические многообразия, элементы [2] которых двойственны самим себе. Среди алгебраических поверхностей такими являются m-пары [3], состоящие из m-плоскости и $(n-m-1)$-плоскости различного взаимного положения, а также квадратичные d-мерные поверхности типа ρ при условии, что $d+\rho=n-1$. Среди последних представляют интерес $(n-2)$-мерные конусы типа 1, поскольку они индуцируют нуль-пары, при изучении многообразий которых обнаружилась тесная связь [4] с теорией поверхностей. С h-семейством $(n-2)$-мерных конусов, таким образом, индуцируется h-семейство нуль-пар, а также, как показано в [1], пара из конгруэнции и псевдоконгруэнции многомерных плоскостей. В настоящей работе методом внешних форм и подвижного репера [5] изучается двупараметрическое многообразие V_2 $(n-2)$-мерных конусов K_{n-2}, которое названо конгруэнцией $(n-2)$-мерных конусов, так как через каждую точку пространства проходит конечное число конусов. Изучаются ассоциированные с V_2 2-семейства k-характеристик гиперплоскостей, содержащих конус, псевдоконгруэнция полярно сопряженных относительно конусов прямых, а также присоединенное к конгруэнции конусов многообразие W_2 нуль-пар.

Настоящая заметка обобщает некоторые результаты из [7].

2. Рассмотрим проективное пространство P_n размерности $n \geqslant 4$ отнесенное к подвижному реперу $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются уравнениями:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu, \quad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n+1).$$

причем формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства

$$D\omega_\lambda^\mu = [\omega_\lambda^\nu \omega_\nu^\mu].$$

Если вершины A_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$, A_n поместить в гиперплоскость Π, содержащую конус K_{n-2}, точку A_n — в его нуль-мерную вершину, то уравнения элемента многообразия V_2 невырожденного конуса K_{n-2} запишутся в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0, \quad \det \| a_{\alpha\beta} \| \neq 0. \tag{1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Пронормируем коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ так, чтобы

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| = 1. \tag{2}$$

Система уравнений смежного к (1) конуса относительно репера $\{A_\lambda\}$ имеет вид:

$$\begin{gathered}(a_{\alpha\beta} + \nabla a_{\alpha\beta} + 2\Theta a_{\alpha\beta})\, x^\alpha x^\beta - 2a_{\alpha\beta}\, \omega_n^\beta\, x^\alpha x^n + [2] = 0, \\ x^{n+1} - x^\alpha\, \omega_\alpha^{n+1} - x^n\, \omega_n^{n+1} + [2] = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа, ∇ — символ ковариантного дифференцирования [8]. Требуя, чтобы системы уравнений (1) и (3) определяли один и тот же конус K_{n-2} и учитывая (2), получим систему дифференциальных уравнений инвариантности конуса

$$\omega_n^\alpha = 0, \quad \omega_n^{n+1} = 0, \quad \omega_\alpha^{n+1} = 0, \quad \Delta a_{\alpha\beta} = 0, \tag{4}$$

где

$$\Delta a_{\alpha\beta} \equiv \nabla a_{\alpha\beta} + \frac{2}{n-1}\, a_{\alpha\beta}\, \omega_\gamma^\gamma.$$

Из (2) вытекает тождество

$$a^{\alpha\beta}\, \Delta a_{\alpha\beta} \equiv 0, \tag{5}$$

где $a^{\alpha\beta}$ — алгебраические дополнения элементов $a_{\alpha\beta}$. Система (4) в силу (5) содержит $\dfrac{(n-1)(n+4)}{2}$ независимых уравнений и определяет $\dfrac{(n-1)(n+4)}{2}$ независимых главных форм. Так же, как в [1] выбираем главные формы гиперплоскости $\Pi\ \omega_{n-1}^{n+1} \equiv \omega_{n-1}$, $\omega_n^{n+1} \equiv \omega_n$ за независимые на многообразии V_2. Пусть индексы a, b принимают значения $1, 2, \ldots, n-2$; индексы i, j, κ, l — значения $n-1$, n.

Конгруэнция V_2 конусов K_{n-2} определяется системой

$$\omega_a^{n+1} = a_a^{n+1,\,i}\, \omega_i, \quad \omega_n^\alpha = b^{\alpha i}\, \omega_i, \quad \Delta a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}^i\, \omega_i, \tag{6}$$

где

$$b_{\alpha\beta}^i = b_{\beta\alpha}^i, \text{ причем } a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta}^i \equiv 0. \tag{6'}$$

Дифференцируя внешним образом (6), получаем

$$[\Delta a_a^i\, \omega_i] = 0, \ [\Delta b^{\alpha i}\, \omega_i] = 0, \ [\Delta b_{\alpha\beta}^i\, \omega_i] = 0, \tag{7}$$

где

$$\Delta a_a^i \equiv \nabla a_a^i + a_a^j\, a_b^i\, \omega_j^b - \omega_a^i, \quad a_a^{n+1,\,i} \equiv a_a^i, \tag{7'}$$

$$\Delta b^{\alpha i} \equiv \nabla b^{\alpha i} + b^{\alpha j}\, a_b^i\, \omega_j^b - b^{\alpha i}(\omega_n^n + \omega_{n+1}^{n+1}) + \delta_n^i\, \omega_{n+1}^\alpha, \tag{7''}$$

а выражения $\Delta b_{\alpha\beta}^i$ нам не понадобятся (они приведены в [1]). Кроме того,

$$a^{\alpha\beta}\, [\Delta b_{\alpha\beta}^i\, \omega_i] = 0.$$

Из теоремы 2 работы [1] получаем, что конгруэнция V_2 существует и определяется с произволом $\dfrac{(n-1)(n+4)}{2} - 2$ функций двух аргументов, а из теоремы 3 той же работы следует, что объект второго порядка Γ_2 является основным [9] для конгруэнции V_2.

3. Из продолжения уравнений (7) при фиксированных первичных параметрах получаем

$$\delta a_a^i - a_b^i\, \pi_a^b + a_a^j\, \pi_j^i + a_a^j a_b^i\, \pi_j^b - \pi_a^i = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следовательно, система величин $\{a_a^i\}$ образует геометрический объект. Он определяет $(n-3)$-мерную характеристическую [1] плоскость, через которую проходит гиперплоскость Π и соседние $\Pi + d\Pi$ при всевозможных смещениях:

$$x^{n+1} = 0, \quad x^a a_a^i + x^i = 0.$$

Помещая в нее вершины A_a репера, получаем $a_a^i = 0$, $(\omega_a^{n+1} = 0)$, $\pi_a^i = 0$. Положим

$$\omega_a^i = b_a^{ij}\,\omega_j, \quad (b_a^{ij} = b_a^{ji}).$$

Замыкая последнюю систему, получаем

$$[\Delta b_a^{ij}\,\omega_j] = 0, \quad (\Delta b_a^{ij} \equiv \nabla b_a^{ij} - b_a^{ij}\,\omega_{n+1}^{n+1}), \quad \Delta b_a^{ij} = -\,b_a^{ijk}\,\omega_k. \tag{8}$$

Таким образом, с конгруэнцией V_2 конусов ассоциируется 2-семейство характеристик $(n-3)$-плоскостей, огибаемое 2-семейством гиперплоскостей конусов. Обозначим $(n-3)$-плоскость $[A_1 A_2 \ldots A_{n-2}] \equiv [A_a]$, а через $\{[A_a]\}_2$ — 2-семейство этих плоскостей, которое является конгруэнцией, согласно общепринятой терминологии [6].

Точку $F_1 = x^a A_a$ будем называть фокусом плоскости $[A_a]$, если она принадлежит, кроме $[A_a]$, еще некоторой смежной плоскости $[A_a] + d[A_a]$. Условие фокальности точки F_1 запишется в виде:

$$F_1 \equiv x^a A_a = {}'x^a\, A_a', \quad \text{где } A_a' = A_a + dA_a,\ {}'x^a = x^a + dx^a.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^a \omega_a^i \equiv x^a b_a^{ij}\,\omega_j = 0, \tag{8'}$$

из которой следует, что геометрическим местом фокусов F_1 является $(n-4)$-мерная алгебраическая поверхность второго порядка:

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ \det\| x^a b_a^{ij}\| = 0.$$

Будем называть ее фокусной [10] поверхностью Φ^2. Образ, порождаемый Φ^2, когда плоскость $[A_a]$ описывает двупараметрическое семейство, можно считать либо $(n-2)$-мерной алгебраической поверхностью [11], которую естественно называть фокальной поверхностью конгруэнции $\{[A_a]\}_2$, либо 2-семейством плоских алгебраических $(n-4)$-мерных элементов Φ^2 [8].

Система (8′) определяет пересечение $[A_a]$ с соседней $[A_a] + d[A_a]$ при некотором смещении. При $n = 4$ $[A_a]$ — прямая. Она пересекается с соседней в точке только при двух смещениях, определяемых из уравнения $\det\|\omega_a^i\| = 0$; при $n > 4$ $[A_a]$ пересекается с соседней при любом смещении по $(n-5)$-плоскости. Будем искать подпространство, которое является общей частью плоскости $[A_a]$ и соседних $[A_a] + d[A_a]$ при всевозможных смещениях. Очевидно, что оно должно определяться из системы

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^a b_a^{ij} = 0, \tag{9}$$

т. е. существует при $n \geqslant 6$, когда пересечение $[A_a]$, с $[A_a] + d[A_a]$ по крайней мере линейно. Система (9) определяет $(n-6)$-мерную характеристику плоскости $[A_a]$.

Определение 1. Общую часть гиперплоскости Π и соседних $\Pi + d\Pi$ при всевозможных смещениях будем называть 1-характеристикой гиперплоскости Π семейства $\{\Pi\}_2$ (или характеристикой первого порядка). Обозначим 1-характеристику гиперплоскости Π через $\Pi_1 \equiv [A_a]$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 2. Общую часть (если она существует) $(n-3)$-плоскости Π_1 и соседних $\Pi_1 + d\Pi_1$ при всевозможных смещениях, т. е. 1-характеристику $(n-3)$-плоскости Π_1, будем называть 2-характеристикой Π_2 (или характеристикой 2-го порядка) гиперплоскости Π семейства $\{\Pi\}_2$.

Пусть индексы a_2, b_2 принимают значения $1, 2, \ldots, n-6, n-5$; индексы $u_2 v_2$ — значения $n-4$, $n-3$, $n-2$.

Помещение точек $[A_{a_2}]$ в плоскость Π_2 в силу уравнений

$$\delta b_a^{ij} - b_b^{ij}\pi_a^b + b_a^{kj}\pi_k^i + b_a^{ik}\pi_k^j - b_a^{ij}\pi_{n+1}^{n+1} = 0$$

приводит к фиксации $b_{a_2}^{ij} = 0$, $b_{u_2}^{ij}\pi_{c_2}^{u_2} = 0$, откуда при условии

$$\det\|b_{u_2}^{ij}\| \neq 0$$

имеем $\pi_{a_2}^{u_2} = 0$. Главные формы $\omega_{c_2}^{u_2}$ в силу уравнений (8) связаны соотношениями

$$b_{u_2}^{ij}\omega_{a_2}^{u_2} = b_{a_2}^{ijk}\omega_k, \tag{10}$$

откуда в силу $\det|b_{u_2}^{ij}| \neq 0$ имеем

$$\omega_{a_2}^{u_2} = b_{a_2}^{u_2 k}\omega_k, \quad (b_{u_2}^{ij} b_{a_2}^{u_2 k} = b_{a_2}^{ijk}). \tag{11}$$

Системы Пфаффа (10) и (11) эквивалентны, b_a^{ijk} симметричны по верхним индексам.

Из уравнений, определяющих теперь Π_2

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^{u_2} b_{u_2}^{ij} = 0, \tag{12}$$

следует, что при $b_{a_2}^{ij} = 0$, $\det\|b_{u_2}^{ij}\| \neq 0$ (тогда $R\|b_{a_2}^{ij}, b_{u_2}^{ij}\| = 3$) размерность Π_2 не больше $n-6$, а из (8′) получаем, что при этом размерность пересечения Π_1 с $\Pi_1 + d\Pi_1$ не выше $n-5$. Таким образом, имеет место:

Теорема 1. В каждом элементе Π_1 конгруэнции 1-характеристик геометрическим местом фокусов является алгебраическая $(n-4)$-мерная поверхность второго порядка. Эта поверхность при $n=5$ нелинейчатая. При $n > 5$ она — линейчатая и одновременно вырожденная, т. е. является $(n-4)$-мерным конусом второго порядка с $(n-6)$-мерной плоской вершиной Π_2 (в общем случае) и с $(n-5)$-мерными плоскими образующими и невырожденной направляющей кривой второго порядка

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^{a_2} = 0,\ \det\|x^{u_2} b_{u_2}^{ij}\| = 0.$$

Далее рассматриваем Π_2 и ищем точки $F_2 = x^{a_2} A_{c_2}$ такие, что при некотором смещении $F_2 + dF_2 \in \Pi_2$. Получаем из этого условия

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^{u_2} = 0,\ x^{a_2}\omega_{a_2}^{u_2} = 0 \tag{13}$$

или, в силу равносильности (10) и (11), эквивалентную (13) систему уравнений:

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^{u_2} = 0,\ x^{a_2} b_{a_2}^{ijk}\omega_k = 0. \tag{14}$$

Заметим, что эта система имеет решение при произвольном $\omega_n : \omega_{n-1}$, если $n \geqslant 9$. Тогда Π_2 пересекается с соседней по $(n-9)$-плоскости, определяемой системой (14) при соответствующем смещении. Если же $n \geqslant 10$, то существуют точки в Π_2, принадлежащие соседним $\Pi_2 + d\Pi_2$ при всевозможных смещениях. Они удовлетворяют системе:

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^{u_2} = 0,\ x^{a_2} b_{a_2}^{ijk} = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

которая и определяет $(n-10)$-мерную характеристику плоскости Π_2. Продолжая систему (10), получим

$$[\Delta b^{ijk}_{a_2}\,\omega_k]=0,\ \ (\Delta b^{ijk}_{a_2}\equiv\nabla b^{ijk}_{a_2}+b^{ijk}_{u_2}\,\omega^{u_2}_{a_2}-2b^{ijk}_{a_2}\,\omega^{n+1}_{n+1}),$$

$$\Delta b^{ijk}_{a_2}=-b^{ijkl}_{a_2}\,\omega_l. \tag{15}$$

Пусть индексы a_3, b_3 принимают значения $1, 2, \ldots, n-10, n-9$; индексы u_3, v_3 — значения $n-8$, $n-7$, $n-6$, $n-5$. При фиксированных первичных параметрах получаем из (15)

$$\delta b^{ijk}_{a_3}+b^{ljk}_{a_3}\,\pi^i_l+b^{ilk}_{a_3}\,\pi^j_l+b^{ijl}_{a_3}\,\pi^k_l-b^{ijk}_{b_2}\,\pi^{b_2}_{a_3}+b^{ijk}_{u_2}\,\pi^{u_2}_{a_3}-2b^{ijk}_{a_3}\,\pi^{n+1}_{n+1}=0.$$

Помещая точки A_{a_3} в Π_3, будем иметь

$$b^{ijk}_{a_3}=0,\ b^{ijk}_{u_3}\,\pi^{u_3}_{a_3}=0,\ \text{при}\ \det\|b^{ijk}_{u_3}\|\neq 0\ \ \pi^{u_3}_{a_3}=0.$$

Из (10) получим, что теперь $\omega^{u_2}_{a_3}=0$, а из соответствующей подсистемы (15), которая приняла теперь вид

$$\Delta b^{ijk}_{a_3}\equiv-b^{ijk}_{u_3}\,\omega^{u_3}_{a_3}=-b^{ijkl}_{a_3}\,\omega_l$$

($b^{ijkl}_{a_2}$ симметричны по всем верхним индексам), выражаем через базисные главные формы $\omega^{u_3}_{a_3}$ в виде:

$$\omega^{u_3}_{a_3}=b^{u_3 l}_{a_3}\,\omega_l,\ \ b^{ijk}_{u_3}\,b^{u_3 l}_{a_3}=b^{ijkl}_{a_3}.$$

Определение 3. 1-характеристикой, или характеристикой первого порядка плоскости P, назовем геометрическое место точек ее, принадлежащих соседним плоскостям $P+dP$ при всевозможных смещениях.

Определение 4. k-характеристикой Π_k (или характеристикой k-го порядка) гиперплоскости Π семейства $\{\Pi\}_2$ назовем 1-характеристику $(k-1)$-характеристики Π_{k-1} этой гиперплоскости семейства $\{\Pi\}_2$.

Предполагая, что n таково, что обеспечивает существование Π_{k-1} размерности $n-\dfrac{k(k+1)}{2}$, помещаем в нее вершины репера $A_{a_{k-1}}$ где индексы принимают следующие значения:

$$a_t,\ b_t,=1,\ 2,\ldots,\ n-\frac{(t+1)(t+2)}{2},\quad n-\frac{(t+1)(t+2)}{2}+1;$$

$$u_t,\ v_t=n-\frac{(t+1)(t+2)}{2}+2,\ldots,\ n-\frac{t(t+1)}{2}+1;$$

$$t=2,3,\ldots,k-1,\ k.$$

Тогда

$$\omega^{u_{k-2}}_{a_{k-1}}=0,$$

$$b^{i_1 i_2\ldots i_{k-1}}_{u_{k-1}}\,\omega^{u_{k-1}}_{a_{k-1}}=b^{i_1 i_2\ldots i_{k-1} i_k}_{a_{k-1}}\,\omega_{i_k}. \tag{16}$$

Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}$ принимают значения $n-1$, n. Продолжая систему (16), получим $[\Delta b^{i_1 i_2\ldots i_k}_{a_{k-1}}\,\omega_{i_k}]=0$, где

$$\Delta b^{i_1\ldots i_k}_{a_{k-1}}\equiv\nabla b^{i_1\ldots i_k}_{a_{k-1}}-(n-1)\,b^{i_1\ldots i_k}_{a_{k-1}}\,\omega^{n+1}_{n+1}+b^{i_1\ldots i_k}_{u_{k-1}}\,\omega^{u_{k-1}}_{a_{k-1}},$$

$$\Delta b^{i_1\ldots i_k}_{a_{k-1}}=-b^{i_1\ldots i_k\, i_{k+1}}_{a_{k-1}}\,\omega_{i_{k+1}}. \tag{17}$$

Пусть $F_{k-1}=x^{a_{k-1}}A_{a_{k-1}}$. Ищем такие точки F_{k-1}, которые удовлетворяют условию $F_{k-1}\in\Pi_{k-1}+d\Pi_{k-1}$. Они определяются из системы

$$x^{n+1}=0,\ x^i=0,\ x^{u_2}=0,\ldots,\ x^{u_{k-1}}=0,\ x^{a_{k-1}}\,\omega^{u_{k-1}}_{a_{k-1}}=0,$$

Научная библиотека Для книг

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

которая в силу (16) эквивалентна системе

$$x^{n+1}=0,\ x^i=0;\ x^{u_2}=0,\dots,\ x^{u_{k-1}}=0,\ x^{a_{k-1}}\,b^{i_1\cdots i_{k-1}\,i_k}_{a_{k-1}}\,\omega_{i_k}=0.$$

Отсюда 1-характеристика плоскости Π_{k-1} должна определяться системой:

$$x^{n+1}=0,\ x^i=0,\ x^{u_2}=0,\dots\ x^{u_{k-1}}=0,\ x^{a_{k-1}}\,b^{i_1\,i_2\cdots i_k}_{a_{k-1}}=0,$$

т. е. существует, если $n\geqslant\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ и имеет размерность

$$n-\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Из соответствующей совокупности уравнений (17) при фиксированных первичных параметрах получаем

$$\delta b^{i_1\cdots i_k}_{a_k}+b^{ji_2\cdots i_k}_{a_k}\,\pi^{i_1}_{j}+\dots+b^{i_1\cdots i_{k-1}\,j}_{a_k}\,\pi^{i_k}_{j}-b^{i_1\cdots i_k}_{b_k}\,\pi^{b_k}_{a_k}-$$
$$-(k-1)\,b^{i_1\cdots i_k}_{a_k}\,\pi^{n+1}_{n+1}+b^{i_1\cdots i_k}_{u_{k-1}}\,\pi^{u_k-1}_{a_k}=0.$$

Отсюда, поместив точки A_{a_k} репера в плоскость Π_k, получим

$$b^{i_1\cdots i_k}_{a_k}=0,\ b^{i_1\cdots i_k}_{u_k}\,\pi^{u_k}_{a_k}=0$$

при условии $\det\|b^{i_2\cdots i_k}_{u_k}\|\neq 0$, т. е. $\pi^{u_k}_{a_k}=0$. Тогда из (16) будем иметь $\omega^{u_{k-1}}_{a_k}=0$, а из (17)

$$b^{i_1\cdots i_k}_{u_k}\,\omega^{u_k}_{a_k}=b^{i_1\cdots i_k\,i_{k+1}}_{a_k}\,\omega_{i_{k+1}}.$$

Π_k теперь определяется системой:

$$x^{n+1}=0,\ x^i=0,\ x^{u_2}=0,\cdots,\ x^{u_{k-1}}=0,\quad x^{u_k}\,b^{i_1\cdots i_k}_{u_k}=0,$$

откуда следует, что в рассматриваемом случае, когда

$$R\|b^{i_1\cdots i_k}_{a_k},\quad b^{i_1\cdots i_k}_{u_k}\|=k+1,$$

размерность Π_k не выше, чем $n-\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. 2-семейство гиперплоскостей Π обладает характеристикой максимального порядка k, если

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}\leqslant n<\frac{(k+2)(k+3)}{2}.$$

Таким образом, с каждой гиперплоскостью Π-семейства $\{\Pi\}_2$ общего вида (когда $R\|b^{i_1\cdots i_t}_{a_t},\ b^{i_1\cdots i_t}_{u_t}\|=t+1,\ t=2,\ 3,\cdots,\ k$) связана конечная последовательность вложенных друг в друга многомерных плоскостей: $\Pi\supset\Pi_1\supset\Pi_2\supset\cdots\supset\Pi_{k-1}\supset\Pi_k$, причем размерность плоскости $\Pi_{t_1}(t_1=1,\ 2,\cdots,\ k)$ равна $n-\dfrac{(t_1+1)(t_1+2)}{2}$.

3. $(n-3)$-плоскости $[A_a]$ относительно конуса K_{n-2} полярно сопряжена прямая

$$x^{n+1}=0,\ a_{ab}\,x^a=0.$$

Поместив на нее точку A_{n-1}, из уравнений $\delta a_{n-1,\,a}-a_{ba}\,\pi^b_{n-1}-$
$-a_{n-1,\,b}\,\pi^b_a+\dfrac{2a_{n-1,\,n-1}}{n-1}\,\pi^\gamma_\gamma=0$ при условии $\det\|a_{ab}\|\neq 0$ получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

a_{n-1}, $\boldsymbol{a}=0$. $\pi^a_{n-1}=0$. Теперь можно найти разложение главных форм ω^a_{n-1} по базису в виде:

$$\omega^a_{n-1}=c^{ai}_{n-1}\omega_i.$$

Прямая $[A_{n-1}\,A_n]$ описывает псевдоконгруэнцию [6].

В рассматриваемом общем случае многообразия V_2 касательная плоскость к поверхности (A_n) вершин конусов пересекается с П по прямой. Поэтому точку A_{n+1} помещаем в касательную плоскость к (A_n). Тогда $b^{\alpha n}=0$ и из уравнений $\Delta b^{\alpha n}=b^{\alpha ni}\omega_i$ при фиксированных первичных параметрах получаем $b^{\alpha,\,n-1}\pi^n_{n-1}+\pi^\alpha_{n+1}=0$. Положим

$$b^{\alpha,\,n-1}\omega^n_{n-1}+\omega^\alpha_{n+1}=E^{\alpha i}_{n+1}\omega_i. \tag{18'}$$

Уравнения псевдоконгруэнции $\{[A_{n-1}\,A_n]\}_2$ имеют вид:

$$\omega^a_{n-1}=c^{ai}_{n-1}\omega_i,\quad \omega^a_n=b^{a,\,n-1}\omega_{n-1}.$$

Замыкая их, получаем

$$[\Delta b^{ai}\omega_i]=0,\quad [\Delta c^{ai}_{n-1}\omega_i]=0,$$

$$\Delta c^{ai}_{n-1}\equiv\nabla c^{ai}_{n-1}+b^{ai}\omega^n_{n-1}+\delta^i_{n-1}\omega^n_{n+1}-c^{ai}_{n-1}(\omega^{n+1}_{n+1}+\omega^{n-1}_{n-1}).$$

Рассмотрим точку $P=x^{n-1}A_{n-1}+x^nA_n$ на луче $[A_{n-1}\,A_n]$ псевдоконгруэнции и некоторую линейчатую поверхность $\omega_n:\omega_{n-1}$. Вдоль нее

$$P+dP=(\dots)^iA_i+x^{n-1}(\omega^a_{n-1}A_a+\omega_{n-1}A_{n+1})+x^n(\omega^a_nA_a+$$

$$+\omega_nA_{n+1})=(\dots)^iA_i+[x^{n-1}(c^{a,\,n-1}_{n-1}A_a+A_{n+1})+x^nb^{a,\,n-1}A_a]\omega_{n-1}+$$

$$+(x^{n-1}c^{an}_{n-1}A_a+x^nA_{n+1})\omega_n. \tag{19}$$

Введенные в [13], [14] касательные подпространства можно определить следующим образом:

Определение 5. Подпространство T_ρ минимальной размерности, содержащее прямую $[A_{n-1}\,A_n]$ и касательную 2-плоскость в точке $P=x^{n-1}A_{n-1}+x^nA_n$ к поверхности (P), описываемой этой точкой, называется касательным подпространством в точке P псевдоконгруэнции $\{[A_{n-1}\,A_n]\}_2$.

Определение 6. Подпространство T_λ минимальной размерности, содержащее прямую $[A_{n-1}\,A_n]$ и соседнюю с ней $[A_{n-1}\,A_n]+d[A_{n-1}\,A_n]$ при смещении вдоль однопараметрического семейства $\{[A_{n-1}\,A_n]\}_1$, называется касательным подпространством к этой линейчатой поверхности для луча $[A_{n-1}\,A_n]$.

Пользуясь (19), получим уравнения в тангенциальных координатах $\{X_a,\,X_i,\,X_{n+1}\}$, определенных выше касательных подпространств T_ρ-касательного в точке $(\rho=x^n:x^{n-1})$ и T_λ-касательного к линейчатой поверхности $\omega_n:\omega_{n-1}=\lambda$:

$$X_i=0,\quad x^{n-1}(c^{a,\,n-1}_{n-1}X_a+X_{n+1})+x^nb^{a,\,n-1}X_a=0,$$

T_ρ:

$$x^{n-1}c^{an}_{n-1}X_a+x^nX_{n+1}=0 \tag{20}$$

или

$$X_i=0,\quad x^{n-1}[(c^{a,\,n-1}_{n-1}\omega_{n-1}+c^{an}_{n-1}\omega_n)X_a+\omega_{n-1}X_{n+1}]+$$

$$+x^n(b^{a,\,n-1}\omega_{n-1}X_a+\omega_nX_{n+1})=0,\quad x^{n-1}c^{an}_{n-1}X_a+x^nX_{n+1}=0. \tag{20'}$$

$$X_i=0,\quad (c^{a,\,n-1}_{n-1}X_a+X_{n+1})\omega_{n-1}+c^{an}_{n-1}X_a\omega_n=0,$$

T_λ:

$$b^{a,\,n-1}X_a\omega_{n-1}+X_{n+1}\omega_n=0 \tag{21}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

или

$$X_i = 0,\ x^{n-1}[(c_{n-1}^{a,\,n-1} X_a + X_{n+1})\,\omega_{n-1} + c_{n-1}^{an} X_a\,\omega] + \tag{21'}$$

$$+ x^n (b^{a,\,n-1} X_a\,\omega_{n-1} + X_{n+1}\,\omega_n) = 0,\ b^{a,\,n-1} X_a\,\omega_{n-1} + X_{n+1}\,\omega_n = 0.$$

Таким образом, в системах (20′) и (21′) по три одинаковых уравнения, что означает геометрически очевидный факт: каждая пара 3-мерных подпространств T_ρ и T_λ имеет общую двумерную плоскость — касательную к образующей прямой $[A_{n-1}A_n]$ псевдоконгруэнции в данной точке и вдоль данной линейчатой поверхности.

Пусть T_ρ и T_λ совпадают. Тогда система, состоящая из уравнений (20′) и (21′), определяет подпространство размерности $n-4$, но из этого следует, что три уравнения относительно координат X_a, X_{n+1} линейно зависимы, т. е. ранг матрицы

$$M = \begin{Vmatrix} x^{n-1}\,\omega_{n-1}^{a} + x^n\,b^{a,\,n-1}\,\omega_{n-1} & x^{n-1}\,\omega_{n-1} + x^n\,\omega_n \\ x^{n-1}\,c_{n-1}^{an} & x^n \\ b^{a,\,n-1}\,\omega_{n-1} & \omega^n \end{Vmatrix}$$

меньше трех. Если касательная 2-плоскость к лучу псевдоконгруэнции $\{[A_{n-1}A_n]\}_2$ в точке A_n вдоль $\omega_n = 0$ не является касательной в точке A_{n-1} вдоль $\omega_{n-1} = 0$, т. е. например,

$$\det \begin{Vmatrix} c_{n-1}^{n-3,\,n} & c_{n-1}^{n-2,\,n} \\ b^{n-3,\,n-1} & b^{n-2,\,n-1} \end{Vmatrix} \neq 0, \tag{22}$$

то условия $\operatorname{Rang} \|M\| = 2$ могут быть записаны в виде:

$$c_{n-1}^{n-2,\,n-1}(c_{n-1}^{n-3,\,n}\,\tilde{b}^{a,\,n-1} - \tilde{c}_{n-1}^{an}\,b^{n-3,\,n-1}) - \tilde{c}_{n-1}^{n-3,\,n-1}(\tilde{c}_{n-1}^{an}\,b^{n-2,\,n-1} -$$

$$- c_{n-1}^{n-2,\,n}\,\tilde{b}^{a,\,n-1}) + \tilde{c}_{n-1}^{a,\,n-1}(c_{n-1}^{n-2,\,n}\,b^{n-3,\,n-1} - c_{n-1}^{n-3,\,n}\,b^{n-2,\,n-1}) = 0, \tag{23}$$

$$(1-\rho\lambda)(c_{n-1}^{n-2,\,n}\,b^{n-3,\,n-1} - c_{n-1}^{n-3,\,n}\,b^{n-2,\,n-1}) + \lambda(c_{n-1}^{n-2,\,n-1}\,c_{n-1}^{n-3,\,n} -$$

$$- c_{n-1}^{n-3,\,n-1}\,c_{n-1}^{n-2,\,n}) + \rho(c_{n-1}^{n-3,\,n-1}\,b^{n-2,\,n-1} - c_{n-1}^{n-2,\,n-1}\,b^{n-3,\,n-1}) = 0. \tag{24}$$

Здесь $\tilde{a} = 1, 2, \cdots, n-4$; $\rho = x^n : x^{n-1}$; $\lambda = \omega_n : \omega_{n-1}$.

При $n = 4$ условие (22) и соотношения (23) отсутствуют, остается соотношение (24), которое устанавливает соответствие между ρ и λ, найденное С. Е. Карапетяном в [12], а в приведенном здесь виде полученное в [7].

С помощью элементарных преобразований из матрицы M выделяется матрица из $(n-2)$ столбцов

$$\tilde{M} = \begin{Vmatrix} c_{n-1}^{a,\,n-1} \\ c_{n-1}^{a,\,n} \\ b^{a,\,n-1} \end{Vmatrix}, \tag{25}$$

ранг которой (при $n \geqslant 5$) тоже должен быть меньше трех, если T_ρ и T_λ совпадают.

Исключая x^{n-1}, x^n из уравнений 20 (или ω_{n-1}, ω_n из системы (21), получим геометрическое место $(n-4)$-плоскостей T_ρ (или T_λ). Это — $(n-3)$-поверхность второго класса:

$$k_2 : X_i = 0,\ \det \begin{Vmatrix} c_{n-1}^{a,\,n-1} X_a + X_{n+1} & b^{a,\,n-1} X_a \\ c_{n-1}^{an} X_a & X_{n+1} \end{Vmatrix} = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Все подпространства T_ρ (при различных значениях $x^n : x^{n-1}$), а также все подпространства T_λ (при различных значениях $\omega_n : \omega_{n-1}$) и, следовательно, поверхность k_2 содержат (при $n > 5$) $(n-6)$-плоскость, определяемую системой:

$$X_i = 0,\ c^{a,\,n-1}_{n-1} X_a + X_{n+1} = 0,\ b^{a,\,n-1} X_a = 0,\ c^{an}_{n-1} X_a = 0,\ X_{n+1} = 0. \quad (26)$$

Она — особая для k_2, которая, следовательно, является $(n-3)$-мерной поверхностью второго порядка типа $n-5$. Подпространство минимальной размерности, которое содержит все прямые дифференциальной окрестности первого порядка прямой $[A_{n-1}A_n]$ 2-семейства этих прямых, называют касательным подпространством T псевдоконгруэнции $\{[A_{n-1}A_n]\}_2$.

В силу принципа двойственности системе (26) соответствует пятимерное касательное подпространство псевдоконгруэнции:

$$T \equiv [A_i A_{n+1},\ c^{a,\,n-1}_{n-1} A_a,\ b^{a,\,n-1} A_a,\ c^{an}_{n-1} A_a]. \quad (27)$$

Система (26) в общем случае линейно независима, т. е. подпространство T пятимерно и ранг матрицы M, а также и матрицы M равен трем.

Таким образом получена

Теорема 2. Совпадение касательных подпространств T_ρ и T_λ, устанавливающее соответствие (24) между ρ и λ, имеет место при выполнении $(n-4)$ условий вида (23), при которых k_2 является $(n-3)$-мерным конусом типа больше, чем $n-5$.

При помощи результатов работы [7] получается, что если k_2 распадается на пару $(n-3)$-плоскостей, то на каждом луче псевдоконгруэнции имеется по крайней мере один фокус.

Заметим, что Л. З. Кругляков [15], изучая P_5 псевдоконгруэнцию прямых, обнаружил класс 2-семейств прямых с четырехмерным касательным подпространством и назвал такое семейство псевдофокальным.

4. Рассмотрим построение канонического репера V_2 в P_n. 2-плоскость, проходящая через прямую $[A_{n-1}A_n]$ и касательную к инвариантной линии $\omega_n = 0$ $[A_{n-1}A_n\, dA_{n\,\omega_n=0}] = [A_{n-1}A_n,\ b^{a,\,n-1}A_a]$ пересекает образующую плоскость конгруэнции $\{[A_a]\}_2$ в точке $B = b^{a,\,n-1}A_a$. Дальнейшие построения связаны с инвариантным смещением $\omega_n = 0$. Будем поэтому называть его основным на поверхности (A_n). Исключая тот случай, когда $[A_{n-1}A_n]$ касается вдоль рассматриваемого смещения поверхности (A_n), поместим в точку B вершину A_{n-2} репера. Из уравнений

$$\Delta b^{a,\,n-1} = b^{a,\,n-1,\,i}\,\omega_i \quad (28)$$

при фиксированных первичных параметрах получим тогда

$$b^{a\,(n-2),\,n-1} = 0,\ b^{n-2,\,n-1} \neq 0,\ \pi^{a\,(n-2)}_{n-2} = 0.$$

Здесь и ниже через $a(n-2)$, $a(n-3), \cdots$, $b(n-2)\cdots$ обозначается совокупность значений, принимаемых индексами a, $b, \cdots$, без номера, стоящего в скобке. Из (28) можно получить выражение главных форм $\omega^{a\,(n-2)}_{n-2}$ в виде:

$$\omega^{a\,(n-2)}_{n-2} = b^{a\,(n-2)\,i}_{n-2}\,\omega_i.$$

Определение 7. Касательным подпространством к m-плоскости P_m h-семейства $\{P_m\}_h$ вдоль некоторого одномерного подмногообразия ω [2] в точке $A \in P_m$ называем $(m+1)$-плоскость $[P_m\, dA_{|\omega}]$.

Рассмотрим касательное подпространство к плоскости $[A_a]$ в точке A_{n-2} вдоль основного подмногообразия. Пусть

$$[A_a\, dA_{n-2}|_{\omega_n=0}] = [A_a,\ b^{n-1,\,n-1}_{n-2} A_{n-1} + b^{n,\,n-1}_{n-2} A_n] = [A_a A_{n-1}].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из уравнений $\Delta b^{ij}_{n-2} = b^{ijk}_{n-2}\omega_k$ при фиксированных первичных параметрах получим тогда $b^{n-1,\,n}_{n-2} = 0$, $b^{n-1,\,n-1}_{n-2} \neq 0$, $\pi^n_{n-1} = 0$ и положим $\omega^n_{n-1} = c^{ni}_{n-1}\omega_i$. Тогда в силу (18′) положим также

$$\omega^a_{n+1} = e^{ai}_{n+1}\omega_i.$$

Мы исключили случай, когда A_{n-2} — фокус плоскости $[A_a]$ и смещение $\omega_n = 0$ — фокальное. Смещение $\omega_{n-1} = 0$ стало инвариантным и характеризуется равенством

$$[A_a\, dA_{n-2}|_{\omega_{n-1}=0}] = [A_a A_n].$$

Точку A_{n-3} помещаем в касательную 2-плоскость к $[A_{n-1}A_n]$ в точке A_{n-1} вдоль $\omega_{n-1} = 0$.

Тогда из

$$\Delta^{an}_{n-1} = c^{ani}_{n-1}\omega_i \tag{29}$$

при фиксированных первичных параметрах получаем

$$c^{a\,(n-3),\,n}_{n-1} = 0,\ c^{n-3,\,n}_{n-1} \neq 0,\ \pi^{a\,(n-3)}_{n-3} = 0,$$

т. е.

$$\omega^{a\,(n-3)}_{n-1} = c^{a\,(n-3),\,n-1}_{n-1}\omega_{n-1},$$

а из (29) найдем разложение $\omega^{a\,(n-3)}_{n-3}$, положив

$$\omega^{a\,(n-3)}_{n-3} = b^{a\,(n-3)\,i}_{n-3}\omega_i.$$

Вершину A_{n-4} помещаем в полюс $(n-4)$-плоскости $[A_{a_2}A_{n-2}A_{n-3}]$ относительно пересечения конуса K_{n-2} с $(n-3)$-плоскостью Π_1. Тогда получим $a_{n-4,\,b\,(n-4)} = 0$, $a_{n-4,\,n-4} \neq 0$, $a_{b\,(n-4)\,a\,(n-4)}\pi^{b\,(n-4)}_{n-4} = 0$. При условии невырожденности конуса K_{n-2}, $\det\|a_{b\,(n-4)\,a\,(n-4)}\| \neq 0$ имеем $\pi^{b\,(n-4)}_{n-4} = 0$ и полагаем $\omega^{b\,(n-4)}_{n-4} = b^{b\,(n-4)\,i}_{n-4}\omega_i$.

Точки, дополняющие плоскость $[A_{a_3}]$ до $[A_{a_2}]$, обозначим через A_{u_3}, $u_3 = n-5,\ n-6,\ n-7,\ n-8$. Фиксируем их, используя касательные подпространства (см. определение 7) к образующим 2-семейства плоскостей $[A_i\ A_{u_2}]$. Здесь $u_2,\ v_2 = n-4,\ n-3,\ n-2$. Именно точки A_{u_2-3} выбираем так, что

$$[A_i A_{v_2}\, dA_{u_2}|_{\omega_n=0}] = \omega A_i A_{v_2} A_{u_2-3}].$$

Из предыдущего имеем $\omega^{a_2}_{u_2} = b^{a_2\,i}_{u_2}\omega_i$. Замыкая систему, получаем

$$[\Delta b^{a_2\,i}_{u_2}\omega_i] = 0, \text{ где } \Delta b^{a_2\,i}_{u_2} \equiv \nabla b^{a_2\,i}_{u_2} - b^{ij}_{u_2}\omega^{a_2}_j - b^{a_2\,i}_{u_2}\omega^{n+1}_{n+1}.$$

Продолжая последнюю систему, будем иметь

$$\Delta b^{a_2\,i}_{u_2} = b^{a_2\,ij}_{u_2}\omega_j. \tag{30}$$

Отсюда при фиксированных первичных параметрах получим

$$b^{a_2\,(u_2-3),\,n-1}_{u_2} = 0,\ b^{u_2-3,\,n-3}_{u_2}\ \pi^{a_2\,(u_2-3)}_{u_2-3} = 0$$

(по (u_2-3) не суммировать), при

$$b^{u_2-3,\,n-1}_{u_2} \neq 0\ \ \pi^{a_2(u_2-3)}_{u_2-3} = 0.$$

Тогда

$$\omega^{a_2\,(u_2-3)}_{u_2} = b^{a_2\,(u_2-3)\,n}_{u_2}\omega_n.$$

Из (30) получим выражение главных форм $\omega^{a_2\,(u_2-3)}_{u_2-3}$ через базисные, положив

$$\omega^{a_2\,(u_2-3)}_{u_2-3} = b^{a_2\,(u_2-3)\,i}_{u_2-3}\omega_i.$$

Здесь через $a_2(u_2-3)$ обозначена совокупность значений, принимаемых a_2 без значения u_2-3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Рассматриваем многообразие плоскостей $[A_i\ A_{u_2}]$ общего вида, когда ранг матрицы $\| b_{u_2}^{a_2,\ n-1} \|$ равен 3.

Уравнения

$$x^{n+1} = 0,\ x^i = 0,\ x^{u_2} = 0,\ a_{a_2 b_2} x^{a_2} x^{b_2} = 0 \qquad (31)$$

определяют пересечение конуса K_{n-2} с плоскостью $[A_{a_2}]$. Предполагая его невырожденность, помещаем вершину A_{n-8} в полюс $(n-7)$-плоскости $[A_{a_3}\ A_{n-5}\ A_{n-6}\ A_{n-7}]$ относительно (31) в $[A_{a_2}]$. Получаем тогда

$$a_{a_2 (n-8),\ n-8} = 0,\ a_{a_2 (n-8)\, b_2 (n-8)}\ \pi_{n-8}^{b_2 (n-8)} = 0,$$

$\det \| a_{a_2 (n-8)\, b_2 (n-8)} \| \neq 0$, $\pi_{n-8}^{b_2 (n-8)} = 0$ и полагаем

$$\omega_{n-8}^{a_2 (n-8)} = b_{n-8}^{a_2 (n-8)\, i}\ \omega_i.$$

Совершенно аналогично выбираются точки $A_{u_3}, \cdots A_{u_{k-1}}$. Если в гиперплоскости Π 2-семейства $\{\Pi\}_2$ существует k-характеристика Π_k размерности $n - \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, но нет характеристики следующего порядка, то в Π_k содержится N точек $1 \leqslant N \leqslant k+2$, для фиксации которых (она проводится, как выше) используем N точек A_{u_k} если $N < k+2$, и еще пересечение конуса K_{n-2} с Π_k, если $N = k+2$.

Вершину A_{n+1} помещаем в точку пересечения проективной нормали многообразия V_2 [1]-прямой $[A_n\ A_{n+1}]$ с $(n-2)$-мерным пересечением гиперплоскости $[A_a\ A_n\ A_{n+1}]$ с соседней при $\omega_n = 0$.

Продолжая (28′), имеем $[\Delta e_{n+1}^{\alpha i}\ \omega_i] = 0$, $\Delta e_{n+1}^{\alpha i} = e_{n+1}^{\alpha ij}\ \omega_j$. Используя последние уравнения при фиксированных первичных параметрах, получаем

$$e_{n+1}^{n-1,\ n-1} = 0,\ b^{n-1,\ n-1} \neq 0,\ \pi_{n+1}^{n} = 0$$

и полагаем

$$\omega_{n+1}^{n} = e_{n+1}^{ni}\ \omega_i.$$

Итак, в данном разделе проведено построение простого канонического репера (без нормирования вершин) конгруэнции V_2. Заметим, что указанное в определении 7 понятие касательного подпространства широко используется как при изучении h-семейств V_h конусов в P_n, так и при изучении ассоциированных многообразий W_h нуль-пар.

5. Рассмотрим ассоциированное с конгруэнцией V_2 2-семейство W_2, элементом которого является нуль-пара: вершина конуса + гиперплоскость конуса. Известно [16], что с точкой поверхности связывается последовательность соприкасающихся плоскостей порядков 2, 3, $\cdots$ В силу того, что элемент W_2 — нуль-пара двойствен самому себе, соприкасающаяся плоскость S_t порядка t к поверхности вершин пересекается с $(t-1)$-характеристикой Π_{t-1} по $(t+1)$-плоскости, дополняющей Π_t до Π_{t-1}, причем S_t не имеет общих точек с Π_t $(t = 2, 3, \ldots, k)$.

Пусть к W_2 присоединен подвижной репер так, что A_n — вершина нуль-пары, а $\Pi \equiv [A_1\ A_2 \cdots A_n]$ — ее гиперплоскость. Уравнения многообразия W_2, на котором линейно независимые формы ω_{n-1}, ω_n снова выбраны за базисные, имеют вид:

$$\omega_n^{\alpha} = b^{\alpha i}\ \omega_i,\ \omega_a^{n+1} = a_a^i\ \omega_i,\ [\Delta a_a^i\ \omega_i] = 0,\ [\Delta b^{\alpha i}\ \omega_i] = 0,\ \Delta b^{\alpha i} = b^{\alpha ij}\ \omega_j. \qquad (32)$$

Совмещая касательные к координатным линиям на поверхности (A_n), соответственно с прямым и $[A_n\ A_{n-1}]$, $[A_n\ A_{n+1}]$, получаем

$$b^{\alpha n} = 0,\ b^{a,\ n-1} = 0,\ b^{n-1,\ n-1} \neq 0,\ \pi_{n+1}^{\alpha} = 0,\ \pi_{n-1}^{a} = 0,$$

$$b^{n-1,\ n-1}\ \pi_{n-1}^{n} + \pi_{n+1}^{n-1} = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из уравнений (32) теперь будем иметь

$$\Delta b^{a,\,n-1} \equiv b^{n-1,\,n-1}\,\omega^a_{n-1} = b^{a,\,n-1,\,j}\,\omega_j;\ \Delta b^{a,\,n} \equiv \omega^a_{n+1} = b^{anj}\,\omega_j.$$

(b^{aij} симметричны по индексам i, j).

Продолжая эту систему, получаем

$$[\Delta b^{aij}\,\omega_j] = 0,\ \Delta b^{aij} \equiv \nabla b^{aij} + b^{n-1,\,ij}\,\omega^a_{n-1} + (\delta^j_{n-1}\,b^{n-1,\,i} + \delta^i_{n-1}\,b^{n-1,\,j})\,\omega^a_{n+1} - b^{aij}\,(2\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^n_n), \tag{33}$$

$\nabla b^{aij} = b^{aijk}\,\omega_k$ (b^{aijk} симметричны по индексам i, j, k).

Пусть присоединенные к W_2 2-семейства характеристик $\{\Pi_1\}_2$, $\{\Pi_2\}_2, \cdots, \{\Pi_k\}_2$ описываются теми же уравнениями, что и в репере конгруэнции V_2. Соприкасающаяся плоскость S_2 2-го порядка к поверхности (A_n) в точке A_n пятимерна. Она пересекается с 1-характеристикой Π_1 по 2-плоскости, в которую могут быть помещены точки A_{u_2}, дополняющие плоскость $\Pi_2 \equiv [A_{a_2}]$ до $(n-3)$-плоскости $\Pi_1 \equiv [A_a]$. Тогда из уравнений (33) при фиксированных первичных параметрах получим $b^{a_2 ij} = 0$, $b^{u_2 ij}\,\pi^{a_2}_{u_2} = 0$, откуда при условии $\det \| b^{u_2 ij} \| \neq 0$ (тогда S_2 пятимерна) следует $\pi^{a_2}_{u_2} = 0$. Главные формы ω^n_u теперь связаны соотношениями

$$b^{u_2 ij}\,\omega^{a_2}_{u_2} = b^{a_2 ijk}\,\omega_k. \tag{34}$$

Таким образом, $\omega^{a_2}_{n+1} = 0$, $\omega^{a_2}_{n-1} = 0$ и $S_2 = [A_i\,A_{n+1}\,A_{u_2}]$.

Пусть, как и выше, гиперплоскость Π семейства $\{\Pi\}_2$ имеет характеристику максимального порядка k. Тогда и поверхность (A_n) обладает соприкасающейся плоскостью того же максимального порядка Продолжая систему (34) $(k-2)$-раза и выбирая

$$S_3 = [S_2\,A_{u_3}], \cdots, S_k = [S_{k-1}\,A_{u_k}],$$

получаем: $b^{a_3 ijk} = 0, \cdots, b^{a_k i_1 \cdots i_k} = 0$ при условии, что произведение $\det \| b^{u_3 ijk} \| \cdots \det \| b^{u_k i_1 \cdots i_k} \| \neq 0$, что означает, что размерность соприкасающейся плоскости S_t порядка t поверхности (A_n) равна $\dfrac{t(t+3)}{2}$.

Используя касательные подпространства (см. определение 7) к семействам соприкасающихся плоскостей порядков 2, 3,..., k, можно по аналогии с тем, как это делается в предыдущем разделе, зафиксировать все точки репера. Для построения репера в случае многообразия W_h $(h>2)$, кроме того, привлекаются квазиасимптотические линии [1] и некоторые другие геометрические образы.

6. Рассмотрим плоскость $\pi \equiv [A_{n-1}\,A_n\,A_{n+1}]$, касательную к поверхности (A_n) в точке A_n, и пусть $M = x^{n-1}\,A_{n-1} + x^n\,A_n + x^{n+1}\,A_{n+1}$ — произвольная точка этой плоскости.

$$M + dM = (\cdots)^i\,A_i + (\cdots)\,A_{n+1} + (x^{n-1}\,\omega^{u_2}_{n-1} + x^{n+1}\,\omega^{u_2}_{n+1})\,A_{u_2}.$$

Четырехмерное подпространство $T_1 \equiv [A_i\,A_{n+1},\ \omega^{u_2}_{n+1}\,A_{u_2},\ \omega^{u_2}_{n-1}\,A_{u_2}]$ является касательным вдоль некоторого смещения для плоскости π. Его уравнения в тангенциальных координатах могут быть записаны в виде:

$$X_i = 0,\ X_{n+1} = 0,\ (x^{n+1}\,\omega^{u_2}_{n+1} + x^{n-1}\,\omega^{u_2}_{n-1})\,X_{u_2} = 0,\ \omega^{u_2}_{n+1}\,X_{u_2} = 0. \tag{35}$$

Четырехмерное подпространство

$$T_2 \equiv [A_i\,A_{n+1},\ b^{u_2\,n-1\,j}\,\omega_j\,A_{u_2},\ b^{u_2 nj}\,\omega_j\,A_{u_2}]$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

касательное в точке M плоскости π семейства $\{\pi\}_2$ имеет следующие уравнения в тангенциальных координатах:

$$X_i = 0,\ X_{n+1} = 0,\ (x^{n+1}\,\omega_{n+1}^{u_2} + x^{n-1}\,\omega_{n-1}^{u_2})\,X_{u_2} = 0,$$
$$\Lambda^{u_2 nj}\omega_j\,X_{u_2} = 0. \tag{36}$$

Что такое T_1, T_2 (и ниже $T_{1,2}$, $T_{2,2}$) ясно из определений 5 и 6, если заменить в них луч $[A_{n-1}\,A_n]$ на плоскость π (а потом на π_2).

Исключая из (35) ω_n, ω_{n-1} (или из (36) x^{n+1}, x^{n-1}), получаем, что подпространства T_1 (или T_2) огибают $(n-4)$-мерную поверхность второго класса типа $(n-5)$:

$$X_i = 0,\ X_{n+1} = 0,\ \det\left\| b^{u_2 ij}\ X_{u_2} \right\| = 0.$$

В общем случае система из уравнений (35) и (36) имеет только нулевое решение, тогда по принципу двойственности подпространства T_1 и T_2 находятся в пятимерной соприкасающейся плоскости S_2 поверхности (A_n).

Если же

$$\det\left\| \begin{matrix} x^{n+1}\,\omega_{n+1}^{u_2} + x^{n-1}\,\omega_{n-1}^{u_2} \\ x^{n+1}\,b^{u_2 n,\,n-1} + x^{n-1}\,b^{u_2 n-1,\,n-1} \end{matrix} \right\| = 0, \tag{37}$$

то T_1 и T_2 принадлежат одной гиперплоскости в S_2. Вычисления показывают, что условие (37) -- билинейное выражение относительно $x^{n+1} : x^{n-1}$ и $\omega^n : \omega^{n-1}$. Оно устанавливает соответствие между лучами $[A_n,\ x^{n+1}\,A_{n+1} + x^{n-1}\,A_{n-1}]$ в касательной плоскости и подмногообразиями $\omega_n : \omega_{n-1}$, соответствующие которым T_2 и T_1 совпадают.

Аналогичные соответствия имеют место и в остальных соприкасающихся плоскостях. Рассмотрим 2-семейство плоскостей $\pi_2 \equiv [A_i\,A_{n+1}\,A_{u_2}]$ и пусть $M_2 = x^i\,A_i + x^{n+1}\,A_{n+1} + x^{u_2}\,A_{u_2}$ — произвольная точка в π_2.

$$M_2 + dM_2 = (\cdots)^i\,A_i + (\cdots)\,A_{n+1} + (\cdots)^{u_2}\,A_{u_2} + x^{u_2}\,\omega_{u_2}^{u_3}\,A_{u_3},$$
$$(\omega_{u_2}^{u_3} = b_{u_2}^{u_3\,i}\,\omega_i).$$

8-мерное подпространство $T_{1,2} \equiv [A_i\,A_{n+1}\,A_{u_2},\ \omega_{u_2}^{u_3}\,A_{u_3}]$ является касательным вдоль некоторого смещения для плоскости π. Его уравнения в тангенциальных координатах можно записать в виде:

$$X_i = 0,\ X_{n+1} = 0,\ X_{u_2} = 0,\ x^{u_2}\,\omega_{u_2}^{u_3} X_{u_3} = 0,\ \omega_{n-2}^{u_3} X_{u_3} = 0,\ \omega_{n-3}^{u_3}\,X_{u_3} = 0. \tag{38}$$

7-мерное подпространство $T_{2,2} \equiv [A_i\,A_{n+1}\,A_{u_2},\ x^{u_2}\,b_{u_2}^{u_3 i}\,A_{u_3}]$ — касательное в точке M_2 плоскости π_2 семейства $\{\pi_2\}_2$ может быть определено следующими уравнениями в тангенциальных координатах:

$$X_i = 0,\ X_{n+1} = 0,\ X_{u_2} = 0,\ x^{u_2}\,\omega_{u_2}^{u_3} X_{u_3} = 0,\ x^{u_2}\,b_{u_2}^{u_3\,n}\,X_{u_3} = 0. \tag{39}$$

В общем случае система из уравнений (38), (39) имеет только нулевое решение: тогда $T_{1,2}$ и $T_{2,2}$ принадлежат 9-мерной соприкасающейся плоскости S_2. Если же

$$\det\left\| \begin{matrix} x^{u_2} & \omega_{u_2}^{u_3} \\ & \omega_{n-2}^{u_3} \\ & \omega_{n-3}^{u_3} \\ x^{u_2} & b_{u_2}^{u_3\,n} \end{matrix} \right\| = 0, \tag{40}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

то $T_{1,2}$ и $T_{2,2}$ принадлежат одной гиперплоскости подпространства S_2. Условие (40) устанавливает соответствие между подмногообразиями ω_n: ω_{n-1} и плоскостями $[A_i\ A_{n+1}\ x^{u_2}\ A_{u_2}]$, для которых $T_{1,2}$ и $T_{2,2}$ принадлежат 8-мерному подпространству в S_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Бочилло. О многообразиях конусов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник 7, «Труды Томского ун-та», 1967, 196, 55—59.

2. Р. Н. Щербаков. О репераже подмногообразий. Геометрический сборник 3, «Труды Томского ун-та», 168, 5—11.

3. Б. А. Розенфельд. Проективно-дифференциальная геометрия семейств пар $P_m + P_{n-m-1}$ в P_n. Матем. сб., 24 (66), 1949, 405—428.

4. Е. Т. Ивлев. О многообразии $E(0, n-1, m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n XXV научно-педагогическая конф. матем. кафедр педвузов Уральской зоны. Тезисы докладов. Свердловск, 1967, 43—45.

5. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.-Л., ГИТТЛ, 1948.

6. Р. М. Гейдельман, Ю. Г. Лумисте. Геометрия семейств m-мерных плоскостей в n-мерных пространствах. «Труды Четвертого Всесоюзного математического съезда», т. II, 201—206.

7. Г. П. Бочилло. О двупараметрическом многообразии V_2 полунеевклидовых пространств в P_4. Геометрический сборник, 6, «Труды Томского ун-та», т. 191, 1967, 23—32.

8. В. С. Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, 3, «Труды Томского ун-та». 168, 1963, 28—42.

9. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Труды Московского математического общества», 2, 1953, 275—383.

10. М. А. Акивис. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей. ДАН СССР, 1962, 146, 3, 515—518.

11. Р. М. Гейдельман. К теории псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей. Матем. сб., 36 (78), 1955, 209—238.

12. С. Е. Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, 15, № 2, 1963, 25—48.

13. С. Е. Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I). Известия АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, 16, № 3, 1963, 3—22.

14. С. Е. Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (II). Известия АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, 16, № 5, 1963, 2—22.

15. Л. З. Кругляков. Псевдофокальные 2-семейства прямых в P_5. Геометрический сборник, 7. «Труды Томского ун-та», 1967, 196, 70—78.

16. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей Итоги науки. Геометрия. 1963, изд. ВИНИТИ, 1965, 5—64.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. Т. МОЧЕРНЮК

Введение

В работе [1] дано инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразия, образующим элементом которого является алгебраическая гиперповерхность четного порядка гиперплоскости P_{n-1}, в n-мерном проективном пространстве P_n. Это построение опирается на существование у этих гиперповерхностей относительного инварианта — гипердетерминанта матрицы, ассоциированной с гиперповерхностью. Для гиперповерхностей нечетного порядка понятие гипердетерминанта отсутствует, поэтому в работе [1] они исключены из рассмотрения.

В данной работе с помощью метода Г. Ф. Лаптева [2] изучаются многообразия, образующим элементом которых является произвольная алгебраическая гиперповерхность гиперплоскости P_{n-1} любого порядка.

§ 1. Пространство алгебраических элементов

Рассмотрение ведется в проективном пространстве размерности $n \geqslant 3$, отнесенном к подвижному реперу $\{\bar{A}_{\alpha'}\}$, состоящему из аналитических точек $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$. Инфинитезимальное перемещение репера определяется формулами:

$$d\bar{A}_{\alpha'} = \omega_{\alpha'}^{\beta'} \bar{A}_{\beta'}, \tag{1-1}$$

причем формы Пфаффа $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$D\omega_{\alpha'}^{\beta'} = [\omega_{\alpha'}^{\gamma'} \omega_{\gamma'}^{\beta'}] \tag{1-2}$$

(индексы со штрихами изменяются от 1 до $n+1$) и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_{n+1}^{n+1} = 0. \tag{1-3}$$

Определение 1. Алгебраическим элементом A_{n-2}^k порядка называется алгебраическая гиперповерхность k-го порядка гиперплоскости P_{n-1} пространства P_n. Гиперплоскость P_{n-1} называется гиперплоскостью алгебраического элемента A_{n-2}^k.

Поместим вершины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ репера в гиперплоскость алгебраического элемента, а вершину A_{n+1} — вне этой гиперплоскости.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда уравнения алгебраического элемента запишутся в виде (в дальнейшем $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_k = 1, 2, \ldots, n$):

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_k} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{1-4}$$

Уравнения смежного к (1-4) алгебраического элемента имеют вид:

$$(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + da_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})(x^{\alpha_1} + dx^{\alpha_1}) \cdots (x^{\alpha_k} + dx^{\alpha_k}) = 0,$$

$$x^{n+1} + dx^{n+1} = 0, \tag{1-5}$$

где дифференциалы $dx^{\alpha'}$ координат текущей точки находятся из условий стационарности точки (см. [2] стр. 255):

$$dx^{\alpha'} = \Theta x^{\alpha'} - \omega_{\gamma'}^{\alpha'} x^{\gamma'}. \tag{1-6}$$

Подставляя значения $dx^{\alpha'}$ из (1-6) в (1-5) и отбрасывая члены порядка малости больше 1, получаем

$$(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + da_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - a_{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_k} \omega_{\alpha_1}^{\lambda} - \cdots$$

$$\cdots - a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \lambda} \omega_{\alpha_k}^{\lambda} + k \Theta a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}) x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_k} = 0, \tag{1-7}$$

$$(1 + \Theta - \omega_{n+1}^{n+1}) x^{n+1} - \omega_{\gamma}^{n+1} x^{\gamma} = 0.$$

Требуя, чтобы (1-7) и (1-4) определяли один и тот же алгебраический элемент, получаем

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + da_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - a_{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_k} \omega_{\alpha_1}^{\lambda} - \cdots$$

$$\cdots - a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \lambda} \omega_{\alpha_k}^{\lambda} = (\rho_0 + \rho_1) a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, \quad \omega_{\gamma}^{n+1} = 0, \tag{1-8}$$

где ρ_0 и ρ_1 — величины соответственно нулевого и первого порядка малости. Из (1-8) находим $\rho_0 = 1$. Тогда

$$da_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - a_{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_k} \omega_{\alpha_1}^{\lambda} - \cdots - a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \lambda} \omega_{\alpha_k}^{\lambda} - \rho_1 a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0, \quad \omega_{\alpha}^{n+1} = 0. \tag{1-9}$$

Поместим вершину A_n репера вне алгебраической гиперповерхности (1-4) на гиперплоскости алгебраического элемента. Тогда в уравнении гиперповерхности коэффициент при $(x^n)^k$ отличен от нуля, и уравнения алгебраического элемента можно записать так:

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_k} = 0, \quad x^{n+1} = 0, \tag{1-10}$$

где $A_{n \ldots n} = 1$, а уравнения (1-9) для алгебраического элемента (1-10) принимают вид:

$$dA_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - A_{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_k} \omega_{\alpha_1}^{\lambda} - \cdots - A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \lambda} \omega_{\alpha_k}^{\lambda} - \rho_1 A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0,$$

$$\omega_{\alpha}^{n+1} = 0. \tag{1-11}$$

Из последней системы уравнений находим

$$\rho_1 = -k A_{\lambda n \ldots n} \omega_n^{\lambda}. \tag{1-12}$$

Система дифференциальных уравнений инвариантности алгебраического элемента (1-10) принимает вид:

$$\Delta A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0, \quad \omega_{\alpha}^{n+1} = 0, \tag{1-13}$$

где

$$\Delta A_{n \ldots n} \equiv 0, \tag{1-14}$$

и

$$\Delta A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \equiv dA_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - A_{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_k} \omega_{\alpha_1}^{\lambda} - \cdots$$

$$\cdots - A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} \lambda} \omega_{\alpha_k}^{\lambda} + k A_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} A_{\lambda n \ldots n} \omega_n^{\lambda}. \tag{1-15}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как

$$D\omega_\alpha^{n+1} = [\omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_{n+1}^{n+1},\ \omega_\beta^{n+1}],$$

то система дифференциальных уравнений $\omega_\alpha^{n+1}=0$ вполне интегрируема и определяет стационарную подгруппу перемещений гиперплоскости алгебраического элемента.

Обозначим через $S^{(k)}$ число независимых форм $\Delta A_{\alpha_1\dots\alpha_k}$, а через $N^{(k)}$ — число независимых уравнений системы (1-13). Так как формы ω_α^{n+1} — линейно независимы, то

$$N^{(k)} = n + S^{(k)}. \tag{1-16}$$

Число $1 + S^{(k)}$ равно количеству различных элементов k-мерной симметрической матрицы (см. [4]) $\| A_{\alpha_1\dots\alpha_k} \|$ k-го порядка, т. е. числу различных коэффициентов уравнений алгебраического элемента. Поэтому

$$1 + S^{(k)} = \bar{C}_n^k,$$

где $\bar{C}_n^k$ — число сочетаний с повторениями из n элементов по k. Формула (1-16) принимает вид

$$N^{(k)} = n + \bar{C}_n^k - 1. \tag{1-17}$$

Так же, как и в работе [1] для четного k, определяется для любого k многообразие $(h, m, n)^k$, расслаивающееся на ∞^h голономных многообразий $(0, p, n)^k$ определенных вполне интегрируемой системой уравнений $\omega_\alpha^{n+1} = 0$, где $p = m - h$.

§ 2. Основной внутренний объект многообразия $(h, h, n)^k$

Рассмотрим h-параметрическое многообразие алгебраических элементов A_{n-2}^k, плоскости которых образуют h-параметрическое семейство в P_n. Обозначим это многообразие $(h, h, n)^k$.

В дальнейшем индексы i, j, p, q принимают значения от 1 до h, а индексы a, b, c, d — от $h+1$ до n. Среди $N^{(k)}$ первичных форм ω_α^{n+1}, $\Delta A_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ многообразия $(h, h, n)^k$ только h форм ω_α^{n+1} являются линейно независимыми. Изменением нумерации вершин репера можно добиться, чтобы эти h форм имели номера $1, 2, \dots, h$. Остальные формы многообразия $(h, h, n)^k$ линейно выражаются через независимые:

$$\omega_a^{n+1} = A_a^j \omega_j, \quad \Delta A_{\alpha_1\dots\alpha_k} = B_{\alpha_1\dots\alpha_k}^i \omega_i, \tag{2-1}$$

где $\omega_i \equiv \omega_i^{n+1}$ и величины $B_{\alpha_1\dots\alpha_k}^i$ симметричны по нижним индексам.

Всюду в дальнейшем будем обозначать

$$dR_{\beta_1\dots\beta_s}^{\lambda_1\dots\lambda_t} + R_{\beta_1\dots\beta_s}^{\gamma\lambda_2\dots\lambda_t}\omega_\gamma^{\lambda_1} + \dots + R_{\beta_1\dots\beta_s}^{\lambda_1\dots\lambda_{t-1}\gamma}\omega_\gamma^{\lambda_t} -$$
$$- R_{\gamma\beta_2\dots\beta_s}^{\lambda_1\dots\lambda_t}\omega_{\beta_1}^\gamma - \dots - R_{\beta_1\dots\beta_{s-1}\gamma}^{\lambda_1\dots\lambda_t}\omega_{\beta_s}^\gamma \equiv \nabla R_{\beta_1\dots\beta_s}^{\lambda_1\dots\lambda_t},$$

где $R_{\beta_1\dots\beta_s}^{\lambda_1\dots\lambda_t}$ суть некоторые величины, вид которых будет указан в каждом конкретном случае.

Дифференцируя уравнения (2-1) внешним образом, получаем

$$[\Delta A_a^i \omega_i] = 0, \quad [\Delta B_{\alpha_1\dots\alpha_k}^i \omega_i] = 0, \tag{2-2}$$

где

$$\Delta A_a^i \equiv \nabla A_a^i + A_a^j A_c^i \omega_j^c - \omega_a^i, \tag{2-3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Delta B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k} \equiv \nabla B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k} + B^j_{\alpha_1\dots\alpha_k} A^i_a \omega^a_j -$$

$$- B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k} \omega^{n+1}_{n+1} + k\,(B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k} A_{\lambda n\dots n} + A_{\alpha_1\dots\alpha_k} B^i_{\lambda n\dots n})\,\omega^\lambda_n -$$

$$- \{A_{\lambda\alpha_2\dots\alpha_k}(\delta^i_{\alpha_1} + \delta^a_{\alpha_1} A^i_a) + \dots + A_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}\lambda}\,(\delta^i_{\alpha_k} + \delta^a_{\alpha_k} A^i_a) -$$

$$- k\,(\delta^i_n + \delta^a_n A^i_a)\,A_{\alpha_1\dots\alpha_k} A_{\lambda n\dots n}\}\,\omega^\lambda_{n+1}. \qquad (2\text{-}4)$$

Из (2-1) и (2-4) получаем, учитывая (1-14), тождества

$$B^i_{n\dots n} \equiv 0. \qquad (2\text{-}5)$$

Учитывая тождества (1-14) и (2-5), из системы дифференциальных уравнений (2-1) находим, что система квадратичных уравнений (2-2) содержит

$$S^{(k)}_{(h)} = n - h + \bar{C}^k_n - 1$$

независимых уравнений и $hS^{(k)}_{(h)}$ независимых характеристических форм ΔA^i_a, $\Delta B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}$. После высечения цепи по формам базиса (см. [3], стр. 230) из уравнений (2-2) получим

$$r_1 = hS^{(k)}_{(h)}, \quad s_1 = s_2 = \dots = s_{h-1} = S^{(k)}_{(h)}.$$

Следовательно,

$$s_h = hS^{(k)}_{(h)}.$$

Так как $Q = N = C^2_{h+1} \cdot S^{(k)}_{(h)}$, где C^2_{h+1} — число сочетаний из $h+1$ по 2, то система уравнений (2-1), (2-2) — в инволюции и определяет многообразие $(h, h, n)^k$ с произволом $S^{(k)}_{(h)}$ функций h аргументов.

Разрешив уравнения (2-2) по лемме Картана, получаем

$$\Delta A^i_a = - B^{iq}_a \omega_q, \quad \Delta B^j_{\alpha_1\dots\alpha_k} = B^{jq}_{\alpha_1\dots\alpha_k} \omega_q, \qquad (2\text{-}6)$$

где величины B^{iq}_a и $B^{jq}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ симметричны по индексам, стоящим на одном уровне.

Системы величин

$$\{A^i_a,\ A_{\alpha_1\dots\alpha_k},\ B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}\}$$

и

$$\{A^i_a,\ B^{ip}_a,\ A_{\alpha_1\dots\alpha_k},\ B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k},\ B^{iq}_{\alpha_1\dots\alpha_k}\}$$

являются соответственно внутренним фундаментальным и продолженным внутренним фундаментальным объектами многообразия $(h, h, n)^k$ алгебраических элементов.

Теорема. Внутренний фундаментальный объект

$$\{A^i_a,\ A_{\alpha_1\dots\alpha_k},\ B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}\}$$

является основным объектом многообразия $(h, h, n)^k$.

Доказательство. Система дифференциальных уравнений внутреннего локального геометрического объекта имеет вид:

$$\overset{\circ}{\Delta} A_{\alpha_1\dots\alpha_k} = 0, \quad \overset{\circ}{\Delta} A^i_a = 0, \quad \overset{\circ}{\Delta} B^i_{\alpha_1\dots\alpha_k} = 0, \qquad (2\text{-}7)$$

где символ $\overset{\circ}{\Delta} A_{\dots}$ означает форму $\Delta A_{\dots}$ при фиксированных первичных параметрах. В соответствии с определением основного объекта нужно показать, что система (2-7) алгебраически разрешима относительно всех форм $\pi^\beta_\alpha - \delta^\beta_\alpha\,\pi^{n+1}_{n+1}$. Так как система дифференциальных уравнений (2-7) вполне интегрируема, то начальные значения внутреннего

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

фундаментального объекта можно задавать произвольно с учетом тождеств (1-14) и (2-5). Разобьем доказательство на шесть частей:

$$1)\ h=1,\quad k=2; \qquad 2)\ 2\leqslant h<n,\ k=2;$$
$$3)\ h=n,\quad k=2; \qquad 4)\ h=1,\quad k\geqslant 3; \qquad (2\text{-}8)$$
$$5)\ 2\leqslant h<n,\ k\geqslant 3; \qquad 6)\ h=n,\quad k\geqslant 3.$$

Символами $\overline{\pi}{}^{\beta}_{\alpha}$, $\overline{\delta A}{}^{i}_{a}$, $\overline{\delta A}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$, $\overline{\delta B}{}^{i}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ будем обозначать начальные значения форм $\pi^{\beta}_{\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1}$ и соответствующих дифференциалов при фиксированных первичных параметрах. (Условимся до конца параграфа по повторяющимся индексам суммирование не проводить.)

Для всех случаев (2-8) начальные значения компонент A^{i}_{a}, $A_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ зададим так: $A^{i}_{a}=0$; $A_{\alpha\dots\alpha}=1$; $A_{\alpha_1\dots\alpha_k}=0$, если не все индексы $\alpha_1\dots\alpha_k$ равны между собой.

Значения компонент $B^{i}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ будем задавать равными нулю, кроме таких (для соответствующего случая):

1) $B^{1}_{11}=1$, $B^{1}_{aa}=a$, $(a\neq n)$;

2) $B^{i}_{jj}=1$; $B^{i}_{aa}=a$, $(a\neq n)$;

3) $B^{\alpha}_{\alpha\alpha}=1$, $(\alpha\neq n)$;

4) $B^{1}_{1\dots1}=1$; $B^{1}_{a\dots a}=a$, $(a\neq n)$;

5) $B^{i}_{i\dots i}=1$;

6) $B^{\beta}_{\beta\dots\beta}=1$, $(\beta\neq n)$.

Для всех шести случаев, охватывающих все возможности выбора h и k, формы $\overline{\pi}{}^{\beta}_{\alpha}$, $\overline{\pi}{}^{\alpha}_{n+1}$ из системы (2-7) легко находятся, и теорема доказана.

Из этой теоремы получаем (см. [2], стр. 347).

Следствие. Надлежащее задание компонент объекта

$$\{A^{i}_{a},\ B^{iq}_{a},\ A_{\alpha_1\dots\alpha_k},\ B^{j}_{\alpha_1\dots\alpha_k},\ B^{jq}_{\alpha_1\dots\alpha_k}\}$$

определяет многообразие $(h, h, n)^k$ с точностью до констант.

§ 3. Многообразия $(h, h, n)^k$ размерности $h<n$

Рассмотрим подробнее подобъект $\{A^{i}_{a}\}$ основного объекта. Так как $1\leqslant h<n$, то система величин A^{i}_{a} не пуста. Найдем в гиперплоскости $x^{n+1}=0$ алгебраического элемента (1-10) те точки $\overline{P}=x^{\alpha}\overline{A}_{\alpha}$, которые остаются в ней при переходе к соседнему алгебраическому элементу, из условия $(d\overline{P}\,\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=0$, равносильного системе уравнений $x^{i}+A^{i}_{a}x^{a}=0$. Система $h+1$ уравнений

$$x^{i}+A^{i}_{a}x^{a}=0,\quad x^{n+1}=0 \qquad (3\text{-}1)$$

определяет в гиперплоскости алгебраического элемента $(n-h-1)$-мерное линейное подпространство, которое называется характеристическим (см. [1], § 7). Из (3-1) следует, что точки $\overline{P}_a=\overline{A}_a+A^{i}_{a}\overline{A}_i$ являются базисными для характеристического подпространства. Следовательно, объект $\{A^{i}_{a}\}$ определяет характеристическое подпространство.

Исключим из рассмотрения случай, когда алгебраическая гиперповерхность содержит характеристическое подпространство, и поместим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$n-h$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ репера в характеристическое подпространство. Тогда $A_a^i = 0$ и первая часть уравнений (2-6) принимает вид:

$$\omega_\alpha^{n+1} = 0, \quad \omega_a^i = B_a^{ip}\,\omega_p. \tag{3-2}$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получаем

$$[\Delta B_a^{ip}\,\omega_p] = 0, \tag{3-3}$$

где

$$\Delta B_a^{ip} \equiv \nabla B_a^{ip} + B_a^{ip}\,\omega_\alpha^\alpha.$$

Следовательно, объект $\{B_a^{ip}\}$ является тензором. Если все компоненты этого тензора равны нулю, то характеристическое подпространство является неподвижным.

Многообразия $(h, h, n)^k$ с неподвижным характеристическим подпространством существуют с произволом $\bar{C}_n^k - 1$ функций h аргументов.

В этом частично канонизированном репере, т. е. при

$$A_a^i = 0, \quad \pi_a^i = 0, \tag{3-4}$$

системы величин $\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$ и $\{A_{a_1\ldots a_k}\}$ являются подобъектами основного объекта. Объект $\{A_{a_1\ldots a_k}\}$ определяет инвариантную $(n-h-2)$-мерную алгебраическую поверхность

$$A_{a_1\ldots a_k}\,x^{a_1}\cdots x^{a_k} = 0, \quad x^i = 0, \quad x^{n+1} = 0 \tag{3-5}$$

k-го порядка — результат пересечения алгебраического элемента (1-10) с характеристическим подпространством. Действительно, соседняя к (3-5) поверхность определяется уравнениями

$$(1 + k\Theta - k A_{bn\ldots n}\,\pi_n^b)\,A_{a_1\ldots a_k}\,x^{a_1}\cdots x^{a_k} = 0, \quad x^i = 0,$$

$$(1 + \Theta - \pi_{n+1}^{n+1})\,x^{n+1} = 0.$$

Система величин $\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}b}\}$, являющаяся подобъектом объекта $\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$, определяет в гиперплоскости алгебраического элемента $(h-1)$-мерную поверхность порядка $k-1$

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}b}\,x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{k-1}} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{3-6}$$

Легко проверить, что эта поверхность является инвариантной. Она является первой полярой характеристического подпространства относительно алгебраического элемента (1-10). В пересечении поверхностей (1-10) и (3-6) получается $(h-2)$-мерная поверхность

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}a}\,x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{k-1}} = 0, \quad x^{n+1} = 0,$$

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}i}\,x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{k-1}}\,x^i = 0$$

порядка $k(k-1)^{n-h}$.

Если характеристическое подпространство каждого локального алгебраического элемента этого многообразия не пересекается со своей полярной поверхностью, то h вершин репера можно поместить на поверхность (3-6). Тогда

$$A_{i\ldots ia} = 0.$$

Используя это соотношение из (2-1), находим при фиксированных первичных параметрах

$$A_{ai\ldots i}\,\pi_i^a = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Многообразия $(n-1,\ n-1,\ n)^k$ выделяются из рассмотренных выше тем, что для них характеристическое подпространство состоит из одной точки. Исключив из рассмотрения тот случай, когда характеристическая точка принадлежит алгебраическому элементу (1-10), поместим вершину A_n репера в эту точку. Тогда $\pi_n^i = 0$ и $A_n^i = 0$. Точка A_n описывает характеристическую гиперповерхность в P_n. Гиперплоскость $x^{n+1} = 0$ алгебраического элемента касается характеристической гиперповерхности в своей характеристической точке.

Из условия $(d^2\overline{A}_n\,\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n) = 0$ определяются асимптотические линии характеристической поверхности

$$B_n^{ij}\,\omega_i\omega_j = 0$$

и, следовательно, объект $\{B_n^{ij}\}$ — основной дважды ковариантный тензор характеристической гиперповерхности.

Многообразия $(2, 2, 3)^k$ в P_3 рассмотрены В. В. Рыжковым в работе [5].

Легко проверить, что для многообразий $(n-1,\ n-1,\ n)^k$ геометрические объекты $\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$, $\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}a}\}$ являются тензорами.

В частности, для многообразий кубичных элементов A_{n-2}^3 $(n-1,\ n-1,\ n)^3$ тензор $\{A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\}$ определяет первую поляру точки A_n репера относительно кубической поверхности.

$$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\,x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}x^{\alpha_3} = 0, \quad x^{n+1} = 0. \tag{3-9}$$

Введем обозначение

$$|A| = det\,\|A_{\alpha_1\alpha_2 n}\|.$$

Так как

$$\delta|A| = |A|(\pi_i^i + \pi_j^j - \pi_n^n),$$

то $|A| = 0$ означает, что первая поляра точки относительно поверхности (3-9) является вырожденной.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сб., 3 («Труды Томского ун-та», 168), 1963, 28—42.

2. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Труды Московского матем. об-ва», т. 2, ГИТТЛ, М., 1953, 275—383.

3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

4. Н. П. Соколов. Пространственные матрицы и их приложения. ГИФМЛ, М., 1960.

5. В. В. Рыжков. О конгруэнциях плоских алгебраических кривых. ДАН СССР, т. 41, № 5, 1943.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

РЕПЕРАЖ СИСТЕМЫ ПОДМНОГООБРАЗИЙ 2-СЕМЕЙСТВА ПРЯМЫХ В P_5

Л. З. КРУГЛЯКОВ

В работе [3] построен канонический репер $\{A_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, 6$) наиболее общего (нефокального) 2-семейства прямых (A_1A_2) пятимерного проективного пространства P_5. Два фокальных направления [4] линейчатой 3-поверхности S'_3, описываемой лучом 2-семейства, в двух различных точках луча названы соответственными, если они касаются одного и того же подмногообразия 2-семейства. Пара точек луча называется k-кратной, если в них имеется k пар соответственных фокальных направлений. Вершины репера A_i ($i = 1, 2$) помещаются в единственную 2-кратную пару точек луча. При этом исключаются случаи: а) любая пара точек луча 2-кратна, б) на луче имеется ∞^1 3-кратных пар точек.

В предлагаемой работе строится полуканонический [1] репер для произвольной системы [2] подмногообразий нефокального 2-семейства, что дало возможность рассмотреть некоторые классы систем подмногообразий 2-семейства и построить три более симметричных, чем в [3], канонических репера, с помощью которых полнее исследованы некоторые классы 2-семейств.

§ 1. Репераж системы подмногообразий 2-семейства

Рассмотрим в P_5 2-семейство, описываемое прямой A_1A_2, отнесенное к некоторому реперу $\{A_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, 6$), деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta], \quad \sum_\alpha \omega_\alpha^\alpha = 0. \tag{2}$$

Так как формы ω_i^p ($i = 1, 2$; $p = 3, 4, 5, 6$) являются главными, то, выбирая за базисные формы ω_1^3 и ω_2^4, получаем

$$\omega_i^p = a_i^p \omega_1^3 + b_i^p \omega_2^4. \tag{3}$$

Прямая 2-семейства описывает линейчатую 3-поверхность S_3'. Обозначим касательную 3-плоскость к ней в точке $A_1 + \rho A_2$ через T_ρ. Поместим точки A_3 и A_6 (A_4 и A_5) в касательную 3-плоскость $T_{\rho=0}$ ($T_\rho = \infty$) в точке A_1 (A_2).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда

$$a_1^4 = b_1^4 = a_1^5 = b_1^5 = a_2^3 = b_2^3 = a_2^6 = b_2^6 = 0.$$

Исключив псевдофокальные 2-семейства [6], проведем нормирование $a_2^5 = b_1^6 = 1$ и обозначим $a_1^6 = a$, $b_2^5 = b$. Уравнения (3) принимают вид:

$$\omega_1^4 = \omega_1^5 = \omega_2^3 = \omega_2^6 = 0,$$

$$\omega_2^5 = \omega_1^3 + a\omega_2^4, \quad \omega_1^6 = b\omega_1^3 + \omega_2^4. \tag{4}$$

Продолжая систему (4), получаем

$$\omega_5^3 - \omega_2^1 = \alpha_1\omega_1^3 + \alpha_2\omega_2^4, \quad \omega_3^4 + b\omega_6^4 = \beta_1\omega_1^3 + \beta_2\omega_2^4,$$

$$\omega_4^3 + a\omega_5^3 = \alpha_2\omega_1^3 + \alpha_3\omega_2^4, \quad \omega_6^4 - \omega_1^2 = \beta_2\omega_1^3 + \beta_3\omega_2^4, \tag{5}$$

$$\omega_5^6 - b\omega_2^1 = \alpha_7\omega_1^3 + \alpha_8\omega_2^4, \quad \omega_6^5 - a\omega_1^2 = \beta_5\omega_1^3 + \beta_6\omega_2^4,$$

$$\omega_1^1 + \omega_5^5 - \omega_2^2 - \omega_3^3 - a\omega_5^4 - b\omega_6^3 = \alpha_4\omega_1^3 + \alpha_5\omega_2^4,$$

$$\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_1^1 - \omega_4^4 - a\omega_5^4 - b\omega_6^3 = \beta_8\omega_1^3 + \beta_9\omega_2^4,$$

$$\omega_4^6 - \omega_2^1 + a\omega_5^6 = \alpha_8\omega_1^3 + \alpha_9\omega_2^4,$$

$$\omega_3^5 - \omega_1^2 + b\omega_6^5 = \beta_4\omega_1^3 + \beta_5\omega_2^4,$$

$$\Delta a - \omega_6^3 + \omega_4^5 = \alpha_5\omega_1^3 + \alpha_6\omega_2^4,$$

$$\Delta b + \omega_3^6 - \omega_5^4 = \beta_7\omega_1^3 + \beta_8\omega_2^4,$$

где

$$\Delta a = da - a(\omega_4^4 - \omega_5^5 + a\omega_5^4),$$
$$\Delta b = db - b(\omega_3^3 - \omega_6^6 + b\omega_6^3).$$

Найдем фокальные направления поверхности S_3' в точке $A_1 + \rho A_2$ [4]. Уравнение пучка гиперплоскостей, содержащих касательную 3-плоскость

$$T_\rho \equiv (A_1A_2, A_3 + \rho A_5 + bA_6, \rho A_4 + \rho a A_5 + A_6), \tag{6}$$

имеет вид:

$$(\rho y^3 + ay^4 - y^5)\lambda + \rho b y^3 + y^4 - \rho y^6 = 0, \tag{7}$$

Эта гиперплоскость содержит близкую 3-плоскость $T_\rho + dT_\rho$ при некотором смещении $d_\rho : \omega_2^4 : \omega_1^3$, если

$$\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3,$$

$$\rho(b+\lambda)[\omega_3^3 + \rho\omega_5^3 + b\omega_6^3] + (1+\lambda a)(\omega_3^4 + \rho\omega_5^4 + b\omega_6^4) -$$

$$- \lambda(\omega_3^5 + \rho\omega_5^5 + b\omega_6^5 + d\rho) - \rho(\omega_3^6 + \rho\omega_5^6 + b\omega_6^6 + db) = 0,$$

$$\rho(b+\lambda)[\rho\omega_4^3 + \rho a\omega_5^3 + \omega_6^3] + (1+\lambda a)(\rho\omega_4^4 + \rho a\omega_5^4 + \omega_6^4) -$$

$$\lambda(\rho\omega_4^5 + \rho a\omega_5^5 + \omega_6^5 + \rho da) - \rho(\rho\omega_4^6 + \rho a\omega_5^6 + \omega_6^6) + d\rho = 0. \tag{8}$$

Система (8) имеет решение $d\rho : \omega_2^4 : \omega_1^3$, если λ удовлетворяет уравнению:

$$\lambda^3 M + \lambda^2 P + \lambda Q + R = 0, \tag{9}$$

где

$$M = -\rho^2\alpha_3 + \rho\alpha_6 - a\beta_3 + \beta_6, \quad R = \rho^2(\alpha_7 - b\alpha_1) + \rho\beta_7 - \beta_1,$$
$$P = \rho^2(\alpha_9 - 2\alpha_2 - b\alpha_3) + \rho(2\alpha_5 + \beta_9) + 2\beta_5 - 2a\beta_2 - \beta_3,$$
$$Q = \rho^2(2\alpha_8 - 2b\alpha_2 - \alpha_1) + \rho(2\beta_8 + \alpha_4) + \beta_4 - 2\beta_2 - a\beta_1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Потребуем, чтобы ребра A_1A_3 и A_1A_6 (A_2A_4 и A_2A_5) совпадали с двумя из трех фокальных направлений поверхности S_3' в точке A_1 (A_2), которая не фиксируется. Тогда

$$\beta_6 = a\beta_3, \quad \beta_5 = a\beta_2, \quad \beta_2 = b\beta_3, \quad \beta_1(1-ab) = b(\beta_2 - \beta_4), \tag{10}$$

$$\alpha_7 = b\alpha_1, \quad \alpha_8 = b\alpha_2, \quad \alpha_2 = a\alpha_1, \quad \alpha_3(1-ab) = a(\alpha_2 - \alpha_9).$$

Теперь

$$\omega_3^5 = (1-ab)\,\omega_1^2 + (\beta_4 - ab\beta_2)\,\omega_1^3,$$

$$\omega_4^6 = (1-ab)\,\omega_2^1 + (\alpha_9 - ab\alpha_2)\,\omega_2^4, \tag{11}$$

$$(1-ab)\,\omega_3^4 + b\omega_3^5 = 0, \quad (1-ab)\,\omega_4^3 + a\omega_4^6 = 0,$$

$$\omega_5^6 = b\omega_5^3, \quad \omega_6^5 = a\omega_6^4.$$

Так как фокальные направления поверхности S_3' совпадают с попарно-сопряженными [5], то при смещении луча A_1A_2 по 2-семейству ребра A_1A_3, A_1A_6, A_2A_4, A_2A_5 описывают псевдофокальные 2-семейства [6] (касательное подпространство луча четырехмерно). Поместим вершины A_p ($p = 3, 4, 5, 6$) в несдвоенные фокусы плоскостей $A_1A_2A_p$, которые касаются подмногообразий

$$b\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^3 + a\omega_2^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0 \tag{12}$$

в точках A_1 и A_2. Тем самым (см. теорема 2 [6]) мы поместим вершины A_p в псевдофокусы подмногообразий (12), описываемых вышеуказанными ребрами, соответственно. Для этого в силу (11) достаточно положить

$$[\omega_3^5\,\omega_3^6] = [\omega_4^5\,\omega_4^6] = [\omega_5^3\,\omega_5^4] = [\omega_6^3\,\omega_6^4] = 0. \tag{13}$$

Таким образом, построен репер 2-семейства, причем вершины A_i ($i = 1, 2$) и связанные с ними подмногообразия $\omega_1^3\,\omega_2^4 = 0$ пока произвольны. Помещая теперь вершины A_i в инвариантные точки луча, мы будем получать канонические реперы 2-семейства прямых в P_5, отнесенные к вполне определенной системе подмногообразий $\omega_1^3\,\omega_2^4 = 0$. Если же точки A_1 и A_2 будут связаны между собой, то получаем полуканонический репер в смысле [1], отнесенный к некоторой сети подмногообразий.

§ 2. Асимптотические направления поверхности S_3'

Асимптотические направления в точке $A_1 + \rho A_2$ поверхности S_3' определяются из условия $(d^2[A_1 + \rho A_2], T_\rho) = 0$, которое сводится к системе двух квадратных уравнений относительно $d\rho : \omega_2^4 : \omega_1^3$:

$$\rho^2[\omega_1^3(2\omega_2^1 + 2\alpha_2\omega_2^4 + \alpha_1\omega_1^3) + \alpha_3(\omega_2^4)^2] - \rho[\omega_2^4(\alpha_5\omega_1^3 +$$
$$+ \alpha_6\omega_2^4) + \omega_1^3(\alpha_4\omega_1^3 + \alpha_5\omega_2^4 - 2\omega_1^1 + 2\omega_2^2)] - \omega_1^3[2\omega_1^2 +$$
$$+ 2d\rho + (\beta_4 - a\beta_1)\,\omega_1^3] + \omega_2^4(a\omega_6^4 - \omega_6^5) = 0. \tag{14}$$

$$\rho^2[\omega_2^4[(b\alpha_3 - \alpha_9)\,\omega_2^4 - 2\omega_2^1] + \omega_1^3(b\omega_5^3 - \omega_5^6)] -$$
$$- \rho[\omega_2^4(\beta_8\omega_1^3 + \beta_9\omega_2^4 + 2\omega_1^1 - 2\omega_2^2) + \omega_1^3(\beta_7\omega_1^3 + \beta_8\omega_2^4)] +$$
$$+ \omega_2^4(2\omega_1^2 + 2d\rho + 2\beta_2\omega_1^3 + \beta_3\omega_2^4) + \beta_1(\omega_1^3)^2 = 0.$$

В каждой точке луча S_3' имеется четыре таких направления, из которых одно совпадает с лучом A_1A_2. Для трех остальных направлений

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

исключением $d\rho$ из (14) получаем уравнение (9), т. е. каждое из них лежит в касательной плоскости к подмногообразию 2-семейства, которого касается фокальное направление в этой же точке поверхности S_3.

Точки, в которых одно асимптотическое направление S_3^1 совпадает с фокальным, определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} M & P & Q & R \\ P & 2Q & 3R & 0 \\ 3M & 2P & Q & 0 \\ 0 & 3M & 2P & Q \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Таких точек восемь. С другой стороны, два фокальных (асимптотических) направления в точке $A_1 + \rho A_2$ совпадают тогда и только тогда, когда ρ удовлетворяет уравнению (15). Таким образом, направление $d\rho : \omega^4{}_2 : \omega^3{}_1$ в точке $A_1 + \rho A_2$ луча поверхности S_3 является одновременно асимптотическим и фокальным тогда и только тогда, когда оно является сдвоенным фокальным (асимптотическим).

Запишем уравнение (9) в виде

$$\rho^2[\alpha_3\lambda^3 + (2\alpha_2 - \alpha_9 + b\alpha_3)\lambda^2 + \lambda] - \rho[\alpha_6\lambda^3 + (2\alpha_5 + \beta_9)\lambda^2 + \tag{16}$$
$$+ (2\beta_8 + \alpha_4)\lambda + \beta_7] + \beta_3\lambda^2 + (2\beta_2 - \beta_4 + a\beta_1)\lambda + \beta_1 = 0.$$

Отсюда следует, что на луче A_1A_2 для каждого подмногообразия 2-семейства, проходящего через этот луч, существуют две точки (для шести подмногообразий они совпадают), касательные плоскости к подмногообразиям в которых содержат фокальные направления (1-кратная пара точек).

§ 3. Некоторые классы систем подмногообразий

Рассмотренные в предыдущих параграфах геометрические образы, инвариантно связанные с 2-семейством прямых, дают возможность выделить и геометрически охарактеризовать некоторые классы подмногообразий.

1. $ab - 1 = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$.

В этих случаях вершины A_1 и A_2 образуют 1-кратную пару, а одним из уравнений (12) задается подмногообразие (оно произвольно), которое касается одного фокального направления в точке A_1 и одного — в точке A_2.

2. $ab + 1 = 0$. (17)

В этом случае касательные плоскости к подмногообразиям (12) в каждой точке луча образуют гармоническую четверку.

В этих двух случаях мы получаем полуканонические реперы 2-семейств в смысле [1].

3. $a = b = 0$.

В этом случае вершины A_1 и A_2 являются 2-кратной парой точек, а подмногообразия $\omega^4{}_2\omega^3{}_1 = 0$ характеризуются тем, что касаются двух из трех соответственных фокальных направлений в точках A_1 и A_2. При этом исключаются случаи, указанные во введении. Полученный репер назовем A-репером. (Он является каноническим с точностью до нормирования.)

4. $\alpha_1 = \beta_3 = 0$.

В этом случае из (15) получаем, что вершины A_1 и A_2 помещаются в две из восьми точек, в которых два фокальных направления совпа-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

дают, а подмногообразия $\omega^3{}_1 = 0$ и $\omega^4{}_2 = 0$ — суть те, которых касаются эти сдвоенные фокальные направления в точках A_1 и A_2 соответственно. Полученный репер назовем B-репером.

5. $\alpha_6 = \beta_7 = 0$.

В этом случае из (16) следует, что подмногообразия $\omega^3{}_1 = 0$ ($\omega^4{}_2 = 0$) касается только одно фокальное направление поверхности S'_3 в точке A_1 (A_2). Таких подмногообразий шесть. Полученный репер назовем C-репером.

§ 4. A-репер 2-семейства прямых

Полагая $a = b = 0$, из уравнений (5) и (9), в силу (10), получаем

$$\omega^4_3 = \omega^3_4 = \omega^6_5 = \omega^5_6 = 0,$$

$$\omega^3_5 - \omega^1_2 = \alpha_1 \omega^3_1, \quad \omega^5_3 - \omega^2_1 = \beta_4 \omega^3_1, \tag{18}$$
$$\omega^6_4 - \omega^1_2 = \alpha_9 \omega^4_2, \quad \omega^4_6 - \omega^2_1 = \beta_3 \omega^4_2$$

и

$$M = \alpha_6 \rho, \quad R = \beta_7 \rho, \tag{19}$$

$$P = \alpha_9 \rho^2 + (2\alpha_5 + \beta_9)\rho - \beta_3,$$

$$Q = -\alpha_1 \rho^2 + (2\beta_8 + \alpha_4)\rho + \beta_4.$$

При этом исключаются случаи (см. [3])

$$(\alpha_6^2 + \beta_7^2)(\alpha_9 \beta_4 - \alpha_1 \beta_3) = 0, \tag{20}$$

указанные во введении.

Проведем еще нормирование

$$\alpha_6 = \beta_7, \quad \alpha_1 = \beta_3 = 1. \tag{21}$$

Тогда для всех форм Пфаффа ω^β_α имеем

$$\omega^\beta_\alpha = a^\beta_\alpha \omega^3_1 + b^\beta_\alpha \omega^4_2, \tag{22}$$

где a^β_α и b^β_α связаны соотношениями, вытекающими из (4), (5), (10), (13), (18) и (21). Исследуя совместность системы (22), получаем, что нефокальное 2-семейство прямых существует и определяется с произволом в шесть функций двух аргументов (ср. [3]).

Рассмотрим некоторые важнейшие частные классы 2-семейств прямых.

1. 2-семейство $\alpha_9 = \beta_4 = 0$ характеризуется совпадением двух фокальных (асимптотических) направлений в точках A_1 и A_2. Из § 2 тогда следует, что в этих точках сдвоенное асимптотическое направление совпадает со сдвоенным фокальным.

2. 2-семейство $2\alpha_5 + \beta_9 = 2\beta_8 + \alpha_4 = 3\alpha_6$ характеризуется тем, что три 1-кратные пары точек, гармонически делящие 2-кратную пару точек A_1 и A_2, сливаются в одну пару.

3. 2-семейство $a^2_1 - a^1_2 = b^2_1 - b^1_2 = 0$
характеризуется тем, что два соответственных фокальных направления в точках A_1 и A_2 касаются одного и того же семейства линий на подмногообразии $\omega^4_2 = 0$ и на подмногообразии $\omega^3_1 = 0$.

4. 2-семейство

$$\omega^2_1 = \omega^1_2 = 0 \tag{23}$$

характеризуется каждым из следующих свойств: а) ребра A_1A_3, A_1A_6 и A_2A_4, A_2A_5 описывают полуфокальные [7] 2-семейства с общей фо-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

кальной поверхностью (A_1) и (A_2); б) вершины A_1 и A_2 являются строенными фокусами плоскостей $A_1A_3A_6$ и $A_2A_4A_5$.

5. 2-семейство

$$[\omega_3^2\,\omega_3^5] = [\omega_6^2\,\omega_6^4] = [\omega_5^1\,\omega_5^3] = [\omega_4^1\,\omega_4^6] = 0 \qquad (24)$$

характеризуется каждым из следующих свойств: а) по два фокуса каждой из плоскостей $A_1A_3A_6$ и $A_2A_4A_5$ совпадают с вершинами A_p $(p = 3, 4, 5, 6)$ репера; б) ребра A_1A_3, A_1A_6, A_2A_4 и A_2A_5 описывают полуфокальные 2-семейства с фокусами A_p.

6. 2-семейство

$$[\omega_3^1\,\omega_3^5] = [\omega_6^1\,\omega_6^4] = [\omega_5^2\,\omega_5^3] = [\omega_4^2\,\omega_4^6] = 0$$

характеризуется тем, что ребра A_2A_3, A_2A_6, A_1A_4 и A_1A_5 описывают полуфокальные 2-семейства с фокусами A_p.

7. 2-семейство

$$[\omega_3^1\,\omega_3^5] = [\omega_3^2\,\omega_3^5] = [\omega_6^1\,\omega_6^4] = [\omega_6^2\,\omega_6^4] = 0$$

$$([\omega_4^1\,\omega_4^6] = [\omega_4^2\,\omega_4^6] = [\omega_5^1\,\omega_5^3] = [\omega_5^2\,\omega_5^3] = 0)$$

характеризуется тем, что каждое из ребер A_iA_3, A_iA_6 (A_iA_4, A_iA_5) $(i = 1,2)$ описывает полуфокальное 2-семейство с фокусом A_p, причем торсы этих 2-семейств вырождаются в конусы.

8. 2-семейство, удовлетворяющее условиям (23) и (24), характеризуется тем, что каждое из ребер A_1A_3, A_1A_6, A_2A_4 и A_2A_5 описывает фокальное [7] 2-семейство с фокусами A_i и A_p

$$(i = 1, 2; \quad p = 3, 4, 5, 6).$$

Учитывая условия, выделяющие каждый из классов, найдем, что классы 1, 2 и 3 определяются с произволом в четыре, а классы 4, 5, 6 и 7 — в две функции двух аргументов. Класс 8 существует с произволом 19 функций одного аргумента.

Заметим, что случаи (20), исключенные в A-реперe, являются предметом рассмотрения другой нашей публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Геом. сб., 3, «(Труды ТГУ», 168), 1963, 5—11.

2 К. Свобода, В. Гавел, И. Коларж. Метод репеража систем подмногообразий (фр.). Математ. комментарии Карлова ун-та, 5, 4, 1964, 183—201.

3. Л. З. Кругляков. Канонический репер нефокального двупараметрического семейства прямых в пятимерном проективном пространстве. Геом. сб., 6 («Труды ТГУ», 191), 1967, 36—47.

4. Е. Т. Ивлев. О реперaже систем неголономных подмногообразий трехмерной поверхности в пятимерном проективном пространстве. Геом. сб., 6 («Труды ТГУ», 191), 1967, 5—12.

5. В. Т. Базылев. Квази-лапласовы преобразования р-мерных поверхностей n-мерного проективного пространства. «Ученые записки Московского гор. пединститута», вып. 4, т. 35, 1955, 261—333.

6. Л. З. Кругляков. Псевдофокальные 2-семейства прямых в P_5. Геом. сб., 7, («Труды ТГУ» 196), 1968, 70—78.

7. Р. М. Гейдельман. О проблемах дифференциальной геометрии однородных пространств. «Труды МИИТа», вып. 190. (Вопросы диф. синтет. и прикладной геометрии), Москва, 1965, 5—20.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. И. МАТВЕЕНКО

В настоящей статье в трехмерном проективном пространстве изучаются многообразия $K(r, 4)$-четырехпараметрические многообразия коник, плоскости которых образуют r-параметрические семейства. Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $r, m, q, \varkappa = 1, 2, 3$; $q \neq r$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$; $\sigma = 3, 4$. Построены для всех рассматриваемых случаев канонические реперы, найдены основные объекты и некоторые относительные и абсолютные инварианты исследуемых многообразий. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] — [4].

§ 1. Четырехпараметрическое семейство коник, плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство

Рассмотрим многообразие $K(3, 4)$ коник, которое существует с произволом четырех функций четырех аргументов. Предполагается, что каждая коника рассматриваемого семейства имеет, по крайней мере, две различные характеристические точки D_i [3]. Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $i, j, k, n, t = 1, 2$; $t \neq k$; $i \neq j$; по $i, j, \varkappa$ не суммировать! Поместим вершины A_i координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$ в две различные точки D_i, вершину A_3 — в точку пересечения касательных к конике C в A_i, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1-1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]. \tag{1-2}$$

Уравнения этой коники C относительно этого репера имеют вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{1-3}$$

При $p = 0$ коника C вырождается. Этот случай исключим из рассмотрения. Система уравнений для нахождения точек пересечения исходной и смежной коник принимает вид:

$$(x^3)^2 - 2px^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^m\omega_m^4 = 0,$$

$$\omega_k^t(x^k)^2 + (\omega_k^k - 2\omega_3^3 - d\ln p)x^1x^2 + \left(\omega_3^t - \frac{1}{p}\omega_k^3\right)x^kx^3 = 0. \tag{1-4}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Формы Пфаффа

$$\omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_m^4,\ \omega_3^i,\ \omega_k^k - 2\omega_3^3 - dlnp \tag{1-5}$$

являются главными. Выберем из них за базисные следующие формы:

$$\omega_m = \omega_m^4,\ \omega_4 = \omega_k^k - 2\omega_3^3 - dlnp.$$

При этом исключается случай принадлежности прямой A_1A_2 характеристической конике C^* [3]. Остальные главные формы выразятся через базисные в виде:

$$\omega_i^j = C_i^{j\alpha}\omega_\alpha,\ \omega_3^i = C_3^{i\alpha}\omega_\alpha,\ \omega_i^3 = C_i^{3\alpha}\omega_\alpha, \tag{1-6}$$

причем $C_i^{j4} = 0$, так как $A_i \equiv D_i$. Дифференцируя уравнения (1-6), обычным путем получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего локального объекта $C_1\{p, C_i^{jr}, C_3^{i\alpha}, C_i^{3\alpha}\}$ [1]:

$$\begin{gathered}
\delta C_i^{ji} = C_i^{ji}(\pi_4^4 - \pi_j^j) - \pi_4^j,\ \delta C_i^{jj} = (\pi_i^i - 2\pi_j^j + \pi_4^4)C_i^{jj},\\
\delta C_i^{j3} = C_i^{j3}(\pi_i^i - \pi_j^j - \pi_3^3 + \pi_4^4),\ \delta C_i^{3i} = C_i^{3i}(\pi_4^4 - \pi_3^3) - \pi_4^3 + C_i^{34}\pi_4^i,\\
\delta C_i^{3j} = C_i^{3j}(\pi_i^i - \pi_j^j - \pi_3^3 + \pi_4^4) + C_i^{34}\pi_4^j,\ \delta C_i^{34} = C_i^{34}(\pi_i^i - \pi_3^3),\\
\delta C_i^{33} = C_i^{33}(\pi_i^i - 2\pi_3^3 + \pi_4^4) + C_i^{34}\pi_4^3,\ \delta C_3^{i4} = C_3^{i4}(\pi_3^3 - \pi_i^i),\\
\delta C_3^{ii} = C_3^{ii}(\pi_\sigma^\sigma - 2\pi_i^i) + C_3^{i4}\pi_4^i,\ \delta C_3^{ij} = C_3^{ij}(\pi_\sigma^\sigma - \pi_k^k) + C_3^{i4}\pi_4^j,\\
\delta C_3^{i3} = C_3^{i3}(\pi_4^4 - \pi_i^i) + C_3^{i4}\pi_4^3 - \pi_4^i,\ \delta\, lnp = \pi_k^k - 2\pi_3^3.
\end{gathered} \tag{1-7}$$

Так как эта система уравнений алгебраически разрешима относительно всех π_α^β, то объект C_1 будет основным [1]. Из уравнений (1-7) непосредственно заключаем, что величины C_i^{ji}, C_i^{j3}, C_i^{34}, C_3^{i4}, p являются относительными инвариантами. Условие $C_i^{jj} = 0$ характеризует семейства коник K (3,4), для которых точка A_i остается неподвижной при $\omega_i = \omega_3 = \omega_i^3 = 0$. Одномерное подмногообразие коник $\omega_i = \omega_3 = \omega_i^3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него прямая A_iA_3 является характеристикой плоскости коники C, а точка A_i является точкой, огибающей семейства прямых A_1A_2. Условие $C_i^{j3} = 0$ характеризует семейства коник, для которых точка A_i остается неподвижной при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_i^3 = 0$. Одномерное подмногообразие коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_i^3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него прямая A_1A_2 является характеристикой плоскости коники C, а точка A_i является точкой, огибающей семейства прямых A_1A_2. Условие $C_i^{34} = 0$ характеризует семейства коник, для которых точка A_i остается неподвижной при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Одномерное многообразие коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники C остается неподвижной. Условие $C_3^{i4} = 0$ характеризует семейства коник, для которых касательная l_3 к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=0}$ совпадает с прямой A_3A_j.

Величина

$$E = -\frac{C_1^{34}C_3^{14}}{C_2^{34}C_3^{24}} \tag{1-8}$$

является абсолютным инвариантом. Геометрически он характеризуется через сложное отношение четырех точек следующим образом:

$$E = (A_1A_2;\ QB), \tag{1-9}$$

где Q — точка огибающей семейства прямых $(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega_3=0}$, а B — точка пересечения прямых A_1A_2 и l_3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Исключая из рассмотрения случаи обращения в нуль относительных инвариантов C_i^{jj}, C_i^{34}, осуществим следующую фиксацию репера:

$$p = C_i^{jj} = 1,\ C_i^{jt} = \sum_k C_k^{34}(C_k^{3k}C_t^{34} - C_k^{34}C_t^{3k}) = 0. \tag{1-10}$$

Если учесть еще условие эквипроективности

$$(A_1A_2A_3A_4) = 1, \tag{1-11}$$

то все вторичные параметры оказываются зафиксированными, и репер становится каноническим.

Обозначим через R_j точку пересечения касательной плоскости a_i^{j3} к поверхности $(A_i)_{\omega_j=\omega_3}=0$ с касательной l_j к линии $(A_j)_{\omega_i=\omega_3=\omega_i^3=0}$. Неголономное подмногообразие коник $\omega_q = \omega_r = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него прямая A_qA_r является характеристикой плоскости $A_1A_2A_3$. Фиксация $C_i^{ji} = 0$ геометрически характеризуется тем, что точка A_4 помещается на плоскости a^{j3}. При фиксации

$$\sum_k C_k^{34}(C_\kappa^{3k}C_t^{34} - C_k^{34}C_t^{3k}) = 0$$

точка A_4 выбирается так, что

$$(R_1R_2;\ A_3A_4) = -1.$$

Деривационные формулы (1-1) канонического репера имеют вид:

$$dA_i = C_i^{i\alpha}\omega_\alpha A_i + (\omega_j + C_i^{j3}\omega_3)A_j + C_i^{3\alpha}\omega_\alpha A_3 + \omega_i A_4,$$

$$dA_3 = C_3^{r\alpha}\omega_\alpha A_r + \omega_3 A_4,\ dA_4 = C_4^{3\alpha}\omega_\alpha A_\beta, \tag{1-12}$$

где $C_\alpha^{\alpha\beta} = 0$. Уравнения структуры (1-2) приводят к следующей системе конечных соотношений:

$$2C_j^{i3}C_3^{[ji]} + 2C_3^{i[i}C_j^{|3|j]} + C_4^{ii} - 3C_i^{ij} - C_3^{3j} = 0, \tag{1-13}$$

$$C_3^{il}C_j^{34} - 2C_3^{i4}C_j^{(i3)} - 3C_i^{i4} - C_3^{34} = 0,$$

$$C_3^{ij}C_j^{34} - C_j^{i3}C_3^{j4} - C_3^{i4}C_j^{3j} - C_4^{i4} = 0.$$

С многообразием $K(3,4)$ ассоциируются следующие геометрические образы:

1. Неголономная конгруэнция коник $\omega_i = \omega_3 = 0$. Из системы уравнений (1-4) следует, что для конгруэнции $\omega_i = \omega_3 = 0$ точки A_i и A_j являются фокусами коники, причем точка A_i — строенным фокусом, а фокальными линиями для них являются линии $\omega_j = 0$

2. Неголономная конгруэнция коник $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Аналогично получаем, что для конгруэнции коник $\omega_1 = \omega_2 = 0$ точки A_i являются сдвоенными фокусами коники, а фокальными линиями для них являются линии $\omega_3 = 0$,

3. Неголономная конгруэнция прямых $(A_iA_4)_{\omega_1=\omega_2=0}$. В силу (1-12) один фокус луча этой конгруэнции совпадает с точкой A_i.

4. Неголономная конгруэнция прямых $(A_iA_3)_{\omega_1=\omega_2=0}$ является параболической с фокусами лучей в точках A_i и торсами $\omega_3 = 0$.

Отметим один частный класс многообразия коник $K(3,4)$, характеризующийся уравнениями

$$C_3^{14} = C_2^{34},\ C_3^{24} = C_1^{34}.$$

Этот класс определяется с произволом двух функций четырех аргументов и характеризуется тем, что для него точки A_i являются сдвоенными характеристическими точками. Из (1-8) и (1-9) следует, что $(A_1A_2;\ QB) = -1$ для семейства коник $C_3^{14} = C_2^{34},\ C_3^{24}C_1^{34}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 2. Четырехпараметрическое семейство коник, плоскости которых образуют двухпараметрическое семейство

Рассмотрим многообразие коник $K(2,4)$, которое существует с произволом трех функций четырех аргументов. Поместим вершину A_3 координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$ в характеристическую точку M плоскости коники C. При этом из рассмотрения исключается случай прохождения коники C через точку M. Вершины A_i поместим в точки касания касательных к конике, проведенных из вершины A_3. Вершину A_4 поместим в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. Формы Пфаффа (1-5) являются главными. Выберем из них за базисные следующие формы:

$$\omega_i = \omega_i^4, \quad \omega_\rho = \omega_i^j.$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать, что $\rho, g = 3,4$; причем $\rho = 3$, $g = 4$, если $i = 1$; $\rho = 4$, $g = 3$, если $i = 2$. При этом из рассмотрения исключается случай совпадения точек A_i с характеристическими точками коники при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_g = 0$. Остальные главные формы выразятся через базисные в виде:

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_3^i = C_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_i^3 = C_i^{3\alpha}\omega_\alpha, \quad \omega_k^k - 2\omega_3^3 - dlnp = a^\alpha\omega_\alpha, \tag{2-1}$$

где $C_3^{ij} = C_3^{ji}$. Дифференцируя уравнения (2-1) обычным путем, получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего локального объекта $C_1\{p, C_3^{ik}, C_i^{3\alpha}, a^\alpha\}$:

$$\delta C_n^{3i} = C_n^{3i}[\pi_4^4 - \pi_3^3 + \delta_j^n(\pi_j^j - \pi_i^i)] + C_i^{3\rho}\pi_4^j - \delta_n^i\pi_4^3, \quad \delta a^\rho = a^\rho(\pi_j^j - \pi_i^i),$$
$$\delta lnp = \pi_k^k - 2\pi_3^3, \quad \delta C_3^{in} = C_3^{in}(\pi_\sigma^\sigma - \pi_i^i - \pi_n^n), \tag{2-2}$$
$$\delta C_n^{3\rho} = C_n^{3\rho}[\pi_j^j - \pi_3^3 + \delta_n^j(\pi_j^j - \pi_i^i)], \quad \delta a^i = a^i(\pi_4^4 - \pi_i^i) + a^\rho\pi_4^j - \pi_4^i.$$

Так как эта система уравнений алгебраически разрешима относительно всех π_α^β, то объект C_1 является основным. Из уравнений (2-2) непосредственно заключаем, что величины $C_i^{3\sigma}$, C_3^{ik}, a^σ, p являются относительными инвариантами. Условие $C_k^{3\lambda} = 0$ характеризует семейства коник $K(2,4)$, для которых точка A_k является точкой, огибающей семейства прямых $(A_1A_2)_{\omega_\lambda=\omega_\mu=0}$ $(\lambda,\mu = 3,4;\ \lambda\neq\mu)$. Одномерное подмногообразие коник $\omega_1 = \omega_2 = \omega_\rho = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него плоскость коники C неподвижна и точка A_i является точкой, огибающей семейства прямых A_iA_3. Условие $C_3^{it} = 0$ характеризует семейства коник, для которых на поверхности (A_3) линии $\omega_j = 0$ совпадают с асимптотическими линиями. Неголономное подмногообразие коник $\omega_j = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него характеристика плоскости коники C проходит через точку A_j. Условие $C_3^{ij} = 0$ характеризует семейства коник, для которых касательные к линиям $\omega_k = 0$ на поверхности (A_3) совпадают с прямыми A_iA_3. Условие $a^\rho = 0$ характеризует семейства коник, для которых точки A_1 и A_2 полярно сопряжены относительно характеристической коники при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_g = 0$.

Величина

$$E = \frac{C_1^{34}C_2^{33}}{C_2^{34}C_1^{33}} \tag{2-3}$$

является абсолютным инвариантом. Геометрически он характеризуется через сложное отношение четырех точек следующим образом:

$$E = (A_1A_2;\ Q_4Q_3), \tag{2-4}$$

где Q_g — точка огибающей семейства прямых $(A_1A_2)_{\omega_1=\omega_2=\omega\rho=0}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Исключая из рассмотрения случаи обращения в нуль относительных инвариантов $C_i^{3\sigma}$, осуществим следующую фиксацию репера:

$$p = C_i^{3j} = 1,\ C_i^{3t} = \sum_k C_k^{34}\,(C_k^{3k}C_t^{34} - C_k^{34}C_t^{3k}) = 0. \tag{2-5}$$

Если учесть еще условие эквипроективности (1-11), то все вторичные параметры оказываются зафиксированными, и репер становится каноническим. Обозначим через a_i^{jg} касательную плоскость к поверхности $(A_i)_{\omega_j=\omega_g=0}$, а через R_i — точку пересечения касательной к линии $(A_j)_{\omega_i=\omega_\rho=\omega_i^3=0}$ с плоскостью a_i^{jg}. Неголономное подмногообразие коник $\omega_i = \omega_\rho = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_i является точкой, огибающей семейства прямых A_iA_3. Одномерное подмногообразие коник $\omega_i = \omega_\rho = \omega_i^3 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_i остается неподвижной. Фиксация $C_i^{3i} = 0$ геометрически характеризуется тем, что точка A_4 помещается на плоскости a_i^{jg}. При фиксации

$$\sum_k C_k^{34}(C_\sigma^{3k}C_t^{34} - C_k^{34}C_t^{3k}) = 0$$

точка A_4 выбирается так, что

$$(R_1R_2;\ R_3A_4) = -1, \tag{2-6}$$

где R_3 — точка пересечения прямой R_1R_2 с плоскостью $A_1A_2A_3$. Фиксация $C_i^{3j} = 1$ исключает случай неподвижности точки A_i при $\omega_i = \omega_3 = \omega_4 = 0$. Одномерное подмногообразие коник $\omega_i = \omega_3 = \omega_4 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_i является точкой, огибающей семейства прямых A_iA_3, а точка A_j является точкой, огибающей семейства прямых A_jA_4.

Деривационные формулы канонического репера имеют вид:

$$dA_i = C_i^{i\alpha}\omega_\alpha A_i + \omega_\rho A_j + (\omega_j + C_i^{3\sigma}\omega_\sigma)\,A_3 + \omega_i A_4, \tag{2-7}$$

$$dA_3 = C_3^{nk}\omega_k A_n + C_3^{3\alpha}\omega_\alpha A_3,\ dA_4 = C_4^{\alpha\beta}\omega_\beta A_\alpha,$$

где $C_\alpha^{\alpha 3} = 0$. Уравнения структуры (1-2) приводят к следующей системе конечных соотношений:

$$(-1)^j(C_4^{4i} - C_j^{ji} + C_i^{ii} - C_3^{3i} + C_4^{3j}) + C_i^{33}(C_4^{22} - C_3^{12}) +$$
$$+ C_i^{34}(C_3^{12} - C_4^{11}) = 0. \tag{2-8}$$

Рассмотрим некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием $K(2, 4)$.

1. Неголономная конгруэнция коник $\omega_3 = \omega_4 = 0$ геометрически характеризуется тем, что для нее плоскости $A_iA_3A_4$ касаются поверхностей (A_i). Для этой конгруэнции точки A_i являются фокусами коники, а линии $\omega_i = 0$ являются фокальными.

2. Неголономная конгруэнция коник $\omega_i = \omega_\rho = 0$. Для нее точка A_i является строенным фокусом коники.

3. Неголономная конгруэнция прямых $(A_iA_3)_{\omega_3=\omega_4=0}$. Точки A_i и A_3 являются фокусами лучей этой конгруэнции, а поверхности $\omega_i = 0$ являются ее торсами.

4. Неголономная конгруэнция прямых $(A_1A_2)_{\omega_3=\omega_4=0}$. Фокусы лучей этой конгруэнции гармонически делят точки A_1 и A_2.

5. Неголономная конгруэнция прямых $(A_iA_4)_{\omega_3=\omega_4=0}$. Один фокус луча этой конгруэнции совпадает с точкой A_i, а поверхности $\omega_j = 0$ являются ее торсами.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

6. Неголономная конгруэнция прямых $(A_1A_2)_{\omega_i=\omega_\rho=0}$. Один фокус луча этой конгруэнции совпадает с точкой A_i, а поверхности $\omega_j=0$ являются ее торсами.

7. Неголономная конгруэнция прямых $(A_jA_3)_{\omega_i=\omega_\rho=0}$ является параболической. Фокус ее луча совпадает с точкой A_3, а ее торсами являются поверхности $\omega_j=0$.

8. Неголономная конгруэнция прямых $(A_iA_4)_{\omega_i=\omega_\rho=0}$. Точка A_i является одним из фокусов ее луча.

9. Неголономная конгруэнция прямых $(A_jA_4)_{\omega_i=\omega_\rho=0}$. Точка A_j является фокусом луча этой конгруэнции, а поверхности $\omega_g=0$ являются ее торсами.

Отметим один частный класс многообразия $K(2,4)$. Семейство коник $C_3^{il}=1$ определяется с произволом в одну функцию четырех аргументов и геометрически характеризуется тем, что для него точки A_1 и A_2 являются сдвоенными фокусами коники неголономной конгруэнции $\omega_3=\omega_4=0$.

§ 3. Четырехпараметрическое семейство коник, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство

Наиболее общие четырехпараметрические семейства коник $K(3,4)$ и $K(2,4)$ рассмотрены в первом и втором параграфах настоящей статьи. Однако представляет большой интерес исследование и такого четырехпараметрического семейства коник, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Такое семейство коник существует с произволом двух функций четырех аргументов. Каждая плоскость коники этого семейства содержит инвариантную прямую — характеристику l.

Поместим вершины A_i координатного тетраэдра $\{A_\alpha\}$ в точки пересечения коники с характеристикой l, вершину A_3 — в точку пересечения касательных к конике в точках A_i, вершину A_4 — в произвольную точку проективного пространства, не лежащую в плоскости коники. При этом исключается случай касания коники с характеристикой ее плоскости. Формы Пфаффа (1—5) являются главными. Выберем из них за базисные следующие формы:

$$\omega_i=\omega_i^j,\quad \omega_3=\omega_k^k-2\omega_3^3-d\ln p,\quad \omega_4=\omega_3^4.$$

При этом исключается случай полярной сопряженности точек A_1 и A_2 относительно характеристической коники C^* при $\omega_1=\omega_2=\omega_4=0$ и исключаются случаи совпадения точек A_i с характеристическими точками коники при $\omega_j=\omega_3=\omega_4=0$. Остальные главные формы выразятся через базисные в виде:

$$\omega_i^4=0,\ \omega_i^3=C_i^{34}\omega_4,\ \omega_3^i=C_3^{i\alpha}\omega_\alpha. \tag{3-1}$$

Дифференцируя эти уравнения, обычным путем получаем следующую систему дифференциальных уравнений внутреннего локального объекта $C_1\{p, C_i^{34}, C_3^{i\alpha}\}$:

$$\begin{gathered}\delta\ln p=\pi_k^k-2\pi_3^3,\quad \delta C_i^{34}=C_i^{34}(\pi_i^i-2\pi_3^3+\pi_4^4),\\ \delta C_3^{i4}=C_3^{i4}(\pi_4^4-\pi_i^i)-2C_3^{i3}\pi_4^3-\pi_4^i,\\ \delta C_3^{im}=C_3^{im}[\pi_3^3-\pi_m^m(\delta_1^m+\delta_2^m)+\pi_j^j\delta_i^m-\pi_i^i(\delta_i^m+\delta_3^m)].\end{gathered} \tag{3-2}$$

Из этой системы уравнений непосредственно заключаем, что величины C_i^{34}, C_3^{im}, p являются относительными инвариантами. Условие $C_i^{34}=0$ характеризует семейства коник $K(1,4)$, для которых $A_i\equiv M$, где M —

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

точка ребра возврата огибающего плоскости коник торса. Условие $C_3^{ik}=0$ характеризует семейства коник, для которых касательная l_3^{i34} к линии $(A_3)_{\omega_i=\omega_3=\omega_4=0}$ совпадает с прямой A_3A_j. Одномерное подмногообразие коник $\omega_i=\omega_3=\omega_4=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точка A_i неподвижна и полярно сопряжена с точкой A_j относительно характеристической коники. Условие $C_3^{i3}=0$ характеризует семейства коник, для которых касательная l_3^{124} к линии $(A_3)_{\omega_1=\omega_2=\omega_4=0}$ совпадает с прямой A_3A_j. Одномерное подмногообразие коник $\omega_1=\omega_2=\omega_4=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_i неподвижны.

Величины

$$E_m=-\frac{C_1^{24}C_3^{1m}}{C_2^{34}C_3^{2m}} \tag{3-3}$$

являются абсолютными инвариантами. Геометрически они характеризуются через сложное отношение четырех точек следующим образом:

$$E_m=(A_1A_2;\ MB_m), \tag{3-4}$$

где B_k — точка пересечения прямой A_1A_2 с касательной l_3^{i34} к линии $(A_3)_{\omega_i=\omega_2=\omega_4=0}$, а B_3 — точка пересечения прямых A_1A_2 и $l_3^{12\pi}$.

Исключая из рассмотрения случаи обращения в нуль относительных инвариантов Ci^{34}, p, осуществим следующую фиксацию репера:

$$p=C_i^{34}=1. \tag{3-5}$$

Если учесть еще условие эквипроективности (1-11), то получим

$$\pi_x^x=\pi_4^4=0. \tag{3-6}$$

Формы Пфаффа ω_x^x, π_4^4 становятся главными и можно записать

$$\omega_x^x=C_x^{x\alpha}\omega_\alpha,\quad \omega_4^4=C_4^{4\alpha}\omega_\alpha. \tag{3-7}$$

Из этих уравнений обычным путем получим следующую систему уравнений:

$$\partial C_x^{xr}=0,\ \partial C_x^{x4}=-(2C_x^{x3}+\partial_3^x)\pi_4^3. \tag{3-8}$$

Так как системы уравнений (3-2) и (3-8) алгебраически разрешимы относительно всех π_α^β, то система величин $C_2\{p, C_i^{34}, C_3^{i\alpha}, C_x^{x\alpha}\}$ образует внутренний продолженный основной фундаментальный объект семейства K (1-4).

Обозначим через M_i точки пересечения коники C с полярой точки M, а через l_{12} — линию пересечения касательных плоскостей a_1^{12} и a_2^{12} к поверхностям $(M_1)_{\omega_1=\omega_2=0}$ и $(M_2)_{\omega_1=\omega_2=0}$. Неголономное подмногообразие коник $\omega_1=\omega_2=0$ геометрически характеризуется тем, что для него точки A_i являются точками огибающих семейств прямых A_iA_3. Рассмотрим общий случай, когда фокусы луча l_{12} прямолинейной конгруэнции $(l_{12})_{\omega_1=\omega_2=0}$ не лежат в плоскости коники. Помещая вершину A_4 в один из фокусов луча l_{12}, завершим канонизацию репера.

Деривационные формулы (1-1) канонического репера имеют вид:

$$dA_i=C_i^{i\alpha}\omega_\alpha A_i+\omega_iA_j+\omega_4A_3, \tag{3-9}$$

$$dA_3=C_3^{r\alpha}\omega_\alpha A_r+\omega_4A_4,\ dA_4=C_4^{\alpha\beta}\omega_\beta A_\alpha,$$

где

$$C_\alpha^{\alpha\beta}=0,\ \sum_k(-1)^k[4C_3^{k3}(C_3^{i4}-1)-C_k^{k4}]=0,$$

$$\sum_k(-1)^k[2C_3^{k3}(C_i^{i4}-1)-C_3^{k4}]=0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\sum_k (-1)^k (C_4^{k3} + 2C_3^{k3}C_4^{33})(C_4^{t4} + 2C_3^{t4}C_4^{34}) = 0.$$

Уравнения структуры (1-2) приводят к следующей системе конечных соотношений:

$$C_i^{i3} = -C_i^{ii} = \frac{3}{8},\ C_i^{ij} = 5C_3^{3i} = -5C_3^{33} = \frac{5}{8},\ C_k^{k4} + 2C_3^{34} = 0.$$

Рассмотрим некоторые геометрические образы, ассоциированные с многообразием $K(1, 4)$.

1. Неголономная конгруэнция коник $\omega_1 = \omega_2 = 0$ является конгруэнцией T [3].

2. Неголономная конгруэнция прямых $(A_iA_4)_{\omega_i=\omega_2=0}$. Один из фокусов ее луча совпадает с A_i, а поверхности $\omega_4 = 0$ являются ее торсами.

3. Касательные плоскости ко всем неголономным поверхностям $(Q)_{\omega_1=\omega_2=0}$, где $Q = q^rA_r$ и $q^r = \text{const}$, проходят через точку $R_3 = C_3^{r3}A_r + 3C_3^{33}A_3$, которая является точкой пересечения плоскостей a_1^{12}, a_2^{12} и $A_1A_2A_3$.

4. Голономная конгруэнция прямых $(A_jA_4)_{\omega_j=\omega_4=0}$ геометрически характеризуется тем, что для нее точка A_i остается неподвижной. Для этой конгруэнции точка A_j является фокусом луча, а поверхности $\omega_j = 0$ являются ее торсами.

5. Голономная конгруэнция прямых $(A_iA_4)_{\omega_i=\omega_4=0}$ представляет связку прямых с центром в точке A_i.

Отметим один частный класс многообразия $K(1, 4)$. Семейство коник $C_1^{14} = C_2^{24}$ определяется с произволом двух функций четырех аргументов и геометрически характеризуется тем, что для него огибающей поверхностью плоскостей коник является конус.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Труды Моск. матем. об-ва», 2, 1953, 275—382.

2. В. С. Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геометрический сборник, 3 («Труды Томского ун-та», 168), 1963, 43—53.

3. В. С. Малаховский. Конгруэнции кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Геометрический сборник, 3 («Труды Томского ун-та», 168), 1963, 61—65.

4. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТЛ, М.-Л., 1948.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

О НЕКОТОРЫХ ДОПУСТИМЫХ КРИВЫХ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ V_3^2

Л. И. МАГАЗИННИКОВ

В статье рассматриваются неголономные многообразия V_3^2 ([1], [6]), среди допустимых кривых которого имеются кривые, обладающие некоторыми центроаффинно-инвариантными свойствами.

Пусть в центроаффинном пространстве задано неголономное многообразие V_6^m. Как обычно, начало репера совместимо с центром пространства. Если вектор A_1 направим в точку V_3^2 а векторы A_2 и A_3 выберем параллельными касательной плоскости V_3^2, то это многообразие будет иметь уравнение

$$\omega_1^1 = 0. \tag{1}$$

При этом формы ω_1^1, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^1, ω_3^1 станут главными. Существующие между ними две линейные зависимости выберем в виде:

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= a_1\omega_1^1 + a_2\omega_1^2 + a_3\omega_1^3, \\ \omega_3^1 &= b_1\omega_1^1 + b_2\omega_1^2 + b_3\omega_1^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Считая, что $[\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3] \neq 0$, мы исключаем случай, когда точка A_1 описывает двумерное многообразие.

Поступая обычным образом, находим, что

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= a_1\pi_2^2 + b_1\pi_2^3, \\ \delta a_2 &= 2a_2\pi_2^2 + (b_2 + a_3)\pi_2^3, \\ \delta a_3 &= a_3(\pi_2^2 + \pi_3^3) + a_2\pi_3^2 + b_3\pi_2^3, \\ \delta b_1 &= b_1\pi_3^3 + a_1\pi_3^2, \\ \delta b_3 &= a_2\pi_3^2 + b_3\pi_2^3 + b_2(\pi_2^2 + \pi_3^3), \\ \delta b_3 &= (a_3 + b_2)\pi_3^2 + 2b_3\pi_3^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Система уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= 0, \\ \omega_1^3 &= \alpha\omega_1^2 \end{aligned} \tag{4}$$

определяет произвольное семейство допустимых кривых многообразия $V^2{}_3$ (здесь α — некоторая функция главных параметров), проходящих по одной через каждую точку A_1. Совокупность касательных ко всем кривым (4) порождает некоторое трехпараметрическое векторное поле:

$$R = A_1 + v(A_2 + \alpha A_3), \tag{5}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

лучи которого огибают кривые (4). С другой стороны, прямые (5) описывают комплекс. В работе изучаются линии вида (4) в зависимости от свойств комплекса (5).

Центральная линия [2] произвольной линейчатой поверхности комплекса (5) задается уравнением:

$$R = A_1 - \frac{(\omega_1^3 - \alpha\omega_1^2)(A_2 + \alpha A_3)}{d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3}, \tag{6}$$

из которого следует, что уницентральная цилиндрическая неголономная конгруэнция [3] комплекса (5) имеет уравнение:

$$d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3 = 0. \tag{7}$$

В работе [4] изучались комплексы, расслаивающиеся на ∞^1 голономных уницентральных цилиндрических конгруэнций. Такие комплексы назовем цилиндроидальными. В вышеуказанной работе [4] показано, что один из инфлекционных центров цилиндроидального комплекса несобственный, а цилиндры его вырождаются в плоскости, проходящие через центр пространства. Из этого и результатов Н. И. Кованцова о строении комплексов, один из инфлекционных центров которых описывает поверхность [5], следует, что цилиндроидальный комплекс безынтегрально можно построить следующим образом: взять произвольную цилиндрическую конгруэнцию и в каждой плоскости, определяемой лучом конгруэнции и центром пространства, провести пучок прямых, параллельных соответствующему лучу.

Для любого комплекса (5) формы

$$\omega_1^1,\ \omega_1^3 - \alpha\omega_1^2,\ \omega_2^1 + \alpha\omega_3^1,$$
$$d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3$$

являются главными. Между ними существует одна линейная зависимость. Выберем ее в виде:

$$d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3 =$$
$$= \lambda_1\omega_1^1 + \lambda_2(\omega_1^3 - \alpha\omega_1^2) + \lambda_3(\omega_2^1 + \alpha\omega_3^1). \tag{9}$$

Перейдем к другому реперу (A_1^*, A_2^*, A_3^*) по формулам

$$A_1^* = A_1,\ A_2^* = A_2 + \alpha A_3,\ A_3^* = A_3.$$

Обозначим

$$dA_i^* = v_i^\kappa A_\kappa^*.$$

Легко находим:

$$v_1^1 = \omega_1^1,\ v_1^2 = \omega_1^2,\ v_1^3 = \omega_1^3 - \alpha\omega_1^2,$$
$$v_2^1 = \omega_2^1 + \alpha\omega_3^1,\ v_2^2 = \omega_2^2 + \alpha\omega_3^2,$$
$$v_2^3 = d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3,$$
$$v_3^1 = \omega_3^1,\ v_3^2 = \omega_3^2,\ v_3^3 = \omega_3^3 - \alpha\omega_3^2.$$

В новом реперe уницентральная цилиндрическая конгруэнция комплекса (5), который теперь задается в виде:

$$R = A_1^* + vA_2^*, \tag{5'}$$

имеет уравнение $v_2^3 = 0$. Соотношение (9) принимает вид:

$$v_2^3 = \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_1^3 + \lambda_3 v_2^1.$$

Комплекс (5) будет цилиндроидальным, если

$$[v_2^3,\ Dv_2^3] = [v_2^3,\ v_2^1,\ v_1^3] = 0,$$

откуда следует, что

$$v_2^3 = \lambda_2 v_1^3 + \lambda_3 v_2^1,$$

если $[v_1^3,\ v_2^1] \neq 0$, т. е. $\lambda_1 = 0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

При этом условии, как показано в работе [4], функции λ_2 и λ_3 определяются с произволом в одну функцию двух аргументов. Условие $[v_1^3, v_2^1] = 0$ выполняется только для линий $a_1 + \alpha b_1 = 0$, если $I = a_1^2 b_3 - a_1 b_1 (a_3 + b_2) + a_2 b_1^2 = 0$. Величина I является относительным инвариантом, а поэтому условие $I = 0$ накладывает ограничения на само многообразие V_3^2. Эти многообразия будут охарактеризованы ниже.

Раскрывая условие

$$[D\{d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3\},$$
$$d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \alpha^2\omega_3^2 + \omega_2^3] = 0,$$

получим соотношение:

$$\alpha^2(t_1 b_3 - t_3 b_1) + \alpha(t_1 b_2 + t_1 a_3 - t_3 a_1 - t_2 b_1) + t_1 a_2 - t_2 a_1 = 0. \quad (8)$$

Смысл функций t_1, t_2, t_3 ясен из обозначения:

$$t_1 = \lambda_3(a_1 + \alpha b_1),$$
$$t_2 = \lambda_3(a_2 + \alpha b_2) - \lambda_2\alpha, \quad (8')$$
$$t_3 = \lambda_3(a_3 + \alpha b_3) + \lambda_2.$$

Уравнение (9) имеет место тогда, когда

$$[\omega_1^1, \omega_1^3 - \alpha\omega_1^2, \omega_2^1 + \alpha\omega_3^1] =$$
$$= (b_3\alpha^2 + (a_3 + b_2)\alpha + a_2)[\omega_1^1, \omega_1^3, \omega_1^2] \neq 0,$$

т. е. несправедливо только для двух линий, для которых α удовлетворяет уравнению:

$$b_3\alpha^2 + (a_3 + b_2)\alpha + a_2 = 0. \quad (8'')$$

Эти линии являются асимптотическими для многообразия V_3^2.

Для цилиндроидального комплекса функции λ_2, λ_3 определяются с произволом в одну функцию двух аргументов. Функция α из (8) в конечном виде выражается через эти функции. Следовательно, совокупность всех цилиндроидальных комплексов, принадлежащих множеству (5), также зависит от одной функции двух аргументов.

Итак, приходим к выводу, что через каждую точку многообразия V_3^2 можно с произволом в одну функцию двух аргументов провести допустимую кривую, комплекс (5) для которых является цилиндроидальным.

Определение 1. Допустимая кривая неголономного многообразия V_3^2, принадлежащая двупараметрическому семейству кривых, совокупность касательных к которым образует цилиндроидальный комплекс, называется цилиндроидальной. Двупараметрическое семейство цилиндроидальных кривых назовем цилиндроидальным семейством допустимых кривых многообразия V_3^2.

Из предыдущего ясно, что каждое цилиндроидальное семейство кривых определяется с произволом в одну функцию двух аргументов и что через каждую точку многообразия V_3^2 проходит по одной цилиндроидальной кривой из каждого цилиндроидального семейства.

Соотношение (8) запишем в виде:

$$[\alpha^2 b_3 + \alpha(a_3 + b_2) + a_2]t_1 - (b_1\alpha + a_1)t_2 -$$
$$- (\alpha^2 b_1 + \alpha a_1)t_3 = 0. \quad (10)$$

Предварительно выясним, что означает геометрически случай $t_1 = 0$. При этом условии (10) дает

$$-(b_1\alpha + a_1)(t_2 + \alpha t_3) = 0. \quad (10')$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 2. Множеством цилиндроидальных комплексов первого рода назовем совокупность всех тех комплексов (5), для которых $t_1 = 0$; совокупность комплексов (5), для которых $t_1 \neq 0$, назовем множеством цилиндроидальных комплексов второго рода.

Комплекс (5) при $\alpha = -\dfrac{a_1}{b_1}$ может принадлежать как первому роду, если

$$I = a_1^2 b_3 - a_1 b_1 (a_3 + b_2) + a_2 b_1^2 \neq 0,$$

так и второму роду, если $I = 0$, либо не является цилиндроидальным вообще. Этот комплекс назовем особым. Если комплекс не особый, то $b_1\alpha + a_1 \neq 0$, тогда $t_2 = -\alpha t_3$. Как следует из (6) и (9), неголономная конгруэнция $\omega_1^1 = 0$ (та неголономная конгруэнция комплекса (5), один из фокусов которой совпадает с точкой A_1, а фокальная плоскость — с касательной плоскостью V_3^2), для цилиндроидальных комплексов первого рода является уницентральной [3].

Таким образом, множество неособых цилиндроидальных комплексов первого рода характеризуется тем, что в каждом из них неголономная конгруэнция $\omega_1^1 = 0$ уницентральна [3], в любом же неособом цилиндроидальном комплексе второго рода эта конгруэнция неуницентральная. В комплексе (5) неголономная конгруэнция

$$\omega_2^1 + \alpha\omega_3^1 = 0 \qquad (*)$$

характеризуется тем, что она, во-первых, цилиндрическая, а во-вторых, фокальная плоскость, соответствующая несобственному фокусу, совпадает с касательной плоскостью неголономного многообразия V_3^2; конгруэнции же

$$\omega_1^3 = \beta\omega_1^2 \qquad (*, *)$$

обладают тем свойством, что при любом β один из их фокусов совпадает с A_1 (в отличие от конгруэнций $\omega_1^1 = 0$ их фокальная плоскость не совпадает с касательной плоскостью многообразия V_3^2). Только тогда, когда комплекс (5) особый, конгруэнция (*) является одной из неголономных конгруэнций (*, *).

Как видим из (8), комплексы первого рода распадаются на два подкласса, на особые и неособые. Во втором случае $\lambda_3 = 0$. Тогда получаем

$$v_2^3 = \lambda_2 v_1^3.$$

Цилиндроидальный комплекс при этом условии превращается в специальный, все лучи которого касаются некоторого конуса с вершиной в центре пространства. Функция λ_2 в этом случае определяется с произволом в одну функцию одного аргумента, а потому и совокупность неособых комплексов первого рода зависит от одной произвольной функции одного аргумента.

Дифференцируя внешним образом соотношения (2), получаем

$$[da_1 - a_1\omega_2^2 - b_1\omega_2^3,\ \omega_1^1] + [\Delta a_2,\ \omega_1^2] + [\Delta a_3,\ \omega_1^3] = 0,$$
$$[db_1 - b_1\omega_3^3 + a_1\omega_3^2,\ \omega_1^1] + [\Delta b_2,\ \omega_1^2] + [\Delta b_3,\ \omega_1^3] = 0,$$

где

$$\Delta a_2 = da_2 + \cdots, \quad \Delta a_3 = da_3 + \cdots,$$
$$\Delta b_2 = db_2 + \cdots, \quad \Delta b_3 = db_3 + \cdots$$

Разрешая по лемме Картана последние квадратичные уравнения, легко находим, что

$$d\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{a_1}{b_1}(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 \omega_3^2 + \omega_2^3 =$$
$$= t_1\omega_1^1 + t_2\omega_1^2 + t_3\omega_1^3.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Таким образом, если комплекс особый, т. е. $\alpha = -\dfrac{a_1}{b_1}$, то функции t_1, t_2, t_3 определяются второй дифференциальной окрестностью многообразия V_3^2, причем особый комплекс является цилиндроидальным, если $t_1 = 0$.

Легко показать, что неголономные многообразия, для которых особый комплекс является цилиндроидальным, определяются с одной произвольной функцией трех аргументов. Счет упрощается, если частично канонизировать репер, например, условием

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad \pi_2^3 = \pi_3^3 = 0.$$

Все рассуждения об особом комплексе велись в предположении, что $b_1 \neq 0$. На многообразиях, для которых $b_1 = 0$, особый комплекс описывают прямые, касающиеся допустимых кривых

$$\omega_1^1 = \omega_1^2 = 0.$$

Пусть особый комплекс является комплексом второго рода, т. е. $t_1 \neq 0$. (Тогда соотношения (8′) в этом случае не имеют места.)

$$\alpha^2 b_3 + \alpha(a_3 + b_2) + a_2 = 0, \tag{11_1}$$

$$b_1\alpha + a_1 = 0. \tag{11_2}$$

Асимптотические линии многообразия V_3^2 задаются уравнением

$$\omega_1^1 = 0$$

$$a_2(\omega_1^2)^2 + (a_3 + b_2)\,\omega_1^2\omega_1^3 + b_3(\omega_1^3)^2 = 0. \tag{12}$$

Из (11_1) и (12) следует, что если особый комплекс принадлежит второму роду, то он образован совокупностью касательных к одному из семейств асимптотических линий многообразия. Класс таких неголономных многообразий $V^2{}_3$ определяется уравнением

$$a_1^2 b_3 - a_1 b_1 (a_3 + b_2) + a_2 b_1 = 0 \tag{13}$$

с одной произвольной функцией трех аргументов.

Если $b_1 \neq 0$, то выбором вторичного параметра $\pi_2^3 = 0$ можно получить $a_1 = 0$. Тогда из (13) получим $a_2 = 0$. Аффинная нормаль [6] многообразия V_3^2 задается уравнением

$$R = A_1 + v\left\{A_1 + \frac{b_3(a_1b_2 - a_2b_1) - b_1}{b_2(a_3b_2 - a_2b_3)}A_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_3b_2 - a_2b_3}A_3\right\}. \tag{14}$$

При $a_1 = a_2 = 0$ эта нормаль лежит в плоскости $(R, A_1, A_2) = 0$, т. е. в плоскости, определяемой центром пространства и касательной к асимптотической линии. Итак, нами доказана теорема 1.

Теорема 1. Если особый комплекс второго рода, то: 1) этот особый комплекс образован касательными к одному из семейств асимптотических линий многообразия V_3^2; 2) аффинная нормаль многообразия в каждой точке его лежит в плоскости, определяемой центром пространства и касательной к проходящей через эту точку данной асимптотической линии.

Изучим случай, когда оба семейства асимптотических линий многообразия V_3^2 цилиндроидальные. Как следует из (10) и (12), это возможно лишь при $a_1 = b_1 = 0$.

Теорема 2. Если оба семейства асимптотических линий многообразия V_3^2 цилиндроидальные, то аффинная нормаль этого многообра-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

зия в каждой точке проходит через центр пространства и обратно, если все аффинные нормали многообразия V_3^2 проходят через центр пространства, то множество цилиндроидальных комплексов второго рода состоит из двух комплексов, образованных касательными к асимптотическим линиям многообразия.

Действительно, при $a_1 = b_1 = 0$ прямая (14) проходит через центр пространства. Если $a_1 = b_1 = 0$ и $t_1 \neq 0$, то уравнению (10) удовлетворяют только два семейства асимптотических линий, т. е. все семейство цилиндроидальных комплексов второго рода состоит из двух комплексов. Теорема доказана.

Уравнение (10) относительно α квадратное. Это означает, что для любого набора t_1, t_2, t_3 найдется два цилиндроидальных комплекса, для которых конгруэнция

$$t_1\omega_1^1 + t_2\omega_1^2 + t_3\omega_1^3 = 0 \tag{16}$$

является уницентральной цилиндрической, таким образом, все множество цилиндроидальных комплексов распадается на пары комплексов с соответствующими уницентральными цилиндрическими конгруэнциями. Если же дискриминант уравнения (10) относительно α

$$\begin{aligned}\Delta = {} & t_1^2[(a_3+b_2)^2 - 4a_2b_3] + t_2^2b_1^2 + t_3^2a_1^2 + \\ & + t_1t_2[-2(a_3+b_2)b_1 - 4a_1b_3] + t_1t_3[4a_1b_1 - \\ & - 2(a_3+b_2)a_1] - 2t_2t_3a_1b_1\end{aligned} \tag{17}$$

равен нулю, то каждому набору t_1, t_2, t_3 соответствует лишь один комплекс, уницентральная цилиндрическая конгруэнция которого имеет уравнение вида (16).

Теорема. 3. Если аффинная нормаль многообразия проходит через центр пространства, то каждая пара цилиндроидальных комплексов первого рода с соответствующими уницентральными цилиндрическими конгруэнциями сливается в один комплекс.

Действительно, при $t_1 = a_1 = b_1 = 0$, $\Delta = 0$.

Если $a_1 = b_1 = 0$, то система уравнений (2) определяет многообразие V_3^2 с произволом в две функции двух аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. VIII Международный конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. Отчет, Казань, 1939, 195—262.

2. O. Mayer. Geometrie centroaffine differentielle des surfaces. Ann. Sci. de l'univ. de Jassy, t. 21, 1—4, 1935, p. 1—77.

3. Л. И. Магазинников. О некоторых центроаффинно-инвариантных классах комплексов прямых. Геометрический сборник, вып. 4 («Труды Томского ун-та», 176), 1964, 68—71.

4. Л. И. Магазинников. Об одном центроаффинно-инвариантном классе комплексов. Сибирский матем. журнал, 5, № 4, 1964, 905—912.

5. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Издательство Киевского университета, 1964.

6. Р. Н. Щербаков, М. О. Рахула. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геом. сб., 2, «Труды Томского университета», 160, 1962, 82—90.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЦЕНТРОАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. М. ОНИЩУК

Плоским элементом мы будем называть геометрический образ, состоящий из плоскости P и фиксированной точки C, лежащей на этой плоскости. Метрические, аффинные и проективные свойства трехпараметрического семейства плоских элементов хорошо изучены (см., например, [1—8]). В предлагаемой работе это многообразие рассматривается в трехмерном центроаффинном пространстве.

§ 1. Ко- и контравариантные тензоры и инварианты трехпараметрического семейства плоских элементов

Будем изучать лишь такие трехпараметрические семейства плоских элементов, для которых плоскость P не проходит через центр пространства.

Выберем локальный репер $\{O; e_\alpha\}$ рассматриваемого многообразия следующим образом. Начало репера (точку O) поместим в центр пространства, векторы e_1 и e_2 направим параллельно плоскости P, а за вектор e_0 примем вектор $\overline{OC}$.

Деривационные формулы выбранного репера суть:

$$de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_\beta^\alpha = [\omega_\alpha^\gamma, \omega_\gamma^\beta], \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2),$$

формы $\omega_i^0 \equiv \omega_i$, $\omega_0^i \equiv \omega^i$, $\omega_0^0 \equiv \omega$ являются главными.

Подмногообразие $\omega = 0$ назовем основным подмногообразием трехпараметрического семейства плоских элементов. Характеризуется оно тем, что для него плоскость P является касательной ко всем интегральным кривым уравнения $\omega = 0$ в данной точке C.

Исключая из рассмотрения случай, когда точка C описывает двупараметрическое многообразие (или линию), принимаем формы ω, ω_i за независимые (здесь и в дальнейшем $i, j, k = 1,2$). При таком выборе независимых форм уравнения, определяющие трехпараметрическое семейство плоских элементов, запишутся в виде:

$$\omega_i = b_{ij}\omega^j + c_i\omega. \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Условиями полной интегрируемости уравнений (2) является следующая система двух квадратичных уравнений:

$$[Db_{ij}, \omega^j] + [Dc_i, \omega] + (c_i c_j - 2b_{ij})\,[\omega^j, \omega] + c_i(b_{12} - b_{21})\,[\omega^1, \omega^2] = 0, \quad (3)$$

где

$$Db_{ij} = db_{ij} - \omega_i^k b_{kj} - \omega_j^k b_{ik},$$

$$Dc_i = dc_i - \omega_i^k c_k.$$

Пусть δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам и π_i^j — вторичные формы, тогда из системы (3) получим

$$\delta b_{ij} = b_{kj}\pi_i^k + b_{ik}\pi_j^\kappa, \quad (4)$$

$$\delta c_i = \pi_i^k c_k.$$

Таким образом, b_{ij} и c_i — тензоры в смысле Г. Ф. Лаптева [9]. Можно показать, что они также являются тензорами и в обычном смысле.

Представим тензор b_{ij} в виде:

$$b_{ij} = b_{(ij)} + b_{[ij]},$$

где $b_{(ij)}$ — симметричная часть тензора b_{ij} и $b_{[ij]}$ — антисимметричная часть тензора b_{ij}. Покажем, что величины $I_1 = det\, b_{(ij)}$, $I_2 = det\, b_{[ij]}$, $I_3 = det\, b_{ij}$ суть относительные инварианты трехпараметрического семейства плоских элементов. На самом деле, пользуясь формулами (4), находим $\delta I_1 = 2I_1\pi_i^i$, $\delta I_2 = I_2\pi_i^i$, $\delta I_3 = 2I_3\pi_i^i$. Отсюда следует, что I_1, I_2, I_3 — относительные инварианты, $I_1 : I_3$ — абсолютный инвариант.

Будем теперь считать линейно независимыми формы ω, ω_i. В этом случае из рассмотрения исключаются такие многообразия, для которых множество плоскостей P зависит не более чем от двух параметров. Это видно из уравнений

$$x^0 = 1, \quad (5)$$

$$\omega_1 x^1 + \omega_2 x^2 + \omega x^0 = 0,$$

определяющих характеристику плоскостей P при любом смещении. Тогда уравнениями, определяющими изучаемое многообразие, будут следующие:

$$\omega^i = b^{ij}\omega_j + c^i\omega. \quad (6)$$

Условиями полной интегрируемости этой системы являются квадратичные уравнения:

$$[Db^{ij}, \omega_j] + [Dc^i, \omega] + (2b^{ij} - c^i c^j)\,[\omega_j, \omega] + c^i\,(b^{21} - b^{12})\,[\omega^1, \omega^2] = 0, \quad (7)$$

где

$$Db^{ij} = db^{ij} + \omega_k^i b^{kj} + \omega_k^j b^{ik},$$

$$Dc^i = dc^i + \omega_k^i c^k.$$

Тогда

$$\delta b^{ij} = -b^{ik}\pi_k^j - b^{kj}\pi_k^i, \quad (8)$$

$$\delta c^i = -\pi_k^i c^k.$$

Таким образом, величины b^{ij} и c^i — тензоры.

Аналогично тому, как это было сделано для ковариантного тензора b_{ij}, легко показать, что величины

$$I^1 = det\, b^{(ij)}, \qquad I^2 = det\, b^{[ij]}, \qquad I^3 = det\, b^{ij} \quad (9)$$

являются относительными инвариантами рассматриваемого многообразия. Обращение в нуль инварианта I^3 означает линейную зависимость

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

между формами ω, ω^i, т. е. при $I^3 = 0$ множество точек C представляет собой двупараметрическое семейство.

Установим связь между ковариантными тензорами b_{ij}, c_i и контравариантными тензорами b^{ij}, c^i. Из формул (2) имеем

$$\omega^1 = \frac{b_{22}\omega_1 - b_{12}\omega_2 + (c_2 b_{12} - c_1 b_{22})\,\omega}{det\, b_{ij}},$$

$$\omega^2 = \frac{-b_{21}\omega_1 + b_{11}\omega_2 + (c_1 b_{21} - c_2 b_{11})\,\omega}{det\, b_{ij}}. \tag{10}$$

Сравнивая (10) и (6), получаем

$$b^{11} = \frac{b_{22}}{det\, b_{ij}}, \quad b^{12} = -\frac{b_{12}}{det\, b_{ij}}, \quad b^{21} = \frac{-b_{21}}{det\, b_{ij}}, \quad b^{22} = \frac{b_{11}}{det\, b_{ij}}, \tag{11}$$

$$c^1 = \frac{-b_{22}c_1 + b_{12}c_2}{det\, b_{ij}}, \qquad c^2 = \frac{b_{21}c_1 - b_{11}c_2}{det\, b_{ij}}. \tag{12}$$

Из (11) следует:

$$det\, b^{ij} = \frac{1}{det\, b_{ij}}.$$

Формулы (12) можно также представить в виде:

$$c^i = -b^{ik}c_k. \tag{13}$$

Аналогичным образом получаются формулы:

$$b_{11} = \frac{b^{22}}{det\, b^{ij}}, \qquad b_{12} = -\frac{b^{12}}{det\, b^{ij}},$$

$$b_{21} = -\frac{b^{21}}{det\, b^{ij}}, \qquad b_{22} = \frac{b^{11}}{det\, b^{ij}}, \tag{14}$$

$$c_i = -b_{ik}c^k. \tag{15}$$

Из (4) и (8) следует, что $c = c_i c^i$ — абсолютный инвариант.

§ 2. Геометрические образы, определяемые тензорами c_i, c^i, b_{ij}, $b_{(ij)}$. Инвариант c

Из центроаффинной теории линейчатых комплексов известно, что через каждый луч комплекса проходит однопараметрическое семейство уницентральных конгруэнций (т. е. конгруэнций в общем случае неголономных, у которых на данном луче совпадают центральные точки всех линейчатых поверхностей этой конгруэнции, проходящих через данный луч) (см. [10], стр. 63).

Пусть (L) — линейчатый комплекс, описываемый некоторой прямой L, проходящей через точку C и лежащей в плоскости P. Покажем, что в комплексе (L) имеется только одна уницентральная неголономная конгруэнция, для которой уницентр на луче L совпадает с точкой C. В самом деле, характеристика плоскостей, определяемых лучами L и центром пространства при произвольном смещении, определяется уравнениями:

$$(\lambda^2\omega^1 - \lambda^1\omega^2)\,x^0 - (d\lambda^2 + \lambda^i\omega_i^2)\,x^1 + (d\lambda^2 + \lambda^i\omega_i^1)\,x^2 = 0,$$

$$\lambda^2 x^1 - \lambda^1 x^2 = 0, \tag{16}$$

где λ^i — координаты направляющего вектора прямой L. Отсюда видно, что только для неголономной конгруэнции

$$\lambda^2\omega^1 - \lambda^1\omega^2 = 0 \tag{17}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

все линейчатые поверхности имеют на луче L центральные точки, совпадающие с точкой C. Таким образом, уравнение (17) определяет единственную уницентральную конгруэнцию комплекса (L) с уницентрами, совпадающими с точками C.

Определение 1. Уницентральная конгруэнция комплекса (L) называется присоединенной к (C), если уницентр этой конгруэнции на луче L комплекса совпадает с заданной точкой C.

Найдем характеристику плоскостей P при смещении, соответствующем произвольной линейчатой поверхности конгруэнции (17). Уравнения этой характеристики суть:

$$\begin{gathered}(b_{ij}x^i\lambda^j)\,\omega^2+\lambda^2(1+c_ix^i)\,\omega=0,\\ x^0=1.\end{gathered}\tag{18}$$

Отсюда видно, что все такие характеристики пересекаются в точке M, с координатами, удовлетворяющими следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}&b_{ij}x^i\lambda^j=0,\\ &c_ix^i+1=0,\\ &x^0=1.\end{aligned}\tag{19}$$

В результате рассмотрения этой системы мы приходим к двум следующим теоремам.

Теорема 1. *Для вяского линейчатого комплекса (L), луч L которого лежит в плоскости P и проходит через точку C, существует в плоскости P единственная точка M (собственная или несобственная) пересечения характеристик плоскостей P при смещении по любой линейчатой поверхности, которая принадлежит уницентральной конгруэнции комплекса (L), присоединенной к (C).*

Координаты точки M суть:

$$\begin{gathered}x^0=1,\\ x^1=\frac{-b_{2j}\lambda^j}{(c_1b_{2j}-c_2b_{1j})\,\lambda^j},\\ x^2=\frac{b_{1j}\lambda^j}{(c_1b_{2j}-c_2b_{1j})\,\lambda^j}\end{gathered}\tag{20}$$

($\lambda^j e_j$ — направляющий вектор прямой L).

Формулы (20) устанавливают в плоскости P соответствие между прямыми L и точками M. Назовем это соответствие основной корреляцией. В общем случае $(I_3\neq 0)$ основная корреляция есть взаимно однозначное соответствие.

Теорема 2. *В общем случае $(I_3\neq 0)$ точки M, соответствующие в основной корреляции пучку прямых L с центром в точке C, описывают прямо (собственную или несобственную). При $I_3=0$ пучку прямых L с центром в точке C в основной корреляции соответствует единственная точка M (собственная или несобственная).*

Определение 2. Геометрическое место точек, соответствующих в основной корреляции пучку прямых с центром в точке C, называется характеристической линией.

При $I_3\neq 0$ уравнения характеристической прямой суть:

$$\begin{gathered}c_ix^i+1=0,\\ x^0=1.\end{gathered}\tag{21}$$

Таким образом, ковариантный тензор C_i определяет характеристическую прямую.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 3. Прямая, проходящая через точку C и соответствующая в основной корреляции несобственной точке характеристической линии, называется осью трехпараметрического семейства плоских элементов в рассматриваемой точке.

Вектор

$$c^i \boldsymbol{e}_i \tag{22}$$

является направляющим вектором оси, в чем легко убедиться, воспользовавшись формулами (12) и (20), т. е. контравариантный тензор c^i определяет направляющий вектор оси трехпараметрического семейства плоских элементов.

Теорема 3. *Ось трехпараметрического семейства плоских элементов является проекцией в направлении $\boldsymbol{e}_0$ аффинной нормали* [7] *этого многообразия на плоскость P (при $I_3 \neq 0$).*

Действительно, направляющим вектором аффинной нормали в точке C является вектор

$$\boldsymbol{e}_0 + c^i \boldsymbol{e}_i. \tag{23}$$

Сравнивая векторы (22) и (23) и учитывая, что обе нормали проходят через точку C, получаем то, что требовалось доказать. Для того чтобы выяснить геометрическое значение инварианта c, найдем центроаффинное расстояние [11] от аффинной нормали до характеристической прямой. Бисеканта (прямая, проходящая через центр пространства и пересекающая рассматриваемые прямые) имеет уравнение

$$\boldsymbol{r} = t(c\boldsymbol{e}_0 - c^i \boldsymbol{e}_i)$$

и пересекает аффинную нормаль и характеристическую прямую соответственно в точках с радиус-векторами:

$$\boldsymbol{r}_a = \frac{1}{1+c}(c\boldsymbol{e}_0 - c^i \boldsymbol{e}_i), \qquad \boldsymbol{r}_f = \frac{1}{c}(c\boldsymbol{e}_0 - c^i \boldsymbol{e}_i).$$

Отсюда находим, что искомое центроаффинное расстояние

$$d = \frac{1}{c}.$$

Следовательно, инвариант c есть величина, обратная центроаффинному расстоянию от аффиной нормали до характеристической прямой.

Пусть A — точка пересечения оси с характеристической прямой, тогда имеет место равенство

$$c^i \boldsymbol{e}_i = c\overline{CA}.$$

Теорема 4. *Пусть L_1 и L_2 — две прямые плоскости P, проходящие через точку C и $I_3 \neq 0$. Прямая L_2 лишь тогда односторонне сопряжена* [8] *прямой L_1 на основном подмногообразии, когда L_2 проходит через точку, соответствующую прямой L_1 в основной корреляции.*

Доказательство. Обозначим через $\lambda^i_{(k)}$ координаты направляющего вектора прямой L_k. Тогда условием того, что прямая L_2 проходит через точку, соответствующую прямой L в основной корреляции, является обращение в нуль билинейной формы, определяемой тензором b_{ij} (см. (19):

$$b_{ij}\lambda^i_{(2)}\lambda^j_{(1)} = 0, \tag{24}$$

С другой стороны, этим же соотношением связаны координаты направляющих векторов прямых L_1 и L_2 в том случае, когда прямая L_2 описывает торс при движении по кривой основного подмногообразия (или, придерживаясь терминологии Вагнера [4], по допустимой кривой), которой касается прямая L_1 в точке C. Это и требовалось показать.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема 5. В общем случае ($I_3 \neq 0$) в плоскости P существуют две прямые (действительные, мнимые или слившиеся), обладающие тем свойством, что каждая из них проходит через точку, соответствующую ей в основной корреляции.

Действительно, потребовав, чтобы координаты (20) точки M удовлетворяли уравнению $\lambda^2 x^1 - \lambda^1 x^2 = 0$, получим

$$b_{ij}\lambda^i\lambda^j = 0. \tag{25}$$

Это уравнение второй степени относительно λ^i. Теорема доказана.

Определение 4. Прямая, проходящая через точку, соответствующую ей в основной корреляции, называется асимптотической прямой многообразия.

Теорема 6. *Присоединенные к (C) уницентральные конгруэнции комплексов, описываемых асимптотическими прямыми многообразия, высекают на основном подмногообразии асимптотические линии* ($I_3 \neq 0$). *Касательные к этим асимптотическим линиям совпадают с асимптотическими прямыми многообразия.*

Доказательство. Как известно (см., напр., [7]), асимптотическими линиями на основном подмногообразии $\omega = 0$ называются линии, для которых соприкасающаяся плоскость в точке C совпадает с плоскостью P, т. е. уравнение асимптотических линий основного подмногообразия в нашем репере найдется из условия

$$(d^2\boldsymbol{e}_0|_{\omega=0},\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2) = 0.$$

Отсюда получаем

$$b_{ij}\omega^i\omega^j = 0. \tag{26}$$

Легко заметить, что этим же уравнением на всем многообразии определяются присоединенные к (C) уницентральные конгруэнции тех комплексов, которые описываются асимптотическими прямыми. Координаты направляющих векторов касательных к асимптотическим линиям подмногообразия $\omega = 0$ находятся из уравнения (25). Теорема доказана.

Теорема 7. *Характеристическая прямая проходит через центроаффинные центры* [*10*] *лучей комплексов, описываемых асимптотическими прямыми.*

Доказательство. Направим вектор $\boldsymbol{e}_k$ по асимптотической прямой L_k, тогда $b_{kk} = 0$, а уравнение $\omega^i = 0$ (см. (17) при $\lambda^i = 0$, $i \neq k$) определяет присоединенную к (C) уницентральную неголономную конгруэнцию комплекса (L_k). Фокусы этой конгруэнции находятся в точках $C(1, 0, 0)$ и $F_k\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{c_k}\right)$. Так как $\omega^i = 0$ является присоединенной к (C) уницентральной конгруэнцией, то $C(1, 0, 0)$ является ее уницентром, а $F_k\left(1,\ 0,\ -\frac{1}{c_k}\right)$ совпадает с центроаффинным центром луча комплекса (L_k). Координаты точек F_k удовлетворяют уравнениям (21), определяющим характеристическую прямую.

Выше мы установили, что тензор b_{ij} определяет билинейную форму, обращающуюся в нуль на сопряженных в одну сторону направлениях плоскости P. Обычными вычислениями можно показать, что уравнение

$$b_{(ij)}\lambda^i_{(2)}\lambda^j_{(1)} = 0 \tag{27}$$

определяет в плоскости (P) направления прямых, проходящих через точку C и гармонически делящих асимптотические прямые. На основном подмногообразии $\omega = 0$ эти прямые касаются двусторонне сопряженных линий [8].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. Некоторые классы трехпараметрических семейств плоских элементов

I. Уравнением $I_1 = 0$ определяется класс параболических трехпараметрических семейств плоских элементов (т. е. класс, для которого асимптотические прямые являются слившимися).

II. Класс $I_2 = 0$ (класс, для которого тензор b_{ij} симметричен) трехпараметрических семейств плоских элементов характеризуется каждым из следующих свойств: а) свойства односторонней и двусторонней сопряженности совпадают; б) основное подмногообразие $\omega = 0$ является голономным, а стало быть, изучаемое многообразие в этом случае расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей.

III. Для многообразия класса $I_3 = 0$ характеристическим является каждое из свойств: а) множество плоскостей P является двупараметрическим; б) в основной корреляции пучку прямых L с центром в точке C соответствует единственная точка, т. е. характеристическая линия вырождается в точку; в) аффинная нормаль лежит в плоскости P.

Выше было отмечено (см. § 1), что условием вырождения трехпараметрического семейства плоскостей P в двупараметрическое является линейная зависимость между формами ω, ω_i. Последнее означает, что $[\omega, \omega_1, \omega_2] = 0$. Подставляя в это равенство значения форм ω_i из (2), получаем $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$. Таким образом, свойство а) доказано.

Для доказательства свойства б) рассмотрим систему (19), определяющую точку M характеристической линии. Два последних уравнения этой системы не зависят от выбора λ^i, а первое уравнение определяет отношение координат

$$\frac{x^1}{x^2} = -\frac{b_{2j}\lambda^j}{b_{1j}\lambda^j}.$$

Это отношение не зависит от выбора λ^i лишь тогда, когда $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \equiv I_3 = 0$. Единственная точка M_0, соответствующая всем прямым пучка в основной корреляции, имеет следующие координаты:

$$x^0 = 1,$$

$$x^1 = -\frac{b_{21}}{c_1 b_{21} - c_2 b_{11}}, \qquad (28)$$

$$x^2 = \frac{b_{11}}{c_1 b_{21} - c_2 b_{11}}.$$

Свойство б) доказано.

Заметим, что в случае, когда точка M_0 собственная, оси многообразия не существует.

Докажем свойство в). Уравнение аффинной нормали в нашем репере имеет вид:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_0 + t\{I_3\boldsymbol{e}_0 + (b_{12}c_2 - b_{22}c_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (b_{21}c_1 - b_{11}c_2)\,\boldsymbol{e}_2\}. \qquad (29)$$

Отсюда заключаем, что аффинная нормаль лежит в плоскости P лишь при условии $I_3 = 0$, что и требовалось доказать.

Существует рассматриваемый класс с произволом одной функции трех аргументов. Действительно, исследуя систему (3) при условии $b_{11}b_{22} = b_{12}b_{21}$, получаем в терминах С. П. Финикова [12]: $n = 3$, $q = 5$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$, $N = 9$, $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 9$, $N = Q$. Система (3) в инволюции и определяет решение с произволом одной функции трех аргументов.

Теорема 8. *В классе $I_3 = 0$ ($c_i \neq 0$) существует только одна асимптотическая прямая, совпадающая с одной из касательных к асимптотическим линиям основного подмногообразия; касательная к другой*

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

асимптотической линии основного подмногообразия совпадает с аффинной нормалью.

Доказательство. То обстоятельство, что в классе $I_3 = 0$ существует единственная асимптотическая прямая, следует из определения 4 и свойства б) рассматриваемого класса. Касательные к асимптотическим линиям при $I_3 = 0$ определяются уравнениями:

$$b_{11}x^1 + b_{21}x^2 = 0, \tag{30$_I$}$$

$$b_{11}x^1 + b_{12}x^2 = 0. \tag{30$_{II}$}$$

(см. (25). Из формул (28) следует, что уравнение асимптотической прямой совпадает с уравнением (30$_I$). Кроме того, сравнивая уравнения (29) и (30$_{II}$), получаем, что они эквивалентны при условии $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$. Теорема доказана.

IV. Трехпараметрическое семейство плоских элементов класса $b_{ij} = 0$ представляет собой однопараметрическое семейство плоскостей, огибающее некоторую развертывающуюся поверхность, и определяется с произволом двух функций одного аргумента. При этом основным подмногообразием $\omega = 0$ является данное однопараметрическое семейство плоскостей. Допустимыми кривыми — плоские кривые. Тензор c_i определяет луч развертывающейся поверхности в плоскости P.

Покажем это. Система (3) при $b_{ij} = 0$ принимает вид:

$$[Dc_i + c_i c_j \omega^j, \omega] = 0. \tag{31}$$

Исследуя эту систему, получаем: $q = 2$, $n = 3$, $s_1 = 2$, $q = s_1 + s_2 + s_3$, $s_2 = s_3 = 0$, $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 2$, $N = 2$. В силу критерия Картана заключаем, что класс $b_{ij} = 0$ трехпараметрических семейств плоских элементов существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Так как условие $b_{12} = b_{21}$ является необходимым и достаточным для голономности основного подмногообразия (см. характеристику класса $I_2 = 0$) и для нашего класса оно выполнено, то это означает, что трехпараметрическое семейство плоских элементов расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей. Эти поверхности являются плоскостями в силу условия $(de_0, d^2e_0, d^3e_0) = 0$ при $b_{ij} = 0$. Характеристика рассматриваемых плоскостей определяется системой уравнений

$$\begin{gathered} x^0 = 1, \\ (c_i x^i + 1)\,\omega = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Отсюда заключаем: 1) при смещении по допустимым кривым плоскость P не меняется, 2) при смещении по любой другой кривой характеристика плоскостей P есть прямая.

$$\begin{gathered} x^0 = 1, \\ c_i x^i + 1 = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

что и требовалось показать.

V. Трехпараметрическое семейство плоских элементов класса $c_i = 0$ ($I_3 \neq 0$) характеризуется каждым из свойств: а) характеристическая прямая является несобственной, б) аффинные нормали проходят через центр пространства (см. (18) и (29)).

Рассмотрим вопрос о существовании этого класса. Система (3) принимает вид:

$$[Db_{i1} + 2b_{i1}\omega, \omega^1] + [Db_{i2} + 2b_{i2}\omega, \omega^2 = 0.]$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда по лемме Картана [12] получаем

$$Db_{i1} + 2b_{i1}\omega = \alpha_i\omega^1 + \beta_i\omega^2,$$

$$Db_{i2} + 2b_{i2}\omega = \beta_i\omega^1 + \gamma_i\omega^2.$$

Имеем $q = 4$, $n = 3$, $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 0$, $Q = N = 6$. Рассматриваемый класс существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

VI. Обращение в нуль абсолютного инварианта c выделяет класс рассматриваемых многообразий, характеризующийся параллелизмом характеристической прямой и оси (см. (21) и (22).

Заметим также, что в этом случае ось является асимптотической прямой. Определяется рассматриваемый класс с произволом одной функции трех аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Wagner. Sur a géométrie differentielle des multiplicités anholonomes. «Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу», вып. II—III, 1935, стр. 269—314.

2. V. Wagner. Über V_3^2 von der Krümmung Null in R_3. Матем. сб., 4 (46): 2, 1938, стр. 333—337.

3. V. Wagner. On the geometrical interpretation of the curvature vector of a nonholonomie V_3^2 in the three-dimensional Euclidean Space. Матем. сб., 4 (46): 2, 1938, стр. 339—356.

4. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. Отчет VIII Международному конгрессу на соискание премии имени Лобачевского, 1940, стр. 197—262.

5. В. Вагнер. Теория конгруэнций кругов и геометрия неголономного V_3^2 в R_3. Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 5, 1941, стр. 271—283.

6. К. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд. Киевского ун-та, 1963.

7. Р. Н. Щербаков и М. О. Рахула. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геометрический сб., вып. I («Труды Томского ун-та», т. 160), 1962. стр. 82—89.

8. T. Mihăilescu. Geometrie differentială proiectivă. Ed. RPR, Bucuresti. 1958.

9. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Труды Московского математического общества», т. 2, ГИТТЛ, М., 1953, стр. 275—383.

10. Л. И. Магазинников. О некоторых центроаффинно-инвариантных классах комплексов прямых. Геометрический сб., вып. 4 («Труды Томского ун-та», т. 176), 1964, стр. 61—71.

11. Л. И. Магазинников, Р. Н. Щербаков. Центроаффинное изгибание комплексов. Anal. st. univ. Jasi IX, 2 (1963), стр. 409—422.

12. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

К ЭКВИАФФИННОЙ ТЕОРИИ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. А. ПЕТИН

Плоским элементом $(A\pi)$ мы называем фигуру, состоящую из плоскости π и инцидентной ей точки A — центра элемента [9].

Многообразия плоских элементов естественно возникают при изучении ряда геометрических образов. Примером могут служить расслояемые пары кривых, линейчатых поверхностей, конгруэнций, комплексов [9], геометрия полос; при исследовании многомерных поверхностей возникают различные обобщения плоских элементов ([1], [7] и т. д.). Кроме этого, многообразия плоских элементов представляют и самостоятельный интерес.

Трехпараметрическим многообразиям плоских элементов уделено достаточное внимание ([2], [6], [11] и др.), однако эквиаффинная теория двупараметрического многообразия плоских элементов разработана очень слабо. Например, автору известна лишь одна работа [3], где делается первая попытка исследования двупараметрического многообразия плоских элементов в трехмерном эквиаффинном пространстве.

§ 1. Основной внутренний фундаментальный объект двупараметрического многообразия плоских элементов. Тензоры и инварианты

Будем считать, что индексы $i, j, k = 1, 2, 3$, а индексы $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, причем выполняется обычное соглашение о суммировании. Совместив начало некоторого подвижного репера с центром элемента A и направив векторы $\boldsymbol{e}_\alpha$ параллельно плоскости элемента π, получим, что в деривационных формулах репера

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \omega^i \boldsymbol{e}_i \\ d\boldsymbol{e}_i &= \omega_i^j \boldsymbol{e}_j, \end{aligned} \tag{1}$$

где, конечно, $\omega_i^i = 0$, формы ω^i и ω_α^3 — главные.

Назовем точку касания плоскости π с огибающей поверхностью характеристической. Тогда, задав ее в виде $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$, будем иметь $(d\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) = 0$, откуда следует

$$x^\alpha \omega_\alpha^3 + \omega^3 = 0.$$

Записывая эту систему для двух различных смещений, получим

$$\begin{aligned} x^1 \omega_1^3(d_1) + x^2 \omega_2^3(d_1) &= -\omega^3(d_1), \\ x^1 \omega_1^3(d_2) + x^2 \omega_2^3(d_2) &= -\omega^3(d_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В общем случае такая система имеет единственное решение. Если же определитель этой системы равен нулю, т. е. $[\omega^3_1\omega^3_2]=0$, то или характеристических точек нет, или в каждой плоскости π их имеется бесчисленное множество. Такие многообразия плоских элементов в дальнейшем будем исключать из рассмотрения.

Считая $[\omega^3_1\omega^3_2]\neq 0$, положим

$$\omega^i=\lambda^{i\alpha}\omega^3_\alpha. \tag{3}$$

Дифференцируя внешним образом эту систему, имеем

$$[d\lambda^{i\alpha}+\lambda^{i\beta}\omega^\alpha_\beta+\lambda^{j\alpha}\omega^i_j-\lambda^{i\alpha}\omega^3_3,\ \omega^3_\alpha]=0, \tag{4}$$

откуда обычным путем [10] получаем

$$-\delta\lambda^{i\alpha}=\lambda^{i\beta}\pi^\alpha_\beta+\lambda^{j\alpha}\pi^i_j-\lambda^{i\alpha}\pi^3_3. \tag{5}$$

Система величин $\lambda^{i\alpha}$ образует основной внутренний фундаментальный объект [4] двупараметрического многообразия плоских элементов, так как из системы (5) следует, что все вторичные формы выражаются через $\delta\lambda^{i\alpha}$ (определитель этой системы при $\lambda^{23}=\lambda^{31}=1$, а при остальных $\lambda^{i\alpha}$, равных нулю, равен по модулю трем, значит, в общем случае он отличен от нуля).

Заметим, что из (4) по теореме Бахвалова следует, что многообразие плоских элементов определяется с произволом трех функций двух элементов.

Введем следующие обозначения

$$a^\alpha=\lambda^{3\alpha},\quad b^\alpha=\lambda^{\alpha1}a^2-\lambda^{\alpha2}a^1,\quad c^i=\lambda^{i1}b^2-\lambda^{i2}b^1. \tag{6}$$

Система величин a^α, b^α, c^i эквивалентна системе величин $\lambda^{i\alpha}$, так как они взаимно выражаются друг через друга.

Пользуясь системой уравнений (5), находим

$$\begin{aligned}\delta a^\alpha&=-a^\beta\pi^\alpha_\beta,\\ \delta b^\alpha&=-b^\beta\pi^\alpha_\beta+2b^\alpha\pi^3_3,\\ \delta c^i&=-c^j\pi^i_j+4c^i\pi^3_3.\end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, a^α, b^α, c^i образуют тензоры в смысле [4], но только a^α образуют тензор в классическом смысле.

В силу равенства $\pi^3_\alpha=0$

$$\delta c^3=3c^3\pi^3_3, \tag{7}$$

т. е. $c^3=a^1b^2-a^2b^1$ является относительным инвариантом. Его мы часто будем обозначать без индекса вверху, считая $c^3\equiv c$. Заметим, что величины

$$\tilde{b}^\alpha=b^\alpha\cdot c^{-2/3},\quad \tilde{c}^i=c^i\cdot c^{-4/3} \tag{8}$$

образуют тензоры в классическом смысле.

Из величин a^α, b^α можно составить другие тензоры в смысле [4]. Так, например, тензор

$$g^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(a^\alpha b^\beta+a^\beta b^\alpha) \tag{9}$$

определяет инвариантную квадратичную дифференциальную форму, которую по аналогии с аффинной теорией поверхностей [12] обозначим через ds^2:

$$ds^2=g^{\alpha\beta}\omega^3_\alpha\omega^3_\beta\equiv a^\alpha b^\beta\omega^3_\alpha\omega^3_\beta. \tag{10}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тензор $g_{\alpha\beta}$, компоненты которого являются алгебраическими дополнениями матрицы $(g^{\alpha\beta})$, определяет в плоскости π инвариантную конику

$$g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + c^{4/3} = 0. \tag{11}$$

Тензор

$$h^{\alpha\beta} = c^{2/3}a^\alpha a^\beta + c^{-2/3}b^\alpha b^\beta \tag{12}$$

определяет другую инвариантную квадратичную форму

$$d\sigma^2 = h^{\alpha\beta}\omega^3_\alpha\omega^3_\beta, \tag{13}$$

а тензор $h_{\alpha\beta}$, составленный из алгебраических дополнений матрицы $(h^{\alpha\beta})$, определяет инвариантную конику

$$h_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - c^{2/3} = 0. \tag{14}$$

Отметим, что форму ds^2 можно представить в виде произведений двух абсолютно инвариантных линейных форм $\varphi_a\cdot\varphi_b$, а форму $d\sigma^2$ — в виде суммы квадратов форм φ_a и φ_b, где

$$\varphi_a = a^\alpha\omega^3_\alpha\cdot c^{1/3}, \qquad \varphi_b = b^\beta\omega^3_\beta\cdot c^{-1/3}. \tag{15}$$

§ 2. Геометрический смысл тензоров и инвариантов

Тензор a^α определяет инвариантный вектор

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha, \tag{16a}$$

соединяющий характеристическую точку с центром элемента. Действительно, задавая точку касания плоскости π с огибающей поверхностью в виде $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + x^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$, из условия $(d\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) = 0$ получаем, что $x^\alpha = -a^\alpha$.

Тензор b^α определяет инвариантное направление, параллельное вектору

$$\boldsymbol{b} = b^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha, \tag{17}$$

который расположен в плоскости π и касается поверхности центров. В самом деле, касательная плоскость к поверхности центров определяется бивектором $(\lambda^{i1}\boldsymbol{e}_i,\ \lambda^{j2}\boldsymbol{e}_j)$. Если вектор $\boldsymbol{R} = y^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$, параллельный плоскости π, параллелен и касательной плоскости поверхности центров, то

$$(\boldsymbol{R},\ \lambda^{i1}\boldsymbol{e}_i,\ \lambda^{j2}\boldsymbol{e}_j) = 0,$$

откуда следует $y^1 : y^2 = b^1 : b^2$.

Дадим геометрическую характеристику вектору

$$\boldsymbol{c} = c^i\boldsymbol{e}_i \tag{18}$$

Каждому подмногообразию плоских элементов $\omega^3_1 : \omega^3_2$ соответствуют два вектора: вектор, параллельный характеристике плоскости π при смещении по этому подмногообразию

$$\boldsymbol{R} = -c^{-2/3}\varphi_b\boldsymbol{a} + c^{-4/3}\varphi_a\boldsymbol{b}, \tag{19}$$

и вектор, параллельный касательной к линии, описываемой центром $\boldsymbol{A}$ элемента

$$d\boldsymbol{A} = -c^{-2/3}\varphi_b\boldsymbol{b} + c^{-4/3}\varphi_a\boldsymbol{c}. \tag{20}$$

Из (19) следует геометрическая характеристика подмногообразий $\varphi_a = 0$ и $\varphi_b = 0$: они характеризуются тем, что при смещении по этим подмногообразиям характеристики плоскости π параллельны соответственно векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Подмногообразие $\varphi_a = 0$ характеризуется еще и тем, что оно является полосой.

Из (20) теперь следует, что вектор $\boldsymbol{c}$ параллелен касательной к кривой, описываемой центром элемента при смещении по подмногообразию $\varphi_b = 0$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Прямую

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{c} \tag{21}$$

будем называть аффинной нормалью двупараметрического многообразия плоских элементов.

Чтобы охарактеризовать форму φ_b, выберем на кривой, описываемой центром $\boldsymbol{A}$ при $\varphi_a = 0$ две близкие точки M_1, M_2 и рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{AM}_1$, $\boldsymbol{AM}_2$. Главная часть объема этого параллелепипеда равна

$$\left(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{A},\ d\boldsymbol{A} + \frac{1}{2} d^2\boldsymbol{A}\right)\Big|_{\varphi_a = 0} = -\frac{1}{2}\varphi_b^3. \tag{22}$$

Мы отметили, что величины $\tilde{b}^\alpha$ и $\tilde{c}^i$, определенные формулами (8), образуют тензоры в классическом смысле. Они определяют соответственно инвариантные векторы:

$$\boldsymbol{b}^* = \tilde{b}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha = bc^{-2/3}, \qquad \boldsymbol{c}^* = \tilde{c}^i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{c} \cdot c^{-4/3}. \tag{23}$$

Эти векторы имеют простой геометрический смысл: если обозначить форму $-\varphi_b = ds$ при $\varphi_a = 0$, то

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{ds} = \boldsymbol{b}^*, \tag{24}$$

инвариантный вектор $\boldsymbol{c}^*$ характеризуется как вектор, удовлетворяющий условию

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}^*,\ \boldsymbol{c}^*) = 1. \tag{25}$$

Что касается формы φ_a, то ее геометрический смысл следует из формулы

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}^*,\ d\boldsymbol{A}) = \varphi_a. \tag{26}$$

Квадратичную дифференциальную форму ds^2 можно охарактеризовать, вычисляя главную часть объема параллелепипеда, построенного на векторах $\Delta\boldsymbol{A}|_{\varphi_a=0}$, $\boldsymbol{a}$, $\Delta\boldsymbol{A}|_{\varphi_b=0}$

$$(d\boldsymbol{A}|_{\varphi_a=0},\ \boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{A}|_{\varphi_b=0}) = ds^2. \tag{27}$$

Инвариантная коника (11) является, очевидно, гиперболой, так как $det \parallel g_{\alpha\beta} \parallel < 0$. Ее центр совпадает с центром элемента, а асимптотические направления определяются векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем точка $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^*$ принадлежит этой гиперболе. Этими условиями наша гипербола определяется однозначно.

Инвариантная коника (14) представляет собой эллипс, так как $det \parallel h_{\alpha\beta} \parallel > 0$. Его центр также находится в центре $\boldsymbol{A}$ элемента.

Точки $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}^*$ лежат на этом эллипсе, причем направления, определяемые векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, сопряжены относительно него.

У нас остался неохарактеризованным один относительный инвариант c. Он равен кубу отношения площадей, построенных на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}^*$ и на векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, т. е.

$$c = \left\{\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}^*)}{(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)}\right\}^3. \tag{28}$$

Пусть $c \equiv c^3 = 0$. Вспоминая выражение c^3 через a^α и b^α из (6), имеем

$$a^1 b^2 - a^2 b^1 = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда следует

$$a^\alpha = \lambda b^\alpha \equiv \lambda\,(\lambda^{\alpha 1}a^2 - \lambda^{\alpha 2}a^1) = \lambda^2\,(\lambda^{\alpha 1}b^2 - \lambda^{\alpha 2}b^1) = \lambda^2 c^\alpha. \tag{29}$$

Эти равенства показывают, что все три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{в}, \boldsymbol{c}$, параллельны. Следовательно, прямая $R = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{a}$ теперь касается как поверхности центров, так и огибающей поверхности, т. е. является лучом конгруэнции с фокальными поверхностями, описываемыми точками $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{a}$. Таким образом, это многообразие плоских элементов образовано фокусами конгруэнции и теми фокальными плоскостями, которые касаются другой фокальной поверхности. Отсюда следует, что его произвол — две функции двух аргументов, что с каждой конгруэнцией можно связать два таких многообразия и что именно этот класс был отмечен С. П. Фиников ым в [9] на стр. 65 под названием $H^1{}_2$.

§ 3. Безынтегральное построение двупараметрического многообразия плоских элементов

Так как произвол двупараметрического многообразия плоских элементов составляет три функции двух аргументов, то это наводит на мысль о возможности построения этого многообразия исходя из трех произвольных поверхностей. Покажем, как это можно сделать.

Совместим плоскость $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)$ с касательной плоскостью поверхности центров, а вектор $\boldsymbol{e}_1$ совместим с — $\boldsymbol{a}$; при этом вектор $\boldsymbol{e}_2$ будет параллелен b. Отсюда следует

$$\omega^1 = 0, \qquad \omega^3 + \omega^3_1 = 0. \tag{30}$$

Так как теперь $\pi^1_2 = 0$, то это значит, что

$$\omega^1_2 = \alpha_1\omega^3_1 + \alpha_2\omega^3_2. \tag{31}$$

Обычным путем [10] получаем

$$\delta\alpha_1 = 0, \qquad \delta\alpha_2 = -3\pi^2_2,$$

что дает возможность провести такое нормирование

$$\alpha_2 = -\alpha_1, \qquad \pi^2_2 = 0. \tag{32}$$

Геометрический смысл нормирования заключается в том, что начало и конец вектора $\boldsymbol{e}_2$ определяются соответственно фокусами $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_2$ конгруэнции $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{e}_2$.

Теперь плоскость π элемента у нас касается некоторой поверхности $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_1)$ и в этой плоскости есть прямая, касающаяся двух других поверхностей.

Отсюда можно сделать вывод, что для построения двупараметрического многообразия плоских элементов нужно задать три произвольных поверхности (F_1), (F_2) и (F_3). Касательные плоскости к одной из них, например, (F_1), считать плоскостями π элементов. Каждая плоскость π сечет поверхности (F_2) и (F_3) по кривым. Одну из точек касания, например $\boldsymbol{F}_1$, общей касательной к этим кривым нужно считать центром плоского элемента.

Действительно, полагая $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_1$ и совмещая плоскость $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)$ с касательной плоскостью поверхности (F_2), по смыслу построения имеем

$$(d\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3) = 0, \qquad (d\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_1),\ \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) = 0. \tag{33}$$

Так как касательная плоскость к поверхности (F_3) параллельна вектору $\boldsymbol{e}_2$, то она определяется некоторым бивектором $(\boldsymbol{e}_2,\ \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_3)$, т. е.

$$(d\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_2),\ \boldsymbol{e}_2,\ \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_3) = 0. \tag{34}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Из (33) и (34) следует

$$\omega^1 = 0, \qquad \omega^3 + \omega_1^3 = 0, \qquad \omega_2^1 = \alpha\beta^{-1}(\omega_1^3 - \omega_2^3). \tag{35}$$

Теперь мы видим, что система (35) эквивалентна системе уравнений (30) и (31) при условии (32), что и доказывает справедливость наших рассуждений.

§ 4. Канонический репер. Геометрические образы, ассоциированные с двупараметрическим многообразием плоских элементов

Для дальнейшего изучения свойств многообразия плоских элементов, связанных с дифференциальной окрестностью второго порядка, канонизируем репер, положив $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{c}^*$.

Тогда

$$\omega^1 = 0, \qquad \omega^3 + \omega_1^3 = 0, \qquad \omega^2 + \omega_2^3 = 0. \tag{36}$$

Такой репер с точностью до нумерации и ориентации векторов был построен в [3].

Дифференцируя внешним образом уравнения (36) и применяя лемму Картана, получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_3^1 = A\omega_1^3 + B\omega_2^3, && \omega_1^1 = M\omega_1^3 + N\omega_2^3,\\
&\omega_2^1 = B\omega_1^3 + C\omega_2^3, && \omega_1^2 = N\omega_1^3 + P\omega_2^3,\\
&\omega_3^2 = Q\omega_1^3 + R\omega_2^3, && \omega_2^2 = S\omega_1^3 + T\omega_2^3,\\
&&& \omega_3^3 = -(M+S)\,\omega_1^3 - (N+T)\,\omega_2^3,
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$C + R = 3S + M. \tag{37'}$$

Внешнее дифференцирование системы (37) приводит к шести независимым внешним квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned}
&[dA\omega_1^3] + [dB\omega_2^3] = \{A(3N+2T) - 2B(R+M) + QC\}[\omega_1^3\omega_2^3],\\
&[dB\omega_1^3] + [dC\omega_2^3] = \{2BN - A + C(C-S-2M)\}[\omega_1^3\omega_2^3],\\
&[dM\omega_1^3] + [dN\omega_2^3] = \{2N(C-S) - B(P-1) + MT\}[\omega_1^3\omega_2^3],\\
&[dN\omega_1^3] + [dP\omega_2^3] = \{2NT + R + P(C-3S)\}[\omega_1^3\omega_2^3],\\
&[dQ\omega_1^3] + [dR\omega_2^3] = \{Q(3T+2N) + R(C-4S-2M) +\\
&\qquad + AP - BN\}[\omega_1^3\omega_2^3],\\
&[dS\omega_1^3] + [dT\omega_2^3] = \{(C-S)(T-N) + BP - Q - MT\}[\omega_1^3\omega_2^3].
\end{aligned} \tag{38}$$

Напомним, что вектор $\boldsymbol{e}_3$ направлен по аффинной нормали, вектор $\boldsymbol{e}_2$ параллелен линии пересечения плоскости π с касательной плоскостью к поверхности центров, а вектор $\boldsymbol{e}_1$ соединяет центр элемента с характеристической точкой.

Уравнения гиперболы и эллипса принимают соответственно вид:

$$x^1x^2 = 1, \qquad (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \tag{39}$$

а введенные в § 1 формы теперь записываются в виде:

$$\varphi_a = \omega_1^3, \quad \varphi_b = \omega_2^3, \quad ds^2 = \omega_1^3\omega_2^3, \quad d\sigma^2 = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2. \tag{40}$$

Присоединим к каждой точке $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A} + \rho\boldsymbol{e}_3$ аффинной нормали плоскость, параллельную плоскости π. Мы получим многообразие V_3^2 [2], которое назовем присоединенным. Допустимые кривые [2] присоединенного V_3^2 задаются уравнением

$$d\rho + \rho\omega_3^3 + \omega^3 = 0, \tag{41}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а асимптотические линии — уравнением

$$\rho A\,(\omega_1^3)^2 + \rho\,(B+Q)\,\omega_1^3\omega_2^3 + (\rho R - 1)\,(\omega_2^3)^2 = 0. \tag{42}$$

Точки аффинной нормали, в которых асимптотические линии присоединенного V_3^2 совпадают, назовем двойными. Двойными являются точки

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A} + \frac{A}{AR - \frac{1}{4}(B+Q)^2}\,\boldsymbol{e}_3. \tag{43}$$

Конгруэнцию $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{e}_3$, описываемую аффинными нормалями, будем называть конгруэнцией нормалей. Ее фокусами являются точки

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{A} + \frac{A}{AR - BQ}\,\boldsymbol{e}_3. \tag{44}$$

Присоединяя к каждой точке $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + x^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$ плоскости π прямую, параллельную аффинной нормали в точке $\boldsymbol{A}$, получим четырехпараметрическое поле направлений Φ_4. Совокупность касательных к интегральным кривым $\{\boldsymbol{R}\}$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dx^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + \omega^1 = 0, \\ dx^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 + \omega^2 = 0 \end{gathered} \tag{45}$$

определяет некоторое, вообще говоря, неголономное подмногообразие этого Φ_4, которое мы для краткости будем называть присоединенным Ψ_4^2.

Из других образов, ассоциированных с двупараметрическим многообразием плоских элементов, отметим следующие: поверхность центров, асимптотические линии которой задаются уравнением

$$A\,(\omega_1^3)^2 + 2B\omega_1^3\omega_2^3 + C\,(\omega_2^3)^2 = 0; \tag{46}$$

поверхность, огибаемую плоскостями π, асимптотические линии которой удовлетворяют уравнению

$$M\,(\omega_1^3)^2 + 2N\omega_1^3\omega_2^3 + (P-1)(\omega_2^3)^2 = 0; \tag{47}$$

характеристическую точку плоскости $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$, которая задается в виде:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + \frac{Q}{PQ - NR}\,\boldsymbol{e}_1 - \frac{N}{PQ - NR}\,\boldsymbol{e}_3. \tag{48}$$

Кроме того, с каждым многообразием плоских элементов ассоциируются конгруэнции эллипсов и гипербол. Находя фокусы конгруэнции гипербол известным способом [5], найдем, что они определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered} x^1x^2 = 1, \\ P(x^1)^6 - (P+1)(x^1)^5 + (T+1)\,(x^1)^4 - (N+T)\,(x^1)^3 + \\ + (C - M - S)(x^1)^2 - Cx^1 - B = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

Фокусы конгруэнции эллипсов определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \\ \Gamma_1\,(x^2)^6 + \Gamma_2\,(x^2)^5 + \Gamma_3\,(x^2)^4 + \Gamma_4\,(x^2)^3 + \Gamma_5\,(x^2)^2 + \Gamma_6\,x^2 = 0, \end{gathered} \tag{50}$$

где

$$\Gamma_1\,(T - B - 2N)^2 + (P + C - M - S)^2,$$

$$\Gamma_5 = P + C + 1 - M - (2P + 2C - M + 1)^2 - (3P + 3C - 2M + 2) \times \times (P + C - M) - N\,(B + 2N - T),$$

$$\Gamma_6 = (3P + 3C - 2M + 1)N$$

(остальные коэффициенты при неизвестных нам не потребуются).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отметим еще, что фокусы конгруэнции $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{e}_1$ задаются в виде:

$$\boldsymbol{F}_1' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_1; \qquad \boldsymbol{F}_2' = \boldsymbol{A} + P^{-1}\boldsymbol{e}_1, \tag{51}$$

а фокусами конгруэнции $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{e}_2$ являются точки

$$\boldsymbol{F}_1'' = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{F}_2'' = \boldsymbol{A} - CB^{-1}\boldsymbol{e}_2. \tag{52}$$

§ 5. Связность в двупараметрическом многообразии плоских элементов. Тензоры кручения, кривизны и объемной кривизны

В двупараметрическом многообразии плоских элементов введем линейную связность, которая задается формулами:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{A} &= \omega^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^2 \boldsymbol{e}_2, \\ \nabla \boldsymbol{e}_1 &= \omega_1^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_1^2 \boldsymbol{e}_2, \\ \nabla \boldsymbol{e}_2 &= \omega_2^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2^2 \boldsymbol{e}_2, \end{aligned} \tag{53}$$

где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования. Из (53) видим, что ковариантный дифференциал любого вектора $\nabla \boldsymbol{x}$ есть проекция обычного дифференциала $d\boldsymbol{x}$ на плоскость π параллельно аффинной нормали. Поэтому введенная нами линейная связность индуцируется объемлющим аффинным пространством.

Вычисляя компоненты тензора кручения $T_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и кривизны $R_{\alpha\beta}^{\delta}$ обычным способом (см., напр. [8]), находим

$$T_{12}^1 = -T_{21}^1 = B, \qquad T_{12}^2 = -T_{21}^2 = R; \tag{54}$$

$$\begin{aligned} R_{112}^1 &= -R_{121}^1 = -B, \qquad R_{112}^2 = -R_{121}^2 = -R, \\ R_{212}^1 &= -R_{221}^1 = A, \qquad R_{212}^2 = -R_{221}^2 = Q, \end{aligned} \tag{55}$$

причем свернутый тензор кривизны или тензор объемной кривизны имеет единственную существенную компоненту

$$R_{\alpha 12}^{\alpha} = -R_{\alpha 21}^{\alpha} = -B + Q. \tag{56}$$

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Тензор объемной кривизны равен нулю тогда и только тогда, когда присоединенное многообразие V_3^2 голономно.

Если присоединенное V_3^2 голономно, то уравнение (41) вполне интегрируемо. Дифференцируя его внешним образом и заменяя $d\rho$ его значением из (41), получаем

$$\rho([\omega_3^1\omega_1^3] + [\omega_3^2\omega_2^3]) + [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться для любых ρ, то

$$\begin{aligned} [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] &= 0, \\ [\omega_3^1\omega_1^3] + [\omega_3^2\omega_2^3] &= 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Первое равенство в этой системе уравнений тождественно выполнено в силу (36), а второе дает одно соотношение

$$-B + Q = 0.$$

Сравнивая это условие с компонентами тензора объемной кривизны, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 2. Тензор кривизны равен нулю тогда и только тогда, когда присоединенное $\Psi^2{}_4$ голономно.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Действительно, дифференцируя внешним образом систему (45) и заменяя dx_1 и dx_2 их значениями из этой же системы, получаем

$$x^1[\omega_1^3\omega_3^1] + x^2[\omega_2^3\omega_3^1] + [\omega^3\omega_3^1] = 0,$$
$$x^1[\omega_1^3\omega_3^2] + x^2[\omega_2^3\omega_3^2] + [\omega^3\omega_3^2] = 0. \tag{58}$$

Так как эти уравнения должны выполняться для любых x^1 и x^2, то

$$[\omega_1^3\omega_3^1] = 0, \quad [\omega_2^3\omega_3^1] = 0, \quad [\omega^3\omega_3^1] = 0,$$
$$[\omega_1^3\omega_3^2] = 0, \quad [\omega_2^3\omega_3^2] = 0, \quad [\omega^3\omega_3^2] = 0. \tag{59}$$

Внося сюда значения форм из (37), получаем

$$A = B = Q = R = 0,$$

т. е. компоненты тензора кривизны (55) равны нулю. Очевидно, обратное также выполняется, и теорема доказана.

Теорема 3. Если двойные точки аффинной нормали совпадают с фокусами конгруэнции нормалей, то или конгруэнция нормалей параболическая, или тензор объемной кривизны равен нулю.

Действительно, если $\boldsymbol{B}_\alpha = \boldsymbol{F}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), то из (43) и (44) следует

$$A(B - Q)^2 = 0.$$

Если $A = 0$, то из (44) видим, что фокусы конгруэнций нормалей совпадают, т. е. конгруэнция — параболическая; если же $B = Q$, то из (56) заключаем, что тензор объемной кривизны равен нулю.

Теорема 4. Тензор кручения тогда и только тогда равен нулю, когда конгруэнция нормалей цилиндрическая, а касательные к асимптотическим линиям поверхности центров делят гармонически направления, определяемые векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Доказательство этой теоремы сразу следует из формул (44), (46) и (54).

§ 6. Некоторые эквиаффинно-инвариантные классы двупараметрических многообразий плоских элементов

1. Класс $N = 0$ характеризуется следующими свойствами:

а. Касательные к асимптотическим линиям огибаемой плоскостями π поверхности делят гармонически направления, определяемые векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

б. Из формул (48) и (51) следует, что характеристическая точка плоскости $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$ совпадает с одним из фокусов конгруэнции $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{e}_1$

в. Вектор η, удовлетворяющий условиям

$$(\eta\boldsymbol{e}_1 d\boldsymbol{e}_1)\big|_{\omega_2^3=0} = (\eta\boldsymbol{e}_2 d\boldsymbol{e}_2)\big|_{\omega_1^3=0} = 0,$$

параллелен плоскости $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$.

г. Из формулы (50) следует, что характеристическая точка плоскости π является двукратным фокусом конгруэнции эллипсов, ассоциированной с двупараметрическим многообразием плоских элементов.

2. Класс $B - Q = 0$ характеризуется тем, что тензор объемной кривизны на этом многообразии равен нулю, т. е. введенная нами связность сохраняет площадь. Как мы показали ранее, при этом присоединенное V^2_3 голономно, а сдвоенные точки аффинной нормали совпадают с фокусами конгруэнции нормали. Произвол существования классов $N = 0$ и $B - Q = 0$, как легко видеть из системы (38), равен двум функциям двух аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3. Класс $A = Q = 0$ характеризуется тем, что поверхность центров линейчатая и ее образующие параллельны аффинной нормали (конгруэнция нормалей вырождается). Характеристическая точка плоскости $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$ расположена на аффинной нормали.

4. Тензор кручения многообразия плоских элементов класса $B = R = 0$ равен нулю. Из формул (48), (51) и (52) следует, что проекция характеристической точки плоскости $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$ на плоскость π параллельно аффинной нормали совпадает с фокусом конгруэнции $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{e}_1$. Конгруэнции $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{e}_m$ $(m = 2, 3)$ — цилиндрические. По теореме 4 § 5 касательные к асимптотическим линиям поверхности центров делят гармонически направления, определяемые векторами $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Произвол существования классов многообразий $A = Q = 0$ и $B = R = 0$ — одна функция двух аргументов.

5. Тензор кривизны равен нулю только на многообразиях плоских элементов класса $A = B = Q = R = 0$. Из теоремы 2 § 5 следует, что присоединенное Ψ^2_4 голономно. Поверхность центров является цилиндром с образующими, параллельными аффинной нормали. Конгруэнция $R = A + \lambda\boldsymbol{e}_2$ — цилиндрическая. Произвол существования такого класса многообразий — одна функция двух аргументов.

6. В заключение этого параграфа поставим задачу: отыскать все многообразия плоских элементов, у которых асимптотические линии поверхности центров и асимптотические линии огибаемой плоскостями π поверхности соответствуют координатным подмногообразиям.

Из уравнений (46) и (47) видим, что это возможно только при

$$A = C = M = P - 1 = 0,$$

причем из (37′) следует, что $R = 3S$.

В дальнейшем будем предполагать, что ни одна из указанных выше поверхностей не вырождается в плоскость, т. е.

$$B \cdot N \neq 0 \tag{61}$$

Внося условия (61) в систему (38), получаем

$$\begin{aligned} dB &= -6BS'\omega^3_1 - 2BN\omega^3_2, \\ dN &= -2NS\omega^3_1 - 2NT\omega^3_2. \end{aligned} \tag{62}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к двум внешним квадратичным уравнениям

$$\begin{aligned} [dS\omega^3_1] &= S(N - T)[\omega^3_1\omega^3_2], \\ [dT\omega^3_2] &= 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Из последних двух уравнений системы (38) с учетом (63) следует, что

$$B = Q,$$

$$[3dS'\omega^3_2] = (3BT - 12S^2 - BN)[\omega^3_1\omega^3_2]. \tag{64}$$

Из (63) и (64) теперь получаем, что

$$3dS = (3BT - 12S^2 - BN)\omega^3_1 + 3S(T - N)\omega^3_2, \tag{65}$$

а дифференцируя это уравнение внешним образом, имеем

$$3B[dT\omega^3_1] = (2BNT - 30S^2T)[\omega^3_1\omega^3_2]. \tag{66}$$

Теперь, учитывая (63), мы приходим к соотношению

$$3BdT = (-2BNT + 30S^2T)\omega^3_2, \tag{67}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

дифференцируя которое внешним образом, получаем конечное соотношение

$$ST(3T - N) = 0. \tag{68}$$

Условие $S = 0$ влечет за собой равенство $3T - N = 0$ и наоборот. Это легко видеть из уравнений (64), (62) и (67). Следовательно, возможны два различных случая:

1. $S = A = C = M = R = 0, \quad P = 1, \quad B = Q, \quad N = 3T;$
2. $T = A = C = M = 0, \quad P = 1, \quad B = Q, \quad R = 3S.$

В обоих случаях произвол решения системы дифференциальных уравнений, описывающих данные классы многообразий, составляет одну постоянную. Оба класса являются многообразиями нулевой объемной кривизны. В первом случае вектор $\boldsymbol{e}_1$ направлен по аффинной нормали поверхности центров. Характеристическая точка плоскости $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$ имеет вид:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{e}_1 - N \cdot B^{-1}\boldsymbol{e}_3,$$

причем $d\boldsymbol{M} = 24\,TB^{-1}\omega_2^3\boldsymbol{e}_3$. Это говорит о том, что семейство плоскостей $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$ огибает кривую, т. е. в каждой точке некоторой кривой, описываемой точкой M, задан пучок плоскостей $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)$, причем ось этого пучка совпадает с касательной к кривой в этой точке.

Геометрическую характеристику второму подклассу многообразий можно дать, применяя теорему Виета к уравнению (41), определяющему фокусы конгруэнции гиперболы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Т. Базылев. К геометрии плоских многомерных сетей. Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. «Уч. зап. Московского госпед. ин-та». М., 1965, 29—37.

2. В. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. VIII Международный конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. Отчет, Казань, 1939, 195—262.

3. М. Б. Исабеков и Г. Е. Варламов. Двупараметрическое многообразие нуль-пар в эквиаффинном пространстве. Геом. сб., вып. 6 («Труды Томского ун-та», 191), 1967, 93—98.

4. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Труды Московского матем. общ-ва», т. 2. М., 1953, 275—383.

5. В. С. Малаховский. Канонический репер конгруэнций центральных кривых 2-го порядка в эквиаффинной геометрии. Геом. сб., вып. 2 («Труды Томского ун-та», 161), 1962, 87—93.

6. T. Mihailescu. Geometrie differentiala proiectiva. Ed. RPR, Bucuresti, 1958.

7. Б. А. Розенфельд. Проективно-дифференциальная геометрия семейств пар $P_m + P_{n-m-1}$ в P_n. Матем. сб., 24 (66), № 3, 1949, 405—428.

8. Ж. Фавар. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИИЛ, М., 1960.

9. С. П. Фиников. Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1958.

10. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

11. Р. Н. Щербаков и М. О. Рахула. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геом. сб., вып. 1 («Тр. Томского ун-та», 160), 1962, 82—89.

12. Р. Н. Щербаков. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

О КОНГУРЕНЦИИ ЭЛЛИПСОВ В ЭКВИАФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. В. АМИШЕВА

Эквиаффинные свойства конгруэнций кривых второго порядка изучались В. С. Малаховским в статьях [3] и [5]. В настоящей статье построен канонический репер, отличный от репера, построенного В. С. Малаховским, и рассмотрены некоторые частные классы конгруэнций эллипсов. Построенный репер позволяет рассмотреть новый частный класс конгруэнций эллипсов.

§ 1. Канонический репер конгруэнции эллипсов

Рассмотрим в трехмерном эквиаффинном пространстве конгруэнцию эллипсов. Деривационные формулы некоторого репера $\{A\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3\}$, присоединенного к конгруэнции эллипсов, запишем в виде:

$$d\bar{A} = \omega^i\bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j\bar{e}_j \ (i, j, k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где ω^i, ω_i^j — дифференциальные формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры:

$$D\omega^i = [\omega^j\omega_j^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k\omega_k^j] \tag{2}$$

и соотношению:

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \tag{3}$$

Поместим начало A репера в центр эллипса, вектор $\bar{e}_1$ направим параллельно прямой AM, где M — характеристическая точка плоскости эллипса, а вектор $\bar{e}_2$ направим по сопряженному с вектором $\bar{e}_1$ относительно эллипса направлению. Тем самым из рассмотрения исключим конгруэнции, у которых центр эллипса — характеристическая точка плоскости эллипса. Векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ нормируем так, что

$$\bar{A}\bar{A}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{A}\bar{A}_2 = \bar{e}_2, \tag{4}$$

где A_1 и A_2 принадлежат конике. Вектор $\bar{e}_3$ направим параллельно линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_1) и (A_2), описываемым соответственно точками A_1 и A_2. При этом нормирование вектора $\bar{e}_3$ вытекает из условия эквиаффинности (3). Итак, канонический репер конгруэнции эллипсов геометрически полностью построен. В качестве независимых форм выберем формы ω^1 и ω^2.

Так как репер канонический, то все формы ω^i, ω_i^j в деривационных формулах (1) — главные. Поэтому можно записать:

$$\omega^3 = C_{0\alpha}^3\omega^\alpha, \quad \omega_\alpha^i = C_{\alpha\beta}^i\omega^\beta, \quad \omega_3^\alpha = C_{3\beta}^\alpha\omega^\beta \ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2), \tag{5}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

причем из геометрической характеристики репера вытекают следующие конечные соотношения:

$$C^3_{01}C^3_{12} - C^3_{11}C^3_{02} = 0 \tag{6}$$

$$(1 + C^1_{11})(1 + C^2_{12}) - C^2_{11}C^1_{12} = 0 \tag{7}$$

$$(1 + C^1_{21})(1 + C^2_{22}) - C^2_{21}C^1_{22} = 0 \tag{8}$$

$$C^3_{21}C^3_{02} - C^3_{01}C^3_{22} \neq 0. \tag{9}$$

При этом уравнения эллипса запишутся в виде:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0.$$

Так как касательная плоскость к поверхности центров определяется векторами $\bar{e}_1 + C^3_{01}\bar{e}_3$ и $\bar{e}_2 + C^3_{02}\bar{e}_3$, то выбором независимых форм исключаем случай, когда касательная плоскость к поверхности центров параллельна вектору $\bar{e}_3$. Продолжение системы дифференциальных уравнений (5) приводит к следующей системе квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned}
&[dC^3_{0\alpha}\omega^\alpha] + C^3_{0\alpha}([\omega^1; C^\alpha_{1\beta}\omega^\beta] + [\omega^2; C^\alpha_{2\beta}\omega^\beta] + [C^3_{0\gamma}\omega^\gamma; C^\alpha_{3\beta}\omega^\beta]) - \\
&- [\omega^1; C^3_{1\beta}\omega^\beta] - [\omega^2; C^3_{2\beta}\omega^\beta] + [C^3_{0\gamma}\omega^\gamma; (C^1_{1\beta} + C^2_{2\beta})\omega^\beta] = 0 \\
&[dC^i_{0\beta}\omega^\beta] + C^i_{\alpha\beta}([\omega^1; C^3_{1\gamma}\omega^\gamma] + [\omega^2; C^3_{2\gamma}\omega^\gamma] + [C^3_{0\gamma}\omega^\gamma; C^3_{3\gamma}\omega^\gamma]) - \\
&- [C^1_{\alpha\beta}\omega^\beta; C^i_{1\gamma}\omega^\gamma] - [C^2_{\alpha\beta}\omega^\beta; C^i_{2\gamma}\omega^\gamma] - [C^3_{0\beta}\omega^\beta; C^i_{3\gamma}\omega^\gamma] = 0 \\
&[dC^\alpha_{3\beta}\omega^\beta] + C^\alpha_{3\beta}([\omega^1; C^3_{1\gamma}\omega^\gamma] + [\omega^2; C^3_{2\gamma}\omega^\gamma]) + [C^3_{0\gamma}\omega^\gamma; C^3_{3\gamma}\omega^\gamma]) - \\
&- [C^1_{3\beta}\omega^\beta; C^\alpha_{1\gamma}\omega^\gamma] - [C^2_{3\beta}\omega^\beta; C^\alpha_{2\gamma}\omega^\gamma] + [(C^1_{1\beta} + C^2_{2\beta})\omega^\beta; C^\alpha_{3\gamma}\omega^\gamma] = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

§ 2. Конгруэнции C

Конгруэнциями C называются такие конгруэнции, для которых $C^1_{11} = -1$, $C^1_{12} = 0$, т. е. точка A_1 является фокусом. Из уравнений (10) следует, что эти конгруэнции определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Теорема. Если $C^3_{02} \neq 0$, то точка A'_1 $(-1, 0, 0)$ является фокусом тогда и только тогда, когда она — характеристическая точка плоскости эллипса.

Доказательство. Пусть точка A'_1 — фокус. Тогда

$$C^3_{12} = C^3_{02}. \tag{11}$$

Из условий (6) и (11) вытекает, что

$$C^3_{01} = C^3_{11} \quad (\text{при } C^3_{02} \neq 0). \tag{12}$$

Так как характеристическая точка плоскости эллипса имеет координаты

$$M\left(\frac{C^3_{21}C^3_{02} - C^3_{01}C^3_{22}}{C^3_{11}C^3_{22} - C^3_{21}C^3_{12}}, 0, 0\right), \text{ то}$$

при условиях (11) и (12) точка M совпадает с точкой A'_1. Пусть теперь A'_1 — характеристическая точка плоскости эллипса. Докажем, что точка A'_1 есть фокус.

Так как точка A'_1 — характеристическая точка плоскости эллипса, то

$$C^3_{21}C^3_{02} - C^3_{01}C^3_{22} = C^3_{21}C^3_{12} - C^3_{11}C^3_{22}. \tag{13}$$

Из условия (6), учитывая $C^3_{02} \neq 0$, находим

$$C^3_{11} = \frac{C^3_{01}C^3_{12}}{C^3_{02}}. \tag{14}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Подставив выражение (14) в (13), получим:

$$(C^3_{02} - C^3_{12})(C^3_{21}C^3_{02} - C^3_{01}C^3_{22}) = 0. \tag{15}$$

Так как характеристическая точка не совпадает с центром эллипса, то $C^3_{21}C^3_{02} - C^3_{01}C^3_{22} \neq 0$. Следовательно, $C^3_{02} = C^3_{12}$. А это и есть условие того, что точка A_1' есть фокус. Теорема доказана.

Конгруэнции C, выделенные дополнительно условиями $C^3_{12} = C^3_{02} = 0$, определяются с произволом трех функций двух аргументов и характеризуются тем, что точка A_1' — фокус, а касательные плоскости к поверхностям (A), (A_1'), (A_1) параллельны одному и тому же вектору $\bar{e}_2$.

§ 3. Конгруэнции A_0 и их подклассы

Конгруэнции A_0 были введены В. С. Малаховским в статье [3]. Так же, как и в [3], находим, что фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции определяются из уравнений:

$$\begin{gathered}(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \qquad x^3 = 0,\\ \omega^1\{C^1_{11}(x^1)^2 + \Gamma_1 x^1 x^2 + C^2_{21}(x^2)^2 + x^1\} +\\ + \omega^2\{C^1_{12}(x^1)^2 + \Gamma_2 x^1 x^2 + C^2_{22}(x^2)^2 + x^2\} = 0\\ C^3_{1\alpha}\omega^\alpha x^1 + C^3_{2\alpha}\omega^\alpha x^2 + C^3_{0\alpha}\omega^\alpha = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\Gamma_1 = C^2_{11} + C^1_{21}, \qquad \Gamma_2 = C^2_{12} + C^1_{22}.$$

Исключив из системы уравнений (16) ω^1, ω^2, получим уравнения для нахождения фокусов конгруэнции эллипсов

$$\begin{gathered}(C^3_{12}x^1 + C^3_{22}x^2 + C^3_{02})\{C^1_{11}(x^1)^2 + \Gamma_1 x^1 x^2 + C^2_{21}(x^2)^2 + x^1\} -\\ - (C^3_{11}x^1 + C^3_{21}x^2 + C^3_{01})\{C^1_{12}(x^1)^2 + \Gamma_2 x^1 x^2 + C^2_{22}(x^2)^2 + x^2\} = 0\\ (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \qquad x^3 = 0.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что точки A_1 и A_2 являются фокусами конгруэнции эллипсов тогда и только тогда, когда:

$$(C^3_{12} + C^3_{02})(C^1_{11} + 1) - (C^3_{11} + C^3_{01})C^1_{12} = 0 \tag{17}$$

$$(C^3_{22} + C^3_{02})C^2_{21} - (C^3_{21} + C^3_{01})(C^2_{22} + 1) = 0. \tag{18}$$

Исключив из рассмотрения случай, когда поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии, будем иметь:

$$(1 + C^2_{12})(C^3_{11} + C^3_{01}) - (C^3_{12} + C^3_{02})C^3_{11} \neq 0 \tag{19}$$

$$(1 + C^1_{21})(C^3_{02} + C^3_{22}) - C^1_{22}(C^3_{01} + C^3_{21}) \neq 0. \tag{20}$$

Поэтому в силу (19) и (20) соотношения (7), (8), (17), (18) дают:

$$C^1_{11} = -1, \quad C^2_{22} = -1, \quad C^1_{12} = 0, \quad C^2_{21} = 0. \tag{21}$$

Соотношения (21) в нашем случае определяют конгруэнцию A_0. Конгруэнция A_0 характеризуется тем, что точки A_1 и A_2 — фокусы, а касательные плоскости к поверхности (A_1) и (A_2) параллельны соответственно координатным плоскостям $(\bar{e}_2\,\bar{e}_3)$ и $(\bar{e}_1\,\bar{e}_3)$. Конгруэнции A_0, выделенные дополнительными соотношениями

$$C^3_{02} \neq 0, \quad C^3_{12} = C^3_{02}, \quad C^3_{21} = C^3_{01},$$

определяются с произволом двух функций двух аргументов и характеризуются тем, что точки A_1, A_2, A_1', A_2' — фокусы, а линия пересече-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ния касательных плоскостей к фокальным поверхностям (A_1') и (A_2') параллельна вектору $\bar{e}_1$. Конгруэнции A_0, выделенные дополнительными соотношениями

$$C_{11}^2 = C_{12}^2 = C_{21}^1 = C_{22}^1 = C_{31}^1 = C_{32}^1 = C_{31}^2 = C_{32}^2 = 0, \qquad (22)$$

назовем конгруэнциями B_1. Они определяются с произволом двух функций двух аргументов и характеризуются тем, что фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в плоскости. При этом конгруэнции прямых, проходящих через точку A и параллельных вектору $\bar{e}_1$ $(\bar{e}_2)$,— цилиндрические, а конгруэнции прямых, проходящих через точку A и параллельных вектору $\bar{e}_3$, вырождаются в связку параллельных прямых. Конгруэнции B_1, выделенные дополнительными к (22) условиями

$$C_{22}^3 = 0, \quad C_{12}^3 = C_{02}^3 \neq 0, \qquad (23)$$

определяются с произволом двух функций одного аргумента и характеризуются тем, что точка A_1' является сдвоенным фокусом конгруэнции эллипсов, одна из асимптотических линий поверхности (A_1') координатная: $\omega^1 = 0$, а аффинная нормаль этой поверхности параллельна плоскости $\{\bar{e}_2\, \bar{e}_3\}$. Рассмотрим конгруэнции A_0, характеризуемые дополнительными условиями

$$C_{12}^3 = C_{02}^3 = 0, \quad C_{01}^3 = 1. \qquad (24)$$

Назовем их конгруэнциями B_2. Конгруэнции B_2 определяются с произволом двух функций двух аргументов и характеризуются тем, что A_1, A_2, A_1' — фокусы, а точка пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A), (A_2), (A_1) имеет координаты B (1, 1, 1). Уравнение асимптотических линий на поверхности центров конгруэнции B_2 имеет вид:

$$(C_{31}^1 - C_{12}^3 - 2)(\omega^1)^2 + (C_{22}^1 + C_{22}^3)(\omega^2)^2 + \\ + (C_{21}^1 + C_{32}^1 - C_{21}^3 - 1)\,\omega^1\omega^2 = 0. \qquad (25)$$

Конгруэнции B_2, определяемые дополнительными условиями

$$C_{31}^1 - C_{12}^3 = 2 \quad C_{22}^1 - C_{22}^3 = 0, \quad C_{21}^1 + C_{32}^1 - C_{21}^3 - 1 \neq 0, \qquad (26)$$

назовем конгруэнциями B_2'. Из (25) следует, что асимптотическими линиями на поверхности центров становятся линии $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$. Аффинная нормаль поверхности (A) задается уравнениями

$$(C_{12}^2 + C_{32}^2)\,x^1 + (1 - C_{32}^1)\,x^2 - (C_{12}^2 + C_{32}^2)\,x^3 = 0 \qquad (27)$$
$$C_{21}^3 x^1 - C_{21}^1 x^3 = 0.$$

Конгруэнции B_2' определяются с произволом шести функций одного аргумента.

Конгруэнции B_2', выделенные дополнительными условиями

$$C_{32}^2 = -C_{12}^2, \quad C_{21}^1 = 0,$$

характеризуются тем, что аффинная нормаль поверхности центров параллельна вектору $\bar{e}_3$, а аффинные центры кривизны и аффинные линии кривизны поверхности (A) находятся из уравнений:

$$\omega^1 + \rho\{(2 + C_{12}^3)\,\omega^1 + (1 - C_{21}^3)\,\omega^2\} = 0$$

$$\omega^2 + \rho\{C_{31}^2\,\omega^1 - C_{12}^2\,\omega^2\} = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Система квадратичных уравнений (10) в последнем случае принимает вид:

$$[dC^2_{11}\omega^1]+[dC^2_{12}\omega^2]+(C^2_{11}C^1_{32}+C^2_{12}+C^2_{11}+C^3_{11}+C^2_{12})[\omega^1\omega^2]=0$$
$$[dC^3_{11}\omega^1]+(C^3_{11}C^1_{32}-C^2_{11}C^1_{22}+C^2_{12}C^3_{21}-C^3_{11})[\omega^1\omega^2]=0$$
$$[dC^1_{22}\omega^2]+\{C^1_{22}(1+C^3_{11})-C^3_{21}C^1_{32}\}[\omega^1\omega^2]=0$$
$$[dC^3_{21}\omega^1]+[dC^1_{22}\omega^2]+\{C^3_{21}(C^1_{32}-2)+C^1_{22}(C^3_{11}+1)\}[\omega^1\omega^2]=0$$
$$[dC^3_{11}\omega^1]+[dC^1_{32}\omega^2]+\{(C^1_{32}+1)C^3_{11}-C^2_{31}C^1_{22}+2\}[\omega^1\omega^2]=0 \quad (28)$$
$$[dC^2_{31}\omega^1]-[dC^2_{12}\omega^2]+\{C^1_{32}(C^1_{32}+2)-C^2_{12}(1+C^3_{11})+C^2_{11}C^1_{32}\}[\omega^1\omega^2]=0$$

и дает три конечных соотношения:

$$C^1_{32}=1-C^3_{21},\quad C^2_{11}C^1_{22}+C^3_{11}C^1_{32}=0,$$
$$C^2_{11}C^1_{22}+C^3_{21}C^2_{12}+C^2_{31}C^1_{22}=0. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что четыре независимых инварианта связаны шестью квадратичными уравнениями. Поэтому, чтобы найти произвол решения, необходимо систему (28) продолжить. Для этого разрешим ее по лемме Картана, используя (29):

$$dC^3_{11}+\alpha_1\omega^2=b_1\omega^1 \quad dC^1_{22}+\alpha_2\omega^1=b_2\omega^2$$
$$dC^2_{11}-\alpha_3\omega^2=b_3\omega^1+b_4\omega^2$$
$$dC^2_{12}=-b_4\omega^1+b_5\omega^2 \quad (30)$$
$$dC^3_{21}+\alpha_6\omega^2=b_6\omega^1 \quad dC^2_{31}+\alpha_7\omega^2=b_7\omega^1,$$

где

$$\alpha_1=C^2_{11}C^1_{22}-C^2_{12}C^3_{21}+C^3_{11}-C^3_{11}C^1_{32}$$
$$\alpha_2=C^1_{22}(1+C^3_{11})-C^3_{21}C^1_{32},\quad \alpha_6=2C^3_{21}(1-C^1_{32}) \quad (31)$$
$$\alpha_3=C^2_{11}(1+C^1_{32})+C^2_{12}(1+C^3_{11})$$
$$\alpha_7=C^2_{12}(2+C^3_{11})-b_4-C^2_{11}(1-C^3_{21})-2C^2_{31}-C^2_{11}$$
$$b_6=2(C^2_{11}C^1_{22}+C^3_{11}+1).$$

Замкнув (30), получим систему квадратичных уравнений:

$$[db_1\omega^1]+b_1C^1_{32}[\omega^1\omega^2]=[d\alpha_1\omega^2]$$
$$[db_2\omega^2]=[d\alpha_2\omega^1]+\alpha_2C^1_{32}[\omega^1\omega^2]$$
$$[db_3\omega^1]+[db_4\omega^2]+b_3C^1_{32}[\omega^1\omega^2]=-[d\alpha_3\omega^2] \quad (32)$$
$$[db_4\omega^1]-[db_5\omega^2]+b_4C^1_{32}[\omega^1\omega^2]=0$$
$$[db_7\omega^1]+b_7C^1_{32}[\omega^1\omega^2]=[d\alpha_7\omega^2]$$

и одно конечное соотношение:

$$2(C^2_{11}C^1_{22}+C^3_{11}+1)+b_2C^2_{11}+C^2_{12}C^3_{21}+C^1_{22}(b_4+C^2_{12}+C^2_{11}+C^3_{11}C^2_{12})+$$
$$+(C^1_{32}-1)(C^1_{22}C^2_{11}+C^3_{11})=0.$$

Из (30), (32), (33) следует, что эти конгруэнции определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М., 1948.
2. С. П. Фиников. Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М., 1950.
3. В. С. Малаховский. Канонический репер конгруэнций центральных кривых второго порядка в эквиаффинной геометрии. Геом. сб., вып. 2 («Труды Томского ун-та», 161), 1962, 87—92.
4. Р. Н. Щербаков. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского ун-та, Томск, 1960.
5. В. С. Малаховский. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии. Геометрический сборник, вып. 2 («Труды Томского ун-та», 161), 1962, 76—86.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

О МНОГООБРАЗИИ $E_n^n\ (0, n+1)$ в A_{n+2}

М. Б. ИСАБЕКОВ

Настоящая работа является обобщением работ [1] и [2] и посвящена построению и геометрической характеристике канонического репера n-параметрического многообразия $E_n^n\ (0, n+1)$ в A_{n+2}, т. е. n-параметрического многообразия, элементом которого является точка M и проходящая через нее гиперплоскость (основная). Число 0 и $(n+1)$ в круглых скобках означают соответственно размерности точки M и основной гиперплоскости, индекс n вверху означает размерность поверхности S_n, описываемой точкой M, а индекс n внизу означает размерность многообразия основных гиперплоскостей.

§ 1. Аналитическое построение канонического репера

Деривационные формулы репера $(M\bar{e}_i)$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} d\bar{M} &= \omega^i \bar{e}_i, \\ d\bar{e}_i &= \omega_i^j \bar{e}_j,\ (i,j,k = 1,2,\ldots,n,n+1,n+2), \end{aligned} \tag{1}$$

где ω^i, ω_i^j — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры эквиаффинного пространства

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^j \omega_j^i], \\ D\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j], \end{aligned} \tag{2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_i^i = 0. \tag{3}$$

Введем следующую систему индексов:

$$\begin{aligned} &i, j, k = 1,2,3,\ldots,n,n+1,n+2; && \alpha,\beta,\gamma,\eta = 1,2,3,\ldots,n, \\ &p, r = 1,2,3,\ldots,n,n+1, && \mu,\nu = n+1, n+2. \\ &s, q = 1,2,3,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Помещая начало подвижного репера в точку M и располагая векторы $\bar{e}_1 \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_{n-1} \bar{e}_{n+1} \bar{e}_{n+2}$ в основной гиперплоскости, имеем

$$\begin{aligned} \delta\bar{M} &= 0, \\ \delta\bar{e}_s &= \pi_s^q \bar{e}_q + \pi_s^\mu \bar{e}_\mu, \\ \delta\bar{e}_\mu &= \pi_\mu^q \bar{e}_q + \pi_\mu^\nu \bar{e}_\nu, \\ \pi^i &= \pi_s^n = \pi_\mu^n = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам, а π^i, π_l^k — формы Пфаффа, зависящие от дифференциалов этих параметров. Так как $\pi^i = \pi_s^n = \pi_\mu^n = 0$, то формы ω^i, ω_s^n, ω_μ^n являются главными. Поскольку мы рассматриваем n-параметрическое многообразие, то из этих $(2n+3)$ форм только n будут независимыми. Формы ω^α — независимые, так как при $|\omega^1\,\omega^2\,\omega^3\,\ldots\,\omega^n| = 0$ размерность поверхности S_n меньше n. Систему дифференциальных уравнений многообразия E_n^n $(0, n+1)$ в A_{n+2} можно записать в виде

$$\begin{aligned}\omega^\mu &= \lambda_\alpha^\mu \omega^\alpha,\\ \omega_s^n &= \lambda_{s\alpha}^n \omega^\alpha,\\ \omega_\mu^n &= \lambda_{\mu\alpha}^n \omega^\alpha.\end{aligned} \tag{5}$$

Из системы (5) обычным способом [3] получаем

$$\delta\lambda_\alpha^\mu = \lambda_\beta^\mu \pi_\alpha^\beta + \lambda_\beta^\mu \lambda_\alpha^\nu \pi_\nu^\beta - \pi_\alpha^\mu - \lambda_\alpha^\nu \pi_\nu^\mu, \tag{6}$$

$$\delta\lambda_{s\alpha}^n = \lambda_{s\beta}^n \pi_\alpha^\beta + \lambda_{s\beta}^n \lambda_\alpha^\mu \pi_\mu^\beta + \lambda_{q\alpha}^n \pi_s^q - \lambda_{s\alpha}^n \pi_n^n + \lambda_{\nu\alpha}^n \pi_s^\nu, \tag{7}$$

$$\delta\lambda_{\mu\alpha}^n = \lambda_{\mu\beta}^n \pi_\alpha^\beta + \lambda_{\mu\beta}^n \lambda_\alpha^\nu \pi_\nu^\beta + \lambda_{q\alpha}^n \pi_\mu^q - \lambda_{\mu\alpha}^n \pi_n^n + \lambda_{\nu\alpha}^n \pi_\mu^\nu. \tag{8}$$

С помощью этих соотношений проведем следующие фиксации:

$$\lambda_\alpha^\mu = 0, \qquad \pi_\alpha^\mu = 0. \tag{9}$$

$$\lambda_{n+1,\alpha}^n = 0, \quad \Delta_1 = \det\|\lambda_{1\alpha}^n \lambda_{2\alpha}^n \cdots \lambda_{n-1,\alpha}^n \lambda_{n+2,\alpha}^n\| \neq 0, \quad \pi_{n+1}^s = \pi_{n+1}^{n+2} = 0. \tag{10}$$

$$\lambda_{n+2,s}^n = 0, \quad \Delta_2 = \det\|\lambda_{qs}^n\| \neq 0, \qquad \pi_{n+2}^s = 0. \tag{11}$$

$$\lambda_{n+2,n}^n = -1, \qquad \pi_{n+2}^{n+2} = 0. \tag{12}$$

Тогда формы ω_α^μ, ω_μ^s, ω_{n+1}^{n+2} становятся главными, т. е. можно положить:

$$\begin{aligned}\omega_\beta^\mu &= \lambda_{\beta\alpha}^\mu \omega^\alpha,\\ \omega_\mu^s &= \lambda_{\mu\alpha}^s \omega^\alpha,\\ \omega_{n+1}^{n+2} &= \lambda_{n+1,\alpha}^{n+2} \omega^\alpha.\end{aligned} \tag{13}$$

Из (5) в силу (9) — (12) имеем

$$\begin{aligned}\omega^\mu &= 0,\\ \omega_{n+1}^n &= 0,\\ \omega^n + \omega_{n+2}^n &= 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) и (14) обычным способом находим

$$\delta\lambda_{\beta\alpha}^\mu = \lambda_{\beta\gamma}^\mu \pi_\alpha^\gamma + \lambda_{\gamma\alpha}^\mu \pi_\beta^\gamma - \lambda_{\beta\alpha}^\nu \pi_\nu^\mu, \tag{15}$$

$$\delta\lambda_{\mu\alpha}^s = \lambda_{\mu\beta}^s \pi_\alpha^\beta - \lambda_{\mu\alpha}^q \pi_q^s - \lambda_{\mu\alpha}^n \pi_n^n + \lambda_{\nu\alpha}^s \pi_\mu^\nu, \tag{16}$$

$$\delta\lambda_{n+1,\alpha}^{n+2} = \lambda_{n+1,\beta}^{n+2} \pi_\alpha^\beta - \lambda_{n+1,\alpha}^s \pi_s^{n+2} + \lambda_{n\alpha}^{n+2} \pi_{n+1}^n + \lambda_{n+1,\alpha}^{n+2} \pi_{n+1}^{n+1}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_{\alpha\beta}^\mu = \lambda_{\beta\alpha}^\mu,\\ &\lambda_{n+1,q}^s \lambda_{sE_q^*}^n - \lambda_{n+1,E_q^*}^s \lambda_{sq}^n + \delta_{E_q^*}^n \lambda_{n+1,q}^{n+2} = 0,\\ &\lambda_{n+2,E_q^*}^s \lambda_{sq}^n - \lambda_{n+2,q}^s \lambda_{sE_q^*}^n + \delta_{E_q^*}^n (2\lambda_{rq}^n + \lambda_{n+2,q}^{n+2}) = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$E_q^* = E_s + q, \quad E_s = 1, 2, 3, \ldots, (n-q).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}A_0 &= \det\|\lambda_{\beta\alpha}^{n+2}\|,\\ A_1 &= \det\|\lambda_{1\alpha}^{n+1} \lambda_{2\alpha}^{n+2} \ldots \lambda_{n\alpha}^{n+2}\| + \det\|\lambda_{1\alpha}^{n+2} \lambda_{2\alpha}^{n+1} \lambda_{3\alpha}^{n+2} \ldots \lambda_{n\alpha}^{n+2}\| + \ldots\\ &\quad \ldots + \det\|\lambda_{1\alpha}^{n+2} \ldots \lambda_{n-1,\alpha}^{n+2} \lambda_{n\alpha}^{n+1}\|.\end{aligned} \tag{19}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда с учетом (15) находим

$$\delta A_1 = (\pi_1^1 + \pi_2^2 + \cdots + \pi_{n-1}^{n-1} + (n-1)\,\pi_{n+2}^{n+2} - \pi_{n+1}^{n+1})\,A_1 - n\pi_{n+2}^{n+1} A_0,$$

что дает возможность провести следующую фиксацию

$$A_1 = 0, \qquad A_0 \neq 0 \qquad \pi_{n+2}^{n+1} = 0. \tag{20}$$

Теперь форма ω_{n+2}^{n+1} — главная и можно положить

$$\omega_{n+2}^{n+1} = \lambda_{n+2,\alpha}^{n+1}\omega^\alpha. \tag{21}$$

Отсюда обычным способом находим

$$\delta\lambda_{n+2,\alpha}^{n+1} = \lambda_{n+2,\beta}^{n+1}\pi_\alpha^\beta - (\pi_{n+1}^{n+1} - \pi_{n+2}^{n+2})\,\lambda_{n+2,\alpha}^{n+1} + \lambda_{\beta\alpha}^{n+1}\pi_{n+2}^\beta. \tag{22}$$

С помощью соотношений (15) проведем следующую фиксацию

$$\lambda_{sq}^{n+1} = \lambda_{qs}^{n+2} = 0, \quad \Delta_{sq} = \lambda_{ss}^{n+1}\lambda_{qq}^{n+2} - \lambda_{qq}^{n+1}\lambda_{ss}^{n+2} \neq 0, \quad \pi_s^q = \pi_q^s = 0, \quad (s \neq q). \tag{23}$$

Теперь формы ω_s^q — главные и можно положить

$$\omega_s^q = \lambda_{s\alpha}^q\omega^\alpha. \tag{24}$$

Отсюда обычным путем находим

$$\delta\lambda_{s\alpha}^q = \lambda_{s\beta}^q\pi_\alpha^\beta + \lambda_{\beta\alpha}^q\pi_s^\beta - \lambda_{s\alpha}^\mu\pi_\mu^q. \tag{25}$$

С помощью соотношений (15) произведем следующую фиксацию

$$\lambda_{ns}^{n+2} = 0, \quad \Delta_3 = \det\|\lambda_{qs}^{n+2}\| \neq 0, \quad \pi_n^s = 0. \tag{26}$$

Теперь формы ω_n^s — главные и можно положить

$$\omega_n^s = \lambda_{n\alpha}^s\omega^\alpha. \tag{27}$$

Отсюда находим

$$\delta\lambda_{n\alpha}^s = \lambda_{n\beta}^s\pi_\alpha^\beta - \lambda_{n\alpha}^q\pi_q^s + \lambda_{n\alpha}^s\pi_n^n - \lambda_{n\alpha}^\mu\pi_\mu^s. \tag{28}$$

Пользуясь соотношениями (7) и (28), проводим, наконец, следующую последнюю фиксацию

$$\lambda_{s1}^n = -1, \quad \pi_s^s = 0 \quad \text{(по } s \text{ не суммировать)}. \tag{29}$$

$$\lambda_{n1}^1 = -1, \quad \pi_n^n = 0. \tag{30}$$

Таким образом, канонический репер многообразия $E_n^n\ (0, n+1)$ в A_{n+2} аналитически построен. Деривационные формулы построенного канонического репера принимают вид:

$$\begin{aligned} d\bar{M} &= \omega^\alpha\bar{e}_\alpha, \\ d\bar{e}_i &= \omega_i^j\bar{e}_j = \lambda_{i\alpha}^j\omega^\alpha\bar{e}_j, \end{aligned} \tag{31}$$

где величины $\lambda_{i\alpha}^j$ удовлетворяют соотношениям (18) и

$$\begin{aligned} &\lambda_{n+1,\alpha}^n = 0, \quad \lambda_{n+2,s}^n = 0, \qquad \lambda_{n+2,n}^n = -1, \\ &A_1 = 0, \qquad \lambda_{sq}^{n+1} = \lambda_{qs}^{n+2} = 0, \ \lambda_{ns}^{n+2} = 0, \ \lambda_{s1}^n = -1, \ \lambda_{n1}^1 = -1. \end{aligned} \tag{32}$$

§ 2. Геометрическая характеристика элементов канонического репера

Найдем касательную n-плоскость к n-поверхности в точке M. Из

$$d\bar{M} = \omega^\alpha\bar{e}_\alpha \tag{33}$$

следует, что при фиксации (9) векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ помещены в каса-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

тельную n-плоскость к S_n в точке M. При этом мы предполагаем, что касательная n-плоскость $L_n = (M\bar{e}_1\bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$ к поверхности S_n не принадлежит основной гиперплоскости. Случай, когда касательная n-плоскость к поверхности S_n принадлежит основной гиперплоскости, рассматривается ниже (см. § 3). Касательная n-плоскость $L_n = (M\bar{e}_1\bar{e}_2 \dots \bar{e}_n)$ к S_n и основная гиперплоскость пересекаются по $(n-1)$-плоскости $L_{n-1} = (M\bar{e}_1\bar{e}_2 \dots \bar{e}_{n-1})$. Эту $(n-1)$-плоскость назовем основной $(n-1)$-плоскостью. Для выяснения геометрического смысла фиксации (10) найдем характеристический элемент основной гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2 \dots \bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$, т. е. элемент огибающей n-параметрического многообразия основных гиперплоскостей. Пусть

$$\bar{R} = \bar{M} + x^s\bar{e}_s + x^\mu\bar{e}_\mu, \tag{34}$$

— радиус-вектор точки характеристического элемента основной гиперплоскости. Тогда из

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 \dots \bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2}) = 0, \tag{35}$$

при любых ω^α, т. е. с учетом (1), (5) имеем

$$x^s\lambda^n_{sq} + x^{n+2}\lambda^n_{n+2,q} = 0, \tag{36}$$

$$x^s\lambda^n_{sn} + x^{n+2}\lambda^n_{n+2,n} = -1.$$

Так как $\Delta_1 = \det\|\lambda^n_{1\alpha}\lambda^n_{2\alpha}\cdots\lambda^n_{n-1,\alpha}\lambda^n_{n+2,\alpha}\| \neq 0$, то радиус-вектор характеристического элемента основной гиперплоскости имеет вид:

$$\bar{R} = \bar{M} + B^s\bar{e}_s + B^{n+2}\bar{e}_{n+2} + x^{n+1}\bar{e}_{n+1}, \tag{37'}$$

где B^s, B^{n+2} решения системы (36), т. е. в общем случае является прямой. При этом из рассмотрения исключается случай $\Delta_1 = 0$, когда характеристическим элементом основной гиперплоскости является не прямая, а по крайней мере 2-плоскость. Следовательно, при фиксации (10) вектор $\bar{e}_{n+1}$ параллелен характеристическому элементу основной гиперплоскости.

Рассмотрим неголономное [4] подмногообразие $\omega^n = 0$, которое назовем основным. Из (33) следует, что это неголономное подмногообразие представляет собой совокупность всех одномерных подмногообразий, при смещении вдоль которых точка M описывает на n-поверхности S_n линии с касательными, лежащими в основной $(n-1)$-плоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2 \dots \bar{e}_{n-1})$.

Покажем, что линейным подпространством H основной гиперплоскости, первая дифференциальная окрестность которого при любом смещении по основному подмногообразию не выходит из основной гиперплоскости, является некоторая 2-плоскость. Пусть

$$\bar{R} = \bar{M} + x^s\bar{e}_s + x^\mu\bar{e}_\mu, \tag{37}$$

радиус-вектор точки, описывающей линейное подпространство H. Тогда из

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2 \cdots \bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})\big|_{\omega^n=0} = 0, \tag{38}$$

получаем

$$x^s\lambda^n_{sq} + x^\mu\lambda^n_{\mu q} = 0. \tag{39}$$

Откуда в силу (11) находим, что $x^s = 0$. Это означает, что радиус-вектор $\bar{R}$ точки, описывающей линейное подпространство H, запишется в виде

$$\bar{R} = \bar{M} + x^{n+1}\bar{e}_{n+1} + x^{n+2}\bar{e}_{n+2},$$

т. е. H является 2-плоскость $(M\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$. Таким образом, фиксация (11) характеризуется тем, что 2-плоскость $(M\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$ является ли-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нейным подпространством H. Из (39) следует, что при фиксации (11) из рассмотрения исключается случай $\Delta_2 = 0$, когда линейным подпространством H является по крайней мере 3-плоскость. Из (34), (36) и (12) следует, что радиус-вектор точки, описывающей характеристический элемент основной гиперплоскости, имеет вид

$$\bar{R} = \bar{M} - \frac{1}{\lambda^n_{n+2,n}}\bar{e}_{n+2} + x^{n+1}\bar{e}_{n+1}. \tag{40}$$

Отсюда следует, что при фиксации (12) из рассмотрения исключается случай $\lambda^n_{n+2,n} = 0$, когда характеристический элемент основной гиперплоскости, расположенный в 2-плоскости $(M\bar{e}_{n+1}\ \bar{e}_{n+2})$, является несобственной прямой. Из (40) замечаем, что при нормировании (12) прямая $(M\bar{e}_{n+2})$ пересекает характеристический элемент основной гиперплоскости в точке $\bar{R} = \bar{M} + \bar{e}_{n+2}$.

Как известно [5], линия на поверхности S_n, вдоль которой семейство касательных n-плоскостей $L_n = (M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n)$ к поверхности S_n в точке M является фокальным порядка $(n-1)$, называется фокальной линией, а гиперплоскость пространства A_{n+2}, содержащая n-плоскость и бесконечно близкую к ней вдоль фокальной линии, называется фокальной гиперплоскостью [6]. Для того, чтобы выяснить геометрический смысл фиксации (20), найдем фокальные линии поверхности S_n и соответствующие им фокальные гиперплоскости. Пусть

$$\Gamma = (M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n, \bar{e}_{n+2} - t\bar{e}_{n+1}) \tag{41}$$

произвольная гиперплоскость, проходящая через касательную n-плоскость L_n, а

$$\bar{R} = \bar{M} + x^\alpha\bar{e}_\alpha \tag{42}$$

точка n-плоскости L_n.

Если Γ — фокальная гиперплоскость, то

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2\cdots\bar{e}_n, \bar{e}_{n+2} - t\bar{e}_{n+1}) = 0. \tag{43}$$

Отсюда получаем

$$(\omega_\alpha^{n+1} + t\omega_\alpha^{n+2})\,x^\alpha = 0. \tag{44}$$

Так как x^α произвольны, то

$$(\lambda_{\cdot\alpha}^{n+1} + t\lambda_{\cdot\alpha}^{n+2})\,\omega^\alpha = 0. \tag{45}$$

Эта система имеет нетривиальное решение относительно ω^α тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. когда

$$A_0t^n + A_1t^{n-1} + A_2t^{n-2} + \cdots + A_{n-1}t + A_n = 0, \tag{46}$$

где A_0 и A_1 определяются по формулам (19), а выражения других коэффициентов $A_2, A_3, \ldots, A_n$ для нас не существенны. Из (46) следует, что в общем случае через каждую точку поверхности S_n проходит n-фокальных гиперплоскостей

$$\Gamma_\alpha = (M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n, \bar{e}_{n+2} - t\bar{e}_{n+1}), \tag{47}$$

где t_α — корни уравнения (46). Следовательно, при фиксации (20) гиперплоскость

$$\Gamma_{n+2} = (M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+2}) \tag{48}$$

выбирается так, что $w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1} + 1 = 0$, (49)

где

$$w_s = \frac{t_{s+1}}{t_1} = DV(\Gamma_{n+2}\Gamma_{n+1}\Gamma_{s+1}\Gamma_1),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а гиперплоскость $\Gamma_{n+1} = (M\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 \ldots \bar{e}_n\bar{e}_{n+1})$ проходит через касательную n-плоскость L_n и прямую $(M\bar{e}_{n+1})$. Из (47) в силу (46) следует, что при фиксации (20) из рассмотрения исключается случай $A_0 = 0$, когда гиперплоскость $(M\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n\bar{e}_{n+1})$ является фокальной. Заметим, что n-плоскость $(M\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+2})$ характеризуется тем, что она принадлежит одновременно основной гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$ и гиперплоскости Γ_{n+2}, а вектор $\bar{e}_{n+2}$ характеризуется тем, что он параллелен прямой пересечения 2-плоскости $(M\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$ с n-плоскостью $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3 \ldots \bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+2})$.

Одномерное подмногообразие, принадлежащее основному подмногообразию $\omega^n = 0$, назовем главным, если при смещении вдоль него первая дифференциальная окрестность основной $(n-1)$-плоскости принадлежит некоторой гиперплоскости, проходящей через касательную n-плоскость. Эту гиперплоскость назовем главной гиперплоскостью, соответствующей основному подмногообразию $\omega^n = 0$. Линию, описываемую точкой M при смещении по главному подмногообразию, назовем главной линией поверхности S_n. Для геометрической характеристики фиксации (23) найдем главные линии поверхности S_n. Пусть

$$\bar{R} = \bar{M} + x^s\bar{e}_s \tag{50}$$

— точка $(n-1)$-плоскости L_{n-1}, принадлежащей гиперплоскости (41) вдоль подмногообразий $\omega^n = 0$, тогда

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n, \bar{e}_{n+2} - t\bar{e}_{n+1})|_{\omega^n=0} = 0. \tag{51}$$

Отсюда в силу произвольности x^s получаем

$$(\lambda_{s\alpha}^{n+1} + t\lambda_{s\alpha}^{n+2})\,\omega^\alpha|_{\omega^n=0} = 0. \tag{52}$$

Эта система будет иметь нетривиальное решение относительно ω^q тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, что в силу (23) запишется в виде

$$(\lambda_{11}^{n+1} + t\lambda_{11}^{n+2})(\lambda_{22}^{n+1} + t\lambda_{22}^{n+2}) \cdots (\lambda_{n-1,n-1}^{n+1} + t\lambda_{n-1,n-1}^{n+2}) = 0. \tag{53}$$

Из (52) в силу (23) следует, что через каждую точку M поверхности S_n проходит $(n-1)$ главных линий $\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^{s-1} = \omega^{s+1} = \ldots = \omega^n = 0$ и соответствующих им $(n-1)$ главных гиперплоскостей

$$\Gamma_s = (M\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n, \lambda_{ss}^{n+1}\bar{e}_{n+2} + \lambda_{ss}^{n+2}\bar{e}_{n+1}).$$

Следовательно, при фиксации (23) координатные линии поверхности S_n кроме линии, касающейся $\bar{e}_n$, являются главными линиями. При этом из рассмотрения исключается случай $\lambda_{ss}^{n+1}\lambda_{qq}^{n+2} - \lambda_{qq}^{n+1}\lambda_{ss}^{n+2} = 0$, когда две или более главные гиперплоскости совпадают.

Найдем характеристический элемент [7] касательной n-плоскости L_n относительно гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n\bar{e}_{n+1})$ при $\omega^n = 0$. Пусть

$$\bar{R} = \bar{M} + x^\alpha\bar{e}_\alpha \tag{54}$$

— радиус-вектор точки, описывающей искомый характеристический элемент; тогда из

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n\bar{e}_{n+1})|_{\omega^n=0} = 0,$$

в силу (13) имеем

$$x^s\lambda_{sq}^{n+2} = 0. \tag{55}$$

Так как $\Delta_3 \neq 0$, то $x^s = 0$. Следовательно,

$$\bar{R} = \bar{M} + x^n\bar{e}_n,$$

и фиксация (26) характеризуется тем, что вектор $\bar{e}_n$ параллелен ха-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

рактеристическому элементу касательной n-плоскости L_n относительно гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1})$ при $\omega^n=0$. При этом из рассмотрения исключается случай $\Delta_3=0$, когда характеристическим элементом касательной n-плоскости L_n является по крайней мере 2-плоскость. Для геометрической характеристики фиксации (29) и (30) найдем псевдофокусы [8] прямых $l_\alpha=(M\bar{e}_\alpha)$. Известно, что точка $\bar{F}_\alpha^\beta=\bar{M}+x_\alpha^\beta\bar{e}_\alpha$ называется псевдофокусом прямой l_α, если при смещении $\omega^1=\omega^2=\cdots$ $\cdots=\omega^{\beta-1}=\omega^{\beta+1}=\cdots=\omega^n=0$ эта точка описывает линию с касательной, принадлежащей гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_{\beta-1}\bar{e}_{\beta+1}\ldots\bar{e}_{n+2})$. Пусть

$$\bar{F}_s^n=\bar{M}+x_s^n\bar{e}_s$$
$$\bar{F}_n^1=\bar{M}+x_n^1\bar{e}_n \tag{56}$$

псевдофокусы прямых l_s и l_n соответственно. Тогда $(d\bar{F}_s^n\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_{n-1},$ $\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})=0$ при $\omega^1=\omega^2=\cdots=\omega^{n-1}=0$, $(dF_n^1\bar{e}_2\bar{e}_3\ldots\bar{e}_{n-1}\bar{e}_n,$ $\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})=0$ при $\omega^2=\omega^3=\cdots=\omega^n=0$.

Отсюда в силу (29), (30) находим

$$x_s^n=1,\quad x_n^1=1.$$

Каждый из векторов $\bar{e}_s$, $\bar{e}_n$ нормирован так, что псевдофокусы $\bar{F}_s^n=$ $=\bar{M}+\bar{e}_s$, $\bar{F}_n^1=\bar{M}+\bar{e}_1$ соответственно при смещениях $\omega^1=\omega^2=\cdots$ $\cdots=\omega^{n-1}=0$, $\omega^2=\omega^3=\cdots=\omega^n=0$ описывают линии с касательными, параллельными соответственно основным гиперплоскостям $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3\ldots$ $\ldots\bar{e}_{n-1}\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$ и $(M\bar{e}_2\bar{e}_3\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2})$. При фиксации (29), (30) из рассмотрения исключается случай $\lambda_{s1}^n=0$, $\lambda_{n1}^1=0$, когда соответствующие псевдофокусы F_s^n, F_n^1 совпадают с точкой M.

Таким образом, все элементы канонического репера многообразия $E_n^n(0,n+1)$ в A_{n+2} геометрически охарактеризованы.

§ 3. Об одном эквиаффинно инвариантном классе многообразий $E_n^n(0,n+1)$

В этом параграфе будем рассматривать частный класс многообразий $E_n^n(0,n+1)$, который был исключен нами в § 1. Поместим начало репера в точку M и расположим векторы $\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1}$ в основной гиперплоскости, а векторы $\bar{e}_\alpha$ — в касательной n-плоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3\ldots$ $\ldots\bar{e}_n)$ к n-поверхности S_n, описываемой точкой M. Тогда, выбирая формы ω^α за независимые, систему дифференциальных уравнений рассматриваемого класса многообразий можно записать в виде

$$\omega^\mu=0,$$
$$\omega_\beta^\mu=\lambda_{\beta\alpha}^\mu\omega^\alpha, \tag{57}$$
$$\omega_{n+1}^{n+2}=\lambda_{n+1,\alpha}^{n+2}\omega^\alpha.$$

Здесь величины $\lambda_{\beta\alpha}^\mu$ симметричны по α и β. Из системы (57) обычным способом получаем

$$\delta\lambda_{\beta\alpha}^\mu=\lambda_{\beta\gamma}^\mu\pi_\alpha^\gamma+\lambda_{\gamma\alpha}^\mu\pi_\beta^\gamma-\lambda_{\beta\alpha}^\nu\pi_\nu^\mu, \tag{58}$$
$$\delta\lambda_{n+1,\alpha}^{n+2}=\lambda_{n+1,\beta}^{n+2}\pi_\alpha^\beta+\lambda_{\beta\alpha}^{n+2}\pi_{n+1}^\beta+\lambda_{n+1,\alpha}^{n+2}(\pi_{n+1}^{n+1}+\pi_{n+2}^{n+2}). \tag{59}$$

Пользуясь соотношениями (59), проведем следующую фиксацию:

$$\lambda_{n+1,\alpha}^{n+2}=0,\quad \Delta_4=\det\|\lambda_{\beta\alpha}^{n+2}\|\neq 0,\quad \pi_{n+1}^\beta=0. \tag{60}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как теперь формы $\omega^{\beta}_{\prime+1}$ — главные, то можно положить

$$\omega^{\beta}_{n+1} = \lambda^{\beta}_{n+1,\alpha}\omega^{\alpha}. \tag{61}$$

Обычным способом находим

$$\delta\lambda^{\beta}_{n+1,\alpha} = \lambda^{\beta}_{n+1,\gamma}\pi^{\gamma}_{\alpha} - \lambda^{\beta}_{n+1,\alpha}\pi^{n+2}_{\beta} + \lambda^{\beta}_{n\alpha}\pi^{n}_{n+1} + \lambda^{\beta}_{n+1,\alpha}\pi^{n+1}_{n+1} - \lambda^{n+2}_{n+1,\alpha}\pi^{\beta}_{n+2}. \tag{62}$$

Обозначим

$$A_0 = \det\|\lambda^{n+2}_{\beta\alpha}\|$$

$$A_1 = \det\|\lambda^{n+1}_{1\alpha}\lambda^{n+2}_{2\alpha}\ldots\lambda^{n+2}_{n\alpha}\| + \det\|\lambda^{n+2}_{1\alpha}\lambda^{n+1}_{2\alpha}\lambda^{n+2}_{3\alpha}\ldots\lambda^{n+2}_{n\alpha}\| + \ldots + \det\|\lambda^{n+2}_{1\alpha}\ldots\lambda^{n+2}_{n-1,\alpha}\lambda^{n+1}_{n\alpha}\|.$$

Учитывая (58), находим

$$\delta A_1 = (\pi^1_1 + \pi^2_2 + \ldots + \pi^{n-1}_{n-1} + (n-1)\pi^{n+2}_{n+2} - \pi^{n+1}_{n+1})A_1 - n\pi^{n+1}_{n+2}A_0,$$

что дает возможность произвести следующую фиксацию:

$$A_1 = 0, \quad A_0 \neq 0 \quad \pi^{n+1}_{n+2} = 0. \tag{63}$$

Так как теперь форма ω^{n+1}_{n+2} — главная, то можно положить

$$\omega^{n+1}_{n+2} = \lambda^{n+1}_{n+2,\alpha}\omega^{\alpha}.$$

Отсюда обычным способом находим

$$\delta\lambda^{n+1}_{n+2,\alpha} = \lambda^{n+1}_{n+2,\beta}\pi^{\beta}_{\alpha} - (\pi^{n+1}_{n+1} - \pi^{n+2}_{n+2})\lambda^{n+1}_{n+2,\alpha} + \lambda^{n+1}_{\beta\alpha}\pi^{\beta}_{n+2}. \tag{64}$$

С помощью соотношения (64) проводим следующую фиксацию:

$$\lambda^{n+1}_{n+2,\alpha} = 0, \quad \Delta_5 = \det\|\lambda^{n+1}_{\beta\alpha}\| \neq 0 \quad \pi^{\beta}_{n+2} = 0. \tag{65}$$

Так как теперь и формы ω^{β}_{n+2} — главные, то можно положить

$$\omega^{\beta}_{n+2} = \lambda^{\beta}_{n+2,\alpha}\omega^{\alpha}. \tag{66}$$

Дифференцируя (66) внешним образом, обычным способом находим

$$\delta\lambda^{\beta}_{n+2,\alpha} = \lambda^{\beta}_{n+2,\gamma}\pi^{\gamma}_{\alpha} - \lambda^{\gamma}_{n+2,\alpha}\pi^{\beta}_{\gamma} + \lambda^{n}_{n+2,\alpha}\pi^{\beta}_{n} + \lambda^{\beta}_{n+2,\alpha}\pi^{n+2}_{n+2}.$$

С помощью соотношения (58) проводим следующую фиксацию:

$$\lambda^{n+1}_{\alpha\beta} = \lambda^{n+2}_{\alpha\beta} = 0, \quad \Delta^{*}_{\alpha\beta} = \lambda^{n+1}_{\alpha\alpha}\lambda^{n+2}_{\beta\beta} - \lambda^{n+2}_{\alpha\alpha}\lambda^{n+1}_{\beta\beta} \neq 0, \quad \pi^{\beta}_{\alpha} = \pi^{\alpha}_{\beta} = 0, (\alpha \neq \beta). \tag{67}$$

Теперь формы ω^{β}_{α} — главные, и можно записать

$$\omega^{\beta}_{\alpha} = \lambda^{\beta}_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}. \quad (\alpha \neq \beta) \tag{68}$$

Отсюда обычным способом находим

$$\delta\lambda^{\beta}_{\alpha\gamma} = \lambda^{\beta}_{\alpha\eta}\pi^{\eta}_{\gamma} + \lambda^{\beta}_{\eta\gamma}\pi^{\eta}_{\alpha} - \lambda^{n+1}_{\alpha\gamma}\pi^{\beta}_{n+1} + \lambda^{\beta}_{n+2,\gamma}\pi^{n+2}_{\alpha}. \tag{69}$$

Пользуясь соотношениями (62) и (69), проведем фиксацию

$$\lambda^{n}_{s1} = -1, \quad \pi^{s}_{s} = 0 \quad (\text{по } s \text{ — не суммировать})$$
$$\lambda^{1}_{n1} = -1, \quad \pi^{n}_{n} = 0, \tag{70}$$
$$\lambda^{1}_{n+1,1} = -1, \pi^{n+1}_{n+1} = 0.$$

Таким образом, канонический репер рассматриваемого многообразия аналитически построен.

Для выяснения геометрического смысла фиксации (60) найдем характеристический элемент основной гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1})$. Пусть

$$\bar{R} = M + x^p\bar{e}_p, \tag{71}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

— радиус-вектор точки характеристического элемента основной гиперплоскости. Тогда из

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1}) = 0, \tag{72}$$

учитывая (57), получаем

$$x^\beta\lambda_{\beta\alpha}^{n+2} = 0. \tag{73}$$

Так как $\Delta_4 = \det\|\lambda_{\beta\alpha}^{n+2}\| \neq 0$, то $x^\beta = 0$ и из (71) получаем

$$\bar{R} = \bar{M} + x^{n+1}\bar{e}_{n+1}. \tag{74}$$

Отсюда следует, что характеристический элемент основной гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1})$ является прямой, параллельной вектору $\bar{e}_{n+1}$. Из рассмотрения исключается случай $\Delta_4 = 0$, когда характеристический элемент не одномерен. Для выяснения геометрического смысла фиксации (63), т. е. выбора координатной гиперплоскости

$$\Gamma_{n+2} = (M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+2}) \tag{75}$$

проводим рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в § 2 при фиксации (20).

Для выяснения геометрического смысла фиксации (65) найдем характеристический элемент гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+2})$. Обозначим через

$$\bar{R} = \bar{M} + x^\alpha\bar{e}_\alpha + x^{n+2}\bar{e}_{n+2} \tag{76}$$

радиус-вектор точки характеристического элемента. Так как условие

$$(d\bar{R}\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+2}) = 0, \tag{77}$$

должно выполняться при любых ω^α, то

$$x^\alpha\lambda_{\alpha\beta}^{n+1} = 0. \tag{78}$$

Так как $\Delta_5 = \det\|\lambda_{\alpha\beta}^{n+1}\| \neq 0$, то $x^\alpha = 0$ и радиус-вектор точки характеристического элемента (76) принимает вид

$$\bar{R} = \bar{M} + x^{n+2}\bar{e}_{n+2}. \tag{79}$$

Следовательно, геометрический смысл фиксации (65) состоит в том, что характеристический элемент гиперплоскости $(M\bar{e}_1\bar{e}_2\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+2})$ является прямой, параллельной вектору $\bar{e}_{n+2}$.

Из рассмотрения исключается случай $\Delta_5 = 0$, когда характеристический элемент не одномерен. Так же, как и в [7], показывается, что при фиксации (67) координатные линии n-поверхности S_n являются фокальными с касательными, параллельными векторам $\bar{e}_\alpha$.

При этом из рассмотрения исключаются случаи $\Delta_{\alpha\beta}^* = 0$, когда две или более главные гиперплоскости Γ_α совпадают.

Геометрическая характеристика нормирования векторов аналогична характеристике, полученной в § 2, а геометрическая характеристика нормирования вектора $\bar{e}_{n+2}$ вытекает из условия эквиаффинности $(\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3\ldots\bar{e}_n\bar{e}_{n+1}\bar{e}_{n+2}) = 1$.

Таким образом, все элементы канонического репера рассматриваемого частного класса многообразий геометрически охарактеризованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Исабеков. О многообразии $E^3_3(0,4)$ в A_5. «Труды физмата Киргосуниверситета», 1966.

2. М. Б. Исабеков. О некотором эквиаффинно-инвариантном классе многообразий $E^3_3(0,4)$ в A_5. Сб. тр. аспирантов Фрунзенского политехнического института. вып. 3, Фрунзе, 1966.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

4. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Геометрический сб., вып. 6 («Труды Томского ун-та», 191), 1967, 171—194.

5. Р. М. Гейдельман. К теории семейств плоскостей в неевклидовых пространствах. Изв. вузов, Математика, № 3 (10), 1959, 30—42.

6. Е. Т. Ивлев и А. А. Лучинин. О полярном соответствии относительно алгебраической гиперповерхности и его приложениях. Геом. сб., вып. 7 («Труды Томского ун-та», 196), 1968, 23—34.

7. Е. Т. Ивлев. О перепаже систем неголономных подмногообразий трехмерной поверхности в P_5. Геометрический сб., вып. 6 («Труды Томского ун-та», 191), 1967, 5—12.

8. В. Т. Базылев. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства. Изв. вузов, Математика, 2 (51), 1966, 9—19.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

О ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В. П. ДОЛГОВЫХ

Векторным полем мы называем [1] геометрический образ Φ_3 [2], элементом которого является пара точек A и B. В работе рассматриваются триортогональные системы векторных полей, а также триортогональная система, порожденная векторным полем $\{\bar{V}_1\}$ и состоящая из поля $\{\bar{V}_1\}$, поля ускорений и поля вихрей. Доказывается, что такую триортогональную систему порождают дважды голономные [1] векторные поля с изотахейными векторными линиями. Рассмотрение ведется в трехмерном евклидовом пространстве. Все индексы изменяются от 1 до 3.

§ 1. Триортогональная система векторных полей. Геометрическая характеристика инвариантов

Определение. Систему трех взаимно ортогональных векторных полей $\{\bar{V}_i\}=\{\overline{AB}_i\}$ назовем системой T.

Поместив начало репера в точку A и направив единичные векторы $\bar{e}_i$ по векторам V_i, получим

$$\bar{V}_i = v_i \bar{e}_i \qquad \text{(по } i \text{ не суммировать!)}$$

$$\bar{B}_i = \bar{A} + v_i \bar{e}_i,$$

где v_i — скалярные функции трех аргументов.

Из деривационных формул ортогонального репера [3]

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i,$$

$$d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k, \quad \omega_i^k + \omega_k^i = 0$$

и уравнений структуры

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]$$

следует, что система T определяется следующими дифференциальными уравнениями

$$\omega_3^1 = q_i \omega^i, \quad \omega_2^3 = p_i \omega^i, \tag{1}$$

$$\omega_1^2 = r_i \omega^i, \quad dv_i = v_{ij} \omega^j.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

При этом из рассмотрения исключается случай, когда множество точек $\{A\}$ двумерно.

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (1) получаем:

$$[\Delta q_1\,\omega^1] + [\Delta q_2\,\omega^2] + [\Delta q_3\,\omega^3] = 0,$$

$$[\Delta p_1\,\omega^1] + [\Delta p_2\,\omega^2] + [\Delta p_3\,\omega^3] = 0,$$

$$[\Delta r_1\,\omega^1] + [\Delta r_2\,\omega^2] + [\Delta r_3\,\omega^3] = 0, \qquad (2)$$

$$[\Delta v_{i1}\,\omega^1] + [\Delta v_{i2}\,\omega^2] + [\Delta v_{i3}\,\omega^3] = 0,$$

где

$$\Delta q_1 = dq_1 - \{q_1 r_1 + q_2 r_2 - q_3 (p_1 + q_2) - p_1 r_2 + r_1 p_2\}\,\omega^2,$$

$$\Delta q_2 = dq_2 - \{p_2 q_2 + p_3 q_3 - q_1 (q_2 + r_3) - p_2 r_3 + r_2 p_3\}\,\omega^3,$$

$$\Delta q_3 = dq_3 - \{q_1^2 + q_3^2 - q_2 (p_1 + q_2) - r_1 p_3 + p_1 r_3\}\,\omega^1,$$

$$\Delta p_1 = dp_1 - \{p_1 r_1 + p_2 r_2 - p_3 (p_1 + q_2) - r_1 q_2 + q_1 r_2\}\,\omega^2,$$

$$\Delta p_2 = dp_2 - \{p_2^2 + p_3^2 - p_1 (q_2 + r_3) - r_2 q_3 + q_2 r_3\}\,\omega^3,$$

$$\Delta p_3 = dp_3 - \{p_1 q_1 + p_3 q_3 - p_2 (p_1 + r_3) - q_1 r_3 + r_1 q_3\}\,\omega^1,$$

$$\Delta r_1 = dr_1 - \{r_1^2 + r_2^2 - r_3 (p_1 + q_2) - q_1 p_2 + p_1 q_2\}\,\omega^2,$$

$$\Delta r_2 = dr_2 - \{r_2 p_2 + r_3 p_3 - r_1 (q_2 + r_3) - q_2 p_3 + p_2 q_3\}\,\omega^3, \qquad (3)$$

$$\Delta r_3 = dr_3 - \{r_1 q_1 + r_3 q_3 - r_2 (p_1 + r_3) - p_1 q_3 + q_1 p_3\}\,\omega^1,$$

$$\Delta v_{i1} \equiv dv_{i1} - \{v_{i1} r_1 + v_{i2} r_2 - v_{i3} (p_1 + q_2)\}\,\omega^2,$$

$$\Delta v_{i2} = dv_{i2} - \{v_{i1} p_2 + v_{i3} p_3 - v_{i2} (q_2 + r_3)\}\,\omega^3,$$

$$\Delta v_{i3} = dv_{i3} - \{v_{i2} q_1 + v_{i3} q_3 - v_{i1}\ (p_1 + r_3)\}\,\omega^1.$$

Из теоремы В. В. Васенина [4] непосредственно следует, что система квадратичных уравнений (2) — в инволюции и определяет решение с произволом в шесть функций трех аргументов, что очевидно и геометрически.

Если дана кривая линия и в каждой ее точке единичный вектор, ортогональный касательной этой линии, то получающийся образ называется полосой [5]. Рассмотрим полосы, несущими линиями которых являются векторные линии поля $\{\bar{V}_k\}$, а нормальными векторами — векторы поля $\{\bar{V}_i\}$ $(i \neq k)$ системы T. Такие полосы будем называть полосами l_k^i. Дифференциальные инварианты полос $l_k{}^i$: геодезические кручения $\varkappa_{g^k}^{\ i}$, нормальные кривизны $k_{n^k}^{\ i}$ и геодезические кривизны $k_{g^k}^{\ i}$ определяются по формулам

$$\varkappa_{g^k}^{\ i} = \left(\bar{e}_k, \bar{e}_i, \frac{d\bar{e}_i}{dS_k}\right), \quad k_{n^k}^{\ i} = \left(\bar{e}_k, \frac{d\bar{e}_i}{dS_k}\right), \qquad (4)$$

$$k_{g^k}^{\ i} = \left(\bar{e}_i, \bar{e}_k, \frac{d\bar{e}_k}{dS_k}\right),$$

где

$$dS_k = \omega^k{}_{/\omega^i = \omega^j = 0} \quad (i \neq j \neq k)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Эти инварианты для полос l_k^i в нашем реперe имеют следующие значения

$$\varkappa_{g\,1}^{2} = p_1, \quad k_{n\,1}^{3} = q_1, \quad k_{g\,1}^{3} = r_1, \tag{5}$$

$$\varkappa_{g\,1}^{2} = q_2, \quad k_{n\,1}^{2} = r_2, \quad k_{g\,1}^{2} = p_2,$$

$$\varkappa_{g\,3}^{2} = r_3, \quad k_{n\,3}^{2} = p_3, \quad k_{g\,3}^{2} = q_3.$$

Отсюда получаем абсолютную характеристику инвариантов триортогональной системы полей направлений [6], т. е. полей с $v_i = 1$.

Векторное поле $\{\bar{I}\}$ называется параллельным в смысле Миллера [7] относительно поля $\{\bar{J}\}$ вдоль кривой Γ, если вдоль кривой имеем $(\bar{I}, d\bar{I}, \bar{J}) = 0$. Для векторов $\{\bar{V}_i\}$ системы T вдоль линии $\omega^1{:}\omega^2{:}\omega^3$ имеем

$$\frac{(\bar{V}_i, d\bar{V}_i, \bar{V}i}{v_i^2 v_j} = \frac{(\bar{V}_k, d\bar{V}_k, \bar{V}_j)}{v_k v_j} = \omega_i^k. \tag{6}$$

Отсюда следует, что если векторное поле $\{\bar{V}_i\}$ системы T является параллельным в смысле Миллера относительно поля $\{\bar{V}_j\}$ при смещении вдоль кривой Γ, то и третье векторное поле $\{\bar{V}_k\}$ $(i \neq j \neq k)$ системы T является параллельным в смысле Миллера относительно поля $\{\bar{V}_j\}$ вдоль этой же кривой Γ.

Из соотношений (4) и (6) следует, что 1) полоса l_k^i тогда и только тогда будет геодезической, когда ее касательный вектор $\bar{e}_k$ является параллельным в смысле Миллера относительно нормального вектора $\bar{e}$ вдоль несущей линии полосы; 2) полоса l_k^i тогда и только тогда будет полосой кривизны, когда нормальный вектор $\bar{e}$ является параллельным в смысле Миллера относительно ее касательного вектора $\bar{e}_k$ вдоль несущей линии полосы; 3) полоса l_k^i тогда и только тогда будет асимптотической, когда ее касательный вектор $\bar{e}_k$ является параллельным в смысле Миллера относительно вектора $\bar{e}$ $(i \neq j \neq k)$ вдоль ее несущей линии.

Все полосы l_k^i тогда и только тогда являются полосами кривизны, когда каждое векторное поле $\{\bar{V}_i\}$ системы T является параллельным в смысле Миллера относительно поля $\{\bar{V}_k\}$ вдоль несущей линии полосы.

Такие системы T определяются с произволом в три функции трех аргументов.

§ 2. Неголономные поверхности $\{A_i\}$

Неголономную поверхность, элементом которой являются точка A и проходящая через нее плоскость, ортогональная вектору V_i, назовем неголономной поверхностью $\{A_i\}$.

Каждая из неголономных поверхностей $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ может быть задана дифференциальным уравнением $\omega^i = 0$ и расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей, если выполняются соотношения:

$$\text{для } \{A_1\}: \quad q_2 + r_3 = 0,$$

$$\text{для } \{A_2\}: \quad p_1 + r_3 = 0, \tag{7}$$

$$\text{для } \{A_3\}: \quad p_1 + q_2 = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Гауссова и средняя кривизны неголономных поверхностей $\{A_1\}$, $\{A_2\}$ и $\{A_3\}$ соответственно равны

$$K_h^1 = q_2 r_3 - r_2 q_3, \quad H_{01} = q_3 - r_2,$$
$$K_h^2 = p_1 r_3 - r_1 p_3, \quad H_{02} = r_1 - p_3, \tag{8}$$
$$K_h^3 = p_1 q_2 - q_1 p_2, \quad H_{03} = p_2 - q_1.$$

Из соотношений (5) и (7) следует, что все три неголономные поверхности $\{A_1\}$, $\{A_2\}$ и $\{A_3\}$ тогда и только тогда расслаиваются на однопараметрические семейства голономных поверхностей, когда все полосы l_k^i являются полосами кривизны.

Аффинные нормали [8] неголономных поверхностей $\{A_1\}$, $\{A_2\}$ и $\{A_3\}$ определяются соответственно векторами

$$\bar{\eta}_{i1} \parallel \eta_{i1}^0 = (r_2 q_3 - q_2 r_3)\bar{e}_1 + (q_1 r_3 - r_1 q_3)\bar{e}_2 + (r_1 q_2 - q_1 r_2)\bar{e}_3,$$
$$\bar{\eta}_{i2} \parallel \eta_{i2}^0 = (r_2 p_3 - p_2 r_3)\bar{e}_1 + (p_1 r_3 - r_1 p_3)\bar{e}_2 + (r_1 p_2 - p_1 r_2)\bar{e}_3, \tag{9}$$
$$\bar{\eta}_{i3} \parallel \eta_{i3}^0 = (p_2 q_3 - q_2 p_3)\bar{e}_1 + (q_1 p_3 - p_1 q_3)\bar{e}_2 + (p_1 q_2 - q_1 p_2)\bar{e}_3.$$

Теорема. Неголономная поверхность $\{A_i\}$ тогда и только тогда вырождается в семейство плоскостей, когда векторное поле $\{\bar{V}_i\}$ является параллельным в смысле Миллера относительно полей $\{\bar{V}_j\}$ и $\{\bar{V}_k\}$ $(i \neq j \neq k)$ при смещении как вдоль векторных линий поля $\{\bar{V}_j\}$, так и вдоль векторных линий поля $\{\bar{V}_k\}$.

Доказательство. Пусть $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$.
Неголономная поверхность $\{A_1\}$ тогда и только тогда вырождается в семейство плоскостей, когда $d\bar{e}_1/_{\omega^1=0} = 0$, т. е. при условии

$$q_2 = q_3 = r_2 = r_3 = 0.$$

Эти же соотношения, как видно из (6), означают что векторное поле $\{\bar{V}_1\}$ является параллельным в смысле Миллера относительно полей $\{\bar{V}_2\}$ и $\{\bar{V}_3\}$ при смещении как вдоль векторных линий поля $\{\bar{V}_2\}$, так и вдоль векторных линий поля $\{\bar{V}_3\}$. Теорема доказана.

Теорема. Неголономная поверхность $\{A_i\}$ тогда и только тогда вырождается в семейство параллельных плоскостей, когда поле направлений $\{\bar{e}_i\}$ является прямолинейным, соленоидальным и параллельным в смысле Миллера относительно векторных полей $\{\bar{V}_j\}$ и $\{\bar{V}_k\}$ вдоль векторных линий полей $\{\bar{V}_j\}$ и $\{\bar{V}_k\}$ соответственно.

Доказательство. Пусть $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$.
Неголономная поверхность $\{A_1\}$ тогда и только тогда вырождается в семейство параллельных плоскостей, когда $d\bar{e}_1 = 0$, т. е. при условии

$$q_1 = q_2 = q_3 = r_1 = r_2 = r_3 = 0. \tag{10}$$

Если поле направлений $\{\bar{e}_1\}$ является прямолинейным $(d\bar{e}_1/_{\omega^2=\omega^3=0} = 0)$, соленоидальным $(div\, \bar{e}_1 = 0)$ и параллельным в смысле Миллера относительно векторных полей $\{\bar{V}_2\}$ и $\{\bar{V}_3\}$ вдоль соответствующих векторных линий этих полей, то имеем

$$q_1 = r_1 = 0, \quad r_2 = q_3, \quad q_2 = r_3 = 0. \tag{11}$$

Система квадратичных уравнений (2) принимает вид:

$$[dq_3 - q_3{}^2\omega^1 + p_3 q_3 \omega^2, \omega^3] = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$[dq_3 + q_3^2\,\omega^1 - 2p_2 q_3\,\omega^3,\ \omega^2] = 0, \qquad (2^*)$$

$$[\Delta p_1\,\omega^1] + [\Delta p_2\,\omega^2] + [\Delta p_3\,\omega^3] = 0,$$

$$[\Delta v_{i1}\,\omega^1] + [\Delta v_{i2}\,\omega^2] + [\Delta v_{i3}\,\omega^3] = 0.$$

Разрешая первые два уравнения этой системы по лемме Картана, получаем конечное соотношение

$$q_3 = 0.$$

Это соотношение вместе с (11) дают соотношения (10). Наоборот, если выполняются соотношения (10), то выполняются и соотношения (11). Теорема доказана.

Из теоремы В. В. Васенина следует, что система квадратичных уравнений (2*) — в инволюции, а произвол ее решения равен четырем функциям трех аргументов.

§ 3. Неголономные поверхности $\{B_{ij}\}$

Неголономную поверхность, элементом которой являются точка B_i и проходящая через нее плоскость, ортогональная вектору $\bar{V}_j$, назовем неголономной поверхностью $\{B_{ij}\}$.

Неголономные поверхности $\{B_{ii}\}$ задаются уравнениями

$$\omega^i + dv_i = 0.$$

Если каждая неголономная поверхность $\{B_{ii}\}$ расслаивается на однопараметрическое семейство голономных поверхностей, то выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\text{для: } \{B_{11}\}: \quad v_{12}q_1 + v_{13}r_1 - (q_2 + r_3)(1 + v_{11}) = 0,\\
&\text{для: } \{B_{22}\}: \quad v_{21}p_2 + v_{23}r_2 - (p_1 + r_3)(1 + v_{22}) = 0, \qquad (12)\\
&\text{для: } \{B_{33}\}: \quad v_{31}p_3 + v_{32}q_3 - (p_1 + q_2)(1 + v_{33}) = 0.
\end{aligned}$$

Если неголономные поверхности $\{A_i\}$ и $\{B_{ii}\}$ одновременно расслаиваются на однопараметрические семейства голономных поверхностей, то векторное поле $\{\bar{V}_i\}$ является дважды голономным [1].

Произвольное смещение радиус-вектора точки B_i равно

$$d\bar{B}_i = (\omega^i + dv_i)\,\bar{e}_i + (\omega^j + v_i\,\omega_i{}^j)\,\bar{e}_j + (\omega^k + v_i\,\omega_i{}^k)\,\bar{e}_k \quad (i \neq j \neq k).$$

Внешнее произведение коэффициентов, стоящих при базисных векторах, равно

$$[\omega^i + dv_i,\ \omega^j + v_i\,\omega_i{}^j,\ \omega^k + v_i\,\omega_i{}^k] = R_i\,[\omega^1\omega^2\omega^3],$$

где

$$R_i = a_i v_i^2 + b_i v_i + c_i, \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}
c_i &= 1 + v_{ii}\\
a_1 &= c_1(q_2 r_3 - r_2 q_3) + v_{12}(r_1 q_3 - q_1 r_3) + v_{13}(q_1 r_2 - r_1 q_2),\\
b_1 &= -c_1(q_3 - r_2) - v_{12} r_1 + v_{13} q_1,\\
a_2 &= v_{21}(r_2 p_3 - p_2 r_3) + c_2(p_1 r_3 - r_1 p_3) + v_{23}(r_1 p_2 - r_2 p_1), \qquad (14)\\
b_2 &= v_{21} r_2 - c_2(r_1 - p_3) - v_{23} p_2,\\
a_3 &= v_{31}(p_2 q_3 - q_2 p_3) + v_{32}(q_1 p_3 - p_1 q_3) + c_3(p_1 q_2 - q_1 p_2),\\
b_3 &= -v_{31} q_3 + v_{32} p_3 - c_3(p_2 - q_1).
\end{aligned}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Соотношение (13), учитывая (9), можно записать в следующем виде:

$$R_i = (\bar{e}_i^*, v_i^2 \bar{\eta}_i^0 + v_i \bar{I}_i + \bar{e}_i), \tag{15}$$

где

$$\bar{e}_i^* = \bar{e}_i + \operatorname{grad} v_i, \quad \bar{I}_i = \frac{d\bar{e}_i}{dS_i} + H_{0i}\bar{e}_i,$$

$$dS_i = \omega^i|_{\omega^j=\omega^k=0} \quad (i \neq j \neq k),$$

H_{0i} — средняя кривизна неголономной поверхности $\{A_i\}$.

Если $R_i = 0$, то множества точек $\{B_i\}$ двумерны. Эти случаи из рассмотрения исключаем.

В [9] показано, что гауссова K_h^{ii} средняя и H_{ii} кривизны неголономной поверхности $\{B_{ii}\}$ определяются по формулам

$$K_h^{ii} = \frac{1}{2R_i} \frac{\partial^2 R_i}{\partial v_i^2}, \tag{16}$$

$$H_{ii} = -\frac{\partial (\ln R_i)}{\partial v_i},$$

где при дифференцировании считаем, что a_i, b_i, c_i не зависят от v_i. Легко проверить, что гауссова кривизна неголономной поверхности $\{B_{ij}\}$ $(i \neq j)$ определяется по формуле

$$K_h^{ij} = \frac{K_h^j}{R_i},$$

где K_h^j — гауссова кривизна неголономной поверхности $\{A_j\}$.

Из соотношений (15) и (16) следует, что гауссова кривизна неголономной поверхности $\{B_{ii}\}$ только тогда равна нулю, когда аффинная нормаль неголономной поверхности $\{A_i\}$ ортогональна вектору $\bar{e}_i^* = \bar{e}_i + \operatorname{grad} v_i$.

§ 4. Кинематические элементы векторных полей системы T

Векторные линии поля $\{\bar{V}_i\}$ определяются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \omega^j = 0, \\ \omega^k = 0 \quad (i \neq j \neq k). \end{cases}$$

Так как вдоль векторных линий имеем:

$$\frac{d\bar{A}}{\omega^i|_{\omega^j=\omega^k=0}} = \bar{e}_i,$$

то вектор $\bar{V}_i = v_i \bar{e}_i$ (по i — не суммировать!) можно определить следующим образом:

$$\bar{V}_i = \frac{d\bar{A}}{dt_i}, \quad \text{где } dt_i = \frac{\omega^i}{v_i|_{\omega^j=\omega^k=0}}.$$

В случае, когда векторное поле $\{\bar{V}_i\}$ является полем скоростей некоторого стационарного потока, dt_i будет являться дифференциалом времени.

Определим для векторного поля $\{\bar{V}_i\}$ инвариантный вектор „ускорения“ равенством

$$\bar{W}_i = \frac{d\bar{V}_i}{dt_i}.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Для каждого векторного поля $\{\overline{V}_i\}$ векторы ускорений $\overline{W}_i$ соответственно равны

$$\begin{aligned}\overline{W}_1 &= v_1 v_{11}\overline{e}_1 + v_1^2 r_1 \overline{e}_2 - v_1^2 q_1 \overline{e}_3,\\ \overline{W}_2 &= -v_2^2 r_2 \overline{e}_1 + v_2 v_{22}\overline{e}_2 + v_2^2 p_2 \overline{e}_3,\\ \overline{W}_3 &= v_3^2 q_3 \overline{e}_1 - v_3^2 p_3 \overline{e}_2 + v_3 v_{33}\overline{e}_3.\end{aligned} \tag{17}$$

Векторное поле, у которого векторные линии — прямые, назовем прямолинейным. Из равенств (17) следует, что у прямолинейного векторного поля $\{\overline{V}_i\}$ вектор ускорения параллелен вектору поля.

Линии, вдоль которых $|\overline{V}_i| = \text{const}$, называются изотахейными [10]. Если векторные линии поля $\{\overline{V}_i\}$ системы T являются изотахейными, то имеем $v_{ii} = 0$. Из (17) следует, что у векторного поля $\{\overline{V}_i\}$ с изотахейными векторными линиями вектор ускорения ортогонален вектору поля.

Векторы вихрей векторных полей $\{\overline{V}_i\}$ соответственно равны

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\overline{V}_1 &= -v_1(q_2 + r_3)\overline{e}_1 + (v_{13} + v_1 q_1)\overline{e}_2 - (v_{12} - v_1 r_1)\overline{e}_3,\\ \operatorname{rot}\overline{V}_2 &= -(v_{23} - v_2 p_2)\overline{e}_1 - v_2(p_1 + r_3)\overline{e}_2 + (v_{21} + v_2 r_2)\overline{e}_3,\\ \operatorname{rot}\overline{V}_3 &= (v_{32} + v_3 p_3)\overline{e}_1 - (v_{31} - v_3 q_3)\overline{e}_2 - v_3(p_1 + q_2)\overline{e}_3.\end{aligned} \tag{18}$$

Легко проверить, что неголономная поверхность $\{B_{ii}\}$ тогда и только тогда расслаивается на однопараметрическое семейство голономных поверхностей, когда вектор вихря $\operatorname{rot}\overline{V}_i$ ортогонален вектору $\overline{e}_i^* = \overline{e}_i + \operatorname{grad} v_i$, а векторное поле $\{\overline{V}_i\}$ тогда и только тогда является дважды голономным векторным полем, когда вектор вихря $\operatorname{rot}\overline{V}_i$ является нормальным вектором соприкасающейся плоскости векторной линии этого поля.

Если $\operatorname{div}\overline{V}_i = 0$, то векторное поле $\{\overline{V}_i\}$ является соленоидальным. В терминах репера системы T условие соленоидальности векторного поля $\{\overline{V}_i\}$ имеет вид

$$v_{ii} - v_i H_{0i} = 0,$$

где H_{0i} — средняя кривизна неголономной поверхности $\{A_i\}$.

§ 5. Система K

Определение. Триортогональную систему векторов, образованную векторами полей $\{\overline{V}_1\}$, $\{\overline{W}_1\}$ и $\{\operatorname{rot}\overline{V}_1\}$, назовем системой K, порожденной полем $\{\overline{V}_1\}$.

Репер системы K строим следующим образом: вектор репера $\overline{e}_1$ возьмем параллельным вектору $\overline{V}_1$, вектор репера $\overline{e}_2$ — параллельным $\overline{W}_1$, а вектор $\overline{e}_3$ — параллельным $\operatorname{rot}\overline{V}_1$. При этом из рассмотрения исключаем случай, когда либо $\overline{W}_1 = 0$, либо $\operatorname{rot}\overline{V}_1 = 0$, т. е. когда векторное поле является прямолинейным или потенциальным. Из условия ортогональности векторов $\overline{V}_1$, $\overline{W}_1$ и $\operatorname{rot}\overline{V}_1$ и в силу выбора векторов репера имеем

$$q_2 + r_3 = 0, \quad q_1 = 0, \quad v_{11} = v_{13} = 0. \tag{19}$$

Каждое из этих соотношений соответственно означает, что неголономная поверхность $\{A_1\}$ расслаивается на однопараметрическое семейст-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

во голономных поверхностей, полоса l_1^3 является асимптотической и $\operatorname{grad} v_1 \parallel \overline{W}_1$.

В этом случае r_1 и $-p_1$ являются кривизной и кручением векторных линий поля $\{\overline{V}_1\}$.

Система K определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_3^1 = -r_3\omega^2 + q_3\omega^3,\ \omega_2^3 = p_i\omega^i, \tag{20}$$

$$\omega_1^2 = r_i\omega^i,\ d\omega_1 = v_{12}\omega^2.$$

Система квадратичных уравнений (2) принимает вид:

$$[-dr_3 + a\omega^1,\omega^2] + [\Delta q_3\omega^3] = 0,$$

$$[\Delta p_1\omega^1] + [\Delta p_2\omega^2] + [\Delta p_3\omega^3] = 0,$$

$$[\Delta r_1\omega^1] + [\Delta r_2\omega^2] + [dr_3\omega^3] = 0,$$

$$[\Delta v_{12}\omega^2] + v_{12}(p_1 + r_3)[\omega^1\omega^3] = 0.$$

Из последнего уравнения этой системы следует конечное соотношение:

$$v_{12}(p_1 + r_3) = 0.$$

Возможны два случая: либо $v_{12} = 0$, либо $p_1 + r_3 = 0$.

1. Пусть $v_{12} = 0$, $p_1 + r_3 \neq 0$.

Как видно из последнего уравнения системы (20), в этом случае модуль вектора $\overline{V}_1$ постоянен. Система дифференциальных уравнений (20) принимает вид:

$$\omega_3^1 = -r_3\omega^2 + q_3\omega^3,\ \omega_2^3 = p_i\omega^i,$$

$$\omega_1^2 = r_i\omega^i,\ dv_1 = 0.$$

Обычным путем [3] устанавливаем, что система квадратичных уравнений (2), соответствующая данному случаю, — в инволюции, а широта ее решения равна одной функции трех аргументов.

2. Пусть $p_1 + r_3 = 0$, $v_{12} \neq 0$.

Соотношение $p_1 + r_3 = 0$ означает, что неголономная поверхность $\{A_2\}$ расслаивается на однопараметрическое семейство голономных поверхностей (см. (7). Система уравнений (20) принимает вид:

$$\omega_3^1 = -r_3\omega^2 + q_3\omega^3,\ \omega_1^2 = r_i\omega^i,$$

$$\omega_2^3 = -r_3\omega^1 + p_2\omega^2 + p_3\omega^3,\ dv_1 = v_{12}\omega^2.$$

В этом случае система квадратичных уравнений (2) — в инволюции, а произвол ее решения равен трем функциям двух аргументов.

Векторное поле $\{V_1\}$ тогда и только тогда порождает систему K, когда неголономная поверхность $\{A_1\}$ расслаивается на однопараметрическое семейство голономных поверхностей, полоса $l^3{}_1$ является асимптотической, $\operatorname{grad} v_1 \parallel \overline{W}_1$ и либо модуль вектора $\overline{V}_1$ постоянен, либо неголономная поверхность $\{A_2\}$ расслаивается на однопараметрическое семейство голономных поверхностей.

Теорема. Векторное поле $\{\overline{V}_1\}$ порождает систему K тогда и только тогда, когда векторное поле $\{\overline{V}_1\}$ является дважды голономным векторным полем с изотахейными векторными линиями.

Доказательство. Система K характеризуется соотношениями (19). В этом случае, как следует из (7), (12) и (17), векторное поле $\{\overline{V}_1\}$ является дважды голономным векторным полем с изотахейны-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ми векторными линиями. Если векторное поле является дважды голономным, то вектор вихря ортогонален плоскости, определяемой векторами поля и ускорения [11]. Как показано в четвертом параграфе, у векторного поля с изотахейными векторными линиями векторы поля и ускорения ортогональны. Следовательно, если векторное поле $\{\overline{V}_1\}$ является дважды голономным векторным полем с изотахейными векторными линиями, то его векторы $\overline{V}_1$, $\overline{W}_1$ и $\mathrm{rot}\,\overline{V}_1$ взаимно ортогональны, т. е. векторные поля $\{\overline{V}_1\}$, $\{\overline{W}_1\}$ и $\{\mathrm{rot}\,\overline{V}_1\}$ образуют систему K. Теорема доказана.

§ 6. Голономная система K

В предыдущем параграфе мы видели, что в одном из двух возможных случаев систем K оказалось, что две из трех неголономных поверхностей $\{A_i\}$ расслаиваются на однопараметрические семейства голономных поверхностей. Рассмотрим случай, когда все три неголономные поверхности $\{A_i\}$, ассоциированные с системой K, расслаиваются на однопараметрические семейства голономных поверхностей. В этом случае систему K будем называть голономной.

Из (7) следует, что тогда

$$p_1 = q_2 = r_3 = 0.$$

Эти соотношения означают, что все полосы l_k^i являются полосами кривизны. Векторные линии поля $\{\overline{V}_1\}$ являются плоскими ($p_1 = 0$).

Голономная система K определяется системой дифференциальных уравнений

$$\omega_3^1 = q_3\omega^3,\ \omega_1^2 = r_1\omega^1 + r_2\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = p_2\omega^2 + p_3\omega^3,\ dv_1 = v_{12}\omega^2. \tag{21}$$

Система квадратичных уравнений (2) в этом случае принимает вид:

$$[\Delta q_3\omega^3] + r_1p_2[\omega^1\omega^2] = 0,\ [\Delta r_1\omega^1] + [\Delta r_2\omega^2] = 0,$$

$$[\Delta p_2\omega^2] + [\Delta p_3\omega^3] = 0,\ [\Delta v_{12}\omega^2] = 0.$$

Из первого уравнения этой системы следует конечное соотношение

$$r_1p_2 = 0.$$

Случай $r_1 = 0$ невозможен, так как $\overline{W}_1 \neq 0$. Следовательно, имеем

$$p_2 = 0.$$

Это соотношение означает, что полоса l_2^3 является асимптотической. Векторные линии поля $\{\overline{W}_1\}$ — плоские кривые, кривизна которых равна $-r_2$.

Система уравнений (21) принимает вид:

$$\omega_3^1 = q_3\omega^3,\ \omega_1^2 = r_1\omega^1 + r_2\omega^2, \tag{22}$$

$$\omega_2^3 = p_3\omega^3,\ dv_1 = v_{12}\omega^2.$$

Система квадратичных уравнений (2) в этом случае — в инволюции, а произвол ее решения равен одной функции двух аргументов.

Если векторное поле $\{\overline{V}_1\}$ голономной системы K является соленоидальным, то имеем

$$r_2 - q_3 = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Система уравнений (22) принимает вид:

$$\omega_3^1 = q_3\omega^3,\ \omega_1^2 = r_1\omega^1 + q_3\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = p_3\omega^3,\ dv_1 = v_{12}\omega^2.$$

В этом случае система квадратичных уравнений (2) — не в инволюции. Разрешив ее по лемме Картана, получим систему дифференциальных уравнений

$$dr_1 = \alpha\omega^1 + (r_1^2 + 2q_3^2 - r_1p_3)\,\omega^2,$$

$$dq_3 = (q_3^2 - r_1p_3)\,\omega^1 - 2q_3p_3\omega^2,$$

$$dp_3 = q_3(r_1 + p_3)\,\omega^1 + (q_3^2 - p_3^2)\,\omega^2 + \mu\omega^3,$$

$$dv_{12} = -v_{12}q_3\omega^1 + \eta\omega^2.$$

Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получаем квадратичные уравнения:

$$[\Delta\alpha\omega^1] + \mu r_1[\omega^2\omega^3] = 0,$$

$$\mu r_1[\omega^1\omega^2] + 2\mu q_3[\omega^2\omega^3] = 0,$$

$$[d\mu + 2\mu q_3\omega^1 + 3\mu p_3\omega^2, \omega^3] = 0,$$

$$[\Delta\eta\omega^2] = 0,$$

из которых следует

$$r_1\mu = 0,\ q_3\mu = 0.$$

Соотношение $r_1 = q_3 = 0$ невозможно, так как случай $r_1 = 0$ из рассмотрения исключен. Значит имеем

$$\mu = 0.$$

Широта этого класса систем K — две функции одного аргумента.

Кривизна векторных линий поля $\{\mathrm{rot}\bar{V}_1\}$ равна

$$k = \sqrt{p_3^2 + q_3^2},$$

а единичные векторы бинормалей этих линий равны

$$\bar{\beta} = \frac{p_3\bar{e}_1 + q_3\bar{e}_2}{\sqrt{p_3^2 + q_3^2}}.$$

Так как

$$dk|_{\omega^1=\omega^2=0} = 0,$$

$$d\bar{\beta} = 0,$$

то вихревые линии являются окружностями. Легко заметить, что поверхности $\{A_3\}$ вырождаются в плоскости, параллельные вектору $\bar{\beta}$. Как следует из результатов С. С. Бюшгенса [12] и Н. И. Алексеева [13], векторное поле $\{\bar{V}_1\}$ в этом случае может быть полем скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости (как идеальной [12], так и вязкой [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Долговых. К геометрии векторного поля. Геометрический сб., вып. 5 («Труды Томского ун-та», 182), 1965, 76—82.

2. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Геометрич. сб., вып. 3 («Труды Томского ун-та», 162), 1963, 5—11.

3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

4. В. В. Васенин. О существовании решений одной системы внешних дифференциальных уравнений. Сибирский матем. журнал, т. V, 1964, № 4, 774—777.

5. В. Бляшке. Введение в дифференциальную геометрию. ГИТТЛ, М., 1957.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

6. Gh. Gheorghiev, I. Popa. Geometria proiettivo differentiale di alcune varieta equiparametriche. An. stiint. univ. Jasi, Sec. 1, т. 7, № 2, 1961, 283—298.
7. Gh. Gheorghiev. Observatia assupra geometrie affine differentiale a cimpurilor de vectori. Lucr. conf. de geom. si topolog., Jasi, 1958, 127—138.
8. Р. Н. Щербаков, М. О. Рахула. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геом. сб., вып. 1 («Труды Томского ун-та», 160), 1962, 82—89.
9. В. П. Долговых. Триортогональная система векторных полей. Материалы XI Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии, Тарту, 1965, 59—62.
10. Г. Георгиев. Нестационарные движения идеальной жидкости вдоль линейной неголономной поверхности. An. stiint. univ. Jasi, sec. 1, 5, 1959, 51—65.
11. В. П. Долговых. О неголономных поверхностях векторного поля. Доклады III Сибирской конференции по математике и механике. Томск, 1964, 185—186.
12. С. С. Бюшгенс. Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Известия АН СССР, серия математическая, т. 12, № 5, 1948, 481—512.
13. Н. И. Алексеев. Об установившемся потоке несжимаемой вязкой жидкости, допускающем триортогональную систему поверхностей. Известия вузов. Математика, № 1 (8), 1959, 3—8.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 205 Серия механико-математическая

ОБ ОДНОМ ПОЛЕ КРУГОВЫХ КОНУСОВ

В. М. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

В работе рассматривается четырехпараметрическое поле направлений, в котором все начальные конусы круговые, а их оси параллельны.

§ 1. Введение. Четырехпараметрическим полем направлений («полем») называется четырехпараметрический образ Φ_4 [1], элементом которого является прямая («луч») с заданной на ней точкой («началом луча»). Пусть M — начало луча. Конус с вершиной в точке M, образованный лучами поля, называется начальным. Метрический репер поля построен в [2] следующим образом: начало репера помещено в точку M, вектор $\boldsymbol{e}_3$ направлен по лучу, а вектор $\boldsymbol{e}_1$ — по нормали к начальному конусу. Деривационные формулы канонического репера поля имеют вид:

$$d\boldsymbol{M} = \omega^k \boldsymbol{e}_k, \quad d\boldsymbol{e}_j = \omega_j^k \boldsymbol{e}_k, \quad \omega_j^k = -\omega_k^j, \tag{1}$$

где

$$\omega_3^1 = b_k \omega^k, \quad \omega_i^2 = c_i \omega^i, \tag{2}$$

и

$$\omega_3^2 = \omega^4, \quad (j,k = 1, 2, 3; \ i = 1, 2, 3, 4).$$

Предполагается, что

$$[\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega^4] \neq 0.$$

Геометрическая характеристика инвариантов поля при помощи подмногообразий Ψ_1 [1] дана в работе [2]. Основная система дифференциальных уравнений поля, получаемая замыканием формул (2) с учетом (1), имеет вид:

$$\begin{aligned}
&[db_1 + b_2(b_3 - c_2)\omega^2 - b_2c_3\omega^3 + (c_1 - b_2c_4)\omega^4, \omega^1] + \\
&+ [db_2 + b_1c_1\omega^1 + b_1(b_2 + c_3)\omega^3 + (b_3 + c_2 + b_1c_4)\omega^4, \omega^2] + \\
&+ [db_3 - (b_1^2 + b_3^2)\omega^1 + (c_3 - b_2)\omega^4, \omega^3] = 0, \\
&[dc_1 - (c_1^2 + c_2^2 - b_2c_3 + b_1c_2c_4 - b_2c_1c_4)\omega^2, \omega^1] + \\
&+ [dc_2 + (c_1c_3 + b_2c_1 - b_2c_3c_4 + b_3c_2c_4)\omega^3, \omega^2] + \\
&+ [dc_3 - (b_1c_1 + b_3c_3 - c_2c_3 + b_3c_1c_4 - b_1c_3c_4)\omega^1 - \\
&\qquad - (c_2 + b_3 + b_3c_4^2)\omega^4, \omega^3] + \\
&+ [dc_4 + (c_2c_4 + b_1 + b_1c_4^2)\omega^1 + (b_2 - c_3 - c_1c_4 + b_2c_4^2)\omega^2, \omega^4] = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

причем:

$$D\omega^1 = [\omega_1^2\omega^2] + [\omega^3\omega_3^1],\ D\omega^2 = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^3\omega^4],$$
$$D\omega^3 = [\omega_3^1\omega^1] + [\omega^4\omega^2],\ D\omega^4 = [\omega_3^1\omega_1^2]. \tag{4}$$

Деривационные формулы ортогональной направляющей

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_3 \tag{5}$$

начального конуса ($\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0,\ \omega^4 = ds$) имеют вид:

$$\frac{d\boldsymbol{M}_1}{ds} = \boldsymbol{e}_2,\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -(c_4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3),\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = \boldsymbol{e}_2,\ \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = c_4\boldsymbol{e}_2. \tag{6}$$

Ее кривизна k определяется соотношением:

$$k = \sqrt{c_4^2 + 1}. \tag{7}$$

Полагая

$$dc_4/_{\omega^1=\omega^2=\omega^3=0} = c_{44}\omega^4,$$

можно заключить, что поле

$$c_{44} = 0$$

характеризуется тем, что все его начальные конусы являются круговыми. Отсюда следует, что при перемещении луча по образующим начального кругового конуса точка M, описывает окружность, вектор $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{e}_4$, где

$$\boldsymbol{e}_4 = -\frac{c_4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{c_4^2 + 1}} \tag{8}$$

направлен по радиусу этой окружности, а ось конуса параллельна вектору

$$\boldsymbol{e}_0 = \frac{c_4\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1}{\sqrt{c_4^2 + 1}}. \tag{9}$$

При этом множество осей конусов, очевидно, образует комплекс.

§ 2. Поле $c_1 = c_2 = c_3 = c_{44} = 0$. Представляет интерес следующая задача: при каких условиях все начальные конусы будут круговыми, а их оси параллельными.

Так как

$$d\boldsymbol{e}_0 = -\boldsymbol{e}_2\frac{c_k\omega^k}{\sqrt{c_4^2 + 1}} - \boldsymbol{e}_4\frac{dc_4 + (1 + c_4^2)\,\omega_3^1}{c_4^2 + 1}, \tag{10}$$

то поле

$$dc_4 + (c_4^2 + 1)\,\omega_3^1 = 0,$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \tag{11}$$

характеризуется тем, что в нем

$$d\boldsymbol{e}_0 = 0, \tag{12}$$

т. е. оси всех круговых конусов параллельны. Условие (12) является следствием соотношения (11). В самом деле, замыкая соотношение (11), получаем, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Из системы (3) при $c_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$) находим:

$$[dc_4 + (c_4^2 + 1)\,\omega_3^1, \omega^4] = 0.$$

Следовательно, если $c_k = 0$ и все начальные конусы круговые, (т. е.) $c_{44} = 0$), то выполняется условие (11).

Система (3) при

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_{44} = 0 \tag{13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

принимает вид:

$$[db_1 + b_2 b_3 \omega^2 - b_2 b_4 \omega^4, \omega^1] +$$
$$+ [db_2 + b_1 b_2 \omega^3 + (b_3 + b_1 c_4)\omega^4, \omega^2] +$$
$$+ [db_3 - (b_1^2 + b_3^2)\omega^1 - b_2 \omega^4, \omega^3] = 0,$$
$$dc_4 + (c_4^2 + 1)\omega_3^1 = 0.$$

Обычным путем [3] можно установить, что эта система в инволюции и что решение существует с произволом в одну функцию трех аргументов. Так как

$$D\omega_3^1 = [c_k \omega^k, \omega^4],$$

то условие (12) является необходимым и достаточным, чтобы форма $\omega^1{}_3$ была полным дифференциалом. Полагая

$$\omega_3^1 = -du, \tag{14}$$

из (11) находим:

$$c_4 = \operatorname{tg} u. \tag{15}$$

Из формул (5), (7) и (15) следует, что параметр u есть угол наклона образующей начального конуса к плоскости, ортогональной оси конуса.

Формулы (14), (15) имеют смысл при $b_1 b_3 \neq 0$. Присоединяя к (13) любое из соотношений $b_1 = 0$ или $b_3 = 0$, найдем из (3), что

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

откуда следует, что $c_4 = \text{const}$. Поле $b_k = c_k = 0$, $c_4 = \text{const}$ было рассмотрено в работе [4]. Оно представляет собой многообразие конусов с параллельными осями, причем угол наклона образующей конуса к его оси у всех конусов один и тот же. В дальнейшем исключим из рассмотрения этот случай, т. е. будем предполагать, что $b_1 b_3 \neq 0$, $c_4 \neq \text{const}$.

Так как

$$d\boldsymbol{M}|_{\omega_3^1 = 0} = \frac{1}{b_3}\{\omega^1 (b_3 \boldsymbol{e}_1 - b_1 \boldsymbol{e}_3) + \omega^2 (b_3 \boldsymbol{e}_2 - b_2 \boldsymbol{e}_3)\},$$

то вектор

$$\boldsymbol{e}_0^1 = b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + b_3 \boldsymbol{e}_3$$

есть нормаль к поверхности $u = \text{const}$. Так как

$$d\boldsymbol{e}_3|_{\omega_3^1 = 0} \parallel \boldsymbol{e}_2,$$

то при $c^k = 0$ существует семейство поверхностей $u = \text{const}$, причем сферическое изображение любого многообразия начальных конусов, имеющих вершины на одной и той же поверхности семейства, вырождается в линию, касательная к которой параллельна вектору $\boldsymbol{e}_2$.

Как видно из (11) и (15), вдоль подмногообразия $\omega^1{}_3 = 0$ угол наклона образующей к оси у всех начальных конусов один и тот же. Следовательно, поле (13) представляет собой поле конусов с параллельными осями, причем образующие конусов, у которых вершины принадлежат одной и той же поверхности $u = \text{const}$, одинаково наклонены к оси.

§ 3. Поле $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$. Присоединяя к четырехпараметрическому полю направлений канонический репер $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ так, чтобы вектор описывал данное поле, мы получаем еще два четырехпараметрических поля направлений: поле $\{M, \boldsymbol{e}_1\}$ и поле $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$.

Рассмотрим произвольную точку M_t луча поля

$$\{M, \boldsymbol{e}_2\}: \quad \boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{M} + t\boldsymbol{e}_2.$$

Тогда

$$d\boldsymbol{M}_t = (\omega^1 - t\omega_1^2)\boldsymbol{e}_1 + (\omega^2 + dt)\boldsymbol{e}_2 + (\omega^3 - t\omega^4)\boldsymbol{e}_3,$$
$$d\boldsymbol{e}_1 = \omega_1^2 \boldsymbol{e}_2 - \omega_3^1 \boldsymbol{e}_3, \quad d\boldsymbol{e}_2 = -\omega_1^2 \boldsymbol{e}_2 - \omega^4 \boldsymbol{e}_3, \tag{16}$$
$$d\boldsymbol{e}_3 = \omega_3^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega^4 \boldsymbol{e}_2.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если $d\boldsymbol{M}_t \| \boldsymbol{e}_2$, то

$$\omega^1 - t\omega_1^2 = 0,\ \omega^3 - t\omega^4 = 0. \tag{17}$$

Исключая t, получаем уравнение торсов поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$:

$$\omega^3\omega_1^2 - \omega^1\omega^4 = 0. \tag{18}$$

Пусть $\boldsymbol{n}$ — нормаль к линейчатой поверхности поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$

$$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 : \omega^4$$

в точке M_t, а φ угол от вектора $\boldsymbol{e}_3$ до $\boldsymbol{n}$. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega^3 - t\omega^4}{\omega^1 - t\omega_1^2}. \tag{19}$$

Для торса поля

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega^4}{\omega_1^2} = -\frac{\omega^3}{\omega^1},\ \boldsymbol{n} \| (-\omega^3\boldsymbol{e}_1 + \omega^1\boldsymbol{e}_3). \tag{20}$$

С начальным конусом (6) ассоциируется конус, образованный лучами поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$.

Теорема. Чтобы начальный конус был круговым, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему конус поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ вырождался в плоскость.

Действительно, для ортогональной направляющей

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_2 \tag{21}$$

указанного конуса поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ из формул (8) — (10) и (22) находим:

$$\frac{d\boldsymbol{M}_1}{ds} = \boldsymbol{e}_4,\ \frac{d\boldsymbol{e}_4}{ds} = -\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_0\frac{c_{44}}{(c_4^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = \boldsymbol{e}_4,\ \frac{d\boldsymbol{e}_0}{ds} = -\boldsymbol{e}_4\frac{c_{44}}{(c_4^2+1)^{3/2}},$$

где

$$ds = \omega_4\sqrt{c_4^2+1}.$$

Из этих формул вытекает, что если $c_{44} = 0$, то кривая (21) является окружностью и обратно.

2. Рассмотрим торс поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$

$$\omega^1 = \omega^3 = \omega^4 = 0,\ \omega^2 = ds, \tag{22}$$

соответствующий главной бинормальной поверхности поля $\{M, \boldsymbol{e}_3\}$ [2]. Его деривационные формулы имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{ds} = \boldsymbol{e}_2,\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds} = -c_2\boldsymbol{e}_1,$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds} = -(b_2\boldsymbol{e}_3 - c_2\boldsymbol{e}_2),\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds} = b_2\boldsymbol{e}_1.$$

Если c_2 обращается в нуль, то торс (22) вырождается в прямую. Таким образом, поле

$$c_2 = 0 \tag{23}$$

характеризуется тем, что совокупность всех лучей поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ вырождается в комплекс K. Обычным путем нетрудно установить, что система (3) при $c_2 = 0$ в инволюции и определяется с произволом в две функции трех аргументов.

Комплекс K является специальным, если

$$c_2 = 0,\ c_3 + c_1c_4 = 0,\ c_1 \neq 0. \tag{24}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Поле (24) определяется, как нетрудно установить, с произволом в одну функцию трех аргументов.

3. Из соотношения

$$d\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1(c_1\omega^1 + c_2\omega^2 + c_3\omega^3 + c_4\omega^4) - \omega_4\boldsymbol{e}_3 \tag{25}$$

следует, что условия (12) являются необходимыми и достаточными, чтобы сферическое изображение поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ вырождалось в линию. Следовательно, в поле (12) комплекс K является цилиндрическим. Отсюда вытекает, что условия (13) являются необходимыми и достаточными, чтобы сферическое изображение поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ вырождалось в окружность.

Уравнение торсов (18) в поле (12) принимает вид: $\omega^4(c_4\omega^3 - \omega^1) = 0$. С помощью формул (4) нетрудно установить, что уравнение $\omega^4 = 0$ в поле (12) и уравнение $c_4\omega^3 - \omega^1 = 0$ в поле (11) вполне интегрируемы.

Подмногообразие $\omega^4 = 0$ поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$, как видно из (18) — (20), характеризуется наличием двух конгруэнций T: а) связки параллельных прямых и б) конгруэнции торсов, имеющих общую нормаль $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$. Как видно из (25), условия (12) являются необходимыми и достаточными, чтобы вдоль $\omega^4 = 0$ выполнялось условие

$$d\boldsymbol{e}_2 = 0.$$

Следовательно, лучи поля $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ вдоль $\omega^4 = 0$ образуют связку параллельных прямых.

Так как

$$d(\boldsymbol{M} + \lambda_1\boldsymbol{e}_2 + \lambda_2\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_2\{\omega^2 + d\lambda_1 -$$

$$-\lambda_2(\omega^4 + c_4\omega^2)\}\frac{1}{\sqrt{c_4^2+1}} + \boldsymbol{e}_4\left\{d\lambda_2 + (\lambda_1\omega^4 - \omega^3)\sqrt{c_4^2+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{c_4(\omega^1 - c_4\omega^3)}{\sqrt{c_4^2+1}} - \frac{c_4\lambda_1(c_k\omega^k)}{\sqrt{c_4^2+1}}\right\} + \boldsymbol{e}_0\frac{1}{\sqrt{c_4^2+1}}\cdot$$

$$\cdot\left\{[dc_4 + (1+c_4^2)\,\omega_3^1]\frac{\lambda_2}{\sqrt{c_4^2+1}} - (\omega^1 - c_4\omega^3) - \lambda_1(c_k\omega^k)\right\},$$

то условие (13) является необходимым и достаточным, чтобы вдоль подмногообразия $c_4\omega^3 - \omega^1 = 0$ выполнялось соотношение

$$\{d(\boldsymbol{M} + \lambda_1\boldsymbol{e}_2 + \lambda_2\boldsymbol{e}_4), \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4\} = 0.$$

Таким образом, совокупность лучей $\{M, \boldsymbol{e}_2\}$ для поля (13) расслаивается на ∞^1 подмногообразий $c_4\omega^3 - \omega^1 = 0$, вдоль каждого из которых плоскость $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) = 0$ неподвижна.

4. Представляет интерес один частный класс поля (13), а именно поле

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_{44} = 0, \quad b_2 = 0. \tag{26}$$

Если в поле (13) потребовать, чтобы $D(c_4\omega^3 - \omega^1) = 0$, то получим два соотношения

$$b_2 = 0, \quad b_3 + b_1c_4 = 0. \tag{27}$$

Присоединив одно из них (любое) совместно с условием (13) к системе (3), получаем второе.

Обычным путем нетрудно установить, что поле (26) существует с произволом в одну функцию одного аргумента.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Используя формулы (27), соотношению (11) можно придать вид:

$$dc_4 = (1 + c_4^2)\, b_1\, (c_4\omega^3 - \omega^1)$$

или, полагая $c_4\omega^3 - \omega^1 = ds$:

$$c_4 = \operatorname{tg}[\varphi(s)],$$

где

$$\varphi(s) = \int b_1 ds.$$

Следовательно, чтобы построить поле (26), надо задать произвольно плоскость β, функцию $b_1 = b_1(s)$ и в каждой точке M плоскости, параллельной плоскости β и удаленной от нее на расстояние s, построить круговой конус (M — вершина конуса) с осью, перпендикулярной плоскости β и углом наклона $\varphi = \varphi(s)$ образующей к оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. Геом. сб., вып. 3. («Труды Томского ун-та», 168), 1963. 5—11.
2. В. М. Финкельштейн. Неголономные комплексы четырехпараметрических полей направлений. Геом. сб., вып. 6 («Труды Томского ун-та», 191), 1967, 99—111.
3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.
4. В. М. Финкельштейн. Некоторые классы четырехпараметрических полей направлений. Геом. сб., вып. 6 («Труды Томского ун-та», 191), 1967, 112—125.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СЕМИНАР Н. Г. ТУГАНОВА В ТОМСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В связи с задержкой выхода в свет очередных выпусков нашего сборника, приводим перечень докладов, заслушанных на семинаре до конца 1970 г. (о предшествующих заседаниях семинара сообщалось в выпусках 2—7).

16/V 1966. Г. И. Студенцов (Харьков). О паре поверхностей в проективном пространстве.

26/V 1966. Л. З. Кругляков. Проективная дифференциальная геометрия 2-семейств прямых в P_5 и некоторые вопросы теории пар конгруэнций в P_3.

22/IX 1966. В. М. Финкельштейн. О неустановившемся течении жидкости, сферическая индикатриса поля скоростей которого вырождается в линию.

29/IX 1966. В. В. Слухаев. Неголономные многообразия нулевой внешней кривизны.

6/X 1966. А. А. Лучинин. Канонический репер пары поверхностей $S^1{}_{2\,m}$ и S^{m+1}_{2m} в $P_{3\,m}$ $(m>2)$.

13/X 1966. М. Б. Пергаменщиков. О преобразованиях Д. Ф. Егорова конгруэнций в P_3.

20/X 1966. Н. В. Амишева. О конгруэнциях центральных коник в трехмерном аффинном пространстве.

27/X 1966. М. Б. Исабеков. Канонический репер многообразия E^n_n $(0, n+1)$ в A_{n+2}.

17/XI 1966. Г. П. Бочилло. Об одном частном классе псевдоконгруэнций в P_n.

24/XI 1966. В. П. Долговых. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии поля скоростей стационарного потока идеальной сжимаемой жидкости.

1/XII 1966. В. К. Бондаренко. Сети линий на трехмерной поверхности в пятимерном аффинном пространстве.

15/XII 1966. Е. Т. Ивлев. О многообразии E $(0, n-1, m)$ в P_n.

5/I 1967. Е. Т. Ивлев. О многообразии E $(0, n-m, m)$ в P_n.

12/I 1967. Л. З. Кругляков. Некоторые классы нефокальных 2-семейств прямых в P_5.

19/I 1967. В. В. Слухаев и В. М. Финкельштейн. О подмногообразиях переменного поля направлений.

16/II 1967. Л. И. Магазинников. О цилиндроидальном комплексе прямых.

2/III 1967. Е. Т. Ивлев. Многомерная проективно-дифференциальная геометрия обобщенных эквипараметрических многообразий.

9/III 1967. В. В. Слухаев. Геометрия двупараметрических многообразий плоских элементов в E_3.

16/III 1967. Л. Я. Березина (Рига). Об инвариантных образах, связанных с семейством плоскостей в аффинном пространстве.

23/III 1967. В. А. Петин. К эквиаффинной теории многообразий плоских элементов.

30/III 1967. В. М. Финкельштейн. (Кемерово). Об одном поле круговых конусов.

7/IV 1967. В. Д. Измайлов (Свердловск). К геометрии m-поверхности в n-мерном аффинном пространстве и в пространстве аффинной связности.

13/IV 1967. Н. Т. Мочернюк. Фокальная классификация конгруэнций коник.

27/IV 1967. В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия четырехпараметрических семейств коник в P_3.

4/V 1967. Л. З. Кругляков (Омск). О линейчатых многообразиях, присоединенных к паре конгруэнции в P_3.

11/V 1967. В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия четырехпараметрических семейств коник в P_3.

18/V 1967. Г. Е. Варламов. О двумерной поверхности в P_6.

1/VI 1967. Л. З. Кругляков (Омск). О псевдофокальных a-семействах d-плоскостей в P_n.

1/VI 1967. Е. Т. Ивлев. Некоторые геометрические объекты многомерной поверхности в эллиптическом пространстве.

8/VI 1967. Н. К. Варначева (Орехово-Зуево). О симплектической геометрии линейчатых многообразий.

5/X 1967. А. Е. Шиллеров (Новосибирск). Проективно-дифференциальная геометрия четырехпараметрического поля направлений в P_3.

19/X 1967. М. С. Бухтяк. Некоторые вопросы эквиаффинной геометрии четырехпараметрического векторного поля.

26/X 1967. И. Е. Болдырева. (Новосибирск). 2-семейства пар прямых в P_5

2/XI 1967. Е. Т. Ивлев. О некоторых геометрических объектах многообразия невырожденных нуль-пар в многомерном проективном пространстве.

5/XI 1967. М. Б. Исабеков. Об одном частном классе многообразий E^n_n $(0, n+1)$.

16/XI 1967. М. А. Чешкова. (n—1)-параметрическое многообразие нуль-пар в A_n.

23/XI 1967. Е. Т. Ивлев. О некоторых геометрических объектах многообразия E $(0, n-m, m)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

7/XII 1967. В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия трехпараметрического семейства коник, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство.

28/XII 1967. М. Б. Исабеков. Дифференциальная геометрия n-параметрического многообразия плоских элементов в $(n+2)$-мерном эквиаффинном пространстве.

4/I 1968. Н. В. Амишева. Комплексы кривых второго порядка в эквиаффинном пространстве.

11/I 1968. Л. З. Кругляков. (Омск). Об одном соответствии в проективной дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей.

18/I 1968. И. Г. Мулин (Абакан). Римановы пространства, характеризуемые специальным строением тензора кривизны.

22/II 1968. Г. Е. Варламов. О двумерной поверхности в пятимерном неевклидовом пространстве.

29/II 1968. В. И. Матвеенко. Пятипараметрические семейства невырождающихся кривых второго порядка в P_3.

21/III 1968. М. А. Чешкова. О многообразии $E\ (0, n-1, n-1)$ в n-мерном аффинном пространстве.

28/III 1968. В. В. Кузнецов (Орехово-Зуево). О парах конгруэнций полярных прямых, имеющих касательные линейные комплексы, в неевклидовых пространствах.

28/III 1968. В. И. Машанов (Иркутск). Оси касательного линейного комплекса в пространстве постоянной кривизны.

18/IV 1968. С. С. Драбкина. Четырехпараметрическое векторное поле в трехмерном евклидовом пространстве.

25/IV 1968. З. А. Скопец (Ярославль). Некоторые плоские модели проективных и неевклидовых пространств.

26/IV 1968. Л. Н. Бескин (Москва). Новое доказательство теоремы Картана о существовании решения системы Пфаффа в инволюции.

14/V 1968. Л. А. Беломестных. Пара кривых в пятимерном проективном пространстве.

21/V 1968. Н. В. Амишева. Об одном классе комплексов коник в эквиаффинном пространстве.

13/VI 1968. В. Н. Шаповалов. Симметрия линейных уравнений.

18/VI 1968. Б. А. Розенфельд (Москва). О неевклидовых геометриях.

20/VI 1968. О неголономных подмногообразиях и неголономных погруженных многообразиях — обсуждение итогов дискуссии, имевшей место на 3-й Прибалтийской конференции в Паланге.

12/IX 1968. В. И. Матвеенко. Многопараметрические семейства коник.

3/X 1968. М. Р. Вайнтруб. Дифференциальная геометрия многообразия окружностей в эвклидовом пространстве.

24/X 1968. Л. З. Кругляков (Омск). О псевдофокальной классификации семейств многомерных плоскостей.

24/X 1968. В. И. Машанов (Иркутск). 1. О некоторых инвариантных формулах метрического пространства. 2. Общая теория комплексов в пространствах Евклида, Лобачевского, Римана.

24/X 1968. Н. М. Маськин (Иркутск). Об оптимальных процессах в римановых пространствах.

31/X 1968. Г. Г. Пестов. О метриках, в которых прямые являются кратчайшими.

14/XI 1968. Р. Н. Щербаков. О системах внешних квадратичных дифференциальных уравнений.

12/XII 1968. Р. Н. Щербаков. Некоторые вопросы метрической теории комплексов.

19/XII 1968. М. С. Бухтяк. К эквиаффинной дифференциальной геометрии четырехпараметрического векторного поля.

26/XII 1968. Л. И. Магазинников. К центроаффинной теории пар комплексов.

2/I 1969. Л. З. Кругляков (Омск). К фокальной классификации семейств многомерных плоскостей.

9/I 1969. Г. Г. Пестов. n-упорядоченные множества.

6/II 1969. В. В. Слухаев. Геометрические условия совместности для стационарных баротропных движений идеальной жидкости.

13/II 1969. Н. М. Онищук. Центроаффинная геометрия двупараметрического семейства плоских элементов.

27/II 1969. Т. В. Лыжина. Регулюсы во флаговом пространстве.

6/III 1969. Е. Т. Ивлев. О некоторых геометрических образах, ассоциированных с семействами плоскостей в неевклидовом пространстве.

13/III 1969. Г. Г. Пестов. О метриках, в которых прямые являются кратчайшими (сообщение второе).

20/III 1969. Е. Т. Ивлев. О семействах пар двойственных друг другу непересекающихся линейных подпространств в P_n.

27/III 1969. И. А. Печников. Одно- и двупараметрические семейства параболических цилиндров в A_3.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

3/IV 1969. О. А. Зубчинский. О трехпараметрических многообразиях пар пересекающихся прямых в P_3.

10/IV 1969. В. А. Петин. К эквиаффинной теории многообразий гиперплоских элементов в пятимерном пространстве.

10/IV 1969. В. В. Благонравов. Геометрическое истолкование t-фокальных точек.

22/V 1969. Н. Т. Мочернюк (Караганда). К дифференциальной геометрии многообразий алгебраических элементов в проективном пространстве.

27/V 1969. Ю. Ф. Борисов. (Новосибирск). О гладком погружении римановых пространств в евклидовы.

3/VI 1969. Г. Н. Макеев (Горький). Об обобщении классических конфигураций, рассматривавшихся в теории пар конгруэнций.

11/IX 1969. В. В. Слухаев. О приложениях дифференциально-геометрических методов к гидромеханике.

18/IX 1969. М. С. Бухтяк. Четырехпараметрическое векторное поле, «порожденная прямая» которого неподвижна.

25/IX. 1969. Р. Н. Щербаков. О некоторых рефератах К. И. Гринцевичюса, опубликованных в РЖМат.

2/X 1969. М. С. Бухтяк. Четырехпараметрическое векторное поле, «порожденные прямые» которого образуют регулюс.

9/X 1969. Л. А. Беломестных. О паре двумерных поверхностей в P_5.

11/X 1969. Р. М. Гейдельман (Москва). Некоторые результаты и проблемы многомерной неевклидовой линейчатой геометрии.

16/X 1969. В. В. Слухаев. О возможности нестационарного баротропного движения с заданным полем пучков векторов скорости.

23/X 1969. М. С. Бухтяк. Об одном частном классе $(2n-2)$-параметрических векторных полей в n-мерном аффинном пространстве.

13/XI 1969. Р. Н. Щербаков и В. В. Слухаев. Об одной дискуссии, имевшей место на Тбилисской геометрической конференции.

20/XI 1969. М. А. Чешкова. Геометрия многообразия M_{n-1} (L_{n-1}) в A_n.

27/XI 1969. В. М. Финкельштейн. (Кемерово). Безынтегральное представление двух четырехпараметрических полей направлений.

27/XI 1969. В. А. Труппов (Иркутск). О подмногообразиях Ψ_3 четырехпараметрического семейства нуль-пар в A_3.

4/XII 1969. М. А. Чешкова. О многообразиях M_{n-1} (L_{n-1}) в A_n.

25/XII 1969. Н. М. Онищук. Некоторые вопросы центроаффинной дифференциальной геометрии трехпараметрического семейства плоских элементов (неголономные Ψ_2).

5/II 1970. Е. Т. Ивлев. О многообразии пар линейчатых подпространств в P_n.

12/II 1970. Л. И. Магазинников. Пара центроаффинно наложимых линейчатых поверхностей в паре комплексов.

26/II 1970. Т. В. Лыжина. Конгруэнции прямых в трехмерном флаговом пространстве.

5/II 1970. Г. Е. Варламов. Дифференциальная геометрия двумерной поверхности в некоторых проективных пространствах.

12/III 1970. Л. З. Кругляков (Омск). Некоторые вопросы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей.

19/III 1970. Л. З. Кругляков (Омск). Конгруэнции прямых в P_n и семейства пар прямых в P_3.

26/III 1970. А. П. Ерохина. О преобразованиях Егорова в теории конгруэнций.

9/IV 1970. Г. В. Шуленина. О конгруэнции коник в P_3.

23/IV 1970. И. Г. Мулин (Абакан). Некоторые классы римановых пространств со специальной структурой тензора кривизны.

28/IV 1970. Т. И. Тулюпа (Киев). Общая теория комплекса прямых в пространствах постоянной кривизны.

7/V 1970. М. Р. Вайнтруб. О комплексах (3—3) окружностей в евклидовом пространстве.

14/V 1970. Н. В. Амишева. О многообразии $(m, m, n)^2$ в A_n.

21/V 1970. Г. П. Демина. Геометрия многообразия элементов Q, порождаемая канонической связностью.

28/V 1970. М. С. Бухтяк. Четырехпараметрическое векторное поле, «порожденные прямые» которого образуют комплекс.

4/VI 1970. В. В. Васенин. (Иркутск). О линейчатых поверхностях комплекса аффинных нормалей линейчатой гиперповерхности.

4/VI 1970. Л. В. Любишева. (Владимир). Дифференциальная геометрия линий и гиперповерхностей в полуевклидовых и полунеевклидовых пространствах.

4/VI 1970. Т. А. Семенова (Тамбов). Дифференциальная геометрия образов симметрии пространств с проективной метрикой.

11/VI 1970. А. Н. Лебедева (Иркутск). Бесконечно-малые преобразования линейчатых многообразий в пространствах постоянной кривизны.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

11/VI 1970. Т. Ф. Перевертаева (Иркутск). Линейчатая геометрия трехмерного центропроективного пространства.

17/IX 1970. Е. Т. Ивлев. О геометрической интерпретации свертки некоторых тензоров.

24/IX 1970. М. С. Бухтяк. Четырехпараметрическое поле направлений в трехмерном эквиаффинном пространстве.

8/X 1970. В. В. Слухаев. Стационарное движение идеального газа, для которого модуль скорости постоянен вдоль линии тока.

22/X 1970. Е. Т. Ивлев. О некоторых геометрических объектах n-семейства невырожденных нуль-пар в P_n.

29/X 1970. А. Е. Шиллеров. (Новосибирск). О четырехпараметрическом поле направлений в P_3.

12/XI 1970. И. А. Печников. Подмногообразия трехпараметрического семейства параболических цилиндров.

26/XI 1970. М. С. Бухтяк. Четырехпараметрические векторные поля в трехмерном аффинном пространстве.

24/XII 1970. Р. Н. Щербаков. Еще раз о методе репеража подмногообразий и его «критике» В. С. Малаховским.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Е. Варламов. О двумерной поверхности в шестимерном проективном пространстве 3
Г. П. Бочилло. О конгруэнции конусов в n-мерном проективном пространстве 13
Н. Т. Мочернюк. К дифференциальной геометрии многообразий алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве 27
Л. З. Кругляков. Репераж системы подмногообразий 2-семейства прямых в P_5 34
В. И. Матвеенко. Дифференциальная геометрия четырехпараметрических семейств коник в трехмерном проективном пространстве 40
Л. И. Магазинников. О некоторых допустимых кривых неголономного многообразия V_3' 48
Н. М. Онищук. Трехпараметрическое семейство плоских элементов в центроаффинном пространстве 54
В. А. Петин. К эквиаффинной теории двупараметрического многообразия плоских элементов 63
Н. В. Амишева. О конгруэнции эллипсов в эквиаффинном пространстве 74
М. Б. Исабеков. О многообразии E_n^n $(0, n+1)$ в A_{n+2} 79
В. П. Долговых. О триортогональной системе векторных полей . . . 89
В. М. Финкельштейн. Об одном поле круговых конусов 100
Гоеметрический семинар Н. Г. Туганова в Томском университете . . . 106

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК, ВЫП. 8.

Томск, Изд. ТГУ, 1972 г., 112 с.

Старший редактор **М. И. Сваровская.**
Редактор **Л. П. Цыганкова.**
Технический редактор **Э. Н. Страшкова.**
Корректоры **Е. В. Лукина** и **Т. К. Кюрс.**

К304301 Сдано в набор 15/IV-68 г. Подписано к печати 1/III-72 г.
Формат 70×108 1/16 Объем печ. л. 7; бум. л. 3,5; уч.-изд. л. 9,8.
Заказ 2328 Тираж 700 Цена 98 коп.

Издательство ТГУ, Томск-10, пр. Ленина, 36.
Областная типография Управления по печати, Томск, Советская, 47.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

1-212838

Цена 98 коп.

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00931857