# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ M|GI|N|∞

**Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева**

*Национальный исследовательский Томский государственный университет*
*Томск, Россия*
*E-mail: ekaterina_lisovs@mail.ru*

Работа посвящена исследованию системы массового обслуживания M|GI|N|∞, которая описывает обслуживание клиентов в банковском офисе. Получены формулы для аппроксимации распределения вероятностей, которые позволят определить временные характеристики, такие как время ожидания заявок в очереди, оптимальное число обслуживающих приборов, среднее время обслуживания и другие.

*Ключевые слова*: теория массового обслуживания, распределение вероятностей, рекуррентный поток.

## ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания с простейшим пуассоновским входящим потоком, с ограниченным числом обслуживающих приборов и конечной или бесконечной очередью часто используются для описания различных экономических процессов [3], для моделирования работы call-центров (центров обработки вызовов) [1, 2].

Система M|GI|N|∞, рассматриваемая в данной работе, описывает обслуживание клиентов в банковском офисе, а именно исследования интенсивности поступления клиентов, времени обслуживания, времени ожидания в очереди.

Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов или становится в очередь в случае, когда все приборы заняты. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $A(x)$, одинаковой для всех приборов.

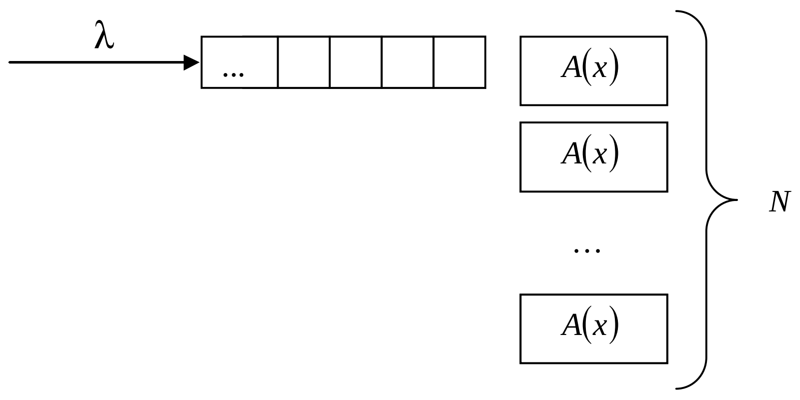


*Рис. 1.* Система M|GI|N|∞

Известно, что для системы M|M|N|K получены формулы Эрланга [4]. Вместе с тем, для произвольного времени обслуживания и бесконечной очереди полученная задача теоретически не решена, и представить аналитическое решение невозможно, поэтому ставится задача построения аппроксимации стационарного распределения вероятностей $P(i)$, $0 \le i < \infty$, числа заявок в рассматриваемой системе M|GI|N|∞.

## АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ M|GI|N|∞

Обозначим $\pi_i$ – аппроксимация распределения вероятностей $P(i)$, которые будем определять в виде составного распределения

$$\pi_i = \begin{cases} C_1 P_1(i), & 0 \le i \le N \\ C_2 P_2(i - N + 1), & i \ge N \end{cases}. \qquad (1)$$

Вероятности $P_1(i)$, $0 \le i \le N$ – вероятности числа занятых приборов в $N$-линейной СМО (M|GI|N|0) с потерями заявок, когда все приборы заняты. Тогда их можно определить формулами Эрланга [5]

$$P_1(i) = \frac{(\lambda a)^i}{i!} \Big/ \left( \sum_{i=0}^{N} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \right), \qquad (2)$$

где $a = \int_0^\infty (1 - A(x))dx$ – среднее время обслуживания.

Так как вероятности $P_2(i)$ определяются для случая, когда все приборы заняты, то блок занятых приборов представляем как один прибор, который обслуживает случайное время с функцией распределения $B(x)$. Поэтому вероятности $P_2(i)$, $i = 0,1,\ldots$, определим как вероятности числа заявок в однолинейной системе M|GI|1|∞ с ожиданием.

В таком случае, воспользуемся формулой Поллачека – Хинчина для производящей функции:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_2(n) = (1 - \lambda b) \frac{(1 - x) B^*(\lambda - \lambda x)}{B^*(\lambda - \lambda x) - x}. \qquad (3)$$

Для определения вида функции распределения $B(x)$ рассмотрим выходящий поток обслуженных заявок в случае, когда все $N$ приборов в системе заняты. На этом интервале занятости выходящий поток является суммой независимых рекуррентных потоков, определяемых одной и той же функцией распределения $A(x)$.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим сумму $N$ независимых рекуррентных потоков, с одинаковыми функциями распределения $A(x)$.

Пусть $\tau$ – величина перескока [5] суммарного потока. Тогда очевидно, что $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N\}$, где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ – независимые величины перескоков для суммируемых потоков.

Поэтому

$$P\{\tau > x\} = 1 - \frac{1}{b}\int_0^x (1 - B(z))dz = P\{\min\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N\} > x\} =$$

$$= P\{\tau_1 > x\}P\{\tau_2 > x\}...P\{\tau_N > x\} = \left(1 - \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(z))dz\right)^N .$$

Следовательно, для суммарного потока имеем

$$1 - \frac{1}{b}\int_0^x (1 - B(z))dz = \left(1 - \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(z))dz\right)^N ,$$

тогда, дифференцируя по $x$, получим

$$B(x) = 1 - Nb\left(1 - \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(z))dz\right)^{N-1} \frac{1}{a}(1 - A(x)).$$

Так как $\frac{1}{b} = N\frac{1}{a}$ [5], то для системы M|GI|N|∞ функция распределения длин интервалов суммарного потока имеет вид:

$$B(x) = 1 - (1 - A(x))\left(1 - \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(z))dz\right)^{N-1} , \qquad (4)$$

а ее плотность распределения имеет вид

$$b(x) = \left\{A^{'}(x)\left(1 - \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(z))dz\right) + \frac{N-1}{a}(1 - A(x))^2\right\}\left(1 - \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(z))dz\right)^{N-2} .$$

## РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЛАЧЕКА – ХИНЧИНА

Вероятности $P_2(i)$ можно найти с помощью обратного преобразования Фурье или раскладывая функцию (3) в ряд по степеням $x$.

Для нахождения вероятностей $P_2(i)$ вторым способом запишем следующее разложение

$$B^*(\lambda - \lambda x) = \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda x)z} dB(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} e^{-\lambda x z} dB(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \sum_{n-0}^\infty \frac{(\lambda z)^n}{n!} dB(z) = \sum_{n-0}^\infty x^n \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dB(z).$$

Обозначив

$$\beta_n = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dB(z),$$

получаем разложение вида

$$B^*(\lambda - \lambda x) = \sum_{n-0}^\infty x^n \beta_n .$$

Следовательно,

$$(1-x)B^*(\lambda-\lambda x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\beta_n-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\beta_n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\beta_n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n\beta_{n-1}=$$

$$=\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\beta_n-\beta_{n-1})=\sum_{n=0}^{\infty}x^n b_n\ ,$$

где $b_0=\beta_0$, $b_n=\beta_n-\beta_{n-1}$.

Знаменатель выражения (3) запишем в виде

$$\left(B^*(\lambda-\lambda x)-x\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\alpha_n\ . \tag{5}$$

Для нахождения $\alpha_n$ перепишем (5) в виде:

$$1=\left(B^*(\lambda-\lambda x)-x\right)\sum_{n=0}^{\infty}x^n\alpha_n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\alpha_n\sum_{n=0}^{\infty}x^n\beta_n-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\alpha_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}-\sum_{n=1}^{\infty}x^n\alpha_{n-1}=\alpha_0\beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}-\alpha_{n-1}.$$

Приравнивая в этом выражении коэффициенты при одинаковых степенях, получаем рекуррентные формулы:

$$\alpha_0=\frac{1}{\beta_0},\ \ \alpha_n=\frac{1}{\beta_0}\left[\alpha_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\beta_{n-k}\right]. \tag{6}$$

Учитывая разложение, для функции $G(x)$ можно записать выражение

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^nP_2(n)=(1-\lambda b)\frac{(1-x)B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x}=(1-\lambda b)\sum_{i=0}^{\infty}x^ib_i\sum_{i=0}^{\infty}x^i\alpha_i=$$

$$=(1-\lambda b)\sum_{i=0}^{\infty}x^i\sum_{k=0}^{i}\alpha_kb_{i-k}\ .$$

Откуда

$$P_2(i)=(1-\lambda b)\sum_{k=0}^{i}\alpha_kb_{i-k}\ .$$

## НАХОЖДЕНИЕ КОНСТАНТ

Значение величин $C_1$ и $C_2$ найдем из условия нормировка и условия «сшивания», которые можно записать в виде:

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=1,\\ C_1P_1(N)=C_2P_2(1),\end{cases}$$

откуда имеем

$$1=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i=C_1\sum_{i=0}^{N}P_1(i)+C_2\sum_{i=N+1}^{\infty}P_2(i-N+1)=C_1+C_2\sum_{n=2}^{\infty}P_2(n)=$$

$$=C_1+C_2\left(1-\left(P_2(0)+P_2(1)\right)\right),$$

получаем

$$C_1 = \frac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))},$$

$$C_2 = \frac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))}.$$

Таким образом, (1) принимает вид:

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))} P_1(i), & 0 \le i \le N; \\ \dfrac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))} P_2(i - N + 1), & i \ge N. \end{cases} \quad (7)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены формулы для аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в системе M|GI|N|∞ вида (1). Нетрудно показать, что для экспоненциально распределенного времени обслуживания полученные формулы примут известный вид [4].

Полученное распределение в дальнейшем позволяет определить временные характеристики, такие как время ожидания заявок в очереди, оптимальное число обслуживающих приборов, среднее время обслуживания и другие.

*Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown, L.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center: A Queueing-Science Perspective. / L. Brown, N. Gans, A. Mandelbaum et al. // Journal of the American Statistical Association. 2005. 100 p.

2. *Jouini, O.* Call Centers with Delay Information: Models and Insights / O. Jouini, Z. Akşin, Y. Dallery // Manufacturing & Service Operations Management, 13. 2011. P. 534–548.

3. *Дуплякин, В. М.* Моделирование системы массового обслуживания торгового предприятия / В. М. Дуплякин, Ю. В. Скогарева // Вестник ОГУ. 2009. № 1. С. 67–72.

4. *Клейнрок, Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. пер с англ. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. М. : Машиностроение, 1979. 432 с.

5. *Назаров, А. А.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.