Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ТОМ 212

Серия механико-математическая

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 9

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1972

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им.В.В.КУЙБЫШЕВА

Том 212 Серия механико-математическая

1212837

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 9

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск - 1972

513

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

"Геометрический сборник, вып.9" является внеочередным, дополнительным выпуском серии сборников, в которых публикуются работы, обсуждаемые на геометрическом семинаре им. Н.Г.Туганова при Томском университете.

Кроме работ по классической дифференциальной геометрии, в которых исследуются различные геометрические образы в аффинном, проективном и флаговом пространствах, в данном выпуске помещены две статьи, относящиеся к топологическим аспектам дифференциальной геометрии и посвященные рассмотрению метода Картана и его модификаций с точки зрения теории расслоенных пространств.

В выпуске имеется справка о деятельности семинара им. Н.Г.Туганова в 1971 г., а также развернутая реценсия на одну из публикаций сборника "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского университета).

Публикуемые работы рассчитаны, прежде всего, на специалистов-геометров, но представляют интерес и для более широкого круга математиков, а также могут оказаться полезными для аспирантов и студентов.

Редакторы выпуска: профессор Р.Н.Щербаков,
доценты Л.З.Кругляков и В.В.Слухаев

Индекс: 2-2-3

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

## От редакции

По не зависящим от редакции причинам выход в свет подготовленных в 1968-1971 гг. выпусков "Геометрического сборника" задержался. В 1972 г. выходит восьмой выпуск (Труды Томского университета, том 205), подготовленный в 1967 г.

Настоящий внеочередной выпуск выходит под номером 9, но содержит работы, написанные сравнительно недавно или даже специально для этого выпуска, так как авторы и редакция считают необходимым скорейшее их опубликование.

Кроме работ с традиционным для семинара содержанием в выпуск включены две работы, относящиеся к направлению, о котором мы еще в предисловии к четвертому выпуску говорили как о новом и важном, - к "дифференциальной топологии". Эти работы посвящены рассмотрению метода Картана и его модификаций с точки зрения теории расслоенных пространств.

В конце сборника приведена справка о работе семинара им. Н.Г.Туганова в 1971 г. ( о работе семинара в 1966 - 1971 гг. см. выпуск 8).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Р.Н.ЩЕРБАКОВ, В.В.СЛУХАЕВ

# РЕПЕРАЖ И РАССЛОЕНИЯ[x)]

Настоящее сообщение представляет собой попытку изложения сущности метода репереража подмногообразий (МРП) с помощью аппарата теории расслоенных пространств [1]. Мы надеемся, что на базе этого изложения можно будет получить некоторый синтез идей созданного Э.Картаном метода репереража [2] с идеями и методами глобальной дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии.

МРП представляет собой некоторую модификацию метода Картана, приспособленную для изучения подмногообразий геометрического образа [11]. Г.Георгиев и И.Попа [3] отметили, что изучение геометрического образа с выделенным фиксированным подмногообразием эквивалентно изучению другого геометрического образа с дополнительно оснащенным элементом (эквипараметрического многообразия). Однако МРП не сводится к изучению образа с выделенным фиксированным подмногообразием, а дает возможность изучать геометрический образ вместе со всей совокупностью подмногообразий (это можно свести к изучению всех сечений грассманова расслоения образа).

Известно [5], что процесс канонизации репера сводится к последовательному сокращению [1] главного расслоения-произведения $\xi=(B\times L, p, B)$, где $B$ – база (пространство параметров), $L$ – фундаментальная группа пространства. Это сокращение производится автоматически, если задано вложение $\xi_1 \to \xi$, где $\xi_1=(B\times H_1, p, B)$, $H_1$ – стационарная подгруппа элемента. Это вложение определяет геометрический объект $\Lambda_1$ расслоения $\xi_1$ [6], стационарная подгруппа точки слоя у которого есть $H_2 \subset H_1$. Этот объект возникает из объекта инфинитезимальной связности [6], [7] расслоения $\xi$. Процесс Картана позволяет (локально) сократить расслоение $\xi_1$ до $\xi_2=(B\times H_1, p, B)$. Получается последовательность расслоений [5]

---

x) Доклад, прочтенный на заседании секции геометрии Третьей республиканской конференции математиков Белоруссии в июне 1971 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$\xi \leftarrow \xi_1 \leftarrow \dots \leftarrow \xi_k$ и последовательность подгрупп [4] $L \leftarrow H_1 \leftarrow \dots \leftarrow H_k$. Если при некотором $k$ подгруппа $H_k$ - единичная, то и соответствующее расслоение $\xi_k$ - единичное (изоморфное расслоению $(B, 1_B, B)$) и сокращение $\xi$ до $\xi_k$ определяет сечение в $\xi$, которое является каноническим репером образа [5]. При построении канонического репера возникает последовательность геометрических объектов $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$, которые являются объектами расслоений [6] $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ соответственно.

В методе продолжений и охватов [8] обычно производится только первое сокращение $\xi_1 \to \xi$ и все геометрические объекты, которые при этом возникают, являются объектами расслоения $\xi_1$ (или $\xi$). Таким образом, проблема эквивалентности геометрических образов сводится к проблеме эквивалентности для геометрических объектов, но для решения этой последней необходимо знать полную систему инвариантов некоторого геометрического объекта. Эта проблема, в общем случае, до сих пор не решена (она сводится к проблеме эквивалентности нелинейных представлений групп Ли [10]). При помощи метода канонического репера проблема эквивалентности решается тем, что у последнего объекта группа преобразований - единичная и все его компоненты являются инвариантами геометрического образа, образующими полную систему инвариантов. Это дает возможность решить проблему эквивалентности (локально) [5].

Пусть $P = L \bmod H_1$ - однородное пространство и $\dim P = N$. В каждой точке $x \in P$ определим касательное векторное пространство $T_x$ и грассманово многообразие [1] $G_x(N, k)$ всех его $k$-мерных подпространств. Построим далее грассманово расслоение [9] $g(N, k)$, базой которого является $P$, а слоем $\pi^{-1}(x) = G_x(N, k)$. Локально его можно представить как $g(N,k) = (P \times G(N,k), \pi, P)$. Действие группы $L$ на $P$ естественным образом продолжается на касательное расслоение над $P$, а следовательно, и на грассманово расслоение над $P$. Если в $P$ выделено $m$-мерное подмногообразие [9] $\Phi_m$ (геометрический образ), то ему соответствует подрасслоение $g(m, k)$ расслоения $g(N, k)$ - грассманово расслоение образа $\Phi_m$. Локально оно представляется в виде $g(m,k) =$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$= (\Phi_m \times G(m,k),\ \pi,\ \Phi_m)$ (Конечно, все это имеет смысл только при $k < m$).

При помощи операции построения индуцированного расслоения [1] продолжим пару отображений

$$\begin{array}{ccc} & & \Phi_m \times L \\ & & \downarrow \\ \Phi_m \times G(m,k) & \xrightarrow{\pi} & \Phi_m \end{array}$$

до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Phi_m \times G(m,k) \times L & \xrightarrow{\pi^*} & \Phi_m \times L \\ \downarrow p^* & & \downarrow p \\ \Phi_m \times G(m,k) & \xrightarrow{\pi} & \Phi_m \end{array}$$

Вертикальные и горизонтальные пары стрелок образуют морфизмы расслоений, в левом верхнем углу - пространство расслоения реперов над пространством грассманова расслоения. Построим методом Э.Картана канонический репер пространства $F_{m+h} = \Phi_m \times G(m,k)$, $h = \dim G(m,k)$, рассматриваемого как геометрический образ в $P \times G(N,k)$.

Получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} F_{m+h} \simeq F_{m+h} \times \{e\} & \xrightarrow{\varphi} & F_{m+h} \times L & \xrightarrow{\pi^*} & \Phi_m \times L \\ \downarrow p' & & \downarrow p^* & & \downarrow p \\ F_{m+h} & \xrightarrow{id} & F_{m+h} & \xrightarrow{\pi} & \Phi_m \end{array} \qquad (*)$$

где $\varphi$ - сокращение, $\{e\}$ - единичная подгруппа группы $L$. Очевидно, что сквозное отображение $\pi^* \circ \varphi$ определяет подрасслоение в $\xi = (\Phi_m \times L,\ p,\ \Phi_m)$ (не обязательно главное и не обязательно сокращение). Обозначим это подрасслоение $R_k = (\Phi_m \times K_h,\ p,\ \Phi_m)$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где $\Phi_m \times K_h = J_m(\pi^* \cdot \varphi)$, $K_h \simeq L \cap J_m(\pi^* \cdot \varphi)$ . Это подрасслоение назовем "полуканоническим репером класса $k$ образа $\Phi_m$ ". Каждое сечение $\sigma$ в $R_k$ определяет сечение в $g(m,k)$ и обратно, т.е. каждому подвижному реперу [11] образа $\Phi_m$ , являющемуся сечением $\sigma$ в $R_k$ , соответствует распределение [9] $\sigma^*$ на $\Phi_m$ .Каждое такое распределение определяет подмногообразие $\Psi_k$ [11] образа $\Phi_m$ (или "пфаффово подмногообразие размерности $k$ "), представляющее собой совокупность всех неособых одномерных интегральных многообразий распределения $\sigma^* : \Phi_m \longrightarrow \Phi_m \times G(m,k)$ . Конечно, пфаффово подмногообразие не является подмногообразием в классическом смысле [9]. Таким образом, сечения $\sigma$ расслоения $R_k$ и пфаффовы подмногообразия размерности $k$ образа $\Phi_m$ (порождаемые сечениями $\sigma^*$ расслоения $g(m,k$ ) находятся в биективном соответствии. Каждое сечение в $R_k$ называется "полуканоническим репером образа $\Phi_m$ с выделенным пфаффовым подмногообразием размерности $k$ ". Это определение по существу совпадает с определением из [11], где вместо термина "пфаффово подмногообразие" употребляется термин "подмногообразие $\Psi_k$ " (первый представляется более удачным).

Из сказанного выше следует, что фиксация на геометрическом образе $\Phi_m$ некоторого пфаффова подмногообразия эквивалентно построению геометрического образа $\Phi'_m$ , элементом которого является пара $(x,\gamma)$, $x \in \Phi_m$, $\gamma \in G_x(m,k)$ (эквипараметрического многообразия [3]). Диаграмма $(*)$ показывает связь между каноническим репером многообразия $F_{m+h}$ и полуканоническим репером $\Phi_m$ (левый квадрат - канонический репер $F_{m+h}$ , правый - полуканонический репер $\Phi_m$ , сечение $\sigma^* : \Phi_n \longrightarrow F_{m+h}$ порождает сечение $\sigma : \Phi_n \longrightarrow \Phi_m \times K_h$ , являющееся полуканоническим репером $\Phi_m$ с выделенным $\Psi_k$ или каноническим репером эквипараметрического многообразия $\Phi'_m$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства, М., "Мир", 1970.
2. Э.Картан. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, М., Изд. МГУ, 1963.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



3. Gh. Gheorghiev, J. Popa. Sur la méthode du „repérage" et la théorie des variétes „équiparemétriques," C.R. Acad. Sci., Paris, 263, A, 1966, 911 - 914.
4. Г.Георгиев. Замечания в связи с картановой теорией подвижного репера и с ее некоторыми приложениями, Anal. ştiin. Univ. „Al. I. Cuza", Iasi, s. I, XIII, 2, 1967, 329 - 348.
5. A. Švec. Cartan's method of specialization of frames. Czechoslovak Mathematical Journal, 16(91), 4, 1966, 552 - 599.
6. J. Kolář. On extended connections. Comment Math. Univ. Carol., Praha, 9, 4, 1968, 687 - 690.
7. А.Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономий, М., ИЛ, 1960.
8. Г.Ф.Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. математ. об-ва, 2, 1953, 275 - 382.
9. Р.Бишоп, Р.Криттенден. Геометрия многообразий, М., "Мир," 1967.
10. Д.Стоянов, Хр.Христов. Нелинейные представления группы Ли. Дубна, 1968.
11. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179 - 194.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В.В.СЛУХАЕВ

# О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА РАССЛОЕННОМ МНОГООБРАЗИИ

В работе изучаются дифференциальные системы на пространстве расслоения и на базе расслоенного многообразия $\xi$. Показывается, что задание дифференциальной системы на пространстве расслоения порождает морфизм пучка ростков локальных сечений расслоения $\xi$ в пучок ростков локальных сечений грассманова расслоения над базой. Вводится понятие псевдобазовой системы, для которой этот морфизм постоянен.

Если дифференциальная система задана на базе пространства со связностью, то с ней ассоциируется последовательность полей геометрических объектов [1]. Эта последовательность (в отличие от построенной в [2]) является последовательностью полей тензоров в смысле [1](или геометрических величин в смысле [3]).

§1. Дифференциальные системы на расслоенном многообразии. Для каждого многообразия $M$ обозначим: $\tau(M) = (TM, \pi_M, M)$ - его касательное расслоение, $\tau^*(M) = (T^*M, \pi_M^*, M)$ - кокасательное расслоение, а $\gamma_m(M) = (G_mM, q_M, M)$ и $\gamma_m^*(M) = (G_m^*M, q_M^*, M)$ - ассоциированные с ними грассмановы расслоения. Точками $G_mM$ являются все $m$-мерные подпространства $\varrho_m$ всех касательных пространств $T_xM$ во всех точках $x \in M$, а проекция $q_M$ определяется формулой $q_M : \varrho_x \longmapsto x$. Расслоение $\gamma_m^*(M)$ определяется аналогично. Для каждого расслоения $\eta$ над $M$ посредством $\Gamma[\eta]$ будем обозначать пучок [4] его локальных сечений.

Дифференциальной системой (или системой Пфаффа) на многообразии $M$ будем называть кораспределение [5], т.е. векторное подрасслоение кокасательного расслоения, имеющее ту же самую базу $M$. С каждой дифференциальной системой $\theta$ связано аннулирующее ее распределение [5] $\varrho = Ann\,\theta$ и пфаффово подмногообразие [6], представляющее собой совокупность всех интегральных кривых распределения $\varrho$. Раз-

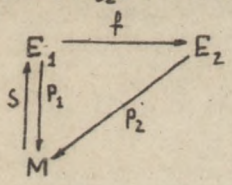
Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



мерности расслоений $\theta$ и $\varrho$, очевидно, связаны соотношениями $\dim\theta = \operatorname{codim}\varrho$, $\operatorname{codim}\theta = \dim\varrho$. Каждую дифференциальную систему можно отождествить с сечением расслоения $\gamma_m^*(M)$ при некотором $m$, а каждое распределение - с сечением расслоения $\gamma_m(M)$. Поэтому пучок $\Gamma[\gamma_m^*(M)]$ будем называть "пучком ростков дифференциальных систем", а пучок $\Gamma[\gamma_m(M)]$ - "пучком ростков пфаффовых подмногообразий". Как обычно, пучок $\Gamma[\tau^*(M)]$ будем называть "пучком ростков дифференциальных форм".

Отметим, что в литературе дифференциальной системой иногда называют распределение $Ann\,\theta$ (см. напр. [7]), но так как $\theta$ и $Ann\,\theta$ вполне определяют друг друга, то производимое здесь изменение терминологии несущественно. Кроме того, понимание дифференциальной системы как кораспределения лучше согласуется с определением, принятым в теории дифференциальных уравнений (см. [8]).

Пусть $\eta_1 = (E_1, p_1, M)$ и $\eta_2 = (E_2, p_2, M)$ - расслоенные многообразия над $M$, т.е. $\eta_1$ и $\eta_2$ имеют типовой слой, являющийся многообразием. Каждый морфизм [9] расслоений $(f, 1_M): \eta_1 \to \eta_2$ порождает морфизм пучков $\Gamma(f): \Gamma[\eta_1] \to \Gamma[\eta_2]$ согласно диаграмме




(1)

Обратное справедливо не всегда. Именно, морфизм пучков $F: \Gamma[\eta_1] \to \Gamma[\eta_2]$ порождается некоторым морфизмом $(f, 1_M): \eta_1 \to \eta_2$, если и только если для любых двух сечений $s, s': M \to E_1$ и любой точки $x \in M$ из равенства $s(x) = s'(x)$ следует равенство $F(s)(x) = F(s')(x)$.

В терминах локальных координат это означает следующее. Пусть $(x^i)$ - карта на $M$, $(y^i, u^{\alpha_1})$, $(z^i, v^{\alpha_2})$ - карты на $E_1$ и $E_2$, согласованные с проекциями, т.е. $y^i = x^i \circ p_1$, $z^i = x^i \circ p_2$. Сечение $s_1: M \to E_1$ задается набором функций $u^{\alpha_1} = u^{\alpha_1}(y^i)$. Ему соответствует набор функций на

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



базе $w^{\alpha_1} = u^{\alpha_1} \circ s_1$. Сечение $s_2 : M \to E_2$ определяется набором функций $v^{\alpha_2} = v^{\alpha_2}(z^i)$, которому на $M$ соответствует набор $w^{\alpha_2} = v^{\alpha_2} \circ s_2$. Морфизм пучков $F$ определяется заданием соответствия $F : w^{\alpha_1} \longmapsto w^{\alpha_2} = w^{\alpha_2}(x^i, w^{\alpha_1}, \partial w^{\alpha_1}/\partial x^i, \partial^2 w^{\alpha_2}/\partial x^i \partial x^j, \dots)$. Он порождает морфизм расслоений, если и только если $F$ имеет вид $w^{\alpha_2} = w^{\alpha_2}(x^i, w^{\alpha_1})$. Отображение $f$ в этом случае определяется формулой $f(s(x)) = F(s)(x)$, в которой правая часть не зависит от выбора сечения $s$.

Рассмотрим теперь расслоенное многообразие $\xi = (E, p, B)$ дифференциальную систему $\theta_m$ на $E$ и исследуем связь между $\theta_m$ и дифференциальными системами на $B$ (ср. [10]).

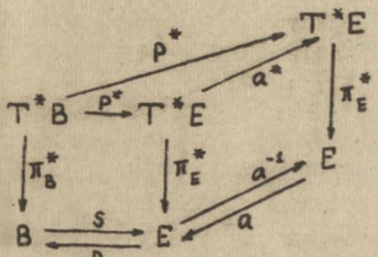
Прежде всего, заметим, что проекция $p$ порождает инъективный морфизм многообразий $p^* : T^*B \to T^*E$ (см. [5], §4.7). Легко проверить, что пара $(p^*, s)$, где $s : B \to E$ - произвольное сечение расслоения $\xi$ образует инъективный морфизм расслоений $(p^*, s) : \tau^*(B) \to \tau^*(E)$. Произвольность сечения $s$ означает, что при любом выборе $s$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^*B & \xrightarrow{p^*} & T^*E \\ \downarrow \pi_B^* & & \downarrow \pi_E^* \\ B & \underset{p}{\overset{s}{\rightleftarrows}} & E \end{array} \qquad (2)$$

коммутативна. Заметим еще, что морфизм $p^*$ "устойчив" относительно морфизмов расслоения $\tau^*(E)$, порожденных диффеоморфизмами многообразия $E$ в себя. Каждый диффеоморфизм $a : E \to E$ порождает морфизм $(a^*, a^{-1}) : \tau^*(E) \to \tau^*(E)$, где $a^*$, как обычно, продолжение морфизма $a$ на формы. Устойчивость морфизма $p^*$ означает, что диаграмма

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru






(3)

коммутативна. Это следует из того, что композиция $a^{-1} \circ s$ есть сечение расслоения $\xi$. В силу инъективности морфизма $(\rho^*, s)$ и устойчивости отображения $\rho^*$ существует морфизм пучков $\Gamma(\rho^*) : \Gamma[\tau^*(B)] \longrightarrow \Gamma[\tau^*(E)]$.

Продолжая действие отображения $\rho^*$ на грассмановы многообразия касательных пространств, получим инъективный морфизм расслоений $(\gamma_m^*(\rho^*), s) : \gamma_m^*(B) \longrightarrow \gamma_m^*(E)$, где $s : B \longrightarrow E$ - сечение, а отображение $\gamma_m^*(\rho^*) : G_m^* B \longrightarrow G_m^* E$ устойчиво относительно морфизмов расслоения $\gamma_m^*(E)$, порожденных диффеоморфизмами многообразия $E$ в себя (т.е. имеет место аналогичная (3) коммутативная диаграмма).

Дифференциальные формы $\varphi \in \mathrm{Im}\,\Gamma(\rho^*)$ и дифференциальные системы $\theta_m \in \mathrm{Im}\,\gamma_m^*(\rho^*)$ будем называть "псевдобазовыми". Морфизм $(\gamma_m^*(\rho^*), s)$ порождает инъективный морфизм пучков $\Gamma(\gamma_m^*(\rho^*)) : \Gamma[\gamma_m^*(B)] \longrightarrow \Gamma[\gamma_m^*(E)]$. Отметим, что не каждое сечение псевдобазовой дифференциальной системы есть псевдобазовая форма, но каждая псевдобазовая система имеет локальный базис из псевдобазовых форм.

Назовем дифференциальную систему "горизонтальной", если каждая принадлежащая ей дифференциальная форма горизонтальна [5]. Иначе говоря, $\theta_m$ горизонтальна, если ее аннулятор $Ann\,\theta_m$ содержит все вертикальные (т.е. касательные к слоям) векторы.

Теорема 1. Задание дифференциальной системы $\theta_m$ на пространстве $E$ расслоенного многообразия $\xi = (E, \rho, B)$ определяет некоторый морфизм пучков $F(\theta_m) : \Gamma[\xi] \longrightarrow \Gamma[\gamma_m^*(B)]$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Морфизм $F(\theta_m)$ порождает морфизм расслоений $(f(\theta_m), 1_B): \xi \to \gamma_m^*(B)$, если и только если система $\theta_m$ горизонтальна. Морфизм $F(\theta_m)$ постоянен, если и только если система $\theta_m$ – псевдобазовая.

Доказательство. Морфизм $F(\theta_m)$ определим следующим образом: для каждого сечения $s \in \Gamma[\xi]$ и каждой формы $\varphi \in \Gamma[\gamma_m^*(E)]$ положим $F(\varphi)(s) = s^*(\varphi)$. В силу линейности $s^*$ на каждом касательном пространстве $T_z E$ многообразия $E$ в точке $z \in E$, определено отображение $F(\theta_m)(s) = s^*(\theta_m)$, которое является морфизмом пучков. Если морфизм $F(\theta_m)$ порождает морфизм $(f(\theta_m), 1_B): \xi \to \gamma_m^*(B)$ то $F(\theta_m)(s_1)(x) = F(\theta_m)(s_2)(x)$, как только $s_1(x) = s_2(x)$. Но тогда для любой формы $\varphi \in \theta_m$ имеем $s_1^*(\varphi)(x) = s_2^*(\varphi)(x)$ как только $s_1(x) = s_2(x)$. Отсюда следует горизонтальность $\varphi$. Обратное проверяется непосредственным вычислением. Если система $\theta_m$ – псевдобазовая, то у нее существует локальный базис из псевдобазовых форм. Для каждой из таких форм морфизм $F(\varphi): \xi \to \tau^*(B)$ постоянен, следовательно, постоянен и морфизм $F(\theta_m)$.

Оставшаяся часть теоремы (утверждение, обратное к третьему) вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть задан морфизм пучков $F(\theta_m)$, порождающий морфизм расслоений $(f(\theta_m), 1_B)$. Рассмотрим локальную карту $(U, x^i)$ на $B$ и дифференциальную систему $F(\theta_m)(s)$ на $B$. Пусть $(\alpha_1^u, \ldots, \alpha_m^u)$ – базис этой системы над $U$, а $s^{-1}: \mathrm{Im}\, s \to B$ – отображение, обратное к сечению $s$. Пусть $\beta_j^u = (s^{-1})^*(\alpha_j^u)$ – формы на $\mathrm{Im}\, s$ (Здесь $j = 1, 2, \ldots, m$ Пусть $i: \mathrm{Im}\, s \to E$ – вложение, а $\theta_m^u$ – дифференциальная система, натянутая на все горизонтальные формы $\varphi_i$ на $\rho^{-1}(U)$, удовлетворяющие условию: $i^*(\varphi_i)(z) = \beta_i^u(z)$ где $z \in \mathrm{Im}\, s$. Тогда $\theta_m | U = \theta_m^u$.

Доказательство леммы. Так как морфизм пучков $F(\theta_m)$ порождает морфизм расслоений, то формы $\varphi_i$ определяются в каждой точке единственным образом. Поэтому на $\rho^{-1}(U)$ можно определить дифференциальную систему $\theta_m^u$, натянутую на формы $\varphi_i$. Легко проверить, что $Ann\, \theta_m^u = Ann(\theta_m | U)$, а следовательно, $\theta_m^u = \theta_m | U$. Лемма доказана.

Если морфизм $F(\theta_m)$ постоянен, то $F(\theta_m)(s)$ – дифферен

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



циальная система на базе, не зависящая от выбора сечения. Тогда $\alpha_i^u$ – некоторые вполне определенные дифференциальные формы на базе, и $\varphi_i = p^*(\alpha_i^u)$, так как значения этих форм для любого вектора в любой точке $z \in E$ совпадают (это проверяется вычислением). Поэтому формы $\varphi_i$ – псевдобазовые, и система $\theta_m$ является псевдобазовой. Теорема доказана.

Теорема 2. Горизонтальная дифференциальная система $\theta_m$ является псевдобазовой, если и только если она инвариантна относительно всех локальных диффеоморфизмов $(g, 1_B)$ расслоения $\xi$ в себя, т.е. если $\theta_m = g^*(\theta_m)$.

Доказательство. Для псевдобазовой системы существует локальный базис из псевдобазовых форм $\varphi_i$, для которых $\varphi_i(g(z)) = g^*(\varphi_i)(z)$. Все остальные формы являются (локально) линейными комбинациями базисных. Для них справедливо $\lambda^i(g(z))\varphi_i(g(z)) = \lambda^i(z) g^*(\varphi_i)(z) \in \theta_m(z)$, т.е. псевдобазовая система инвариантна относительно диффеоморфизмов $(g, 1_B): \xi \to \xi$. Обратно, предположим, что система инвариантна относительно диффеоморфизмов расслоения $\xi$ в себя. Найдем морфизм $F(\theta_m): \Gamma[\xi] \to \Gamma[\gamma_m^*(B)]$. Пусть $s \in \Gamma[\xi]$ – локальное сечение, а $\varphi_i$ – локальный базис системы $\theta_m$, тогда $s^*(\varphi_i)$ – локальный базис системы $F(\theta_m)(s)$. Для любого сечения $s'$ найдется такой (может быть, локальный) диффеоморфизм $(g, 1_B): \xi \to \xi$, что $s' = g \cdot s$. Тогда $(s')^* = s^* \cdot g^*$ и в силу линейности $g^*$ и $s^*$ получаем, что $F(\theta_m)(s) = F(\theta_m)(s')$ для любой области $U \subset B$, на которой определены $s$ и $s'$. Отсюда следует, что морфизм $F(\theta_m)$ – постоянный и система $\theta_m$ – псевдобазовая.

Теорема 3. Если $\xi$ – главное $L$ – расслоение, а $R_a$ – правый сдвиг, производимый на $E$ элементом $a \in L$, то для того, чтобы система $\theta_m$ была псевдобазовой, достаточно потребовать инвариантность ее относительно всех сдвигов.

Доказательство вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть $\varphi$ – горизонтальная форма на $E$, а $(g_1, 1_B), (g_2, 1_B)$ – диффеоморфизмы $\xi \to \xi$. Пусть для некоторой точки $z$ справедливо $g_1(z) = g_2(z)$, тогда значения форм $g_1^*(\varphi)$ и $g_2^*(\varphi)$ в точке $z$ одинаковы.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Лемма доказывается непосредственным вычислением в локальных координатах.

Доказательство теоремы вытекает из леммы, так как для каждой точки $z \in E$ и каждого диффеоморфизма $(g, 1_B)$ можно найти такой сдвиг $R_a$, что $g(z) = R_a(z)$.

В заключение параграфа отметим, что так как псевдобазовая система $\theta_m$ имеет локальный базис из псевдобазовых форм, то всякая система из $m$ линейно независимых форм, принадлежащих $\theta_m$, эквивалентна [11] системе из $m$ псевдобазовых форм. Отсюда следует, что, если $(x^i)$ - карта на $B$, $(y^i, u^\alpha)$ - карта на $E$, согласованная с $(x^i)$ т.е. $y^i = x^i \circ p$, то характеристические переменные [11] $v^t$ системы форм $\varphi_s \in \theta_m$ $(s = 1,2,\dots,m)$ имеют вид $v^t = v^t(y^i)$. Отсюда следует, что характеристическая система форм Пфаффа [11] для системы уравнений Пфаффа $\theta^j = 0$, где $\theta^j$ - базис псевдобазовой системы $\theta_m$, эквивалентна системе псевдобазовых форм.

§2. Дифференциальные системы на базе пространства со связностью. Следуя [12] пространством со связностью будем называть систему $P = (\eta, f, \xi, \Omega)$, где $\eta = (Q, q, B)$ - главное $H$- расслоение, $\xi = (E, p, B)$ - главное $L$ - расслоение, являющееся расширением [9] расслоения $\eta$, морфизм $(f, 1_B): \eta \to \xi$ - вложение, $\Omega$ - связность [5] на $\xi$. Пусть $\mathcal{L}$ - алгебра Ли группы Ли $L$, а $\mathcal{H}$ - алгебра Ли группы $H$. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{L} \bmod \mathcal{H}$ - фактор-пространство, а $p: \mathcal{L} \to \mathcal{F}$ - естественная проекция. Тогда $\omega = p \circ \Omega$ - тензорная [12] 1-форма типа $Ad$ на $\eta$ со значениями в $\mathcal{F}$.

Далее будем рассматривать только такие пространства со связностью, у которых $\dim \mathcal{F} \geqslant \dim B = n$.

Предположим теперь, что на базе $B$ пространства со связностью задана дифференциальная система $\theta_m$. На $Q$ ей соответствует псевдобазовая дифференциальная система $\Theta_m = q^*(\theta_m)$. Эта система инвариантна относительно правых сдвигов $R_a$, производимых на $Q$ элементами $a \in H$. Поэтому

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\omega(dR_a \cdot \mathrm{Ann}\,\Theta_m) = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \cdot \omega(\mathrm{Ann}\,\Theta_m).$$

Отсюда следует, что задание дифференциальной системы на базе определяет отображение $\varphi: Q \to \mathcal{G}(n-m, \mathcal{F})$, где $\mathcal{G}(n-m, \mathcal{F})$ – грассманово многообразие всех $(n-m)$-мерных подпространств пространства $\mathcal{F}$. Это отображение удовлетворяет условию $\varphi(R_a \cdot z) = \mathrm{Ad}(a^{-1}) \cdot \varphi(z)$ для всех $z \in Q$, т.е. определяет поле геометрических объектов в непрямой форме [13]. Это поле геометрических объектов, очевидно, является полем геометрических величин в смысле [3] (или полем тензоров в смысле [2]). Полю геометрических объектов в непрямой форме соответствует поле геометрических объектов в прямой форме [13], т.е. сечение расслоенного пространства $\eta[\mathcal{G}(n-m, \mathcal{F})]$.

Вместо поля геометрических объектов $\varphi$ можно рассматривать поля $\lambda$ и $\mu$, получающиеся следующим образом. Пусть $V(n-m, \mathcal{F})$ – многообразие Штиффеля всех $(n-m)$-реперов пространства $\mathcal{F}$, а $V^*(m, \mathcal{F})$ – двойственное к нему многообразие всех $m$-кореперов пространства $\mathcal{F}$ (их можно рассматривать как внутренее и внешнее порожденные многообразия [14], ассоциированные с $\mathcal{G}(n-m, \mathcal{F})$). Пусть $p_V: V(n-m, \mathcal{F}) \to \mathcal{G}(n-m, \mathcal{F})$ и $p_{V^*}: V^*(m, \mathcal{F}) \to \mathcal{G}(n-m, \mathcal{F})$ – естественные проекции, а $s_V$ и $s_{V^*}$ – сечения. Тогда $\mu = s_V \circ \varphi$ и $\lambda = s_{V^*} \circ \varphi$ – поля геометрических объектов в непрямой форме. Ясно, что каждое из этих полей охватывает [1] поле $\varphi$.

Особенно удобно для вычислений использовать поле $\lambda$, как будет показано в следующем параграфе.

§3. Вычисления в локальных координатах. Пусть $e_i$ – базис пространства $\mathcal{F}$. Форма $\omega$ в локальных координатах имеет вид

$$\omega = \omega^i \otimes e_i,$$

где $\omega^i$ – горизонтальные формы на $Q$, удовлетворяющие структурным уравнениям [1]

$$d\omega^i = C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k + 2C^i_{j\alpha}\omega^j \wedge \Omega^\alpha + R^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \qquad (4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где $\Omega^\alpha$ - вторичные [1] формы связности. Они удовлетворяют условию $\Omega^\alpha - \pi^\alpha \equiv 0 (mod\, \omega^i)$, где $\pi^\alpha$ - фундаментальные [5] формы на $Q$. Посредством $R^i_{jk}$ обозначен объект кривизны.

Пусть базисом псевдобазовой системы $\Theta$ на $Q$ является система форм

$$\theta^p \overset{def}{=} \lambda^p_i \omega^i \quad (p = 1,2,\ldots,m). \tag{5}$$

Ясно, что коэффициенты $\lambda^p_i$ являются локальными координатами геометрического объекта $\lambda$. Дифференциалы координат $\lambda^p_i$ должны удовлетворять тождествам, которые могут быть получены из следующих соображений.

Так как дифференциальная система $\Theta^p$ - псевдобазовая, то локальные координаты базы являются ее характеристическими переменными, а следовательно, характеристическая система уравнений Пфаффа [11], [15] для системы $\Theta^p = 0$ может содержать только уравнения вида

$$A_i \omega^i = 0. \tag{6}$$

Характеристическая система уравнений Пфаффа для дифференциальной системы $\Theta_m$, вычисленная обычным способом, имеет вид

$$\begin{aligned} &\omega^i = 0, \\ &d\lambda^p_j - 2\lambda^p_i C^i_{j\alpha} \Omega^\alpha = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

(Предполагается, что все $\lambda^p_j$ отличны от нуля).
Так как каждое из уравнений системы (7) должно иметь вид (6), то

$$d\lambda^p_j - 2\lambda^p_i C^i_{j\alpha} \Omega^\alpha = \lambda^p_{ij} \omega^j. \tag{8}$$

Этим тождествам должны удовлетворять $d\lambda^p_i$, если система $\Theta_m$ - псевдобазовая.

Отсюда следует, что

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\delta\lambda_j^p - 2\lambda_i^p C_{j\alpha}^i \pi^\alpha = 0, \qquad (9)$$

где $\delta\lambda_j^p - d\lambda_j^p \equiv 0 (mod\,\omega^i)$. Из равенств (8) или (9) еще раз следует, что объект $\lambda_i^p$ является тензором [1]. Объект $\varphi$ может быть получен, если, пользуясь (5), вычислить грассмановы координаты системы $\Theta_m$. Используя (9), можно получить аналогичные формулы для локальных координат объекта $\varphi$. После того как получено поле геометрических объектов первого порядка $\lambda$, поля объектов высших порядков могут быть построены обычным способом [1].

Заметим, что обычно (см.напр. [2]) вместо объекта $\varphi$ пользуются эквивалентным ему объектом $\Lambda$, который получается, если систему уравнений $\Theta^p = 0$ разрешить относительно максимально возможного количества форм $\omega^i$, т.е. записать систему $\Theta^p = 0$ в виде

$$\omega^{i_1} - \Lambda_{i_2}^{i_1} \omega^{i_2} = 0$$

(при этом, конечно, предполагается, что некоторый определитель матрицы $\|\lambda_i^p\|$ отличен от нуля). Этот объект (в общем случае) уже не является тензором. Отметим, что объекты $\varphi$ и $\Lambda$ охватываются объектом $\lambda$.

В качестве приложения вычислим с помощью объекта $\lambda$ объект неголономности системы $\Theta_m$. Условия интегрируемости системы уравнений Пфаффа $\Theta^p = 0$ имеют вид

$$d\Theta^p \wedge \Theta^1 \wedge \ldots \wedge \Theta^m = 0$$

или

$$\tilde{\lambda}_{[jk_0}^p \lambda_{k_1}^1 \ldots \lambda_{k_m]}^m = 0,$$

где $\tilde{\lambda}_{jk_0}^p = \lambda_{jk_0}^p - \lambda_i^p C_{jk_0}^i - \lambda_i^p R_{jk_0}^i$. Отсюда следует, что объект неголономности дифференциальной системы $\Theta_m$ имеет вид

$$S_{[jk_0k_1\ldots k_m]}^p = \tilde{\lambda}_{[jk_0}^p \lambda_{k_1}^1 \ldots \lambda_{k_m]}^m$$

и является тензором.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



## ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Ф.Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, т.2, 1953, 275 - 382.
2. Г.Ф.Лаптев. Распределения касательных элементов. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, т.3, 1971, 29 - 48.
3. Я.А.Схоутен. Тензорный анализ для физиков. М., "Наука", 1965.
4. Р.Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. М., ИЛ, 1961.
5. Р.Бишоп, Р.Криттенден. Геометрия многообразий. М., "Мир", 1967.
6. Р.Н.Щербаков, В.В.Слухаев. Реперы и расслоения. Данный сборник, 5-9.
7. С.Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. М., "Мир", 1970.
8. Д.Спенсер. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Математика, сб. переводов, 14:2, 1970, 66-90; 14:3, 1970, 99-126.
9. Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства. М., "Мир", 1970.
10. В.С.Малаховский. Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.2, Калининград, 1971, 5 - 19.
11. П.К.Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.-Л. ГИТТЛ, 1947.
12. A. Švec. Cartan's method of specialization of frames. Чехословацкий математ. ж., 16, №4, 1966, 552 -599.
13. I. Kolář. Geometric objects of submanifolds of space with fundamental Lie pseudogroup. Comment. Math. Univ. Carol., 11, №2, 1970, 227 - 234.
14. Л.З.Кругляков. О многообразиях, ассоциированных с семейством $d$-плоскостей в $P_N$. Материалы второй научной конф. по матем. и мех., Томск, 1972, 66 - 68.
15. С.П.Фиников. Метод внешних форм Картана, М.-Л., ГИТТЛ, 1948.

Поступила 10 марта 1972 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

А.А.ЛУЧИНИН

# О ПАРАХ $m$-ПОВЕРХНОСТЕЙ В $n$-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в $n$-мерном проективном пространстве пару $m$-поверхностей $S_m$ и $S_m^1$, между которыми установлено точечное взаимнооднозначное соответствие, причем будем рассматривать случай, когда касательные плоскости в соответствующих точках рассматриваемых поверхностей пересекаются по $p$-плоскости $L_p$, т.е. случай

$$n = 2m - p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{1}$$

Введем следующую систему индексов:

$$\begin{aligned}
&i, j, k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-p;\\
&p = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\\
&\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 1, 2, \ldots, m;\\
&i_1, j_1, k_1 = 2, 3, \ldots, m-p;\\
&i_2, j_2, k_2 = m-p+1, \ldots, m+1;\\
&i_3, j_3, k_3 = m+2, \ldots, 2m-p;\\
&i_{12}, j_{12}, k_{12} = 2, 3, \ldots, m+1,\\
&i_{23}, j_{23}, k_{23} = m-p+1, \ldots, 2m-p;\\
&\tau, \sigma = p+2, \ldots, m.
\end{aligned} \tag{2}$$

Присоединим к каждой паре соответствующих точек этих поверхностей репер $\{A_i\}$, инфинитезимальные перемещения

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



которого определяются уравнениями:

$$dA_i = \omega_i^j A_j , \tag{3}$$

где $\omega_i^j$ – суть формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{4}$$

и соотношению

$$\omega_i^i = 0 . \tag{5}$$

Поместим вершины $A_0$ и $A_1$ в соответствующие точки $m$ – поверхностей $S_m^0$ и $S_m^1$. Тогда из $\delta A_0 = \pi_0^0 A_0$ и $\delta A_1 = \pi_1^1 A_1$ следует, что формы $\omega_0^1, \omega_0^{i_1}, \omega_0^{i_{23}}, \omega_1^0, \omega_1^{i_1}, \omega_1^{i_{23}}$ суть главные.

Выбрав формы $\omega^\alpha = \omega_0^{1+\alpha}$ за независимые, положим

$$\begin{aligned} \omega_0^1 &= \Lambda_{0\alpha}^1 \omega^\alpha, \quad \omega_0^{i_3} = \Lambda_{0\alpha}^{i_3} \omega^\alpha, \\ \omega_1^0 &= \Lambda_{1\alpha}^0 \omega^\alpha, \quad \omega_1^{i_1} = \Lambda_{1\alpha}^{i_1} \omega^\alpha, \\ \omega_1^{i_{23}} &= \Lambda_{1\alpha}^{i_{23}} \omega^\alpha . \end{aligned} \tag{6}$$

Поместим точки $A_0, A_1, \dots, A_{m-p}, A_{m-p+1}, \dots, A_{m+1}$ в касательную $m$-плоскость $L_m^0$ к поверхности $S_m^0$ в точке $A_0$, а точки $A_1, A_{m-p+1}, \dots, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_{2m-p}$ – в касательную $m$-плоскость $L_m^1$ к поверхности $S_m^1$ в точке $A_1$.

Касательные $m$-плоскости

$$\begin{aligned} L_m^0 &= (A_0 A_2 \dots A_{m-p} A_{m-p+1} \dots A_{m+1}), \\ L_m^1 &= (A_1 A_{m-p+1} \dots A_{m+1} A_{m+2} \dots A_{2m-p}) \end{aligned} \tag{7}$$

пересекаются по $p$-плоскости

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$L_p = (A_{m-p+1}, \dots A_{m+1}) . \qquad (8)$$

Тогда систему (6) можно записать в виде:

$$\omega_0^1 = \omega_0^{i_3} = \omega_1^0 = \omega_1^{i_1} = 0, \qquad (9)$$

$$\omega_1^{i_{23}} = \Lambda_{1\alpha}^{i_{23}} \omega^\alpha . \qquad (10)$$

Продолжая систему (9), получаем

$$\omega_{1+\alpha}^1 = \Lambda_{1+\alpha,\beta}^1 \omega^\beta, \quad \omega_{1+\alpha}^{i_3} = \Lambda_{1+\alpha,\beta}^{i_3} \omega^\beta , \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{1\alpha}^{i_{23}} \omega_{i_{23}}^0 &= \Lambda_{1\alpha\beta}^0 \omega^\beta , \\ \Lambda_{1\alpha}^{i_{23}} \omega_{i_{23}}^{i_1} &= \Lambda_{1\alpha\beta}^{i_1} \omega^\beta , \end{aligned} \qquad (12)$$

где коэффициенты $\Lambda_{1+\alpha,\beta}^1$, $\Lambda_{1+\alpha,\beta}^{i_3}$, $\Lambda_{1\alpha\beta}^0$, $\Lambda_{1\alpha\beta}^{i_1}$ симметричны по индексам $\alpha$ и $\beta$. Считая, что поверхность $S_m^1$ не является поверхностью ранга $r < m$ ($r = Rang \| \Lambda_{1\alpha}^{i_{23}} \|$ в смысле М.А.Акивиса [1], мы можем уравнения (11) записать в виде:

$$\begin{aligned} \omega_{i_{23}}^0 &= \Lambda_{i_{23}\alpha}^0 \omega^\alpha , \\ \omega_{i_{23}}^1 &= \Lambda_{i_{23}\alpha}^1 \omega^\alpha . \end{aligned} \qquad (13)$$

Продолжая уравнения (10), получаем

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{1\beta}^{i_{23}} \equiv d\Lambda_{1\beta}^{i_{23}} &+ \Lambda_{1\beta}^{i_{23}} (\omega_0^0 - \omega_1^1) - \Lambda_{1\gamma}^{i_{23}} \omega_{1+\beta}^{1+\gamma} + \\ &+ \Lambda_{1\beta}^{j_{23}} \omega_{j_{23}}^{i_{23}} = \Lambda_{1\beta\gamma}^{i_{23}} \omega^\gamma , \quad (\Lambda_{1\beta\gamma}^{i_{23}} = \Lambda_{1\gamma\beta}^{i_{23}}) . \end{aligned} \qquad (14)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Будем считать, что в касательной $m$ -плоскости $L_m^0$ в каждой точке $A_0$ поверхности $S_m^0$ заданы $m$ линейно независимых прямых $l_\alpha^0 = (A_0 A_{1+\alpha})$, проходящих через точку $A_0$, а в касательной $m$ -плоскости $L_m^1$ в каждой точке $A_1$ поверхности $S_m^1$ заданы $m$ линейно независимых прямых $l_\alpha^1 = (A_1 A_{m-p+\alpha})$, проходящих через точку $A_1$. Причем прямые $l_{i_2}^0 = (A_0 A_{i_2})$ и $l_{i_2}^1 = (A_1 A_{i_2})$ пересекаются в соответствующих точках, которые принадлежат $L_p$, т.е. прямые $l_{i_2}^1 (l_{i_2}^0)$ становятся заданными как только заданы прямые $l_{i_2}^0 (l_{i_2}^1)$. Тогда в каждой точке поверхностей $S_m^0$ и $S_m^1$ определяются системы линий $\Gamma_\alpha^0$ и $\Gamma_\alpha^1$ с касательными прямыми $l_\alpha^0$ и $l_\alpha^1$ соответственно.

Обозначим $S_m^{01}(l_\alpha^{01})$ $m$ -параметрическое многообразие, текущим элементом которого является пара точек $A_0$ и $A_1$ и два пучка $m$ линейно независимых прямых $l_\alpha^0$ и $l_\alpha^1$, проходящих через точки $A_0$ и $A_1$ соответственно, причем $m$ -плоскости, проходящие через эти прямые $l_{\alpha_1}^0$ и $l_\alpha^1$ являются касательными $m$ -плоскостями $L_m^0$ и $L_m^1$ поверхностей $S_m^0$ и $S_m^1$ в соответствующих точках. Итак, многообразие $S_m^{01}(l_\alpha^{01})$ есть пара $m$ -поверхностей $S_m^0$ и $S_m^1$ с заданными на них системами линий $\Gamma_\alpha^0$ и $\Gamma_\alpha^1$ с касательными $l_\alpha^0$ и $l_\alpha^1$ соответственно. Будем строить канонический репер многообразия $S_m^{01}(l_\alpha^{01})$, который является полуканоническим репером для пары поверхностей. Как только линии $\Gamma_\alpha^0$ и $\Gamma_\alpha^1$ на поверхностях $S_m^0$ и $S_m^1$ будут выбраны инвариантным образом, канонический репер многообразия $S_m^{01}(l_\alpha^{01})$ будет каноническим репером произвольной пары $m$ -поверхностей. Так как прямые $l_\alpha^0$ и $l_\alpha^1$ заданы в виде:

$$l_\alpha^0 = (A_0 A_{1+\alpha}), \qquad l_\alpha^1 = (A_1 A_{m-p+\alpha}), \tag{15}$$

то формы $\omega_{i_{12}}^{j_{12}}$, $\omega_{i_{23}}^{j_{23}}$ $(i_{12} \neq j_{12},\ i_{23} \neq j_{23})$ являются главными, и мы можем положить

$$\omega_{i_1}^{j_{12}} = \Lambda_{i_1 \alpha}^{j_{12}} \omega^\alpha, \tag{16$_1$}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\omega_{i_2}^{j_{12}} = \Lambda_{i_2\alpha}^{j_{12}}\omega^{\alpha}, \qquad (16_2)$$

$$\omega_{i_3}^{j_2} = \Lambda_{i_3\alpha}^{j_2}\omega^{\alpha}, \qquad (16_3)$$

$$\omega_{i_2}^{j_3} = \Lambda_{i_2\alpha}^{j_3}\omega^{\alpha}. \qquad (16_4)$$

$(i_{12} \neq j_{12},\ i_{23} \neq j_{23})$

Продолжая уравнения (16), получаем

$$\nabla\Lambda_{1+\alpha,\gamma}^{1+\beta} \equiv d\Lambda_{1+\alpha,\gamma}^{1+\beta} + \Lambda_{1+\alpha,\gamma}^{1+\beta}(\omega_0^0 - \omega_{1+\alpha}^{1+\alpha} + \omega_{1+\beta}^{1+\beta}) - \Lambda_{1+\alpha,\alpha_1}^{1+\beta}\omega_{1+\gamma}^{1+\alpha_1} - \omega_{1+\alpha}^{0}\delta_{\gamma}^{\beta} - \Lambda_{1\gamma}^{1+\beta}\omega_{1+\alpha}^{1} - \Lambda_{1+\gamma_1,\gamma}^{1+\beta}\omega_{1+\alpha}^{1+\gamma_1} - \Lambda_{i_3\gamma}^{1+\beta}\omega_{1+\alpha}^{i_3} = \Lambda_{1+\alpha,\gamma\alpha_1}^{1+\beta}\omega^{\alpha_1},\ \Lambda_{1+\alpha,\gamma\alpha_1}^{1+\beta} = \Lambda_{1+\alpha,\alpha_1\gamma}^{1+\beta}, \qquad (17)$$

$(\alpha \neq \beta, \gamma_1 \neq \alpha_1, \beta$ по $\alpha, \beta$ – не суммировать),

$$\nabla\Lambda_{m+i_1,\alpha}^{m+j_1} \equiv d\Lambda_{m+i_1,\alpha}^{m+j_1} + \Lambda_{m+i_1,\alpha}^{m+j_1}(\omega_0^0 - \omega_{m+i_1}^{m+i_1} - \omega_{m+j_1}^{m+j_1}) - \Lambda_{m+i_1,\beta}^{m+j_1}\omega_{1+\alpha}^{1+\beta} + \Lambda_{m+i_1,\alpha}^{k_1}\omega_{k_1}^{m+j_1} + \Lambda_{m+i_1,\alpha}^{i_2}\omega_{i_2}^{m+j_1} - \Lambda_{m+k_1,\alpha}^{m+j_1}\omega_{m+i_1}^{m+k_1} - \Lambda_{1\alpha}^{m+j_1}\omega_{m+i_1}^{1} = \Lambda_{m+i_1,\alpha\beta}^{m+j_1}\omega^{\beta},\ \Lambda_{m+i_1,\alpha\beta}^{m+j_1} = \Lambda_{m+i_1,\beta\alpha}^{m+j_1}, \qquad (18)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



($k_1 \neq i_1, j_1, i_1 \neq j_1$; по $m+i_1, m+j_1$ - не суммировать).
Используя уравнения (14), (17), (18), проведем следующие фиксации:

$$\Lambda^{1+\gamma}_{i_1\gamma} = 0, \qquad \Pi^{0}_{i_1} = 0, \tag{19}$$

(по $\gamma$ - суммировать)

$$\Lambda^{m+1}_{1+\alpha,m} = \Lambda^{2}_{m+1,1} = 1, \quad \Pi^{0}_{0} = \Pi^{1+\alpha}_{1+\alpha} = \Pi^{1+m}_{1+m}, \tag{20}$$

($\alpha \neq m$, по $\alpha$ - не суммировать)

$$\omega_{(1}^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{m-\rho+\sigma-1} \wedge \omega_{|1|}^{m-\rho+\sigma} \wedge \omega_1^{m-\rho+\sigma+1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \omega_1^{m-\rho+\tau-1} \wedge \omega_{m-\rho+\sigma}^{m-\rho+\tau} \wedge \omega_1^{m-\rho+\tau+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho}) = 0, \tag{21}$$
$$\Pi^{1}_{m-\rho+\sigma} = 0, \quad (\tau \neq \sigma)$$

$$\omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho-1} \wedge \omega_{m-\rho+\sigma}^{2m-\rho} = \omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho},$$
$$\omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{m+1} \wedge \omega_{2m-\rho}^{m+2} \wedge \omega_1^{m+3} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho} = \tag{22}$$
$$= \omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho},$$
$$\Pi^{1}_{1} = \Pi^{m-\rho+\sigma}_{m-\rho+\sigma} = \Pi^{2m-\rho}_{2m-\rho}$$

($\sigma \neq m$, по $m-\rho+\sigma$ - не суммировать).
Выясним геометрический смысл этих фиксаций. В.Т.Базылев [2], изучая сети на многомерных поверхностях проективного пространства, вводит понятие псевдофокусов прямых касательных линий сети. Точка $F^{1+\beta}_{1+\alpha}$ ($\alpha \neq \beta$) является псевдофокусом прямой $A_0A_{1+\alpha}$, если при смещении точки $A_0$ в направлении $A_0A_{1+\beta}$ касательная к линии, описываемой точкой $F^{1+\beta}_{1+\alpha}$, принадлежит гиперплоскости

$$L^{1+\beta}_{m-1} = (A_0A_1 \ldots A_\beta A_{\beta+2} \ldots A_{2m-\rho}). \tag{23}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Пусть точка $F^{1+\beta}_{1+\alpha} = x^{1+\beta}_{1+\alpha} A_0 + A_{1+\alpha}$ $(\alpha \neq \beta)$ является псевдофокусом прямой $A_0 A_{1+\alpha}$, тогда из

$$(dF^{1+\beta}_{1+\alpha} L^{1+\beta}_{n-1}) = 0, \quad \omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^{\beta-1} = \omega^{\beta+1} = \ldots = \omega^m = 0, \tag{24}$$

получаем

$$x^{1+\beta}_{1+\alpha} = \Lambda^{1+\beta}_{1+\alpha,\beta} . \tag{25}$$

( $\alpha \neq \beta$ , по $\beta$ - не суммировать)

Следовательно, псевдофокусы прямой $\ell^0_\alpha$ суть точки

$$F^{1+\beta}_{1+\alpha} = -\Lambda^{1+\beta}_{1+\alpha,\beta} A_0 + A_{1+\alpha} . \tag{26}$$

( $\alpha \neq \beta$ , по $\beta$ - не суммировать)

Гармоническим полюсом [2] точки $A_0$ относительно псевдофокусов прямой $\ell^0_\alpha$ является точка

$$F_{1+\alpha} = -\frac{1}{m-1} \Lambda^{1+\beta}_{1+\alpha,\beta} A_0 + A_{1+\alpha} . \tag{27}$$

( по $\beta$ - суммировать)

Находя аналогичным образом псевдофокусы прямой $\ell^1_\alpha = (A_1 A_{m-\rho+\alpha})$, получаем точки:

$$F^{m-\rho+\beta}_{m-\rho+\alpha} = -\frac{1}{\omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho}} \omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{m-\rho+\beta-1} \wedge$$

$$\wedge \omega^{m-\rho+\beta}_{m-\rho+\alpha} \wedge \omega_1^{m-\rho+\beta+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho} A_1 + A_{m-\rho+\alpha} . \quad (\alpha \neq \beta) \tag{28}$$

Гармоническим полюсом точки $A_1$ относительно псевдофокусов прямой $\ell^1_\alpha$ является точка

$$F_{m-\rho+\alpha} = -\frac{1}{\omega_1^{m-\rho+1} \wedge \ldots \wedge \omega_1^{2m-\rho}} \omega_{(1}^{m-\rho+1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \omega_1^{m-\rho+\alpha-1} \wedge \omega_{|1|}^{m-\rho+\alpha} \wedge \omega_1^{m-\rho+\alpha+1} \wedge \ldots \tag{29}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\dots \wedge \omega_1^{m-p+\beta-1} \wedge \omega_{m-p+\alpha}^{m-p+\beta} \wedge \omega_1^{m-p+\beta+1} \wedge \dots \wedge \omega_{1)}^{2m-p} A_1 +$$

$$+ A_{m-p+\alpha} . \quad (\alpha \neq \beta)$$

Отсюда следует, что фиксации (19) и (21) геометрически характеризуются тем, что точки $A_{i_1}\,(A_{i_3})$ помещены в гармонические полюсы прямых $A_0 A_{i_1}\,(A_1 A_{i_3})$. Фиксация (20) геометрически характеризуется тем, что точки

$$F_{1+\alpha}^{m+1} = -A_0 + A_{1+\alpha}\,, \quad F_{m+1}^{2} = -A_0 + A_{m+1} \quad (\alpha \neq m)$$

являются псевдофокусами прямых $\ell_\alpha^0 = (A_0 A_{1+\alpha})$, а фиксация (22) геометрически характеризуется тем, что точки

$$F_{i_3}^{2m-p} = -A_1 + A_{i_3}\,, \quad F_{2m-p}^{m+2} = -A_1 + A_{2m-p} \quad (i_3 \neq 2m-p)$$

являются псевдофокусами прямых $\ell_{i_3}^1 = (A_1 A_{i_3})$.

Таким образом, с точностью до нормирования (для окончательной канонизации репера нам нужно провести одну нормировку) канонический репер многообразия $S_m^{01}\,(\ell_\alpha^{01})$ построен и геометрически характеризован.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М.А. Акивис. О поверхностях ранга $\tau$. Изв. вузов. Математика. 1, 1957, 9 - 19.
2. В.Т. Базылев. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства. Изв. вузов. Математика, 2(51), 1966, 9 - 19.

Поступила 1 марта 1970 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Л.З.КРУГЛЯКОВ

# О 3-СЕМЕЙСТВАХ ПРЯМЫХ В $P_5$

Известно, что паре T комплексов трехмерного проективного пространства $P_3$ соответствует в пятимерном пространстве Клейна трехпараметрическое семейство (3-семейство) прямых, каждый луч которого несет три фокуса [1]. Такие семейства часто называют фокальными [2]. В общем случае каждая прямая 3-семейства прямых пятимерного проективного пространства $P_5$ не имеет фокусов. В работах [3, 4] введено понятие пары $A$ и пары $A_0$ комплексов, которым соответствуют в пространстве Клейна 3-семейства, расслаивающиеся на одно или два подсемейства торсов, соответственно. 3-семейства прямых в $P_4$ изучались в [5].

В предлагаемой работе изучаются 3-семейства прямых в $P_5$, не имеющие торсов, а также 3-семейства, через каждую прямую которых проходит один или два торса. При построении реперов этих 3-семейств исключаются фокальные 3-семейства.

§ 1. Касательное подпространство прямой 3-семейства. Рассмотрим в пятимерном проективном пространстве $P_5$ трехпараметрическое семейство (3-семейство) прямых $A_1A_2$, отнесенное к подвижному реперу $\{A_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1,2,\ldots,6$), деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta , \qquad (1)$$

где $\omega_\alpha^\beta$ – формы Пфаффа, удовлетворяющие условиям:

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta], \quad \sum_\alpha \omega_\alpha^\alpha = 0. \qquad (2)$$

Выбирая за базисные формы

$$\omega_1^3 = \omega^1, \quad \omega_2^4 = \omega^2, \quad \omega_1^5 = \omega^3, \qquad (3)$$

запишем основные соотношения 3-семейства в виде:

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p \omega^\varkappa \quad (\varkappa = 1,2,3; \quad i = 1,2; \quad p = 3,4,5,6), \qquad (4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где

$$a^3_{12}=a^3_{13}=a^4_{21}=a^4_{23}=a^5_{11}=a^5_{12}=0,\quad a^3_{11}=a^4_{22}=a^5_{13}=1. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнения (4) внешним образом по формулам (2), обычным путем получаем

$$\begin{aligned}
\delta a^p_{i1} &= a^p_{j1}\pi^j_i - a^q_{i1}\pi^p_q + a^p_{i1}(a^q_{11}\pi^3_q - \pi^1_1 - a^3_{21}\pi^2_1) + \\
&+ a^p_{i2}(a^q_{21}\pi^4_q - a^4_{11}\pi^2_1) + a^p_{i3}(a^q_{11}\pi^5_q - a^5_{21}\pi^2_1), \\
\delta a^p_{i2} &= a^p_{j2}\pi^j_i - a^q_{i2}\pi^p_q + a^p_{i1}(a^q_{12}\pi^3_q - a^3_{22}\pi^2_1) + \\
&+ a^p_{i2}(a^q_{22}\pi^4_q - \pi^2_2 - a^4_{12}\pi^1_2) + a^p_{i3}(a^q_{12}\pi^5_q - a^5_{21}\pi^2_1), \\
\delta a^p_{i3} &= a^p_{j3}\pi^j_i - a^q_{i3}\pi^p_q + a^p_{i1}(a^q_{13}\pi^3_q - a^3_{23}\pi^2_1) + \\
&+ a^p_{i2}(a^q_{13}\pi^4_q - a^4_{13}\pi^1_2) + a^p_{i3}(a^q_{13}\pi^5_q - \pi^1_1 - a^5_{23}\pi^2_1)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$(i,j=1,2;\ p,q=3,4,5,6).$$

Обозначим через $S_4$ линейчатую гиперповерхность, описываемую прямой $A_1A_2$, а через $T^\rho$ – касательную гиперплоскость к ней в точке $A_1+\rho A_2$ ($x^2:x^1=\rho$ – координата точки прямой $A_1A_2$). В силу (4)

$$T^\rho \equiv (A_1A_2, x^i a^p_{i1}A_p, x^i a^p_{i2}A_p, x^i a^p_{i3}A_p). \tag{7}$$

Поместим вершины $A_3, A_5, A_6$ ($A_4, A_5, A_6$) в касательную гиперплоскость $T^\rho$ в точке $A_1$ ($A_2$) к гиперповерхности $S_4$. Тогда

$$a^{\prime\prime}_{1\varkappa} = a^3_{2\varkappa} = 0. \tag{8}$$

Поместим вершину $A_3$ ($A_4$) в касательную плоскость к подмногообразию $\omega^2=\omega^3=0$ ($\omega^1=\omega^3=0$) в точке $A_1$ ($A_2$). Тогда

$$a^6_{11} = a^5_{22} = a^6_{22} = 0. \tag{9}$$

Потребуем, чтобы плоскость $A_1A_2A_5$ ($A_1A_2A_6$) ка-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



салась подмногообразия $\omega^1=\omega^2=0$ ( $\omega^1=\omega^3=0$ ) в точке $A_1$ , а подмногообразия $\omega^2=\omega^3=0$ ( $\omega^1=\omega^2=0$ ) - в точке $A_2$ . Тогда

$$a^6_{13}=a^6_{21}=a^5_{23}=0. \tag{10}$$

Внося соотношения (5), (8) - (10) в систему (6), получаем

$$\begin{aligned}
&\pi^4_3=\pi^3_4=\pi^4_5=\pi^6_3=0,\quad \pi^5_4-a^5_{21}a^6_{12}\pi^3_6=0,\\
&\pi^2_1-a^6_{12}\pi^4_6=\pi^1_2-a^5_{21}\pi^3_5=0,\quad a^6_{23}\pi^3_6=0,\\
&a^6_{23}(\pi^2_1+a^6_{12}\pi^4_6)-\pi^6_5=\pi^1_2+a^5_{21}\pi^3_5-a^6_{23}\pi^5_6=0,\\
&a^5_{21}(a^6_{23}\pi^2_1+\pi^6_5)-a^6_{23}\pi^5_3=a^6_{12}(\pi^1_2+a^6_{23}\pi^5_6)-\pi^6_4=0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда видно, что при $a^6_{23}\neq 0$ уравнения системы независимы. Следовательно, возможна фиксация (5), (8) - (10). Полагая еще

$$a^6_{23}=1 \quad (\pi^2_2-\pi^1_1+\pi^5_5-\pi^6_6=0) \tag{12}$$

и обозначая $a^5_{21}=a$, $a^6_{12}=b$ , запишем уравнения (4) в виде:

$$\omega^4_1=\omega^3_2=0,\ \omega^5_2=a\omega^1,\ \omega^6_1=b\omega^2,\ \omega^6_2=\omega^3. \tag{13}$$

Фокусы луча и торсы 3-семейства определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&x^1\omega^1=0,\quad x^1\omega^3+ax^2\omega^1=0,\\
&x^2\omega^2=0,\quad bx^1\omega^2+x^2\omega^3=0.
\end{aligned} \tag{14}$$

При $ab\neq 0$ фокусов нет, т.е. в общем случае 3-семейство нефокальное [2]. При $a=0$ ( $b=0$ ) вершина $A_2$ ( $A_1$ ) - фокус, соответствующий торсу $\omega^2=\omega^3=0$ ( $\omega^1=\omega^3=0$ ). Такое 2-семейство назовем одно-фокальным.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



При $a=b=0$ вершины $A_2$ и $A_1$ - фокусы. Такое 3-семейство назовем <u>два-фокальным</u>.

Заметим, что фокальные 3-семейства, обладающие тремя подсемействами торсов, исключены условием (12).

§ 2. <u>Неголономные подмногообразия $\Psi_2^*$</u>. Рассмотрим касательное трехмерное подпространство $T_3$, содержащее прямую $A_1A_2$ и близкую к ней вдоль некоторого подмногообразия $\Psi_1$ (в смысле [6]) $\omega^1:\omega^2:\omega^3$. Из (4) имеем

$$T_3 \equiv (A_1A_2, a^\rho_{1\varkappa}\omega^\varkappa A_\rho, a^\rho_{2\varkappa}\omega^\varkappa A_\rho). \qquad (15)$$

Будем искать такие подмногообразия, для которых подпространство $T_3$ принадлежит гиперплоскости $T^\rho$. Тогда, учитывая (7), получаем

$$a^\rho_{j\varkappa}\omega^\varkappa = c^\nu_j x^i a^\rho_{i\nu} \qquad (16)$$

$$(i,j=1,2;\ \varkappa,\nu=1,2,3;\ \rho=3,4,5,6).$$

Эта система состоит из восьми уравнений. Исключая $c^\nu_j$, получаем два уравнения

$$\det\| x^i a^\rho_{i1}\ x^i a^\rho_{i2}\ x^i a^\rho_{i3}\ a^\rho_{j\varkappa}\omega^\varkappa \| = 0 \qquad (17)$$

( $\rho$ - индекс строк, $j=1,2$)

или

$$a^\rho_{j\varkappa}\omega^\varkappa B_\rho = 0, \qquad (18)$$

где $B_\rho$ - минор матрицы $\| x^i a^\rho_{i\varkappa} \|$, не содержащий $\rho$-ой строки, и умноженный на $(-1)^\rho$. Учитывая фиксацию (5), (8) - (10), находим

$$B_3 = a(x^2)^3,\ B_4 = -b(x^1)^3,\ B_5 = -x^1(x^2)^2,\ B_6 = (x^1)^2x^2.$$

Теперь уравнения (18) принимают вид

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$a(x^2)^3\omega^1+b(x^1)^2x^2\omega^2-x^1(x^2)^2\omega^3=0,$$
$$a\,x^1(x^2)^2\omega^1+b(x^1)^3\omega^2-(x^1)^2x^2\omega^3=0, \qquad (18^1)$$

т.е. эти уравнения равносильны. Равносильность уравнений (18) геометрически означает очевидный факт: подпространство $T_3$ пересекается с гиперплоскостью $T^\rho$ по двумерной плоскости, касательной к подмногообразию $\Psi_1$ в точке $A_1+\rho A_2$, т.е. эта плоскость содержит прямую $A_1A_2$ и касательную к кривой, описываемой точкой $A_1+\rho A_2$.

Таким образом, для каждой точки $A_1+\rho A_2$ соотношение ($18^1$) определяет единственное неголономное подмногообразие $\Psi_2^*$ (в смысле [6]), такое, что касательное подпространство $T_3$ каждого подмногообразия $\Psi_1\subset\Psi_2^*$ принадлежит касательной гиперплоскости $T^\rho$ поверхности $S_4$ в точке $A_1+\rho A_2$. Линейная оболочка совокупности подпространств $T_3$ подмногообразий $\Psi_1\subset\Psi_2^*$ является [12] касательным подпространством $T_4^*$ подмногообразия $\Psi_2^*$. Точка $A_1+\rho A_2$ названа в работе [12] псевдофокусом подмногообразия $\Psi_2^*$, если касательное подпространство $T_4^*$ этого подмногообразия совпадает с $T^\rho$. Одно из соотношений ($18^1$), т.е.

$$a\rho^2\omega^1-\rho\omega^3+b\omega^2=0 \qquad (19)$$

определяет для каждой точки неголономное подмногообразие $\Psi_2^*$, для которого эта точка - псевдофокус. В смысле фокальной классификации [2] такие подмногообразия являются фокальными класса нуль. Легко проверить, что полученное соответствие между точками прямой $A_1A_2$ и подмногообразиями $\Psi_2^*$ не зависит от выбора репера.

Не каждое подмногообразие $\Psi_2$ 3-семейства прямых в $P_5$ имеет псевдофокус, например, подмногообразие

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$\omega^3 = 0$ не имеет псевдофокуса. Дело в том, что в общем случае касательное подпространство подмногообразия $\Psi_2$ пятимерно, но среди всех подмногообразий $\Psi_2$ 3-семейства прямых в $P_5$ уравнением (19) выделяются подмногообразия $\Psi_2^*$, имеющие четырехмерное касательное подпространство. Эти подмногообразия обладают многими свойствами псевдофокального 2-семейства прямых в $P_5$ [9], в частности, для каждого из них существует соответствие между точками прямой и подмногообразиями $\Psi_1 \subset \Psi_2^*$. Это дает основание назвать их псевдофокальными.

Найдем подмногообразие $\Psi_1$, для которого точка $A_1 + \rho A_2$ является псевдофокусом относительно подмногообразия $\Psi_2^*$, определенного уравнением (19). Это уравнение выделяет на поверхности $S_4$ неголономное подмногообразие $S_3^*$. Касательная 3-плоскость к нему в точке $A_1 + \rho A_2$ имеет вид

$$T_3^\rho \equiv (A_1 A_2, bA_3 - a\rho^3 A_4 + ab\rho A_5 - ab\rho^2 A_6, \rho^2 A_4 + bA_5 + 2b\rho A_6). \tag{20}$$

Касательное подпространство (15) подмногообразия $\Psi_1$, заданного соотношениями $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, теперь имеет вид

$$T_3 \equiv (A_1 A_2, \omega^1 A_3 + \omega^3 A_5 + b\omega^2 A_6, \omega^2 A_4 + a\omega^1 A_5 + \omega^3 A_6).$$

Подпространства $T_3$ и $T_3^\rho$ совпадают, если

$$\frac{\omega^1}{b} = \frac{\omega^2}{a\rho^2} = \frac{\omega^3}{2ab\rho}. \tag{21}$$

При $ab \neq 0$ уравнения (21) задают искомое подмногообразие $\Psi_1$, входящее в (19). Будем называть подмногообразия (19) и (21) интропсевдофокальными по точке $A_1 + \rho A_2$. Из (19) и (21) получаем, что интропсевдофокальные подмногообразия по точке $A_1$ ($A_2$) задаются

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



уравнениями $\omega^2=0,\ \omega^2=\omega^3=0$ $(\omega^1=0,\ \omega^1=\omega^3=0)$.

При $a=0$ $(b=0)$ точка $A_2$ $(A_1)$ является псевдофокусом любого подмногообразия $\Psi_2$, так как $\rho=\infty$ $(\rho=0)$ удовлетворяет соотношению (19) при любых $\lambda_\alpha\omega^\alpha=0$. В этом случае $T^{\rho=\infty}$ $(T^{\rho=0})$ является фокальной 3-плоскостью в фокусе $A_2(A_1)$.

§ 3. Касательные плоскости $L_2$. Пусть $L_2\equiv$ $\equiv(A_1A_2, y^pA_p)$ - произвольная плоскость, инцидентная прямой 3-семейства, а $(A_1A_2, x^i\omega_i^pA_p)$ - касательная плоскость в точке $X=x^iA_i$ $(x^2:x^1=\rho)$ к подмногообразию $\Psi_1$, определенному отношением $\omega^1:\omega^2:\omega^3$. Эти плоскости совпадают, если $x^i\omega_i^p=ty^p$. Исключив отсюда $t$, получим систему из трех уравнений, каждое из которых билинейно относительно $x^i$ и $\omega^\alpha$ $(i=1,2;\ \alpha=1,2,3)$. Эта система имеет ненулевое решение $\omega^1:\omega^2:\omega^3$, если $x^i$ удовлетворяет уравнению третьей степени. Доказана

Теорема 1. Каждая плоскость $L_2$, инцидентная прямой 3-семейства в $P_5$, касается трех его подмногообразий $\Psi_1^\alpha$ в трех точках $X^\alpha$ (они могут совпадать).

Имеет также место

Теорема 2. Каждая из точек касания $X^\alpha$ плоскости $L_2$ с подмногообразием $\Psi_1^\alpha$ является псевдофокусом подмногообразия $\Psi_2$, определенного двумя другими подмногообразиями $\Psi_1^\nu$ $(\alpha,\nu=1,2,3;\ \nu\neq\alpha)$, которых касается плоскость $L_2$.

Пусть плоскость $A_1A_2A_6$ касается подмногообразий $\omega^1=\omega^3=0$, $\omega^2=\omega^3=0$ и $\omega^1=\omega^2=0$ в точках $A_1$, $A_2$ и $x^iA_i$ соответственно. (Это возможно в силу теоремы 1). Тогда из условия касания этой плоскости $x^ia_{i\alpha}^{\bar\rho}\omega^\alpha=0$ $(\bar\rho=3,4,5)$ получаем

$$a_{12}^{\bar\rho}=a_{21}^{\bar\rho}=x^1a_{13}^{\bar\rho}+x^2a_{23}^{\bar\rho}=0 \qquad (22)$$

Найдем теперь подмногообразие, для которого точка $A_1$ - псевдофокус. Одно из уравнений (17) с учетом (22) и $x^2=0$ (другое обращается в тождество) принимает вид

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$a_{12}^{6}\det\|a_{11}^{\bar{p}}\,a_{13}^{\bar{p}}\,a_{22}^{\bar{p}}\omega^{2}+a_{23}^{\bar{p}}\omega^{3}\|=0.$$

Полагая $a_{12}^{6}\det\|a_{11}^{\bar{p}}\,a_{13}^{\bar{p}}\,a_{22}^{\bar{p}}\|\neq 0$ (элементы этого определителя произвольны), в силу (22), получаем $\omega^{2}=0$. Это подмногообразие $\Psi_2$ содержит два других подмногообразия $\Psi_1^{\nu}$, которых касается плоскость $A_1A_2A_6$. Так как точки $A_1, A_2, A_6$ взяты произвольно, то теорема доказана.

§ 4. Асимптотические направления поверхности $S_4$. Дифференцируя уравнения (13) внешним образом и применяя лемму Картана, получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_3^4=\beta_1\omega^1+\beta_2\omega^2+\beta_3\omega^3,\\
&\omega_5^4=\beta_3\omega^1+\beta_5\omega^2+\beta_6\omega^3,\\
&\omega_4^3=\alpha_2\omega^1+\alpha_4\omega^2+\alpha_5\omega^3,\\
&\omega_6^3=\alpha_3\omega^1+\alpha_5\omega^2+\alpha_6\omega^3,\\
&b\omega_6^4-\omega_1^2=\beta_2\omega^1+\beta_4\omega^2+\beta_5\omega^3,\\
&a\omega_5^3-\omega_2^1=\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2+\alpha_3\omega^3,\\
&\omega_4^5-ab\omega_6^3=\alpha_8\omega^1+\alpha_{10}\omega^2+\alpha_{11}\omega^3,\\
&\omega_3^6-ab\omega_5^4=\beta_7\omega^1+\beta_8\omega^2+\beta_9\omega^3,\\
&\omega_5^6-\omega_1^2-b\omega_6^4=\beta_9\omega^1+\beta_{11}\omega^2+\beta_{12}\omega^3,\\
&\omega_6^5-\omega_2^1-a\omega_5^3=\alpha_{10}\omega^1+\alpha_{11}\omega^2+\alpha_{12}\omega^3,\\
&a(\omega_5^6+\omega_1^2)-\omega_3^5=\alpha_{13}\omega^1+\alpha_{14}\omega^2+\alpha_{15}\omega^3,\\
&\omega_4^6-b(\omega_6^5+\omega_2^1)=\alpha_{14}\omega^1+\alpha_{16}\omega^2+\alpha_{17}\omega^3,\\
&\omega_6^6-\omega_2^2+\omega_1^1-\omega_5^5=\alpha_{15}\omega^1+\alpha_{17}\omega^2+\alpha_{18}\omega^3,
\end{aligned}\qquad(23)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\Delta a = \alpha_7 \omega^1 + \alpha_8 \omega^2 + \alpha_9 \omega^3,$$

$$\Delta b = \beta_8 \omega^2 + \beta_{10} \omega^2 + \beta_{11} \omega^3,$$

где

$$\Delta a = da + a(\omega_5^5 - \omega_2^2 + \omega_1^1 - \omega_3^3),$$

$$\Delta b = db + b(\omega_6^6 - \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_4^4).$$

При смещении по асимптотическому направлению поверхности $S_4$, точка $A_1 + \rho A_2 + d^2(A_1 + \rho A_2)$ принадлежит касательной гиперплоскости в точке $A_1 + \rho A_2$ к гиперповерхности $S_4$. Положив $A_1 + \rho A_2 + d^2(A_1 + \rho A_2) = \Omega^\alpha A_\alpha$, в силу (13) для асимптотических направлений получаем

$$a\Omega^3 \rho^3 - b\Omega^4 - \rho^2\Omega^5 + \rho\Omega^6 = 0. \qquad (24)$$

Пусть $(A_1 + \rho A_2, M)$ – касательная к асимптотическому направлению в точке $A_1 + \rho A_2$. Тогда, если

$$M = y^1(A_1 + \rho A_2) + y^2 A_2 + y^3(A_3 + a\rho A_5) +$$

$$+ y^4(\rho A_4 + bA_6) + y^5(A_5 + \rho A_6),$$

то выполняются условия

$$\frac{\omega_1^1 + \rho\omega_2^1}{y^1} = \frac{\omega_1^2 + \rho(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \rho^2\omega_2^1 + d\rho}{y^2} = \frac{\omega^\alpha}{y^{\alpha+2}}. \qquad (25)$$

Из (24) и (25) получаем, что совокупность касательных ко всем асимптотическим направлениям в точке $A_1 + \rho A_2$ образует гиперконус в 4-плоскости $T^\rho$, уравнение которого

$$b_{kl}\, y^k y^l = 0 \quad (k, l = 2, 3, 4, 5), \qquad (26)$$

где

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$b_{22}=0,\ b_{23}=-a\rho^2,\ b_{24}=-b,\ b_{25}=\rho,$$

$$b_{kl}=B_{kl}^{4}\rho^4+B_{kl}^{3}\rho^3+B_{kl}^{2}\rho^2+B_{kl}^{1}\rho+B_{kl}^{0}$$
$$(k,l=3,4,5),$$

в частности

$$B_{33}^{0}=-2b\beta_1,\ B_{44}^{4}=2a\alpha_4,\ B_{55}^{4}=2a\alpha_6,$$
$$B_{55}^{0}=-2b\beta_6,\ B_{35}^{0}=-2b\beta_3,\ B_{45}^{4}=2a\alpha_5,$$

а вид остальных коэффициентов несущественен. Назовем гиперконус (26) асимптотическим гиперконусом в точке $A_1+\rho A_2$ поверхности $S_4$. Координаты точек $A_1+\rho A_2$, в которых асимптотический гиперконус $K^{\rho}$ имеет одномерную вершину, удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} 0 & -\rho^2 a & -b & \rho \\ -\rho^2 a & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ -b & b_{34} & b_{44} & b_{45} \\ \rho & b_{35} & b_{45} & b_{55} \end{vmatrix} = 0. \qquad (27)$$

Это уравнение (при $ab\neq 0$) - 12-ой степени относительно $\rho$. Следовательно, на каждой прямой 3-семейства имеется не более 12 точек $A_1+\rho_\nu A_2$ ($\nu=1,2,\dots,\nu_0;\ \nu_0\leq 12$), в которых конус $K^{\rho_\nu}$ имеет одномерную вершину.

Поместим вершины $A_i$ ($i=1,2$) в две такие точки. Тогда в силу (27) должно быть

$$b(\beta_1\beta_6-\beta_3^2)=a(\alpha_4\alpha_6-\alpha_5^2)=0. \qquad (28)$$

Если $a=b=0$, то $A_i$ - фокусы прямой $A_1A_2$. Исклю-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



чая этот случай, т.е. считая $ab \neq 0$ , из (23) находим

$$\begin{aligned}
\delta\beta_1 &= \beta_1(2\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_4^4) + 2a\beta_3\pi_5^6 + \beta_7\pi_6^4,\\
\delta\beta_3 &= \beta_3(\pi_5^5 - \pi_1^1 + \pi_3^3 - \pi_4^4) + \beta_1\pi_5^3 + (\beta_2 - \beta_9)\pi_6^4 + a\beta_6\pi_5^6,\\
\delta\beta_6 &= \beta_6(2\pi_5^5 - \pi_4^4 - \pi_1^1) + 2\beta_3\pi_5^3 + (2\beta_5 - \beta_{12})\pi_6^4,\\
\delta\alpha_4 &= \alpha_4(2\pi_4^4 - \pi_2^2 - \pi_3^3) + 2b\alpha_5\pi_6^5 - \alpha_{10}\pi_5^3,\\
\delta\alpha_5 &= \alpha_5(\pi_4^4 - \pi_2^2 - \pi_3^3 + \pi_6^6) + \alpha_4\pi_6^4 + (\alpha_2 - \alpha_{11})\pi_5^3 + b\alpha_6\pi_6^5,\\
\delta\alpha_6 &= \alpha_6(2\pi_6^6 - \pi_3^3 - \pi_2^2) + 2\alpha_5\pi_6^4 + (2\alpha_3 - \alpha_{12})\pi_5^3,
\end{aligned} \tag{28$^1$}$$

откуда

$$\delta(\beta_1\beta_6 - \beta_3^2) = 2(\beta_1\beta_6 - \beta_3^2)(\pi_5^5 - \pi_1^1 + \pi_3^3 - \pi_4^4) + \beta\pi_6^4,$$

$$\delta(\alpha_4\alpha_6 - \alpha_5^2) = 2(\alpha_4\alpha_6 - \alpha_5^2)(\pi_4^4 - \pi_2^2 - \pi_3^3 + \pi_6^6) + \alpha\pi_5^3,$$

где

$$\beta = 2\beta_3(\beta_2 - \beta_9) + \beta_1(\beta_{12} - 2\beta_5) + \beta_6\beta_7,$$

$$\alpha = 2\alpha_5(\alpha_{11} - \alpha_2) + \alpha_4(2\alpha_3 - \alpha_{12}) - \alpha_6\alpha_{10}.$$

Таким образом, при $\alpha\beta \neq 0$ возможна фиксация

$$\beta_1\beta_6 - \beta_3^2 = \alpha_4\alpha_6 - \alpha_5^2 = 0 \quad (\pi_6^6 = \pi_5^3 = 0). \tag{29}$$

Тогда из системы (11) получаем

$$\pi_1^2 = \pi_5^6 = \pi_3^5 = \pi_2^1 = \pi_6^5 = \pi_4^6 = 0. \tag{30}$$

Теперь подмногообразие $\omega^1 = 0\,(\omega^2 = 0)$ имеет своим псевдофокусом вершину $A_2\,(A_1)$ и этим характеризуется. Под-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



многообразие $\omega^1=\omega^3=0\,(\omega^2=\omega^3=0)$ относительно подмногообразия $\omega^1=0\,(\omega^2=0)$ имеет точку $A_2\,(A_1)$ своим псевдофокусом. Плоскости $A_1A_2A_\rho$ (см. §1) касаются одного или двух координатных подмногообразий $\omega^\varkappa=\omega^\nu=0$ $(\varkappa,\nu=1,2,3;\ \varkappa\neq\nu)$ в одной из точек $A_i$.

Теперь

$$\omega_1^2=a_{1\varkappa}^2\omega^\varkappa,\quad \omega_2^1=a_{2\varkappa}^1\omega^\varkappa,$$
$$\omega_\rho^q=a_{\rho\varkappa}^q\omega^\varkappa\quad(\rho,q=3,4,5,6;\ \rho\neq q). \tag{31}$$

§ 5. Канонический репер 2-семейства. Для построения канонического репера необходимо зафиксировать вершины $A_\rho$ в плоскостях $A_1A_2A_\rho$ $(\rho=3,4,5,6)$.

Рассмотрим неголономные подмногообразия $\omega^1=0$ 3-семейств плоскостей $A_1A_2A_6$ и $A_1A_2A_4$. Как и для 2-семейства плоскостей в $P_5$ [8], плоскость $A_1A_2A_6$ подмногообразия $\omega^1=0$ имеет три фокуса, которые определяются из системы:

$$x^6\omega_6^3=0,\quad x^2\omega^2+x^6\omega_6^4=0,\quad x^1\omega^3+x^6\omega_6^5=0.$$

Кроме вершин $A_i$, имеется еще третий фокус, не лежащий на прямой $A_1A_2$. Требуя, чтобы

$$[\omega_6^4\omega_6^3]=[\omega_6^5\omega_6^3]=0(\mathrm{mod}\,\omega^1), \tag{32}$$

мы поместим $A_6$ в этот фокус плоскости $A_1A_2A_6$.

Фокусы и фокальные смещения плоскости $A_1A_2A_4$ подмногообразия $\omega^1=0$ удовлетворяют уравнениям:

$$x^4\omega_4^3=0,\quad x^1\omega^3+x^4\omega_4^5=0,$$
$$x^1b\omega^2+x^2\omega^3+x^4\omega_4^6=0.$$

Кроме сдвоенного фокуса $A_2$, соответствующего смещению

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$\omega^3 = 0$ , имеется еще один фокус, не лежащий на прямой $A_1A_2$. Требуя, чтобы

$$[\omega_4^5 \omega_4^3] = [\omega_4^6 \omega_4^3] = 0 (mod\,\omega^2), \qquad (33)$$

мы поместим вершину $A_4$ в этот фокус плоскости $A_1A_2A_4$.

Аналогично, рассматривая неголономные подмногообразия $\omega^2 = 0$ 3-семейства плоскостей $A_1A_2A_5 (A_1A_2A_3)$ и требуя, чтобы

$$[\omega_5^3 \omega_5^4] = [\omega_5^6 \omega_5^4] = 0 (mod\,\omega^2) \qquad (34)$$

$$([\omega_3^5 \omega_3^4] = [\omega_3^6 \omega_3^4] = 0 (mod\,\omega^2)), \qquad (35)$$

мы поместим вершину $A_5 (A_3)$ в фокус плоскости $A_1A_2A_5$ $(A_1A_2A_3)$, не лежащий на прямой $A_1A_2$.

Дифференцируя уравнения (31) внешним образом с учетом (23) и находя $\delta a^q_{p\varkappa}$ , легко установить, что фиксация (32) - (35) возможна для самого общего 3-семейства и при этом исключаются случаи, когда третий фокус принадлежит прямой $A_1A_2$ $(ab \neq 0)$ и когда плоскость $A_1A_2A_p$ имеет фокусную конику $(\beta_3 \alpha_5 \neq 0)$.

Проведя еще нормирования

$$a = b = \alpha_5 = \beta_3 = 1, \quad \pi^\alpha_\alpha = 0 \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать}), \qquad (36)$$

мы закончим построение канонического репера 3-семейства прямых в $P_5$ , причем для всех форм Пфаффа имеем

$$\omega^\beta_\alpha = a^\beta_{\alpha\varkappa}\, \omega^\varkappa, \qquad (37)$$

где $a^\beta_{\alpha\varkappa}$ связаны соотношениями, вытекающими из (5), (8) - (10), (12), (23), (29), (32) - (36). Исследуя условия интегрируемости системы (37), получаем, что 3-семейство прямых в $P_5$ определяется с произволом в пять функций трех аргументов, что совпадает с результатом работы [3] (§4).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Известно [10] , что прямая, проходящая через два различных фокуса плоскости 2-семейства, описывает псевдофокальное 2-семейство. Очевидно, что это свойство будет справедливо и для неголономных подмногообразий $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$ . Таким образом, ребра $A_1A_6, A_2A_4$ $(A_1A_5, A_1A_3)$ образуют неголономные псевдофокальные подмногообразия, уравнения которых $\omega^1=0$ $(\omega^2=0)$.

§ 6. Подмногообразия $\omega^1\omega^2=0$ . Рассмотрим некоторые свойства подмногообразия $\omega^2=0$ $(\omega^1=0)$, для которого вершина $A_1$ $(A_2)$ - псевдофокус. Обозначим неголономное подмногообразие гиперповерхности $S_4$ , заданное уравнением $\omega^i=0$ $(i=1,2)$ , через $S_3^i$ . Найдем асимптотические направления, например, подмногообразия $S_3^2$ в точке $A_1$ . Касательная 2-плоскость к нему в этой точке имеет вид

$$T_3^{\rho=0} \equiv (A_1A_2A_3A_5). \tag{38}$$

Из условия $(d^2(A_1+\rho A_2), T_3^\rho)=0$ при $\rho=0$ получаем

$$(\omega_5^6+\omega_1^2+2d\rho)\omega^3+\omega_3^6\omega^1=0, \tag{39}$$

$$\omega_3^4\omega^1+\omega_5^4\omega^3=0. \tag{40}$$

Таким образом, как и для голономной 3-поверхности [10], описываемой прямой псевдофокального 2-семейства в $P_5$ , в каждой точке прямой $A_1A_2$ (в том числе и в $A_1$ ) имеется три асимптотических направления подмногообразия $S_3^2$ , одно из которых совпадает с $A_1A_2$.

С помощью (23) уравнение (40) приводится к виду

$$\beta_1(\omega^1)^2+2\beta_3\omega^1\omega^3+\beta_6(\omega^3)^2=0. \tag{41}$$

В силу фиксации (29), т.е. в силу того, что вершина $A_1$ является одной из инвариантных точек $A_1+\rho_\nu A_2$ , оба

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



решения уравнения (41) совпадают. Таким образом, доказана

Теорема 3. Если асимптотический конус в некоторой точке $A_1+\rho_1 A_2$ поверхности $S_4$ имеет одномерную вершину, то для неголономного подмногообразия $S_3^*$, соответствующего подмногообразию $\Psi_2^*$ 3-семейства, для которого эта точка - псевдофокус, два асимптотических направления в точке $A_1+\rho_1 A_2$ совпадают.

Легко проверить, что теорема 3 справедлива и при $a=0$, т.е., когда 3-семейство является одно-фокальным с фокусом в другой вершине $A_2$.

§ 7. О фокальной классификации нефокальных 3-семейств прямых в $P_5$. Для нефокальных 3-семейств прямых фокальная классификация [2], основанная на возможности наличия псевдофокальных 2-семейств (фокальных нулевого класса) дает:

1. Нефокальное 3-семейство, не допускающее расслоения на $\infty^1$ псевдофокальных 2-семейств.

2. Нефокальное 3-семейство, допускающее одним способом расслоение на $\infty^1$ псевдофокальных 2-семейств, для которых гиперплоскость $A_1A_2A_3A_5A_6$ ($A_1A_2A_4A_5A_6$) есть касательное подпространство. Оно определяется тем условием, что уравнение $\omega^2=0$ ($\omega^1=0$) вполне интегрируемо, т.е. $[D\omega^2\omega^2]=0$ ($[D\omega^1\omega^1]=0$), что равносильно $a^4_{53}=a^4_{61}=0$ ($a^3_{52}=a^3_{63}=0$).

3. Нефокальное 3-семейство, расслаивающееся двумя способами на $\infty^1$ псевдофокальных 2-семейств указанных типов, характеризуется условиями: $a^4_{53}=a^4_{61}=a^3_{52}=a^3_{63}=0$.

§8. Одно-фокальные 3-семейства. При $b=0$ ($a\neq 0$) прямая $A_1A_2$ описывает одно-фокальное 3-семейство с фокусом $A_1$, соответствующим торсу $\omega^1=\omega^3=0$.

Внося в систему (11) $b=a^6_{12}=0$, получаем

$$\pi^2_1=\pi^6_5=\pi^5_3=0. \qquad (42)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Исключая два-фокальные 3-семейства, которые рассмотрим ниже, проведем нормирования

$$a^{6}_{23} = a^{5}_{21} = 1 . \qquad (43)$$

Тогда уравнения (13) принимают вид

$$\omega^{4}_{1} = \omega^{3}_{2} = \omega^{6}_{1} = 0, \quad \omega^{5}_{2} = \omega^{1}, \quad \omega^{6}_{2} = \omega^{3}. \qquad (44)$$

Проведенная в (5), (8) - (10) фиксация, кроме указанного ранее, геометрически характеризуется тем, что 3-плоскость $A_1A_2A_3A_5$ совмещена с фокальной 3-плоскостью в фокусе $A_1$. Плоскость $A_1A_2A_5$ касается в точке $A_2$ подмногообразия $\omega^2 = \omega^3 = 0$. Плоскость $A_1A_2A_4$ касается торса $\omega^1 = \omega^3 = 0$. Касательная 3-плоскость в точке $A_2$ к неголономному подмногообразию $S^1_3$ гиперповерхности $S_4$, заданному уравнением $\omega^1 = 0$, совмещена с 3-плоскостью $A_1A_2A_4A_6$ (вершина $A_2$ пока не фиксируется).

Из (28) следует, что фиксацией

$$\alpha_4\alpha_6 - \alpha_5^2 = 0, \quad \pi^3_5 = 0 \qquad (45)$$

при $\alpha \neq 0$ мы поместили вершину $A_2$ в одну из точек $A_1 + \rho_0 A_2$, в которых асимптотический гиперконус $K^{\rho_0}$ имеет одномерную вершину. Теперь, в силу (11), (42) и (45), $\delta\omega^1 = \theta_1\omega^1$, $\delta\omega^3 = \theta_3\omega^3$ и $\delta\omega^2 = \pi^4_6\omega^3 + \theta_2\omega^2$, т.е. подмногообразия $\omega^1 = 0$ и $\omega^3 = 0$ инвариантно связаны с прямой 3-семейства.

Дальнейшая канонизация репера производится с помощью подмногообразия $\omega^1 = 0$, которое является неголономным полуфокальным [2] подмногообразием $\Psi^1_2$ с фокусом $A_1$, соответствующим торсу $\omega^3 = 0$. Для подмногообразия $\Psi^1_2$ уравнения (13) имеют вид, аналогичный с уравнениями (6) работы [11]. В силу теоремы 3 (§6) вершина $A_2$ является точкой совпадения двух асимптотических направлений неголономного подмногообразия $S^1_3$, соответствующего подмногообразию $\Psi^1_2$. Поэтому элементы репера можно

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



фиксировать по схеме, предложенной в работе [11]. Приведем некоторые этапы этой фиксации.

Указанное выше сдвоенное асимптотическое направление касается подмногообразия

$$\omega^1 = 0, \quad \alpha_4 \omega^2 + \alpha_6 \omega^3 = 0. \tag{46}$$

Из $(28^1)$ видно, что при $\alpha_4 \neq 0$ возможна фиксация

$$\alpha_5 = 0, \quad \pi_6^4 = 0. \tag{47}$$

Тогда в силу (45) $\alpha_6 = 0$ и подмногообразие $\omega^1 = \omega^2 = 0$ характеризуется тем, что в точке $A_2$ оно касается сдвоенного асимптотического направления. С этим направлением совмещаем ребро $A_2 A_6$. Вершину $A_4$ помещаем в фокус плоскости $A_1 A_2 A_4$ при смещении $\omega^1 = \omega^2 = 0$.

Подмногообразие $\omega^2 = \omega^3 = 0$ пересекает фокальную 3-поверхность $(A_1)$ по линии, касательная к которой $(A_1, A_3 - \beta_2 A_2)$ описывает одно-фокальное 3-семейство с фокусом $A_1$. Фиксацией $\beta_2 = 0$, $\pi_3^2 = 0$ совмещаем ребро $A_1 A_3$ с этой касательной. Вершина $A_3$ на прямой $A_1 A_3$ фиксируется так же, как и $A_2$ на прямой $A_1 A_2$.

Для одно-фокальных 3-семейств прямых фокальная классификация [2], дает:

1. Одно-фокальное 3-семейство, не допускающее расслоения на $\infty^1$ полуфокальных 2-семейств прямых.

2. Одно-фокальное 3-семейство, допускающее одним способом расслоение на $\infty^1$ полуфокальных 2-семейств. Оно определяется тем условием, что одно из уравнений $\omega^2 = 0$ или $\omega^3 = 0$ вполне интегрируемо, т.е. или $[D\omega^1\omega^1] = 0$ или $[D\omega^3\omega^3] = 0$, что равносильно $a_{52}^3 = 0$ или $a_{12}^2 = a_{32}^5$.

3. Одно-фокальное 3-семейство, допускающее двойное расслоение на $\infty^1$ полуфокальных 2-семейств, характеризуется условиями: $a_{52}^3 = a_{12}^2 - a_{32}^5 = 0$.

§9. Два-фокальных 3-семейства. Такие семейства получаются при

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$a = b = 0. \qquad (48)$$

В этом случае прямая $A_1A_2$ описывает два-фокальное 3-семейство с фокусами $A_1$ и $A_2$, для которых уравнения торсов $\omega^1 = \omega^3 = 0$ и $\omega^2 = \omega^3 = 0$. Из системы (11) при условии (48) и $a^6_{23} \neq 0$, кроме $\pi^3_5$ и $\pi^4_6$, получаем $\pi^q_p = 0$ $(p \neq q)$, $\pi^2_1 = \pi^1_2 = 0$. Вторичные формы $\pi^3_5$ и $\pi^4_6$ и связанные с ними неголономные подмногообразия $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ пока не фиксируются.

Проведенная в (5), (8) - (10) фиксация геометрически, кроме ранее указанного, характеризуется тем, что 3-плоскость $A_1A_2A_3A_5$ $(A_1A_2A_4A_6)$ совмещена с фокальной 3-плоскостью в фокусе $A_1$ $(A_2)$, а плоскость $A_1A_2A_4$ касается торса $\omega^1 = \omega^3 = 0$. Тогда плоскость $A_1A_2A_3$ касается торса $\omega^2 = \omega^3 = 0$.

Неголономное подмногообразие $\omega^3 = 0$ является инвариантным и характеризуется тем, что его касательное подпространство трехмерно. В выбранном репере с этим подпространством совмещена 3-плоскость $A_1A_2A_3A_4$. Каждая прямая подмногообразия $\omega^3 = 0$ несет два фокуса $A_1$ и $A_2$, соответствующих торсам $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$. Будем называть это подмногообразие, по аналогии с фокальным 2-семейством, неголономным фокальным подмногообразием.

Преобразованиями Лапласа прямой $A_1A_2$ относительно 3-поверхностей $(A_1)$ и $(A_2)$ являются прямые $(A_1, A_3 - \beta_2 A_2)$ и $(A_2, A_4 - \alpha_2 A_1)$. Фиксацией $\beta_3 = \alpha_2 = 0$, $\pi^2_3 = \pi^1_4 = 0$ совместим ребра $A_1A_3$ и $A_2A_4$ с этими прямыми. Прямая $A_1A_3$ $(A_2A_4)$ описывает одно-фокальное 3-семейство с фокусом $A_1$ $(A_2)$. Фиксацией $\beta_1 = 0$, $\pi^4_6 = 0$ $(\alpha_4 = 0, \pi^3_5 = 0)$ совместим гиперплоскость $\Gamma_4 \equiv A_1A_2A_3A_5A_6$ $(\Gamma_3 \equiv A_1A_2A_4A_5A_6)$ с касательным 4-подпространством прямой $A_1A_3$ $(A_2A_4)$ подмногообразия $\omega^3 = 0$ 3-семейства. Неголономное подмногообразие 3-семейства $(A_1A_2)$ $\omega^1 = 0$ $(\omega^2 = 0)$ характеризуется тем, что является полуфокальным с касательным подпространством $\Gamma_3$ $(\Gamma_4)$. Вершина $A_1$ $(A_2)$ является фокусом этого подмногообразия, соответствующим торсу $\omega^1 = \omega^3 = 0$ $(\omega^2 = \omega^3 = 0)$. Не проводя дальнейшей фиксации репера

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



(это можно сделать по схеме, предложенной в [11], или с помощью фокального подмногообразия), рассмотрим фокальную классификацию, основанную на возможности наличия полуфокальных и фокальных 2-семейств (порядка нуль и класса один). Она дает:

1. Два-фокальное 3-семейство, не допускающее расслоения на $\infty^1$ полуфокальных 2-семейств прямых.

2. Два-фокальное 3-семейство, допускающее одним способом расслоение на $\infty^1$ полуфокальных 2-семейств, характеризуется одним из условий $[D\omega^1\omega^1]=0$ или $[D\omega^2\omega^2]=0$, что равносильно $a^3_{52}=0$ или $a^4_{61}=0$.

3. Два-фокальное 3-семейство, допускающее двойное расслоение на $\infty^1$ полуфокальных 2-семейств, характеризуется условиями: $a^3_{52}=a^4_{61}=0$.

4. Два-фокальное 3-семейство, допускающее одним способом расслоение на $\infty^1$ фокальных 2-семейств, характеризуется условием $[D\omega^3\omega^3]=0$, что равносильно $a^5_{32}=0$ или в (23) $\alpha_{14}=0$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М.А.Акивис. Пары Т комплексов, Матем сб., 27, №3, 1950, 351 - 378.
2. Р.М.Гейдельман. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, Москва, 1967, 323 - 374.
3. Е.Т.Ивлев. Канонический репер произвольной пары комплексов в $P_3$, Сибирск. матем. ж., 4, №4, 1963, 799-820.
4. Е.Т.Ивлев, М.Б.Пергаменщиков, Об одном проективном классе пар комплексов, Докл. Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-мат., 36, №1, 1963, 11 - 15.
5. В.Г.Сычева. Канонические реперы конгруэнции прямых в четырехмерном проективном пространстве, Труды Моск. ин-та инж. транспорта, 190, 1965, 69 - 89.
6. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий, Труды Томского ун-та, 191, Геом. сб., 6, 1967, 179 - 194.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



7. С.Е.Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей 1, Изв. Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-мат., 16, №3, 1963, 3 - 22; 2. 16, №5, 1963, 3 - 22.
8. Л.М.Шепеленко. Проективное изгибание двупараметрического семейства $(p-1)$-плоскостей в $(2p-1)$-мерном проективном пространстве, Труды Томского ун-та, 161, Геом. сб., 2, 1962, 29 - 38.
9. Л.З.Кругляков. О 2-семейства прямых в $P_5$ и парах конгруэнции прямых в $P_3$, Сибирск. матем. ж., т.9, №3, 1968, 554 - 567.
10. Л.З.Кругляков. Псевдофокальные 2-семейства прямых в $P_5$, Труды Томского ун-та, 196, Геометрич. сб. 7, 1968, 70 - 78.
11. Л.З.Кругляков. Полуфокальные 2-семейства прямых в $P_5$, Изв. вузов, Математика, №11, 1967, 35 - 42.
12. Л.З.Кругляков. О псевдофокальных семействах $d$-плоскостей в $P_n$, Изв. вузов, Математика, №10, 1969,70-77

Поступила 1 марта 1969 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Г.В.ШУЛЕНИНА

# РЕПЕРАЖ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В МНОГООБРАЗИЯХ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Конгруэнции кривых второго порядка исследовались многими авторами, в том числе В.В.Рыжковым [1], Н.Г.Тугановым [2], В.С.Малаховским [3], [4]. В предлагаемой работе невырожденные конгруэнции коник [3] в трехмерном проективном пространстве исследованы методом репераж подмногообразий [5], найдены инварианты и инвариантные формы конгруэнции коник, исследованы классы конгруэнции коник. Канонический репер, построенный В.С.Малаховским, для наших целей оказался неудобным. Поэтому построен другой канонический репер, более тесно связанный (геометрически) с полуканоническим.

§1. Канонический репер невырожденной конгруэнции коник. Поместим вершину репера $A_0$ в характеристическую точку плоскости коники, а вершины $A_1$ и $A_2$ в точки коники, принадлежащие поляре вершины $A_0$. При этом случай принадлежности характеристической точки конике из рассмотрения исключаем.

Уравнения нераспадающейся коники относительно этого репера запишем в виде:

$$(x_0)^2 - 2\rho x_1 x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \rho \neq 0. \tag{1}$$

Деривационные формулы репера имеют вид:

$$dA_\lambda = \Omega_\lambda^\mu A_\mu, \quad \lambda = 0,\dots,3, \quad \mu = 0,\dots,3, \tag{2}$$

причем формы Пфаффа $\Omega_\lambda^\mu$ удовлетворяют структурным уравнениям Э.Картана

$$D\Omega_\lambda^\mu = [\Omega_\lambda^\nu \Omega_\nu^\mu]. \tag{3}$$

Так как вершины $A_0$, $A_1$, $A_2$ фиксированы, то вторичные формы $\pi_1^0$, $\pi_2^0$, $\pi_1^3$, $\pi_2^3$, $\pi_0^1$, $\pi_0^2$, $\pi_0^3$, $\pi_1^2$, $\pi_2^1$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



равны нулю. Поэтому формы $\Omega_1^0 = \omega_1^0$, $\Omega_2^0 = \omega_2^0$, $\Omega_1^3 = \omega_1^3$, $\Omega_2^3 = \omega_2^3$, $\Omega_0^1 = \omega_0^1$, $\Omega_0^2 = \omega_0^2$, $\Omega_0^3 = \omega_0^3$, $\Omega_1^2 = \omega_1^2$, $\Omega_2^1 = \omega_2^1$ - первичные [6], причем

$$\omega_0^3 = 0, \tag{4}$$

так как точка $A_0$ является характеристической точкой плоскости коники. Примем за независимые формы $\omega_0^1 = \omega_1$, $\omega_0^2 = \omega_2$ и положим

$$\begin{aligned} &\omega_i^j = c_i^{jk}\omega_k, \quad k = 1,2, \quad i = 1,2, \\ &\omega_i^\alpha = c_i^{\alpha k}\omega_k, \quad \alpha = 0,3, \quad j = 1,2, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{5}$$

Внеся (4) в (3), получим

$$c_1^{32} = c_2^{31}. \tag{6}$$

Из рассмотрения исключается случай $[\omega_1 \omega_2] = 0$, когда поверхность $(A_0)$ вырождается в кривую. Линии $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$ геометрически характеризуются тем, что прямые $A_0A_2$ и $A_0A_1$, соответственно, являются касательными к ним в точке $A_0$ поверхности $(A_0)$.

Обычным путем можно установить, что зависимость коэффициентов $c_i^{jk}$, $p$ от оставшихся вторичных параметров имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta c_1^{01} &= 2c_1^{01}(\pi_1^1 - \pi_0^0) - c_1^{31}\pi_3^0, \\ \delta c_1^{02} &= c_1^{02}(\pi_2^2 + \pi_1^1 - 2\pi_0^0) - c_1^{32}\pi_3^0, \\ \delta c_2^{01} &= c_2^{01}(\pi_2^2 + \pi_1^1 - 2\pi_0^0) - c_1^{32}\pi_3^0, \\ \delta c_2^{02} &= 2c_2^{02}(\pi_2^2 - \pi_0^0) - c_2^{32}\pi_3^0, \end{aligned} \tag{7}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\delta c_1^{22} = c_1^{22}(\pi_1^1 - \pi_0^0) - c_1^{32}\pi_3^1,$$

$$\delta c_1^{21} = c_1^{21}(2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_2^2) - c_1^{31}\pi_3^2,$$

$$\delta c_2^{11} = c_2^{11}(\pi_2^2 - \pi_0^0) - c_1^{32}\pi_3^1,$$

$$\delta c_2^{12} = c_2^{12}(2\pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_1^1) - c_2^{32}\pi_3^1,$$

$$\delta c_1^{31} = c_1^{31}(2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_3^3),$$

$$\delta c_1^{32} = c_1^{32}(\pi_2^2 - \pi_0^0 - \pi_3^3 + \pi_1^1),$$

$$\delta c_2^{32} = c_2^{32}(2\pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_0^0),$$

$$\delta \ell n p = \pi_k^k - 2\pi_0^0.$$

Отсюда непосредственно заключаем, что величины $p$, $c_1^{31}$, $c_2^{32}$, $c_1^{32}$ являются относительными инвариантами.

Условие $c_1^{31}=0$ ($c_2^{32}=0$) выделяет конгруэнции, характеризующиеся тем, что касательная к линии $\omega_2=0$ ($\omega_1=0$) на поверхности $A_1$ ($A_2$) лежит в плоскости коники. Если $c_1^{31}=c_2^{32}=0$, то кроме того, линии $\omega_1=0$ и $\omega_2=0$ становятся асимптотическими на поверхности $A_0$.

Анализируя систему (7), легко убедиться, что для оставшихся невырожденных конгруэнций коник можно осуществить следующую фиксацию:

$$c_1^{31}=1, \quad c_2^{32}=1, \quad p=1, \tag{8}$$

$$2\pi_1^1 - \pi_0^0 - \pi_3^3 = 0, \quad 2\pi_2^2 - \pi_3^3 - \pi_0^0 = 0, \quad \pi_1^1 = 2\pi_0^0 - \pi_2^2, \tag{9}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$c_1^{21}=0,\ c_1^{01}+c_2^{02}=0,\ c_2^{12}=0,\ \pi_3^0=\pi_3^1=\pi_3^2=0. \qquad (10)$$

Если учесть еще условие эквипроективности

$$(A_0A_1A_2A_3)=1, \qquad (11)$$

то все вторичные параметры оказываются зафиксированными, а репер - каноническим. Поэтому

$$\omega_\lambda^\mu=c_\lambda^{\mu k}\omega_k,\ \lambda=0,\dots,3,\ \mu=0,\dots,3, \qquad (12)$$

где коэффициенты $c_\lambda^{\mu k}$ связаны соотношениями (6), (8), (10).

Выясним геометрическое значение последней фиксации. Проведем плоскость $a_1$ через прямую $A_0A_1$ и касательную $l_2$ к линии $\omega_2=0$ в точке $A_1$ поверхности $(A_1)$, а плоскость $a_2$ через прямую $A_0A_2$ и касательную $l_1$ к линии $\omega_1=0$ в точке $A_2$ поверхности $(A_2)$. Прямые $l_1$ и $l_2$ пересекаются с линией пересечения $\mathcal{L}$ плоскостей $a_1$ и $a_2$ в точках:

$$\mathcal{P}_1\left\{\frac{c_2^{02}}{c_2^{32}},\frac{c_2^{12}}{c_2^{32}},\frac{c_1^{21}}{c_1^{31}},1\right\}\quad\text{и}\quad\mathcal{P}_2\left\{\frac{c_1^{01}}{c_1^{31}},\frac{c_2^{12}}{c_2^{32}},\frac{c_1^{21}}{c_1^{31}},1\right\}.$$

Отсюда видно, что фиксация (8) геометрически характеризуется тем, что точки $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ лежат на прямой $\mathcal{L}$, а фиксация (9) тем, что вершина $A_3$ выбирается на прямой $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы она вместе с $A_0$ гармонически делила точки $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.

§2. Основная система дифференциальных уравнений. Пользуясь уравнениями структуры, продифференцируем (12) внешним образом и получим закон внешнего дифференцирования базисных форм:

$$D\omega_0^1=(c_1^{12}-c_0^{02}-c_2^{11})[\omega_1\omega_2],$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$D\omega_0^2 = (c_0^{01} - c_2^{11} + c_1^{22})[\omega_1\omega_2]$$

и основную систему дифференциальных уравнений

$$[\Delta c_\alpha^{\alpha k}\omega_k] = 0, \quad \alpha = 0,1,2, \quad \text{по } \alpha \text{ - не суммировать}$$

$$[\Delta c_\beta^{\rho k}\omega_k] = 0, \quad \rho = 0,1,2,3, \quad k_1 = 1,2, \quad k = 1,2, \qquad (13)$$

$$[\Delta c_i^{jj}\omega_j] = 0, \quad \beta = 1,2,3, \quad \rho \neq \beta, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2, \quad i \neq j, \quad k_1 \neq k,$$

где

$$\Delta c_i^{jj} = dc_i^{jj} + \{c_i^{jj}\beta^j - c_i^{\gamma k}c_\gamma^{jk_1}\}\omega_{k_1},$$

$$\Delta c_\beta^{\rho k} = dc_\beta^{\rho k} + \{c_\beta^{\rho k}\beta^k - c_\beta^{\gamma k}c_\gamma^{\rho k_1}\}\omega_{k_1},$$

$$\Delta c_\alpha^{\alpha k} = dc_\alpha^{\alpha k} + \{c_\alpha^{\alpha k}\beta^k - c_\alpha^{\gamma k}c_\gamma^{\alpha k_1}\}\omega_{k_1},$$

$$\beta^1 = c_1^{12} - c_0^{02} - c_2^{11}, \quad \beta^2 = c_0^{01} - c_2^{21} + c_1^{22},$$

причем суммирование по $\gamma$ при $k$ =1 производится от 0 до 1, а при $k$ =2 от 2 до 3.

Система (13) - в инволюции и определяет невырожденные конгруэнции коник с произволом шести функций двух аргументов.

§8. Некоторые классы невырожденных конгруэнций коник. Найдем условия того, что точки $A_1$ и $A_2$ являются фокусами, а также сдвоенными или строенными фокусами конгруэнции коник. Как известно [3], система уравнений для определения фокусов и фокальных направлений записывается в виде:

$$(x_0)^2 - 2x_1x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

$$x_0x_1(\omega_2 - \omega_1^0) - (x_0)^2 + x_0x_2(\omega_1 - \omega_2^0) + (x_1)^2\omega_1^2 + \qquad (14)$$

$$+(x_2)^2\omega_2^1 + x_1x_2(\omega_2^2 + \omega_1^1) = 0, \quad x_1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Из этой системы обычным образом получим следующую равносильную (14) систему уравнений:

$$(x_0)^2 x_1\{[-c_0^{01}+\tfrac{1}{2}(c_2^{21}+c_1^{11})]c_1^{32}+[(c_0^{02}-\tfrac{1}{2}(c_2^{22}+c_1^{12})]\}+$$
$$+x_0(x_1)^2\{-c_1^{01}c_1^{32}+(c_1^{02}-1)\}+\frac{(x_0)^3}{2}\{c_1^{32}(c_2^{01}+1)-c_1^{01}+c_2^{02}-$$
$$-c_1^{32}(1-c_1^{02})\}+\frac{x_2(x_0)^2}{2}c_1^{32}c_2^{11}-\frac{(x_0)^2x_1}{2}c_1^{32}c_1^{22}+$$
$$+(x_0)^2x_2\{[-c_0^{01}+\tfrac{1}{2}(c_2^{21}+c_1^{11})+c_1^{32}[c_0^{02}-\tfrac{1}{2}(c_2^{22}+c_1^{12})]+$$
$$+x_0(x_2)^2\{1-c_2^{01}+c_1^{32}c_2^{02}\}+(x_2)^3c_2^{11}+(x_1)^3(-c_1^{22})=0,$$

$$2x_1x_2=(x_0)^2.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы точки $A_1$ и $A_2$ были фокусами конгруэнции коник, необходимо

$$c_2^{11}=0,\quad c_1^{22}=0. \tag{15}$$

Для того, чтобы точки $A_1$ и $A_2$ были сдвоенными фокусами конгруэнции коник, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$c_1^{22}=0,\ c_2^{11}=0,\ c_1^{02}-c_1^{01}c_1^{32}=1,\ c_2^{02}c_1^{32}-c_2^{01}=-1. \tag{16}$$

При

$$c_1^{22}=0,\ c_2^{11}=0,\ c_1^{02}-c_1^{01}c_1^{32}=1,\ c_2^{02}c_1^{32}-c_2^{01}=-1,$$
$$[-c_0^{01}+\tfrac{1}{2}(c_2^{21}+c_1^{11})]+c_1^{32}[c_0^{02}-\tfrac{1}{2}(c_2^{22}+c_1^{12})]=0, \tag{17}$$
$$[-c_0^{01}+\tfrac{1}{2}(c_2^{21}+c_1^{11})]c_1^{32}+[c_0^{02}-\tfrac{1}{2}(c_2^{22}+c_1^{12})]=0$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



эти точки станут строенными фокусами.

Рассмотрим класс конгруэнций коник, характеризующийся тем, что точки $A_1$ и $A_2$ являются фокусами коники, т.е. выполняются условия (15).

Конгруэнции этого класса обладают следующими свойствами:

а) Касательные плоскости к поверхностям $(A_1)$ и $(A_2)$ в точках $A_1$ и $A_2$, соответственно, совпадают с координатными плоскостями $\{A_1A_0A_3\}$ и $\{A_2A_0A_3\}$.

Последнее утверждение непосредственно вытекает из соотношения (15).

б) Точки $A_0$ и $A_1$ ( $A_0$ и $A_2$ ) являются фокусами луча $A_0A_1$ ( $A_0A_2$ ) прямолинейной конгруэнции $A_0A_1$ ( $A_0A_2$ ).

в) Прямолинейная конгруэнция $A_1A_3$ ( $A_2A_3$ ) является параболической, точка $A_1$ ( $A_2$ ) является фокусом луча $A_1A_3$ ( $A_2A_3$ ) конгруэнции $A_1A_3$ ( $A_2A_3$ ).

В самом деле, уравнения фокусов конгруэнций $A_0A_1$, $A_0A_2$, $A_2A_3$ и $A_1A_3$ имеют соответственно вид:

$$\bar{F}_1 = \bar{A}_0, \quad \bar{F}_2 = C_1^{22}\bar{A}_0 - \bar{A}_1, \tag{18}$$

$$\bar{F}_1 = \bar{A}_0, \quad \bar{F}_2 = C_2^{11}\bar{A}_0 - \bar{A}_2, \tag{19}$$

$$\bar{F}_{1,2} = 2C_2^{11}C_2^{02}\bar{A}_3 + \Big\{-(C_2^{11}C_3^{02} + C_2^{02}C_3^{11} - C_2^{01}C_3^{12}) \pm$$

$$\pm\sqrt{(C_2^{11}C_3^{02} + C_2^{02}C_3^{11} - C_2^{01}C_3^{12})^2 - 4C_2^{11}C_2^{02}(C_3^{11}C_3^{02} - C_3^{01}C_3^{12})}\Big\}\bar{A}_2, \tag{20}$$

$$\bar{F}_{1,2} = -2C_1^{01}C_1^{22}\bar{A}_3 + \Big\{(-C_3^{21}C_1^{02} + C_1^{01}C_3^{22} + C_3^{01}C_1^{22}) \pm$$

$$\pm\sqrt{(C_1^{01}C_3^{22} + C_3^{01}C_1^{22} - C_3^{21}C_1^{02})^2 - 4C_1^{01}C_1^{22}(C_3^{21}C_3^{02} - C_3^{01}C_3^{22})}\Big\}A_1 \tag{21}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Присоединив (18), (19), (20), (21) к (15), получим утверждения б) и в).

Внося $c_1^{22}=0$, $c_2^{11}=0$ в (13) и учитывая (8) и (10), получаем следующие соотношения на коэффициенты:

$$c_1^{32}c_3^{21}-c_3^{22}-c_1^{01}=0,\quad c_2^{02}+c_3^{11}=c_1^{32}c_3^{12}. \tag{22}$$

Два уравнения системы (13) тождественно исчезают, система оставшихся уравнений - в инволюции и определяет решение с произволом четырех функций двух аргументов, что и составляет широту рассматриваемого класса.

Условие $c_1^{32}=0$ выделяет из рассматриваемого класса конгруэнцию коник, характеризующуюся каждым из следующих свойств:

1) Координатные линии $\omega_1\omega_2=0$ образуют на поверхности $(A_0)$ сопряженную сеть линий, так как асимптотические линии на поверхности $(A_0)$ определяются уравнением:

$$(\omega_1)^2+c_1^{32}\omega_1\omega_2+(\omega_2)^2=0. \tag{23}$$

2) Точки $A_0$ и $A_3$ гармонически делят фокусы луча $A_0A_3$ прямолинейной конгруэнции $(A_0A_3)$.

Так как фокусы луча $A_0A_3$ прямолинейной конгруэнции $(A_0A_3)$ записываются в виде:

$$\overline{F}_{1,2}=2\overline{A}_3+\{-(c_3^{11}+c_3^{22})\pm \pm\sqrt{(c_3^{22}+c_3^{11})^2-4(c_3^{11}c_3^{22}-c_3^{21}c_3^{12})}\}A_0, \tag{24}$$

то необходимым и достаточным условием того, чтобы выполнялось последнее утверждение, является следующее соотношение

$$c_3^{11}+c_3^{22}=0. \tag{25}$$

Внося $c_1^{32}=0$ в (22) и учитывая (10), получаем (25)

3) Торсы конгруэнции ребер $(A_0A_1)$ и $(A_0A_2)$ соот-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ветствуют координатным линиям поверхности $(A_0)$, ибо дифференциальные уравнения торсов конгруэнций ребер $(A_0A_1)$ и $(A_0A_2)$ для рассматриваемого класса конгруэнций коник имеют соответственно вид:

$$c_1^{32}(\omega_1)^2+\omega_1\omega_2=0, \qquad (26)$$

$$c_1^{32}(\omega_1)^2+\omega_1\omega_2=0. \qquad (27)$$

Внося $c_1^{32}=0$ в (13), получим

$$c_3^{32}+c_0^{02}-2c_1^{12}=0. \qquad (28)$$

Три уравнения системы (13) тождественно исчезают, оставшаяся система уравнений - в инволюции и определяет рассматриваемый подкласс конгруэнции коник с произволом двух функций двух аргументов.

§4. Конгруэнция $C$. Определение. Конгруэнцией $C$ называем невырожденную конгруэнцию коник, характеризующуюся тем, что точки $A_1$ и $A_2$ являются сдвоенными фокусами и координатные линии $\omega_1\omega_2=0$ образуют на поверхности $(A_0)$ сопряженную сеть.

Как видно из (23), для того, чтобы координатные линии $\omega_1\omega_2=0$ образовывали сопряженную сеть на поверхности $A_0$, достаточно условия

$$c_1^{32}=0. \qquad (29)$$

Присоединяя (29) к (16), получим, что конгруэнция $C$ полностью определяется условиями:

$$c_1^{32}=0,\ c_2^{11}=0,\ c_1^{22}=0,\ c_2^{01}=1,\ c_1^{02}=1. \qquad (30)$$

Внося (30) в (13) и учитывая (8) и (10), получим (28) и следующие условия:

$$c_1^{01}+c_3^{22}=0,\ c_3^{11}+c_2^{02}=0. \qquad (31)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Условия (25) являются следствием соотношений (31) и (10). Геометрическая характеристика условия (25) была дана в предыдущем параграфе.

Четыре уравнения системы (13) тождественно исчезают, оставшаяся система семи уравнений - в инволюции и определяет конгруэнцию $C$ с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема1. Если касательная к линии $\omega_1=0$ конгруэнции $C$ в точке $A_2$ поверхности $(A_2)$ пересекается в точке $A_3$ с касательной к линии $\omega_2=0$ в точке $A_1$ поверхности $(A_1)$, а касательная плоскость к поверхности $(A_3)$ в точке $A_3$ совпадает с координатной $\{A_1A_2A_3\}$, то фокусы $A_1$ и $A_2$ - строенные, а прямые $A_1A_3$ и $A_2A_3$ являются касательными, соответственно, к линиям $\omega_2=0$ и $\omega_1=0$ в точке $A_3$ поверхности $(A_3)$.

Доказательство. Касательные к линиям $\omega_1=0$ и $\omega_2=0$, соответственно, в точках $A_2$ и $A_1$ поверхностей $(A_2)$ и $(A_1)$ пересекают прямую $A_0A_3$ в точках $\mathcal{P}_1(c_1^{01},0,0,1)$ и $\mathcal{P}_2(c_2^{02},0,0,1)$. Следовательно, для того, чтобы рассматриваемые касательные пересекались в точке $A_3$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$c_1^{01}=0,\quad c_2^{02}=0. \tag{32}$$

Касательная плоскость к поверхности $(A_3)$ в точке $A_3$ совпадает с координатной $\{A_3A_1A_2\}$, если выполняются условия:

$$c_3^{01}=0,\quad c_3^{02}=0. \tag{33}$$

Внося (32) и (33) в (13) и учитывая (30), получаем следующие соотношения:

$$2c_0^{01}-c_2^{21}-c_1^{11}=0, \tag{34}$$

$$2c_0^{02}-c_1^{12}-c_2^{22}=0. \tag{35}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Присоединяя (34) и (35) к (30), получаем (17), то есть условия (34) и (35) геометрически характеризуются тем, что фокусы $A_1$ и $A_2$ конгруэнции $C$ - строенные.

В силу (32) из (31) следует

$$c_3^{22}=0,\quad c_3^{11}=0.$$

Последнее соотношение является необходимым условием того, чтобы прямые $A_1A_3$ и $A_2A_3$ являлись касательными, соответственно, к линиям $\omega_2=0$ и $\omega_1=0$ в точке $A_3$ на поверхности $(A_3)$.

Семь уравнений системы (13) тождественно исчезают, оставшаяся система четырех уравнений - в инволюции и определяет решение с произволом четырех функций одного аргумента.

Из предыдущих рассуждений следует, что подкласс конгруэнций $C$, выделенный теоремой 1, определяется условиями (32) и (33). Назовем конгруэнции подкласса конгруэнциями $C^1$.

Теорема 2. Если торсы конгруэнций ребер $(A_1A_3)$ и $(A_2A_3)$ соответствуют координатным линиям поверхности $(A_0)$ конгруэнции $C^1$, то пара конгруэнций ребер $(A_0A_3)$ и $(A_1A_2)$ двусторонне расслояема.

Доказательство. Дифференциальные уравнения торсов конгруэнций ребер $(A_1A_3)$ и $(A_2A_3)$ в общем случае имеют, соответственно, вид:

$$-c_1^{01}c_3^{11}(\omega_1)^2+\omega_1\omega_2(c_3^{01}c_1^{22}-c_1^{01}c_3^{22}-c_1^{02}c_3^{21})+$$
$$+(c_3^{02}c_1^{22}-c_1^{02}c_3^{22})(\omega_2)^2=0, \qquad (36)$$

$$(c_2^{11}c_3^{01}-c_2^{01}c_3^{11})(\omega_1)^2+\omega_1\omega_2(c_2^{11}c_3^{02}-c_2^{01}c_3^{12}-$$
$$-c_2^{02}c_3^{11})-c_2^{02}c_3^{12}(\omega_2)^2=0. \qquad (37)$$

В случае конгруэнции $C^1$ уравнения (36) и (37) примут вид:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$c_3^{21}\omega_1\omega_2 = 0, \quad c_3^{12}\omega_1\omega_2 = 0. \tag{38}$$

Следовательно, чтобы условие теоремы выполнялось, необходимо, чтобы

$$c_3^{21} \neq 0 \quad c_3^{12} \neq 0 . \tag{39}$$

Как известно [7], пара конгруэнций называется расслояемой в направлении от $(A_1A_2)$ к $(A_0A_3)$, если дифференциальное уравнение

$$\mu(\omega_0^0 + \mu\omega_3^0) - d\mu - \omega_3^3 = 0, \tag{40}$$

полученное из условия

$$(d\bar{M}\,\bar{M}\,\bar{A}_1\bar{A}_2) = 0,$$

вполне интегрируемо, причем $\bar{M} = \bar{A}_0 + \mu\bar{A}_3$. Дифференцируя (40) внешним образом, исключая $d\mu$ и приравнивая нулю коэффициенты при $\mu^\alpha (\alpha = 0,1,2)$, получаем следующие условия расслояемости пары конгруэнций в направлении от $A_1A_2$ к $A_0A_3$.

$$\begin{gathered} c_1^{02} - c_2^{01} - c_3^{31}c_3^{02} + c_3^{32}c_3^{01} = 0, \quad c_3^{11}c_1^{32} - c_3^{12} + c_3^{21} - c_3^{22}c_2^{31} = 0, \\ -c_3^{02}c_0^{01} + c_3^{11}c_1^{02} - c_3^{12}c_1^{01} + c_3^{21}c_2^{02} - c_3^{22}c_2^{01} + c_3^{31}c_3^{02} - c_3^{32}c_3^{01} + c_3^{01}c_0^{02} = 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Аналогично получаются условия расслояемости пары конгруэнций в другом направлении:

$$\begin{gathered} c_1^{32}c_3^{12} - c_2^{02} - c_3^{11} = 0, \quad c_1^{01} + c_3^{22} - c_1^{32}c_3^{21} = 0, \\ -c_1^{02} + c_1^{31}c_3^{12} - c_1^{32}c_3^{11} - c_2^{01} - c_2^{31}c_3^{22} + c_3^{21} = 0. \end{gathered} \tag{42}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Присоединяя (32), (33) и (30) к (41) и (42), получаем, что условиями двусторонней расслояемости пары конгруэнций ребер $A_1A_2$ и $A_0A_3$ для конгруэнции $C^1$ являются соотношения (39), что и требовалось доказать.

Система двух уравнений (13) - в инволюции и определяет решение с произволом двух функций одного аргумента, что и составляет широту подкласса, выделенного теоремой 1.

Уравнения $\omega_1\omega_2=0$ определяют в этом случае сопряженные сети линий на поверхностях $(A_0)$, $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$. В самом деле, в силу (32), (33), (30) и (39) уравнения асимптотических линий на поверхностях $(A_0)$, $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$ имеют вид:

$$(\omega_1)^2+(\omega_2)^2=0. \qquad (43)$$

§5. Полуканонический репер конгруэнции коник. Поместим вершину репера $B_0$ в характеристическую точку плоскости коники. Точки $B_1$ и $B_2$ поместим на поляре точки $B_0$ таким образом, чтобы они гармонически делили точки пересечения коники с полярой.

Деривационные формулы репера имеют вид:

$$dB_\lambda=\Omega_\lambda^\mu B_\mu, \quad \lambda=0,\dots,3, \quad \mu=0,\dots,3, \qquad (44)$$

причем формы Пфаффа $\Omega_\lambda^\mu$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана (3).

Запишем уравнения нераспадающейся действительной коники относительно этого репера

$$a_{00}(x_0)^2+a_{11}(x_1)^2+a_{22}(x_2)^2=0,$$

$$x_3=0, \quad a_{00}a_{11}a_{22}\neq 0.$$

Закон изменения коэффициентов последнего уравнения при изменении вторичных параметров имеет вид:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\delta \ln a_{00} - \pi_0^0 = \delta \ln a_{22} - \pi_2^2 = \delta \ln a_{11} - \pi_1^1,$$
$$a_{11}\pi_2^1 + a_{22}\pi_1^2 = 0. \qquad (45)$$

Используя систему (45), проведем следующую фиксацию:

$$a_{00} = 1,\ a_{11} = 1,\ a_{22} = -1,\ \pi_1^1 - \pi_0^0 = 0,\ \pi_2^2 - \pi_1^1 = 0,\ \pi_2^1 = \pi_1^2. \qquad (46)$$

Тогда уравнения коники примут вид:

$$(x_0)^2 + (x_1)^2 - (x_2)^2 = 0,\quad x_3 = 0. \qquad (47)$$

Так как вершина $B_0$ фиксирована, а $B_1$ и $B_2$ помещены на поляре точки $B_0$, то формы Пфаффа $\Omega_0^1 = V_0^1$, $\Omega_0^2 = V_0^2$, $\Omega_0^3 = V_0^3$, $\Omega_1^0 = V_1^0$, $\Omega_2^0 = V_2^0$, $\Omega_1^3 = V_1^3$, $\Omega_2^3 = V_2^3$ – первичные [1], причем

$$V_0^3 = 0. \qquad (48)$$

Дифференцируя внешним образом последнее соотношение и применяя лемму Картана, получаем

$$V_1^3 = b_1^{31} V_0^1 + b_1^{32} V_0^2,$$
$$V_2^3 = b_2^{31} V_0^1 + b_2^{32} V_0^2, \qquad (49)$$

$$b_2^{31} = b_1^{32}. \qquad (50)$$

Обычным путем можно установить, что зависимость коэффициентов уравнений (49) от вторичных параметров имеет вид

$$\delta b_1^{31} = 2b_1^{32}\pi_1^2,\quad \delta b_1^{32} = (b_1^{31} + b_2^{32})\pi_1^2,$$
$$\delta b_2^{32} = 2b_1^{32}\pi_1^2. \qquad (51)$$

Анализируя (51), легко видеть, что можно провести незави-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



симо от формы $\pi_1^2$, которая является полувторичной [5], следующую фиксацию

$$\pi_1^1 - \pi_3^3 = 0, \quad b_1^{31} - b_2^{32} = 1. \tag{52}$$

Таким образом, если учесть еще условие эквипроективности

$$(\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3) = 1, \tag{53}$$

то формы $V_0^0, V_1^1, V_2^2, V_3^3$ становятся первичными. Примем $V_0^1 = V_1$ и $V_0^2 = V_2$ за независимые формы и положим

$$V_i^0 = b_i^{0k} V_k, \quad V_\alpha^\beta = b_\alpha^{\beta k} V^k,$$
$$V_2^1 - V_1^2 = a V_1 + b V_2, \tag{54}$$
$$k = 1,2, \quad \alpha = \beta = 0,1,2, \quad i = 1,2.$$

Линии $V_1 = 0$ и $V_2 = 0$ геометрически характеризуются тем, что прямые $B_0B_2$ и $B_0B_1$, соответственно, являются касательными к ним в точке $B_0$ поверхности $(B_0)$.

Из рассмотрения исключается случай $[V_1 V_2] = 0$, когда поверхность $(B_0)$ вырождается в кривую.

Обычным образом находим

$$\delta b_0^{01} = b_0^{02} \pi_1^2, \quad \delta b_0^{02} = b_0^{01} \pi_1^2,$$
$$\delta b_1^{11} = (b_1^{12} + a)\pi_1^2 - b_1^{31} \pi_3^1,$$
$$\delta b_2^{21} = (b_2^{22} - a)\pi_1^2 - b_1^{32} \pi_3^2,$$
$$\delta b_2^{22} = (b_2^{21} - b)\pi_1^2 - b_2^{32} \pi_3^2, \tag{55}$$
$$\delta b_1^{12} = (b_1^{11} + b)\pi_1^2 - b_1^{32} \pi_3^1,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\delta b_1^{02} = (b_1^{01} + b_2^{02})\,\pi_1^2 - b_1^{32}\pi_3^0,$$

$$\delta b_2^{01} = (b_2^{02} + b_1^{01})\,\pi_1^2 - b_1^{32}\pi_3^0,$$

$$\delta b_2^{02} = (b_1^{02} + b_2^{01})\,\pi_1^2 - b_2^{32}\pi_3^0,$$

$$\delta a = b\pi_1^2 - b_2^{31}\pi_3^1 + b_1^{31}\pi_3^2,$$

$$\delta b = a\pi_1^2 - b_2^{32}\pi_3^1 + b_1^{32}\pi_3^2.$$

Используя (55), можно провести следующую фиксацию, уже не являющуюся независимой от полувторичной формы $\pi_1^2$

$$b_2^{21} - b_1^{11} = b, \quad b_2^{22} - b_1^{12} = a, \quad \pi_3^2 = \frac{2[b(2b_1^{31}+1) + 2b_1^{32}a]}{4(b_1^{32})^2 - (2b_1^{31}+1)^2}\pi_1^2,$$

$$\pi_3^1 = \frac{2[a(2b_1^{31}+1) - 2bb_1^{32}}{4(b_1^{32})^2 - (2b_1^{31}+1)^2}\pi_1^2, \qquad (56)$$

$$(2b_1^{31}+1)(b_1^{01}+b_2^{02}) - 2b_1^{32}(b_1^{02}+b_2^{01}) = 0, \quad \pi_3^0 = 0.$$

Выясним геометрический смысл фиксации (56). Пусть $a_j^1$ – плоскость, проведенная через прямую $B_0A_j$ и касательную $l_j$ к линии $V_1 + (-1)^j V_2 = 0$ в точке $A_j$ поверхности $(A_j)$, причем $j = 1,2$, а точки $A_1$ и $A_2$ суть точки пересечения поляры точки $B_0$ с коникой. Пусть, далее, $\mathcal{L}$ – прямая, по которой пересекаются плоскости $a_1^1$ и $a_2^1$. Тогда, согласно (56), вершина $B_3$ помещена на $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы она гармонически делила вместе с $B_0$ точки пересечения прямых $l_j$ с $\mathcal{L}$.

Линия $V_1 + (-1)^j V_2 = 0$ геометрически характеризуется тем, что касательной к ней в точке $B_0$ поверхности $(B_0)$ будет прямая $B_0A_j$, которая в точке $A_j$ является касательной к конике ($j = 1,2$).

Условия $2b_1^{31} + 1 = \pm 2b_1^{32}$ выделяют конгруэнции, которые геометрически характеризуются тем, что прямые $l_j$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



лежат в плоскости коники. Эти конгруэнции проведенной фиксацией из рассмотрения исключаются.

§6. Основная система дифференциальных уравнений. Будем считать оставшиеся вторичные параметры функциями первичных.

Закон внешнего дифференцирования базисных форм и основная система дифференциальных уравнений имеют вид:

$$DV_0^1 = (b_1^{12} - b_0^{02} - b_2^{11})[V_1V_2],\ DV_0 = (b_0^{01} - b_2^{21} + b_1^{22})[V_1V_2], \quad (57)$$

$$[\Delta b_\beta^{\beta k} V_k] = 0,\ \alpha = 0,1,2,3,\ \beta = 0,1,2,\ (\text{по } \beta \text{ не суммировать})$$

$$[\Delta b_p^{\alpha k} V_k] = 0,\ p = 3,1,\ l = 0,3,\ p \neq \alpha,$$

$$[\Delta b_2^{lk} V_k] = 0,\ k_1 = 1,2,\ k = 1,2,\ k_1 \neq k, \quad (58)$$

$$[\Delta a V_1 + \Delta b V_2] = 0,$$

где

$$\Delta b_\alpha^{\beta k} = db_\alpha^{\beta k} + \{b_\alpha^{\beta k} C^k + b_\alpha^{\gamma k} b_\gamma^{\beta k_1}\} V_{k_1},$$

$$\Delta b_p^{\alpha k} = db_p^{\alpha k} + \{b_p^{\alpha k} C^k + b_p^{\gamma k} b_\gamma^{\alpha k_1}\} V_{k_1},$$

$$\Delta b_2^{lk} = db_2^{lk} + \{b_2^{lk} C^k + b_2^{\gamma k} b_\gamma^{lk_1}\} V_{k_1},$$

$$\Delta a = da + \{3b_1^{21} + (a)^2 + b_2^{31} b_3^{12} - b_2^{02} - b_2^{32} b_3^{11}\} V_2 - ac^1 V_2,$$

$$\Delta b = db - \{3b_1^{22} + (b)^2 - b_1^{01} - b_1^{31} b_3^{22} + b_1^{32} b_3^{21}\} V_1 + bC^2 V_1,$$

$$C^1 = b_1^{12} - b_0^{02} - b_2^{11},\quad C^2 = b_0^{01} - b_2^{21} + b_1^{22},$$

причем суммирование по $\gamma$ производится при $k = 1$ от 0 до 1, а при $k = 2$ от 2 до 3.

Система (58) - в инволюции и определяет невырожденную конгруэнцию коник, отнесенную к произвольному подмногообразию с произволом семи функций двух аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Этот полуканонический репер является каноническим репером подмногообразия - однопараметрического семейства коник $V_0^1 = 0$ . Деривационные формулы последнего имеют вид:

$$\frac{dB_i}{ds} = \alpha_i^k B_k\,, \quad i = 0,1,2,3,\ k = 0,1,2,3, \tag{59}$$

где $\alpha_0^1 = 0,\ \alpha_0^2 = 1,\ \alpha_0^3 = 0.$
Здесь

$$V_0^2 = ds,\quad (\beta_i^{k2})_{V_1=0} = \alpha_i^k \tag{60}$$

§7. Связь с каноническим репером. Инварианты и инвариантные формы конгруэнции коник. Положим

$$\bar{A}_0 = \lambda_0 \bar{B}_0,\ \bar{A}_1 = \lambda_1(\bar{B}_1 + \bar{B}_2),\ \bar{A}_2 = \lambda_2(\bar{B}_1 - \bar{B}_2),\ \bar{A}_3 = \lambda_3 \bar{B}_3 \tag{61}$$

Тогда в силу (11) и (53) имеем

$$-2(\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = 1. \tag{62}$$

Дифференцируя соотношения (61) и применяя соответствующие деривационные формулы, получим

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1}c_1^{01} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}(\beta_1^{01} + \beta_2^{01} + \beta_1^{02} + \beta_2^{01}),\ \frac{\lambda_0}{\lambda_2}c_1^{02} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}(\beta_1^{01} - \beta_1^{02} - \beta_2^{02} + \beta_2^{01}),$$
$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1}c_2^{01} = \frac{\lambda_2}{\lambda_0}(\beta_1^{01} - \beta_2^{01} + \beta_1^{02} - \beta_2^{02}),\quad \frac{\lambda_0}{\lambda_2}c_1^{32} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \tag{63}$$

$$c_2^{11}\frac{\lambda_0}{\lambda_2} = -(a+b),\quad \frac{\lambda_0}{\lambda_1}c_1^{22} = a - b, \tag{64}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(\beta_1^{31} - 2\beta_1^{32} + \beta_2^{32}),\ \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}(\beta_1^{31} + 2\beta_1^{32} + \beta_2^{32}), \tag{65}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1}c_3^{01} = \frac{\lambda_3}{\lambda_0}(\beta_3^{02} + \beta_3^{01}),\quad \frac{\lambda_0}{\lambda_2}c_3^{02} = \frac{\lambda_3}{\lambda_0}(\beta_3^{01} - \beta_3^{02}), \tag{66}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\frac{\lambda_0}{\lambda_3} C_3^{11} = \frac{1}{2}\left(B_3^{11} + B_3^{21} + B_3^{12} + B_3^{22}\right) \tag{67}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_3} C_3^{12} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\left(B_3^{11} + B_3^{21} - B_3^{12} - B_3^{22}\right) \tag{68}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} C_3^{21} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(B_3^{11} + B_3^{12} - B_3^{21} - B_3^{22}\right), \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_3} C_3^{22} = B_3^{11} - B_3^{12} - B_3^{21} + B_3^{22} \tag{69}$$

$$\omega_1 = \frac{\lambda_0}{2\lambda_1}\left(V_1 + V_2\right), \quad \omega_2 = \frac{\lambda_0}{2\lambda_2}\left(V_1 - V_2\right) \tag{70}$$

$$\omega_0^0 = d\ln\lambda_0 + B_0^{01} V_1 + B_0^{02} V_2, \tag{71}$$

$$\omega_3^3 = d\ln\lambda_3 + B_3^{31} V_1 + B_3^{32} V_2, \tag{72}$$

$$\omega_1^1 = d\ln\lambda_1 + \frac{1}{2}\left\{\left(B_1^{11} + B_2^{11} + B_2^{21} + B_1^{21}\right)V_1 + \left(B_1^{12} + B_1^{22} + B_2^{12} + B_2^{22}\right)V_2\right. \tag{73}$$

Исключая $\lambda_i$ из формул (63 - 69), найдем следующую систему инвариантов конгруэнции коник:

$$J_1 = C_1^{02} = -\frac{1}{2}\left(B_1^{01} + B_2^{01} - B_1^{02} - B_2^{02}\right), \tag{74}$$

$$J_2 = C_2^{01} = -\frac{1}{2}\left(B_1^{01} - B_2^{01} + B_1^{02} - B_2^{02}\right), \tag{75}$$

$$J_3 = \frac{C_1^{01}}{C_1^{32}} = -\frac{1}{2}\left(B_1^{01} + B_2^{01} - B_1^{02} + B_2^{02}\right)\left(B_1^{31} - 2B_1^{32} + B_2^{32}\right), \tag{76}$$

$$J_4 = \left(\frac{1}{C_1^{32}}\right)^2 = \left(B_1^{31} + 2B_1^{32} + B_2^{32}\right)\left(B_1^{31} - 2B_1^{32} + B_2^{32}\right), \tag{77}$$

$$J_5 = \frac{C_1^{32} C_3^{01}}{C_3^{02}} = \frac{B_3^{01} + B_3^{02}}{B_3^{01} - B_3^{02}},$$

$$J_6 = \frac{a - b}{(a+b)\left(B_1^{31} + 2B_1^{32} + B_2^{32}\right)} = -\frac{C_1^{32} C_1^{22}}{C_2^{11}}, \tag{78}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$J_7 = \frac{c_3^{11}}{c_3^{21} c_1^{32}} = \frac{(b_1^{31}+2b_1^{32}+b_2^{32})(b_3^{11}+b_3^{21}+b_3^{12}+b_3^{22})}{(b_3^{11}+b_3^{12}-b_3^{21}-b_3^{22})}, \quad (79)$$

$$J_8 = \frac{c_3^{12}}{c_3^{11} c_1^{32}} = \frac{(b_1^{31}+2b_1^{32}+b_2^{32})(b_3^{11}+b_3^{21}-b_3^{12}-b_3^{22})}{(b_3^{11}+b_3^{12}+b_3^{21}+b_3^{22})}, \quad (80)$$

$$J_9 = \frac{c_3^{11}}{c_3^{22}} = \frac{b_3^{11}+b_3^{21}+b_3^{12}+b_3^{22}}{b_3^{11}-b_3^{12}-b_3^{21}+b_3^{22}}, \quad (81)$$

$$J_{10} = 2c_2^{11} c_1^{22} = a^2 - b^2. \quad (82)$$

Получим вычислительные формулы для инвариантов подмногообразия $V_0^1 = 0$. Полагая в формулах (61) $l_i = \frac{1}{\lambda_i}$, получим

$$\bar{B}_0 = l_0 \bar{A}_0, \ \bar{B}_1 = \frac{1}{2}(l_1\bar{A}_1 + l_2\bar{A}_2), \ \bar{B}_2 = \frac{1}{2}(l_1\bar{A}_1 - l_2\bar{A}_2), \ \bar{B}_3 = l_3\bar{A}_3. \quad (83)$$

Для подмногообразия $V_0^1 = 0$ имеем $V_0^2 = ds$, следовательно, формулы (70) принимают вид:

$$\omega_1 = \frac{l_1}{2l_0} ds, \quad \omega_2 = -\frac{l_2}{2l_0} ds. \quad (84)$$

Кроме того, из формул (52) и (53) вытекают следующие соотношения:

$$l_0 l_1 l_2 l_3 = -2, \quad \frac{l_0 l_3}{l_1 l_2} = c_1^{32}. \quad (85)$$

Далее, воспользуемся тем, что при переходе от полуканонического репера к каноническому уравнение коники (47) преобразуется в уравнение (1). Формулы (83) дают

$$x_0 = x_0^* l_0, \ x_1 = x_1^* \frac{l_1}{2} + x_2^* \frac{l_2}{2}, \ x_2 = x_1^* \frac{l_1}{2} - x_2^* \frac{l_2}{2}, \ x_3 = x_3^* l_3, \quad (86)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где $x_i$ - координаты точки в полуканоническом репере, а $x_i^*$ - координаты точки в каноническом репере. Подставляя (86) в (47) и (1), получим

$$\frac{(l_0)^2}{l_1 l_2} = -\frac{1}{2} \qquad (87)$$

Так как $l_i \neq 0$, то из рассмотрения исключаются конгруэнции коник, определяющиеся условием $C_1^{32}=0$ и геометрически характеризующиеся тем, что координатные линии $\omega_1\omega_2=0$ образуют на поверхности $(A_0)$ сопряженную сеть линий. Эти конгруэнции коник были рассмотрены в § 3 настоящей работы.

Из деривационных формул (59) имеем

$$\alpha_i^k = (-1)^{k+1}\left(\frac{d\bar{B}_i}{ds}, \bar{B}_{k+1}, \bar{B}_{k+2}, \bar{B}_{k+3}\right), \qquad (88)$$

где при $k+p>4$ надо вместо $k+p$ писать $k+p-4$. Внося сюда выражения $B_p$ из формул (83) и учитывая соотношения (85), (87), получим искомые вычислительные формулы:

$$\alpha_0^0 = \frac{\psi_1}{\varphi_1^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_1^1 = \frac{\psi_3-\psi_4}{2\varphi_1^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_1^0 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1},$$

$$\alpha_2^3 = \frac{\varphi_6}{2C_1^{32}\varphi_1}, \quad \alpha_3^0 = \frac{2C_1^{32}\psi_2}{\varphi_1^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_3^3 = \frac{\psi_6}{\varphi_1^{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha_1^2 = \frac{q-\psi_5}{2\varphi_1^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_2^2 = \frac{\psi_3+\psi_4}{2\varphi_1^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_2^1 = \frac{q+\psi_5}{2\varphi_1^{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha_3^1 = \frac{-2C_1^{32}\varphi_4}{\varphi_1}, \quad \alpha_3^2 = \frac{2C_1^{32}\varphi_5}{\varphi_1}, \quad \alpha_1^3 = \frac{\varphi_7}{-2C_1^{32}\varphi_1},$$

$$\alpha_2^0 = \frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

где фигурируют следующие относительно инвариантные диффе-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ренциальные формы конгруэнции:

$$\Psi_1 = \alpha_0^0 ds = -(c_0^{01}\omega_1 + c_0^{02}\omega_2),$$

$$\Psi_2 = \frac{\alpha_3^0 ds}{2c_1^{32}} = c_3^{01}\omega_1 + c_3^{02}\omega_2,$$

$$\Psi_3 = (\alpha_1^1 + \alpha_2^2)ds = -\{(c_1^{11}+c_2^{21})\omega_1 + (c_1^{12}+c_2^{22})\omega_2\},$$

$$\Psi_4 = (\alpha_2^2 - \alpha_1^1)ds = -(c_2^{11}\omega_2 + c_1^{22}\omega_1),$$

$$\Psi_5 = (\alpha_2^1 - \alpha_1^2)ds = c_1^{22}\omega_1 - c_2^{11}\omega_2,$$

$$\Psi_6 = \alpha_3^3 ds = -(c_3^{31}\omega_1 + c_3^{32}\omega_2),$$

$$\varphi_1 = 2\omega_1\omega_2,$$

$$\varphi_2 = \alpha_1^0 ds^2 = c_2^{02}(\omega_2)^2 - c_1^{01}(\omega_1)^2 + (c_2^{01} - c_1^{02})\omega_1\omega_2,$$

$$\varphi_3 = \alpha_2^0 ds^2 = -\{c_1^{01}(\omega_1)^2 + c_2^{02}(\omega_2)^2 + (c_2^{01} + c_1^{02})\omega_1\omega_2,$$

$$\varphi_4 = \frac{\alpha_3^1 ds^2}{-2c_1^{32}} = -c_3^{12}(\omega_2)^2 + c_3^{21}(\omega_1)^2 + (c_3^{22} - c_3^{11})\omega_1\omega_2,$$

$$\varphi_5 = \frac{\alpha_3^2 ds^2}{2c_1^{32}} = c_3^{12}(\omega_2)^2 + (c_3^{11}+c_3^{22})\omega_1\omega_2 + c_3^{21}(\omega_1)^2,$$

$$\varphi_6 = 2\alpha_2^3 c_1^{32} ds^2 = (\omega_1)^2 + 2c_1^{32}\omega_1\omega_2 + (\omega_2)^2,$$

$$\varphi_7 = -2\alpha_1^3 c_1^{32} ds^2 = (\omega_2)^2 - (\omega_1)^2,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



а также дифференциальный инвариант

$$q = (\alpha_1^2 + \alpha_2^1)ds = 2(c_2^{21} - c_1^{11})\omega_1 + (c_2^{22} - c_1^{12})\omega_2 + \frac{2}{ds^2}(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1) .$$

Из этих формул видно, что инварианты $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^1, \alpha_3^2, \alpha_1^3, \alpha_2^3$ являются инвариантами второго порядка, остальные $\alpha_i^k$ - инварианты первого порядка, так как содержат, соответственно, вторые и первые производные главных параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Рыжков. О конгруэнции плоских алгебраических кривых, ДАН СССР, 41, №5, 1943, 202 - 204.
2. Н.Г.Туганов. О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве, ДАН СССР, 100, №1, 1955, 13 - 15.
3. В.С.Малаховский. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в $P_3$ . Геом. сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 43 - 50.
4. В.С.Малаховский. Конгруэнции кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Геом. сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 61 - 66.
5. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179 - 194.
6. С.П.Фиников. Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.-Л., 1948.
7. С.П.Фиников. Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М.-Л., 1956.

Поступила 1 марта 1971 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

А.Е.ШИЛЛЕРОВ

# О ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Четырехпараметрическое поле направлений в трехмерном проективном пространстве $P_3$ рассматривается как геометрический образ $\Phi_4$ [1], образующим элементом которого является линейный элемент $\{A,\ell\}$ – точка и инцидентная ей прямая. Такой геометрический образ в трехмерном евклидовом пространстве исследовался в [2] и [3], эквиаффинном пространстве – в [4] – [6], и проективном пространстве – в [7]. В настоящей работе поле $\Phi_4$ исследуется методом Г.Ф.Лаптева [8]с использованием [10].

§1. Фундаментальные объекты поля направлений $\Phi_4$. Отнесем геометрический образ $\Phi_4$ к реперу нулевого порядка $\{A_i\}$ [x], совместив вершину $A_1$ и прямую $A_1A_2$ с образующим элементом поля $\Phi_4$. Тогда дифференциальные формы $\omega_1^2, \omega_\nu^\rho$ ($\nu = 1,2$; $\rho = 3,4$) в деривационных формулах $dA_i = \omega_i^k A_k$ будут главными. Исключая из рассмотрения поле направлений, присоединенное к линейчатому комплексу [3], примем формы $\omega^{\rho-2} = \omega_2^\rho$, $\omega^\rho = \omega_1^\rho$ за базисные. Тогда исходное соотношение для исследования поля $\Phi_4$ примет вид:

$$\omega_1^2 = X_i \omega^i \quad (i = 1,2,3,4) \qquad (1)$$

После двух продолжений дифференциального уравнения (1) получим систему дифференциальных уравнений, которая определит фундаментальный объект второго порядка

---

x) Предполагается, что $(A_1A_2A_3A_4) = 1$, т.е. исключена из рассмотрения инвариантная подгруппа перенормировок аналитических точек.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\{X_i, X_{ij}\} \qquad (2)$$

Здесь и в дальнейшем, если не сделано никаких оговорок, $i, j, k, l = 1,2,3,4$; $\mu, \nu = 1,2$; $p, q = 3,4$; $s, t = 1,2,3$; $\alpha, \beta, \gamma = 2,3,4$.

Чтобы в дальнейшем характеризовать фундаментальные объекты, отметим основные инвариантные образы поля $\Phi_4$: плоскость $\alpha = X_\nu A^{\nu+2}$ ( $A^i$ - аналитические плоскости соответствующего тангенциального репера $\{A^i\}$ ), касательную к начальному конусу [2]; основное специальное подмногообразие $\Psi_3(\alpha)$

$$X_\nu \omega^{\nu+2} = 0, \qquad (3)$$

главная корреляция на луче которого вырождается в соответствие $\{A_1A_2\} \to \{\alpha\}$ (соответственно $\{A_1A_2\} \to \{A_1\}$ ), подмногообразие $\Psi_2^T(\alpha)$

$$X_\nu \omega^\nu = X_\nu \omega^{\nu+2} = 0, \qquad (4)$$

все подмногообразия $\Psi_1^T$ которого - торсовые и имеют общую касательную плоскость $\alpha$ , и подмногообразие $\Psi_2^T(A_1)$

$$\omega^p = 0, \qquad (5)$$

все подмногообразия $\Psi_1^T$ которого - торсовые и имеют общий фокус в точке $A_1$ .

Далее, введем понятие обобщенного поляритета Пантази, несколько отличное от того, которое использовали Г.Георгиев, И.Попа в [9] и [3]. Со смещением $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 : \omega^4$ линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$ вдоль некоторого подмногообразия $\Psi_1$ связано смещение $dA_1$ , определяемое тем же отношением базисных форм. При этом каждое геометрическое смещение точки $A_1$ фигурирует $\infty^1$ раз. Если с линейным элементом связана некоторая плоскость $\pi$ , проходящая через центр $A_1$ линейного элемента, то каждому смещению $dA_1$ соответствует характеристика плоскости $\pi$ , причем плоскость $\pi$ покрывается характеристиками $\infty^1$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



раз. Это соответствие мы назовем "обобщенным полярите-том Пантази плоского элемента $\{A_1\pi\}$".

§2. Фундаментальный квазитензор и основной тензор первого порядка. Фундаментальный геометрический объект $X_i$ первого порядка, определяемый системой дифференциальных уравнений (1), является квазитензором [8]. При рассмотрении окрестности первого порядка поля направлений наибольший интерес представляет не сам фундаментальный геометрический объект $X_i$, а его подобъект - тензор $X_\nu$.

Прежде всего заметим, что величины $X_\nu$ суть тангенциальные координаты плоскости $\alpha$. Далее, система дифференциальных уравнений (5) тогда и только тогда вполне интегрируема, когда $X_\nu = 0$. Следовательно, тензор $X_\nu$ образует объект неголономности подмногообразия $\Psi_2^{T'}(A_1)$. В случае голономности подмногообразие $\Psi_2^{T'}(A_1)$ представляет собой связку прямых с центром в точке $A_1$. Так как

$$dA_1\Big|_{X_\nu=0} = \omega_1^1 A_1 + \omega^3(X_3A_2+A_3) + \omega^4(X_4A_2+A_4),$$

то инфинитезимальные перемещения точки $A_1$ существенно зависят только от двух главных форм. Следовательно, вершина $A_1$ описывает некоторую поверхность.

Поле $X_\nu = 0$ можно построить, если взять произвольную поверхность и каждой точке этой поверхности ассоциировать, по очереди, связку прямых с центром в этой точке. Геометрически очевидно, что широта решения рассматриваемого класса геометрических образов $\Phi_4$ - одна функция двух аргументов. Величины

$$p^{12} \equiv \Lambda = X_1X_4 - X_2X_3,\ p^{13} = -X_2,\ p^{14} = X_1$$

образуют тензор. Чтобы дать геометрическую характеристику этого тензора, рассмотрим кривые $\{A_1\}$, описываемые точкой $A_1$ на торсах подмногообразия $\Psi_2^T(\alpha)$. Все они имеют общую касательную

$$p = p^{i\alpha}(A_iA_\alpha). \qquad (6)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Заметим, что при $X_\nu = 0$ касательная $P$ неопределена.

§3. Тензор второго порядка $\Gamma_{ij}$, асимптотические подмногообразия $\Psi_2^{(2)}$. Фундаментальный геометрический объект $\{X_i, X_{ij}\}$ второго порядка, присоединенный к полю направлений $\Phi_4$, в общем случае не является ни тензором, ни квазитензором. Рассмотрим симметричные величины

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\nu\mu} = X_\nu X_\mu, \quad \Gamma_{\nu 3} = X_{[1} X_{2]\nu} - X_\nu \Lambda, \\
&\Gamma_{33} = 2\{X_1 X_{4[1} X_{2]} - X_2 X_{3[1} X_{2]}\} + \Lambda^2, \\
&\Gamma_{44} = (-1)^{\nu+\mu} X_\nu X_\mu X_{\nu\mu}, \quad \Gamma_{i4} = 0, \\
&\Gamma_{00} = (-1)^{p+q} X_{5-p} X_{5-q} X_{pq},
\end{aligned} \tag{7}$$

где $[\ldots]$ - означает альтернирование по индексам. Для $\Gamma_{ij}$, $\Gamma_{00}$ имеем

$$\begin{aligned}
&d\Gamma_{\nu\mu} + 2\Gamma_{\nu\mu}(2\omega_2^2 - \omega_1^1) - 2\delta_{(\nu}^{q-2}\Gamma_{\mu)p-2}\omega_q^p \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^j), \\
&d\Gamma_{\nu 3} + \Gamma_{\nu 3}(5\omega_2^2 - 2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - \Gamma_{\mu 3}\omega_{\nu+2}^{\mu+2} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^j), \\
&d\Gamma_{33} + \Gamma_{33}(6\omega_2^2 - 2\omega_1^1 - 2\omega_3^3 - 2\omega_4^4) - \Gamma_{44}\omega_2^1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^j), \\
&d\Gamma_{44} + \Gamma_{44}(7\omega_2^2 - 3\omega_1^1 - 2\omega_3^3 - 2\omega_4^4) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^j), \\
&d\Gamma_{00} + \Gamma_{00}(5\omega_2^2 - \omega_1^1 - 2\omega_3^3 - 2\omega_4^4) - 2\Gamma_{33}\omega_2^1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^j).
\end{aligned} \tag{8}$$

Следовательно, величины $\Gamma_{ij}$ образуют тензор. Назовем его основным тензором второго порядка. В общем случае он невырожденный, так как дискриминант тензора, т.е. определитель составленный из его компонент $\det\|\Gamma_{ij}\| = -(\Gamma_{44})^3$, отличен от нуля. Тензоры $\{\Gamma_{\nu\mu}\}, \{\Gamma_{\nu 3}\}, \{\Gamma_{pp}\}$ (по $p$ не суммировать!) и относительный инвариант $\Gamma_{44}$ образуют подобъекты основного тензора второго порядка.

Совокупность всех инфинитезимальных смещений линейно-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



го элемента $\{A_1, A_1A_2\}$, при которых центр $A_1$ линейного элемента перемещается в плоскости $\alpha$, определяется дифференциальными уравнениями (3). Этим смещениям соответствует основное специальное подмногообразие $\Psi_3(\alpha)$. Дифференциальное уравнение (3) тогда и только тогда вполне интегрируемо, когда $\Gamma_{\nu 3}=0$. Совокупность величин $\Gamma_{\nu 3}$ мы будем называть объектом неголономности основного специального подмногообразия $\Psi_3(\alpha)$.

Совокупность всех инфинитезимальных смещений линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$ в плоскости $\alpha$ определяется системой дифференциальных уравнений (4). Этим смещениям соответствует подмногообразие $\Psi_2^T(\alpha)$. Система дифференциальных уравнений (4) тогда и только тогда вполне интегрируема, когда $\Gamma_{pp}=0$ (по $p$ не суммировать!). Совокупность величин $\Gamma_{pp}$ мы будем называть объектом неголономности подмногообразия $\Psi_2^T(\alpha)$

Из всех смещений (3) выделим те смещения, которые являются двойными элементами в обобщенном поляритете Пантази элемента $\{A_1, \alpha\}$. Как известно, этим свойством обладают касательные к асимптотическим линиям многообразия плоских элементов [11]. Их уравнения имеют вид:

$$\Gamma_{st}\bar{\omega}^s\bar{\omega}^t=\bar{\omega}^4=0, \qquad (9)$$

где

$$\bar{\omega}^\nu=\omega^\nu,\quad 2X_1X_2\bar{\omega}^p=X_1\omega^3+(-1)^pX_2\omega^4.$$

Нелинейное подмногообразие $\Psi_2^{(2)}$, определяемое системой уравнений (9), у которого ассоциированное подмногообразие плоских элементов $\{A_1, \alpha\}$ целиком состоит из асимптотических линий, мы будем называть неликейным асимптотическим подмногообразием $\Psi_2^{(2)}$. На диаграмме Циндлера, показывающей отображение базиса $\omega^i$ пространства $T$ дифференциалов во вспомогательное проективное пространство $\omega^1:\omega^2:\omega^3:\omega^4 \leftrightarrow z^1:z^2:z^3:z^4$, нелинейное асимптотическое подмногообразие $\Psi_2^{(2)}$ изображается коническим сечением в плоскости, изображающей основное специальное подмно-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



гообразие $\Psi_3(\alpha)$.

При смещениях линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$ в плоскости $\alpha$ уравнения (9) принимают вид:

$$(\Gamma_{44}\tilde{\omega}^1 - \Gamma_{33}\tilde{\omega}^3)\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^4 = 0, \qquad (10)$$

где

$$\tilde{\omega}^\nu = X_1\omega^1 + (-1)^\nu X_2\omega^2, \quad \tilde{\omega}^\rho = X_1\omega^3 + (-1)^\rho X_2\omega^4.$$

Нелинейное асимптотическое подмногообразие $\Psi_1^{(2)}$ (10) распадается на два линейных асимптотических подмногообразия $\Psi_1$. Следовательно, в этом случае существуют две асимптотических линии многообразия плоских элементов $\{A_1, \alpha\}$:

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}^\alpha = 0, \\ \Gamma_{44}\tilde{\omega}^1 - \Gamma_{33}\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^4 = 0.\end{gathered} \qquad (11)$$

Первая из них стягивается в точку. Соответствующее подмногообразие $\Psi_1$ является начальным конусом [2]. Касательная ко второй асимптотической линии (11) совпадает с инвариантной прямой $p$, заданной уравнением (6). Соответствующее подмногообразие $\Psi_1$ является торсовым подмногообразием $\Psi_1^T(M)$ с точкой возврата

$$M = \Gamma_{33}A_1 - \Gamma_{44}A_2. \qquad (12)$$

На диаграмме Циндлера асимптотические линии (11) изображаются парой точек.

§4. F и F′ - точки. Введем следующие величины

$$\begin{gathered}u_2 = -\Gamma_{44}, \quad u_p = X_p\Gamma_{44} + X_{p-1}\Gamma_{33}, \\ N = (\Gamma_{33})^2 - \Gamma_{00}\Gamma_{44}.\end{gathered} \qquad (13)$$

Дифференцирование этих соотношений дает

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$du_2 + u_2(7\omega_2^2 - 3\omega_1^1 - 2\omega_3^3 - 2\omega_4^4) \equiv 0 \,(mod\,\omega^j),$$

$$du_p + u_p(8\omega_2^2 - 3\omega_1^1 - 2\omega_3^3 - 2\omega_4^4) - u_\alpha \omega_p^\alpha \equiv 0 \,(mod\,\omega^j), \qquad (14)$$

$$dN + 4N(3\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) \equiv 0 \,(mod\,\omega^j).$$

Отсюда видно, что величины $u_\alpha$ образуют тензор [8], а $N$ - является относительным инвариантом. Чтобы дать геометрическую характеристику тензору $\{u_\alpha\}$, рассмотрим конус в вершиной в точке $A_1$, описываемый прямой $p$. Оказывается, что $u_\alpha$ суть тангенциальные координаты плоскости

$$u = u_\alpha A^\alpha, \qquad (15)$$

асательной к упомянутому конусу. Рассматривая инфинитезимальные смещения

$$u_2 \omega_1^2 + u_p \omega^p = 0 \qquad (16)$$

линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$, при которых центр $A_1$ перемещается в плоскости $u$, находим, что все характеристики плоскости $\alpha$, соответствующие смещениям (16), пересекают прямую $A_1A_2$ в одной и той же точке $M$ (12).

С торсовыми подмногообразиями $\Psi_1^T$:

$$X_\nu \omega^\nu = X_\nu \omega^{\nu+2} = m_i \omega^i = 0, \qquad (17)$$

принадлежащими подмногообразию $\Psi_2^T(\alpha)$, ассоциируется соответствие

$$F \longrightarrow v \longrightarrow F_1, \qquad (18)$$

где

$$F = \bar{m}_3 A_1 + \bar{m}_1 A_2,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\sqrt{2X_1X_2}\,\bar{m}_1 = X_2 m_1 - X_1 m_2 ,$$

$$\sqrt{2X_1X_2}\,\bar{m}_3 = X_2 m_3 - X_1 m_4 , \qquad (19)$$

точка возврата торса,

$$\vartheta = \vartheta_\alpha A^\alpha ,$$

$$\vartheta_2 = -(\Gamma_{44}\bar{m}_3 - \Gamma_{33}\bar{m}_1) , \qquad (20)$$

$$\vartheta_\rho = (X_\rho \Gamma_{44} + X_{\rho-2}\Gamma_{33})\bar{m}_3 + (X_\rho \Gamma_{33} + X_{\rho-2}\Gamma_{00})\bar{m}_1 ,$$

соприкасающаяся плоскость кривой, описываемой точкой $A_1$ на нём, и

$$F_1 = (\Gamma_{33}\bar{m}_3 + \Gamma_{00}\bar{m}_1)A_1 - (\Gamma_{44}\bar{m}_3 + \Gamma_{33}\bar{m}_1)A_2$$

точка пересечения прямой $A_1A_2$ со всеми характеристиками плоскости $\alpha$ при тех инфинитезимальных смещениях

$$\vartheta_2 \omega_1^2 + \vartheta_\rho \omega^\rho = 0 \qquad (21)$$

линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$, при которых центр $A_1$ перемещается в плоскости $\vartheta$. Соответствие (18) вырождается тогда и только тогда, когда $N=0$.

Необходимые и достаточные условия совпадения точек $F$ и $F_1$, т.е. двойных элементов соответствия (18), имеют вид:

$$\Gamma_{44}(\bar{m}_3)^2 + 2\Gamma_{33}\bar{m}_3\bar{m}_1 + \Gamma_{00}(\bar{m}_1)^2 = 0 . \qquad (22)$$

Следовательно, в общем случае существуют две такие точки. Они называются $F$ - точками. Заметим, что при $N>0$ - $F$ - точки действительные, при $N<0$ - мнимые (случай совпадения $F$ - точек - $N=0$ исключен из рассмотрения). Далее, $F$ - точки делят гармонически центр $A_1$ линейного

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



элемента $\{A_1, A_1A_2\}$ и точку M (см. (12)).

Найдём плоскость $w$, находящуюся в гармоническом отношении с плоскостями $\alpha$, $u$ и $v$. Имеем

$$\begin{aligned} w &= w_\alpha A^\alpha, \\ w_2 &= -\{(\Gamma_{44})^2 \bar{m}_3 + \Gamma_{44}\Gamma_{33}\bar{m}_1\}, \\ w_p &= \{(\Gamma_{44})^2 X_p + \Gamma_{44}\Gamma_{33} X_{p-2}\}\bar{m}_3 + \\ &+ \{\Gamma_{33}\Gamma_{44} X_p + [2(\Gamma_{33})^2 - \Gamma_{00}\Gamma_{44}] X_{p-2}\}\bar{m}_1. \end{aligned} \tag{23}$$

Торсовое подмногообразие $\Psi_1^T$ (17) определяет соответствие

$$F \to w \to F', \tag{24}$$

где $F$ - точка возврата (19), $w$ - плоскость (23) и $F'$ - точка пересечения прямой $A_1A_2$ со всеми характеристиками плоскости $\alpha$ при тех инфинитезимальных смещениях

$$w_2 \omega_1^2 + w_p \omega^p = 0 \tag{25}$$

линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$, при которых центр $A_1$ перемещается в плоскости $w$. Соответствие (24) вырождается тогда и только тогда, когда $(\Gamma_{44})^2 N = 0$. Этот случай исключаем из рассмотрения.

Необходимое и достаточное условие совпадения точек $F$ и $F'$ имеет вид:

$$(\Gamma_{44})^2(\bar{m}_3)^2 + 2\Gamma_{44}\Gamma_{33}\bar{m}_3\bar{m}_1 + \{2(\Gamma_{33})^2 - \Gamma_{00}\Gamma_{44}\}(\bar{m}_1)^2 = 0 \tag{26}$$

Следовательно, в общем случае существует две двойные точки. Будем называть их $F'$-точками. Заметим, что при $N > 0$ - $F'$- точки мнимые, при $N < 0$ - действительные (случай совпадения $F'$ - точек, т.е. $N = 0$, исключен из рассмотрения). Далее, $F'$ - точки делят гармонически центр $A_1$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$ и инвариантную точку $M$.

§5. Тензор второго порядка $L_{ij}$. Нелинейные подмногообразия $\Psi_3^{(2)}$ типа Малюса. Рассмотрим симметричные величины:

$$
\begin{aligned}
&L_{\nu\mu} = 2X_{(\nu}\Gamma_{\mu)3},\\
&2L_{\nu,\nu+2} = (-1)^{\nu+1}\Gamma_{\nu\nu}(X_{14}+X_{23}) + (-1)^{\nu}2\Gamma_{12}X_{\nu,\nu+2} - 2X_{\nu}X_{\nu+2}\Lambda,\\
&2L_{14} = 2L_{23} = \Gamma_{11}X_{24} - \Gamma_{22}X_{13} - (X_1X_4)^2 + (X_2X_3)^2,\\
&L_{33} = \Gamma_{11}X_{34} - \Gamma_{22}X_{33},\\
&L_{44} = -\Gamma_{22}X_{34} + \Gamma_{12}X_{44},\\
&2L_{34} = \Gamma_{11}X_{44} - \Gamma_{22}X_{33}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Для них находим

$$
\begin{aligned}
&dL_{\nu\mu} + L_{\nu\mu}(7\omega_2^2 - 3\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - L_{3\mu}\omega_{\nu+2}^{\xi+2} -\\
&\quad - L_{\nu\xi}\omega_{\mu+2}^{\xi+2} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^j),\\
&dL_{\nu\rho} + L_{\nu\rho}(6\omega_2^2 - 2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + L_{\nu,\rho-2}\omega_2^1 -\\
&\quad - L_{\nu q}\omega_\rho^q - L_{\mu\rho}\omega_{\nu+2}^{\mu+2} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^j),\\
&dL_{pq} + L_{pq}(5\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) - L_{rq}\omega_p^r -\\
&\quad - L_{pr}\omega_q^r + (L_{p-2,q} + L_{p,q-2})\omega_2^1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^j),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где $\xi = 1,2$; $r = 3,4$.

Следовательно, величины $L_{ij}$ образуют тензор. В общем случае он невырожденный. Тензоры $\{L_{\mu\nu}\}$ и $\{L_{\mu\nu}, L_{\nu\rho}\}$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



являются подобъектами геометрического объекта $L_{ij}$.

Уравнение торсов, описываемых прямой $p$, имеет вид:

$$L_{ij}\omega^i\omega^j = 0. \tag{29}$$

Вместе с тем уравнение (29) определяет нелинейное подмногообразие $\Psi_3^{(2)}$. На диаграмме Циндлера это подмногообразие изображается квадрикой $L_{ij}z^iz^j = 0$. Аналогично конусам Малюса [11] нелинейное подмногообразие $\Psi_3^{(2)}$ (29) мы будем называть подмногообразием $\Psi_3^{(2)}(p)$ типа Малюса для прямой $p$, а соответствующую квадрику в $P_3'$ – квадрикой Малюса.

§6. Ассоциированные подмногообразия $\widetilde{\Psi}_3$. Введем следующую систему величин:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{44}N_{pq} = L_{pq}(\Gamma_{44})^2 + 2L_{p-2,q}\Gamma_{44}\Gamma_{33} + L_{p-2,q-2}(\Gamma_{33})^2,\\
&X_1X_2\,q^{12} = X_2u_4N_{33} - X_1u_3N_{44},\\
&X_2q^{13} = u_2N_{44}, \quad X_1q^{14} = -u_2N_{33}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Для них находим

$$\begin{aligned}
&dN_{pq} + N_{pq}(12\omega_2^2 - 4\omega_1^1 - 3\omega_3^3 - 3\omega_4^4) - N_{pr}\omega_q^r - \\
&\quad - N_{rq}\omega_p^r \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^j),\\
&dq^{12} + 6q^{12}(3\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \\
&\quad + q^{1p}\omega_p^2 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^j),\\
&dq^{1p} + q^{1p}(17\omega_2^2 - 6\omega_1^1 - 6\omega_3^3 - 6\omega_4^4) + \\
&\quad + q^{1q}\omega_q^p \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^j).
\end{aligned} \tag{31}$$

Из (31) видно, что величины $N_{pq}$ и $q^{1d}$ образуют тензоры.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Чтобы дать геометрическую характеристику тензорам $N_{pq}$ и $q^{1\alpha}$, рассмотрим ассоциированное специальное подмногообразие $\widetilde{\Psi}_3$, описываемое линейным элементом $\{A_1, p\}$, главная корреляция на луче которого вырождается в соответствие $\{p\} \to \{u\}$ (соответственно $\{p\} \to \{A_1\}$). Его уравнение имеет вид

$$\Gamma_{44} X_\nu \omega^\nu - \Gamma_{33} X_\nu \omega^{\nu+2} = 0. \qquad (32)$$

Специальное подмногообразие $\widetilde{\Psi}_3$ содержит одно подмногообразие $\widetilde{\Psi}_2^T(u)$:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{44} X_\nu \omega^\nu - \Gamma_{33} X_\nu \omega^{\nu+2} = 0, \\ &(-1)^\nu N X_\nu \omega^{\nu+2} - 2 N_{34} X_\nu \omega^{\nu+2} = 0, \end{aligned} \qquad (33)$$

все торсовые подмногообразия $\widetilde{\Psi}_1^T$ которого имеют общую касательную плоскость $u$, и одно подмногообразие $\widetilde{\Psi}_2^{T'}(A_1)$:

$$X_\nu \omega^\nu = X_\nu \omega^{\nu+2} = 0, \qquad (34)$$

все торсовые подмногообразия $\widetilde{\Psi}_1^T$ которого имеют общий фокус в точке $A_1$.

С другой стороны, уравнение (32) определяет специальное подмногообразие $\Psi_3$, главная корреляция на луче которого вырождается в соответствие $\{A_1 A_2\} \to \{\alpha\}$ (соответственно $\{A_1 A_2\} \to \{M\}$). Оно содержит подмногообразие $\Psi_2^T(\alpha)$ и подмногообразие $\Psi_2^{T'}(M)$:

$$\Gamma_{44} \omega^1 - \Gamma_{33} \omega^3 = \Gamma_{44} \omega^2 - \Gamma_{33} \omega^4 = 0, \qquad (35)$$

все торсовые подмногообразия $\Psi_1^T$ которого имеют общий фокус в точке $M$.

Рассмотрим кривые, описываемые точкой $A_1$ на торсовых подмногообразиях $\widetilde{\Psi}_1^T$, принадлежащих подмногообразию $\widetilde{\Psi}_2^T(u)$. Они имеют общую касательную

$$q = q^{1\alpha}(A_1 A_\alpha). \qquad (36)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Следовательно, $q^{1\alpha}$ суть плюккеровы координаты инвариантной прямой $q$. При $q^{1p}=0$ (т.е. $N_{pp}=0$, по $p$ не суммировать!) эта прямая неопределена.

§7. Частные классы полей направлений $\Phi_4$.

1. Поле $\Gamma_{44}=0$. В этом случае тензор $\{\Gamma_{ij}\}$ становится вырожденным, нелинейное асимптотическое подмногообразие $\Psi_2^{(2)}$ (9) распадается на два линейных подмногообразия $\Psi_2$:

$$X_\nu \bar{\omega}^\nu - 2\Gamma_{11} k \bar{\omega}^3 = \bar{\omega}^4 = 0, \tag{37}$$

где $k$ - корень характеристического уравнения

$$(2\Gamma_{12})^2 k^2 + 4X_2\Gamma_{13} k + \Gamma_{33} = 0.$$

Оба подмногообразия $\Psi_2$ - параболического типа с одним общим фокусом в точке $A_1$. Инвариантная точка $M$ совпадает с центром $A_1$ линейного элемента $\{A_1, A_1A_2\}$.

Чтобы определить произвол решения рассматриваемого класса геометрических образов $\Phi_4$, произведем следующую канонизацию подвижного репера

$$X_1 = 0, \quad X_2 \neq 0, \quad \pi_3^4 = 0. \tag{38}$$

В этом случае плоскость $A_1A_2A_3$ совпадает с плоскостью $\alpha$. Обычным путем находим, что широта рассматриваемого класса - две функции трех аргументов.

2. Поле $\Gamma_{pp}=0$. В этом случае система дифференциальных уравнений (4) вполне интегрируема. Так как

$$d\alpha\Big|_{\Gamma_{pp}=X_\nu\omega^\nu=X_\nu\omega^{\nu+2}=0} = \theta\alpha, \tag{39}$$

то голономное подмногообразие $\Psi_2^T(\alpha)$ представляет собой двупараметрическую совокупность линейных элементов в плоскости $\alpha$. Следовательно, рассматриваемый класс геометрических образов $\Phi_4$ расслаивается на $\infty^2$ плоских двупараметрических семейств линейных элементов. Для $\alpha$ имеем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$d\alpha = \Theta\alpha + \bar{\omega}^2\{A^2 - \ell_2(X_1A^3 - X_2A^4)\} -$$
$$- \bar{\omega}^4\{A^2 + \ell_1(X_1A^3 - X_2A^4)\},$$

где

$$\sqrt{2X_1X_2}\,\bar{\omega}^2 = X_\nu\omega^\nu,\quad \sqrt{2X_1X_2}\,\bar{\omega}^4 = X_\nu\omega^{\nu+2},$$
$$(2X_1X_2)^2\ell_1 = X_1\Gamma_4 + X_2\Gamma_3,\quad (2X_1X_2)^2\ell_2 = X_1\Gamma_2 + X_2\Gamma_1,$$
$$\Gamma_j = 2X_{[1}X_{2]j} - X_j\Lambda.$$

Следовательно, двупараметрическое семейство плоскостей $\alpha$ огибает некоторую поверхность. Таким образом, чтобы построить поле $\Gamma_{pp} = 0$, надо взять семейство плоскостей, огибающих некоторую поверхность, и рассмотреть всю совокупность линейных элементов, лежащих в этих плоскостях.

Чтобы определить произвол решения рассматриваемого класса геометрического образа $\Phi_4$, произведем следующую частичную каноницацию подвижного репера

$$X_1 = X_3 = 0,\quad X_2 \neq 0,\quad \pi_3^4 = \pi_3^2 = 0. \qquad (40)$$

В этом случае плоскость $A_1A_2A_3$ совпадает с плоскостью $\alpha$, а ребро $A_1A_3$ с прямой $p$.
Произвол рассматриваемого класса полей $\Phi_4$ - одна функция трех аргументов.

3. Поле $\Gamma_{\nu 3} = 0$. В этом случае дифференциальное уравнение (3) вполне интегрируемо. Следовательно, рассматриваемое поле направлений расслаивается на $\infty^1$ голономных специальных комплексов. Так как каждый из них есть совокупность прямых, касающихся некоторой поверхности, то поле $\Gamma_{\nu 3} = 0$ можно представить как совокупность прямых, касающихся каждой поверхности некоторого однопараметрического семейства поверхностей. Геометрически очевидно, что поле $\Gamma_{\nu 3} = 0$ существует с произволом в одну функцию трех аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Н.Щербаков. О методе репеража подмногообразий, Геом. сб., вып.3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 5 - 11.
2. В.М.Финкельштейн. Неголономные комплексы четырехпараметрического поля направлений, Геом. сб., вып. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 99 - 111.
3. В.М.Финкельштейн. Некоторые классы четырехпараметрических полей направлений, Геом. сб., вып. 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 112 - 125.
4. А.А.Лучинин. Некоторые вопросы эквиаффинной дифференциальной геометрии четырехпараметрического векторного поля, Докл. третьей Сибирской конф. по матем. и мех. Томский ун-т, 1964, 196 - 197.
5. М.С.Бухтяк. Об одном классе четырехпараметрических векторных полей. Тезисы докладов IУ всес. межвуз. конференции по геометрии, Тбилиси, 1969, 27 - 28.
6. М.С.Бухтяк. О параболических подмногообразиях $\Psi_2$ четырехпараметрического векторного поля. Материалы итоговой науч. конф. по матем. и мех. за 1970 г. Томск (1970), 110 - 112.
7. А.Е.Шиллеров. О четырехпараметрическом поле направлений в трехмерном проективном пространстве, Материалы итог. науч. конф. по матем. и мех. Томск, 1971, 182 - 185.
8. Г.Ф.Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, 2, 1953,275-382.
9. Г.Георгиев и И.Попа. Проективно-дифференциальная геометрия некоторых эквипараметрических многообразий. Первая всесоюзная геометрическая конф. Тезисы и аннотации докладов... Киев, 1962, 17-18.
10. С.П.Фиников. Метод внешних форм Картана, ГИТТЛ, М.-Л., 1948.
11. *T. Mihailescu. Geometrie diferențială proiectivă. Bucuresti, 1958.*

Поступила 1 марта 1971 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Э.М.КОНДАКОВА, Е.Т.ИВЛЕВ

# О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ $n$-СЕМЕЙСТВА НЕВЫРОЖДЕННЫХ НУЛЬ-ПАР В $P_n$

В настоящей статье находятся некоторые геометрические объекты и определяемые ими геометрические образы $n$-параметрического многообразия $E(0,n-1,n) \equiv E$, элементом которого является невырожденная нуль-пара: точка $L$ и гиперплоскость $\ell_{n-1}$, не проходящая через $L$.

1. Включение элемента в репер. Присоединим к многообразию $E$ некоторый проективный репер $\{A_J\}$ $(J,J,K=0,1,\ldots,n)$ деривационные формулы которого будем писать в виде:

$$dA_J = \omega_J^J A_J , \qquad (1)$$

где линейные дифференциальные формы Пфаффа $\omega_J^J$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$D\omega_J^J = [\omega_J^K \omega_K^J] \qquad (2)$$

и соотношению

$$\sum_{J=0}^{n} \omega_J^J = 0. \qquad (3)$$

Поместим точку $A_0$ репера в точку $L$, а остальные точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ расположим в гиперплоскости $\ell_{n-1}$. Тогда формы $\omega^\nu \equiv \omega_0^\nu$, $\omega_i \equiv \omega_i^0$ – главные. Поэтому, приняв $\omega^\nu$ за базисные, можно положить

$$\omega_i = \Lambda_{ij}\omega^j . \qquad (4)$$

Здесь и в дальнейшем индексы $i, j, k, \ell, p, q$ изменяются от 1 до $n$.

Продолжение [1] системы (4) приводит к соотношениям

$$d\Lambda_{ij} + 2\Lambda_{ij}\omega_0^0 - \Lambda_{ik}\omega_j^k - \Lambda_{kj}\omega_i^k = \Lambda_{ijk}\omega^k , \qquad (5)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$d\Lambda_{ijk} + 3\Lambda_{ijk}\omega_0^0 - \Lambda_{ijp}\omega_k^p - \Lambda_{ipk}\omega_j^p - \Lambda_{pjk}\omega_i^p +$$

$$+ 2\Lambda_{ij}\omega_k^0 + \Lambda_{ik}\omega_j^0 + \Lambda_{kj}\omega_i^0 = \Lambda_{ijkp}\omega^p. \qquad (6)$$

Величины $\bar{\Lambda}_{23} = (\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk})$ образуют объект, который является основным [1].

2. Геометрические объекты, охватываемые геометрическими объектами $\bar{\Lambda}_2$, $\bar{\Lambda}_3$ и $\bar{\Lambda}_{23}$. Рассмотрим следующие симметричные по всем индексам тензоры:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\Lambda_{(ij)}, \qquad (7)$$

$$A = \frac{1}{2n-1}\det\|A_{ij}\|, \qquad (8)$$

$A^{jk}$, где $A_{ij}A^{jk} = A\delta_i^k$ $(A \neq 0)$ (9)

$$A_{ijk} = \frac{1}{6}\Lambda_{(ijk)} \qquad (10)$$

$$a_i = \frac{1}{A}A_{ijk}A^{jk}, \qquad (11)$$

$$B_{ijk} = A_{ijk} - \frac{1}{n+2}(A_{ij}a_k + A_{kj}a_i + A_{ik}a_j), \qquad (12)$$

$$A^*_{ij} = B_{ii_2i_3}B_{jj_2j_3}A^{i_2j_2}A^{i_3j_3} \quad (i, j, i_2, j_2, \ldots j_3 = 1, \ldots, n). \qquad (13)$$

Из (7) – (9) и (12) следует, что

$$B_{ijk}A^{jk} = 0. \qquad (14)$$

т.е. тензоры $B_{ijk}$ и $A^{jk}$ аполярны.

3. Квадрика Q. Рассмотрим произвольное подмногообразие $\Psi_1$ [5] многообразия $E$:

$$\frac{\omega^1}{x^1} = \frac{\omega^2}{x^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{x^n}, \quad \left(\sum_{\alpha=1}^{n}(x^\alpha)^2 \neq 0\right). \qquad (15)$$

Конечно, здесь функции $x^i$ образуют геометрический объект [1].

Вдоль подмногообразия $\Psi_1$ точка $L$ опишет линию,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



причем $R(C:x^1:\ldots:x^n)$ есть точка пересечения касательной $TL$ к этой линии с плоскостью $\ell_{n-1}$ (рис. 1).

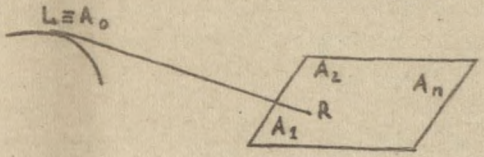



Рис. 1.

Имеем

$$dR = x^i\omega_i^0 A_0 + (dx^i + x^k\omega_k^i)A_i .$$

Отсюда следует, что геометрическое место всех точек $R = x^iA_i \in \ell_{n-1}$, таких, что касательная $TR$ принадлежит $\ell_{n-1}$, образует в $\ell_{n-1}$ $(n-2)$-мерную квадрику $Q$, определяемую системой уравнений

$$A_{ij}x^ix^j = 0, \quad x^0 = 0 \tag{16}$$

Совокупность всех прямых, проходящих через точку $A_0$ и пересекающих квадрику $Q$, определяется уравнением

$$A_{ij}x^ix^j = 0 \tag{17}$$

и образует гиперконус $Q^0_{n-1}$ с вершиной в точке $A_0$.

Обозначим гиперплоскость $(A_0A_1,\ldots,A_{j-1}A_{j+1},\ldots,A_n)$ через $A^j$. Так как $dA^0 = d(A_1A_2\ldots A_n) = -\omega_0^0A^0 - \omega_i^0A^i = -\omega_0^0A^0 - \Lambda_{ij}\omega^iA^j$, то $Q$ представляет собой совокупность всех точек, каждая из которых принадлежит характеристике гиперплоскости $\ell_{n-1} = A^0$ при смещении вдоль (15).

Итак, с многообразием $E$ ассоциируется $n$-параметрическое многообразие гиперконусов $Q^0_{n-1}$. Такое многообразие изучалось в [2].

Из (16) и (17) следует, что относительный инвариант (8) равен нулю тогда и только тогда, когда квадрика $Q$ является конусом или гиперконус $Q^0_{n-1}$ имеет по крайней мере

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



прямолинейную вершину.

4. Алгебраическая $(n-3)$-поверхность $q_{n-3}$. Будем искать характеристику квадрики $Q$ при смещении вдоль (15). Из (16) следует, что проективные координаты точки $X = x^i A_i$ характеристики должны удовлетворять системе

$$x^0 = 0,\ x^0 + dx^0 = 0,\ A_{ij}x^i x^j = 0,\ A_{ij}x^i x^j + d(A_{ij}x^i x^j) = 0,\ \frac{\omega^1}{x^1} = \frac{\omega^2}{x^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{x^n}. \tag{18}$$

Так как

$$dx^J = -\omega_J^J x^J + \theta x^J,$$

где $\theta$ - некоторая отличная от нуля форма Пфаффа, то (18) принимает вид:

$$x^0 = 0,\ A_{ij}x^i x^j = 0,\ A_{ijk}x^i x^j x^k = 0. \tag{19}$$

Таким образом, совокупность искомых характеристик образует в $\ell_{n-1}$ некоторую $(n-3)$-мерную алгебраическую поверхность $q_{n-3}$, определяемую системой (19), т.е. геометрическим объектом $(A_{ij}, A_{ijk})$. Можно показать, что в терминах [4] алгебраическая $(n-3)$-поверхность (19) является $t$-фокальным алгебраическим многообразием алгебраического элемента $A^2_{n-2}$ многообразия $(n, n, n)^2$, индуцированного многообразием $E$. Поэтому наши дальнейшие построения могут быть использованы для геометрической интерпретации фигурирующих в [4] объектов $b_{\alpha\beta\gamma}, b_{\alpha\beta}, c^\alpha$.

5. Алгебраические $(n-2)$-поверхности третьего порядка $B_3$. Рассмотрим все алгебраические $(n-2)$-мерные поверхности третьего порядка, проходящие через $q_{n-3}$ и принадлежащих $\ell_{n-1}$:

$$x^0 = 0,\ \widetilde{B}_{ijk}x^i x^j x^k = 0, \tag{20}$$

где

$$\widetilde{B}_{ijk} = A_{ijk} + A_{ij}\mu_k + A_{ik}\mu_j + A_{kj}\mu_i. \tag{21}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Среди алгебраических поверхностей этого семейства будем искать такую алгебраическую поверхность $B_3$, которая была бы аполярна квадрике $Q$. Геометрически это означает [3], что проективное преобразование $\Pi(y)$ гиперплоскости $l_{n-1}$ в себя, соответствующее любой точке $M = y^i A_i \in l_{n-1}$ и порождаемое первой полярой точки $M$ относительно $B_3$ и квадрикой $Q$, является преобразованием $W$. Аналитически это дает $\tilde{B}_{ijk} A^{jk} = 0$ или (в силу (9) и (11))

$$(n+2) l_i = -a_i . \tag{22}$$

Поэтому алгебраическая поверхность $B_3$ определяется системой:

$$x^0 = 0, \quad B_{ijk} x^i x^j x^k = 0. \tag{23}$$

6. Квадрика $Q^*$. Пусть $Y = y^i A_i$ некоторая точка гиперплоскости $l_{n-1}$. Поляра порядка 1 этой точки относительно поверхности $B_3$ определяется системой:

$$x^0 = 0, \quad B_{ijk} x^i x^j y^k = 0. \tag{24}$$

Из (16) следует, что совокупность поляр всех точек квадрики (24) относительно $Q$ определяется (в тангенциальных координатах $x_s$) уравнением

$$B_{ijk} A^{is} A^{jt} y^k x_s x_t = 0, \ (s,t = 1,2, \ldots, n) \tag{25}$$

и образует, следовательно, в $l_{n-1}$ поверхность второго класса. Таким образом, каждой точке $Y \in l_{n-1}$ соответствует квадрика (24) и поверхность второго класса (25). Пусть $Z = z^i A_i$ - точка, принадлежащая гиперплоскости $l_{n-1}$, отличная, вообще говоря, от точки $Y$. Тогда поляра этой точки относительно квадрики (24) определяется системой:

$$x^0 = 0, \quad B_{ijk} z^j y^k x^i = 0.$$

Полюсом этой $(n-2)$-плоскости относительно поверхности

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



(25) является точка $\overline{Z} = \overline{z}^t A_t$ , где

$$\overline{z}^t = B_{ijk} A^{is} A^{jt} y^k B_{sj_1 j_2} z^{j_1} y^{j_2} \qquad (26)$$

Таким образом, каждой точке $Y = y^i A_i$ алгебраические поверхности (24) и (25) ставят в соответствие проективное преобразование $\Pi(y)$ гиперплоскости $\ell_{n-1}$ в себя, определяемое при фиксированных $y^i$ формулами (26).

В соответствии с [3] это проективное преобразование $\Pi(y)$ будет проективным преобразованием $W$ тогда и только тогда, когда

$$A^*_{ij} y^i y^j = 0.$$

Следовательно, геометрическое место всех точек $Y = y^i A_i$ которым соответствуют проективные преобразования $\Pi(y)$, являющиеся преобразованиями $W$ , определяется системой

$$y^0 = 0, \quad A^*_{ij} y^i y^j = 0 \qquad (27)$$

и образует в $\ell_{n-1}$ квадрику $Q^*$ . Итак, с тензором $A^*_{ij}$ ассоциируется квадрика (27) в $\ell_{n-1}$ .

7. Основные векторы. Введем симметричный по всем индексам тензор

$$\beta^{ijk} = B_{i_1 j_1 k_1} A^{ii_1} A^{jj_1} A^{kk_1} \qquad (28)$$

С этим тензором ассоциируется инвариантная алгебраическая $(n-2)$ -поверхность $\beta_3^{n-2}$ третьего класса, определяемая уравнением:

$$\beta^{ijk} x_i x_j x_k = 0, \qquad (29)$$

каждая $(n-2)$-плоскость которой полярно сопряжена соответствующей точке алгебраической поверхности (24), относительно квадрики $Q$ . По аналогии с [4] назовем вектор

$$c^i = \beta^{ijk} A^*_{jk} \qquad (30)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



основным вектором. Он определяет инвариантную точку

$$C = c^i A_i , \tag{31}$$

которую назовем основной точкой. Перейдем к выяснению геометрической интерпретации этой точки. Пусть $Z = z^i A_i$ произвольная точка гиперплоскости $\ell_{n-1}$. Поляра этой точки относительно квадрики $Q$ в силу (16) определяется системой:

$$A_{ij} z^j x^i = 0, \quad x^0 = 0. \tag{32}$$

Следовательно, полюсом этой $(n-2)$ -плоскости первого порядка относительно поверхности (29) является $(n-2)$-поверхность второго порядка в $\ell_{n-1}$ определяемая уравнением:

$$B^{ijk} x_i x_j A_{k\lambda} z^\lambda = 0 . \tag{33}$$

Пусть $Y = y^i A_i$ еще одна произвольная точка в $\ell_{n-1}$, отличная от $Z$. Тогда поляра этой точки относительно квадрики $Q$ в силу (27) определяется системой

$$x^0 = 0, \quad A^*_{ij} x^i y^j = 0.$$

Следовательно, полюсом этой $(n-2)$-плоскости относительно поверхности (33) будет точка $Y = y^i A_i$, где

$$y^i = B^{ijk} A^*_{js} y^s A_{k\lambda} z^\lambda, \quad (s, \lambda = 1, \ldots, n). \tag{34}$$

Таким образом, каждой точке $Z = z^i A_i$ отвечает проективное преобразование $\Pi^*(z)$ гиперплоскости $\ell_{n-1}$ в себя, определяемое по формулам (34) при фиксированных $z^\lambda$. Геометрическое место точек $Z \in \ell_{n-1}$, которым соответствуют проективные преобразования $\Pi^*(y)$, являющиеся преобразованиями $W$, определяется в силу (30) системой

$$x^0 = 0, \quad c^k A_{k\lambda} z^\lambda = 0 \tag{35}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



и образует, следовательно, в $l_{n-1}$ некоторую $(n-2)$-плоскость. Итак, основная точка является полюсом $(n-2)$-плоскости (35) относительно квадрики $Q$.

8. Главные точки гиперплоскости $l_{n-1}$. Точку $X=x^iA_i$ гиперплоскости $l_{n-1}$ будем называть главной точкой, если ее поляры относительно квадрик $Q$ и $Q^*$ совпадают. Подмногообразие $\Psi_1$, соответствующее главной точке $X$ в смысле п. 3, назовем главным подмногообразием.

Теорема. В общем случае в гиперплоскости $l_{n-1}$ существует не более $n$ главных точек.

Доказательство. Из (16) и (27) следует, что поляры точки $X=x^iA_i$ относительно квадрик $Q$ и $Q^*$ определяются соответственно, системами уравнений:

$$y^0=0,\quad A_{ij}x^ix^j=0,$$
$$y^0=0,\quad A^*_{ij}x^ix^j=0. \tag{36}$$

Эти $(n-2)$-плоскости совпадают тогда и только тогда, когда

$$(A_{ij}-\lambda A^*_{ij})x^j=0. \tag{37}$$

Эта система имеет нетривиальные решения относительно $x^j$ тогда и только тогда, когда

$$\det\|A_{ij}-\lambda A^*_{ij}\|=0. \tag{38}$$

Каждому корню $\lambda=\lambda_k$ этого алгебраического уравнения, имеющего в общем случае не более $n$ корней, отвечает главная точка $X_k=x^i_kA_i$, проективные координаты $x^i_k$ которой определяются из системы

$$(A_{ij}-\lambda_kA^*_{ij})x^j_k=0 \qquad (k\text{ - фиксировано}), \tag{39}$$

состоящей из $(n-1)$ линейно-независимых уравнений. Теорема доказана.

Главные точки $X_k=x^i_kA_i$ являются вершинами общего

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



единственного автополярного симплекса относительно $Q$ и $Q^*$ или, что то же [3], являются неподвижными точками проективного преобразования гиперплоскости $\ell_{n-1}$, порождаемого квадриками $Q$ и $Q^*$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Ф.Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, 2, 1953, 275 - 385.
2. Л.П.Сафарян. $n$- параметрическое семейство конусов второго порядка в $n$-мерном проективном пространстве. Тезисы докладов 4 Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии, Тбилиси, 1969, 233 - 234.
3. Е.Т.Ивлев. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров. Материалы итоговой научной конф. по матем. и мех. за 1970 г., 1, Томск, 1970, 121-123.
4. В.С.Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в $n$-мерном проективном пространстве. Геом. сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 28 - 42.
5. Р.Н.Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии, Томск, 1971.

Поступила 1 марта 1971 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

А.П.ЕРОХИНА

# К ВОПРОСУ О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЕГОРОВА В ПРОЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ КОНГРУЭНЦИЙ

Преобразования Егорова [4] в теории конгруэнций в $P_3$ методом внешних форм рассматривались Р.Н.Щербаковым [1] и М.Б.Пергаменщиковым [2]. Настоящая работа содержит уточнение результатов, полученных М.Б.Пергаменщиковым и опубликованных в [2] без доказательства, а также решение более общей задачи о преобразовании произвольной пары конгруэнций в пару $T$.

Отнесем произвольную конгруэнцию прямых $\bar{A}_1\bar{A}_2$ к полуканоническому реперу $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$ [1] ($\bar{A}_3\bar{A}_4$ - "прямая Лапласа", соединяющая преобразования Лапласа фокусов исходной конгруэнции). Рассматривая ее как однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей, подвергнем каждую из последних проективному преобразованию, коэффициенты которого являются дифференцируемыми функциями параметра $v$ семейства. Полученная таким образом конгруэнция называется преобразованием Егорова конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$.

Сохраняя термины, принятые в [1], и обозначая $P(\bar{A}_i)=\bar{P}_i$, где $P$ - линейный оператор, коэффициенты которого суть функции от параметра $v$ (при этом $[dv,\omega_1^4]=0$), будем искать натуральные уравнения линейчатых поверхностей, семейства которых могут служить для осуществления следующих преобразований Егорова: 1) преобразований, при которых конгруэнции $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$ и $\{\bar{P}_3\bar{P}_4\}$ образуют пару $P$ [3], 2) преобразований, при которых конгруэнции $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$ и $\{\bar{P}_3\bar{P}_4\}$ образуют пару $T$ [7].

Деривационные формулы для преобразованной конгруэнции будем искать в виде:

$$d\bar{P}_i=\overset{*}{\omega}{}_i^k\bar{P}_k \quad (i,k=1,2,3,4).$$

Имеем

$$d\bar{P}_1=P'(A_1)dv+P(d\bar{A}_1)=P'(A_1)dv+P(\omega_1^1\bar{A}_1+\omega_1^2\bar{A}_2+\omega_1^3\bar{A}_3+\omega_1^4\bar{A}_4).$$

Умножив левую и правую части этого равенства на $(\bar{P}_2\bar{P}_3\bar{P}_4)$, получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\overset{*}{\omega}{}_1^1 = \omega_1^1 + R_3 d\upsilon.$$

Для остальных $\overset{*}{\omega}{}_i^k$ аналогично получим

$$\overset{*}{\omega}{}_1^2 = \omega_1^2 - R_4 d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_1^3 = \omega_1^3 + R_2 d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_1^4 = \omega_1^4 - R_1 d\upsilon,$$
$$\overset{*}{\omega}{}_2^1 = \omega_2^1 + R_7 d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_2^2 = \omega_2^2 - R_8 d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_2^3 = \omega_2^3 + R_6 d\upsilon,$$
$$\overset{*}{\omega}{}_3^1 = \omega_3^1 + R_{11} d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_3^2 = \omega_3^2 - R_{12} d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_3^3 = \omega_3^3 + R_{10} d\upsilon,$$
$$\overset{*}{\omega}{}_4^1 = \omega_4^1 + R_{14} d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_4^2 = \omega_4^2 - R_{15} d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_4^3 = \omega_4^3 + R_{13} d\upsilon$$
$$\overset{*}{\omega}{}_2^4 = \omega_2^4 - R_5 d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_3^4 = \omega_3^4 - R_9 d\upsilon,\quad \overset{*}{\omega}{}_4^4 = \omega_4^4 - (R_3 - R_8 + R_{10}) d\upsilon$$

Здесь $R_1, \dots, R_{15}$ суть соответствующим образом [1] занумерованные величины $C_{iklm} = (P'(\bar{A}_i), P(\bar{A}_k), P(\bar{A}_l), P(A_m))$, где $P'$ – оператор, коэффициенты которого равны производным по $\upsilon$ от соответствующих коэффициентов оператора $P$. Отсюда следует, что величины $R_1, R_2, \dots, R_{15}$ определяют преобразованную конгруэнцию. Если же все $R_i = 0$, то преобразование Егорова вырождается. Следовательно, те или иные совокупности преобразований Егорова могут быть заданы одним или несколькими соотношениями вида

$$f_\alpha(R_1, \dots, R_{15}) = 0.$$

Напомним, что для величин $R_1, \dots, R_{15}$ имеют место введенные в [1] деривационные формулы вида:

$$\frac{\partial R_i}{\partial s} = \beta_i^k R_k,\quad \text{где}\quad ds = \omega_1^3\Big|_{\omega_1^4 = 0}$$

Деривационные формулы полуканонического репера, построенного в [1], имеют вид

$$d\bar{A}_i = \omega_i^k \bar{A}_k = (a_i^k \omega_1^3 + b_i^k \omega_1^4) A_k$$

где $a_i^k$, $b_i^k$ определены таблицей:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



| $i$ \ $k$ | $a_i^1$ | $b_i^1$ | $a_i^2$ | $b_i^2$ | $a_i^3$ | $b_i^3$ | $a_i^4$ | $b_i^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $B+p$ | $A+p^*$ | $A+a$ | $B+a^*$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | $a$ | $a^*$ | $p$ | $p^*$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | $g$ | $g^*$ | $e+x$ | $e^*+x^*$ | $q+B^*$ | $q^*+A^*$ | $b$ | $b^*$ |
| 4 | $e$ | $e^*$ | $g+x^*$ | $g^*+x$ | $b+A^*$ | $b^*+B^*$ | $q$ | $q^*$ |

Фигурирующие здесь коэффициенты связаны соотношениями:

$$A+\overset{*}{A}+2(\overset{*}{p}+\overset{*}{q})=0,$$
$$B+\overset{*}{B}+2(p+q)=0,$$
$$B^2-A^2=C=const,$$
$$A+\varepsilon\overset{*}{A}=0,$$

где $\varepsilon=1$ для "К-репера" и $\varepsilon=-1$ для "М-репера" [1].

1. Потребуем, чтобы конгруэнции $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$ и $\{\bar{P}_3\bar{P}_4\}$ образовывали пару $P$. Условия расслояемости соответствующих линейчатых поверхностей конгруэнций $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$, $\{\bar{P}_3\bar{P}_4\}$ имеют вид (см. [6])

$$\omega_1^{*3}\omega_3^{*2}+\omega_1^{*4}\omega_4^{*2}=0,\quad \omega_3^{*1}\omega_1^{*4}+\omega_3^{*2}\omega_2^{*4}=0,$$
$$\omega_2^{*4}\omega_4^{*1}+\omega_2^{*3}\omega_3^{*1}=0,\quad \omega_4^{*1}\omega_1^{*3}+\omega_4^{*2}\omega_2^{*3}=0,$$
$$\omega_1^{*4}\omega_4^{*1}-\omega_3^{*2}\omega_2^{*3}=0,\quad \omega_1^{*3}\omega_3^{*1}-\omega_2^{*4}\omega_4^{*2}=0$$

или, в наших терминах,

$$(\omega_1^3+R_2d\sigma)[(e+x)\omega_1^3+(\overset{*}{e}+\overset{*}{x})\alpha dv-R_{12}d\sigma]+(\alpha-R_1)[(g+\overset{*}{x})\omega_1^3+$$
$$+(\overset{*}{g}+x)\alpha dv-R_{15}d\sigma]d\sigma=0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Тóмского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$(g\omega_1^3+\alpha\overset{*}{g}d\upsilon+R_{11}d\upsilon)(\alpha-R_1)d\upsilon+[\alpha(\overset{*}{e}+\overset{*}{x})-R_{12}](\omega_1^3-R_5d\upsilon)d\upsilon=0,$$

$$(\alpha+R_6)(g\omega_1^3+\alpha\overset{*}{g}d\upsilon+R_{11}d\upsilon)d\upsilon+(\omega_1^3-R_5d\upsilon)(e\omega_1^3+\alpha\overset{*}{e}d\upsilon+R_{14}d\upsilon)=0,$$

$$(\alpha\overset{*}{e}+R_{14})(\omega_1^3+R_2d\upsilon)d\upsilon+[(g+\overset{*}{x})\omega_1^3+\alpha\overset{*}{g}d\upsilon-R_{15}d\upsilon](\alpha+R_6)d\upsilon=0, \qquad (*)$$

$$(\alpha-R_1)(\alpha\overset{*}{e}d\upsilon+R_{14})d\upsilon-(\alpha+R_6)[\alpha(\overset{*}{e}+\overset{*}{x})-R_{12}]d\upsilon^2=0,$$

$$(\omega_1^3+R_2d\upsilon)(g\omega_1^3+\alpha\overset{*}{g}d\upsilon+R_{11}d\upsilon)-(\omega_1^3-R_5d\upsilon)[(g+\overset{*}{x})\omega_1^3+\alpha\overset{*}{g}d\upsilon-R_{15}d\upsilon]=0,$$

где $\omega_1^4=\alpha d\upsilon$. По определению пар $P$ (см. [3] стр. 43) каждое уравнение этой системы должно обращаться в тождество. Следовательно,

$$x=e=\overset{*}{x}=0, \qquad (**)$$

$$R_{12}+gR_1=0, \qquad (1)$$

$$(\alpha-R_1)R_{15}+(\alpha g+R_{12})R_2=0, \qquad (2)$$

$$R_{14}+gR_6=0, \qquad (3)$$

$$(\alpha-R_1)R_{11}+(\alpha g+R_{12})R_5=0, \qquad (4)$$

$$(\alpha+R_6)R_{15}-(R_{14}-\alpha g)R_2=0, \qquad (5)$$

$$(\alpha+R_6)R_{11}-(R_{14}-\alpha g)R_5=0, \qquad (6)$$

$$g(R_2+R_5)+R_{11}+R_{15}=0, \qquad (7)$$

$$R_2R_{11}-R_5R_{15}=0. \qquad (8)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Условия $(**)$ характеризуют конгруэнцию $H$ [1], а конгруэнция $H$ вместе с соответствующей ей прямой Лапласа $\bar{A}_3\bar{A}_4$ образует пару $H$ (см. [5]). Следовательно, если конгруэнции $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$, $\{\bar{P}_3\bar{P}_4\}$ образуют пару $P$, то конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$, $\{\bar{A}_3\bar{A}_4\}$ образуют пару $H$.

Среди уравнений (1), ..., (7) в силу (8) независимых только пять. Исключив из рассмотрения конгруэнции $W$, получим в силу $(**)$: $\overset{*}{g} = g + \overset{*}{e} = 0$ и $dg = -2g(\omega_1^1 + \omega_2^2)$ (см. [1], стр. 184).

Результатом дифференцирования уравнений (1) и (3) по параметру $S$ являются, соответственно, уравнения:

$$\alpha_1^2(R_{11} + gR_5) + \alpha_3^4(R_{15} + gR_2) = 0, \tag{9}$$

$$\alpha_4^3(R_{11} + gR_5) + \alpha_2^1(R_{15} + gR_2) = 0, \tag{10}$$

где $\alpha_i^k$ – коэффициенты деривационных формул канонического репера подмногообразия $\omega_1^4 = 0$.

Из (8) при $R_2R_{15} \neq 0$ следует

$$R_{15} = \lambda R_2, \tag{11}$$

$$R_{11} = \lambda R_5. \tag{12}$$

Вносим условия (11), (12) в уравнение (7):

$$(\lambda + g)(R_2 + R_5) = 0.$$

Возможны следующие случаи:

I. $\lambda + g = 0$. Если при этом $R_2 + R_5 \neq 0$, то уравнения (1) – (7) сводятся к соотношениям:

$$R_{15} + gR_2 = 0, \tag{13}$$

$$R_{11} + gR_5 = 0. \tag{14}$$

В силу уравнений (13), (14) уравнения (2), (4), (5), (6), (9), (10) обращаются в тождества. Дифференцирование уравнений (13), (14) приводит к одному и тому же уравнению $R_3 = R_8$, дифференцирование которого дает тождество.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Следовательно, преобразование Егорова, удовлетворяющее условиям $R_2+R_5\neq 0$, $R_3=R_8$ и (13), (14), переводит пару $H$ в пару $P$ и может быть осуществлено с помощью произвольного подмногообразия $\Psi_1$ пары $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}, \{\bar{A}_3\bar{A}_4\}$.

Если $\lambda+g=0$ и

$$R_2+R_5=0, \tag{15}$$

то

$$R_{11}+gR_5=R_{15}+gR_2=0, \tag{16}$$

$$R_{12}+gR_1=R_{14}+gR_6=0. \tag{16$^1$}$$

Дифференцирование двух последних соотношений дает тождества, дифференцирование же уравнений (16) приводит к соотношению $R_3=R_8$, дифференцирование которого также дает тождество.

Уравнение (15) можно записать в виде

$$q_1^k R_k=0 \quad (k=1,2,3,4,6,7,9,10,13), \tag{17}$$

где все $q_1^k$, кроме $q_1^2=q_1^5=1$ равны нулю. Дифференцируя (17) девять раз по $S$, получим соотношения вида

$$q_\alpha^k R_k=0 \quad (k=1,2,3,4,6,7,9,10,13;\ \alpha=1,\ldots,9), \tag{18}$$

где соотношение (17) включено при $\alpha=1$, $q_\alpha^k$ определяются при помощи рекуррентных формул

$$q_{\alpha+1}^k=\frac{d}{ds}q_\alpha^k+q_\alpha^i\gamma_i^k$$

$(i,k=1,2,3,4,6,7,9,10,13;\ \alpha=1,\ldots,9)$,

а отличные от нуля $\gamma_i^k$ даны в табл.1.

Исключая из (18) величины $R_k$, получим натуральное уравнение

$$\det\|q_\alpha^k\|=0, \tag{A}$$

определяющее семейство линейчатых поверхностей, при помощи которых можно производить преобразование Егорова,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



переводящее пару $H$ в пару $P$. Геометрическая характеристика условия $R_2+R_5=0$ выяснена в [1] (проективные центры конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ превращаются в точки, гармонически делящие фокусы луча $\bar{P}_1\bar{P}_2$ преобразованной конгруэнции).

II. $\lambda+g\neq 0$, $R_2+R_5=0$; тогда

$$(R_{11}+gR_5)(R_{15}+gR_2)\neq 0. \tag{19}$$

Из уравнений (19), (10) следует

$$(\alpha_1^2-\alpha_3^4)(R_{11}+gR_5)=0,$$
$$(\alpha_2^1-\alpha_4^3)(R_{11}+gR_5)=0.$$

Отсюда, в силу (19), получим

$$\alpha_1^2-\alpha_3^4=0,\quad \alpha_2^1-\alpha_4^3=0.$$

Из уравнений (2) и (5), в силу тех же условий, получим соответственно

$$\alpha-R_1=0, \tag{20}$$

$$\alpha+R_6=0, \tag{21}$$

следовательно, $R_1+R_6=0$. При условиях (20), (21) имеем $\overset{*}{\omega}{}_1^4=\overset{*}{\omega}{}_2^3=0$, $\overset{*}{\omega}{}_1^3=\overset{*}{\omega}{}_2^4$.

Следовательно, в рассматриваемом случае конгруэнция $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$ вырождается в линейчатую поверхность. Поэтому в этом случае наша задача не имеет решения.

III. Пусть теперь $\lambda=0$, т.е. $R_{11}=R_{15}=0$. Из уравнения (7) получим

$$g(R_2+R_5)=0.$$

Если $g=0$, а $R_2+R_5\neq 0$, то из (1) и (3) получим, что $R_{12}=R_{14}=0$.

Уравнения (2), ..., (8) обращаются в тождества. Дифференцирование соотношений

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$R_{11}=R_{12}=R_{14}=R_{15}=0 \qquad (22)$$

приводит к тождествам.

При условиях (22), имея в виду, что $\alpha_3^2=\alpha_4^1=\alpha_3^1-\alpha_4^2=0$, где $\alpha_3^1=g$, из деривационных формул преобразованной конгруэнции получим

$$d\bar{P}_3=\omega_3^{*3}\bar{P}_3+\omega_4^{*3}\bar{P}_4,$$

$$d\bar{P}_4=\omega_4^{*3}\bar{P}_3+\omega_4^{*4}\bar{P}_4,$$

т.е. прямая $\bar{P}_3\bar{P}_4$, в которую при преобразовании Егорова переходит прямая Лапласа $\bar{A}_3\bar{A}_4$, остается неподвижной.

Если $g\neq 0$, а $R_2+R_5=0$, то получается $R_2=R_5=\alpha-R_1=\alpha+R_6=0$, что приводит к вырождению конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ (см. случай II). Следовательно, и в рассматриваемом третьем случае задача не имеет решения. Таким образом, имеет место

Теорема 1. Только пары $H$, не являющиеся парами $W$, допускают преобразования Егорова, превращающие их в пары $P$. Если преобразование производится при помощи произвольного семейства линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнции, то коэффициенты $R_j$ связаны соотношениями $R_{15}+gR_2=R_{11}+gR_5=R_3-R_8=0$, $R_2+R_5\neq 0$. Если же оно производится при помощи одного из семейств, определяемых натуральными уравнениями $(A)$, то $R_2+R_5=0$, $R_{11}+gR_5=R_{15}+gR_2=R_{12}+gR_1=R_{14}+gR_6=R_3-R_8=0$. В последнем случае проективные центры конгруэнции превращаются в точки, гармонически делящие фокусы луча преобразованной конгруэнции.

2. Потребуем теперь, чтобы конгруэнция $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ с соответствующей ей прямой Лапласа преобразовывалась в пару $T$, т.е. потребуем, чтобы система (*) сводилась к одному уравнению. Это возможно в следующих случаях:

I. $\chi=\overset{*}{\chi}=0,\ R_1+R_6=0,\ R_2+R_5=0,\ R_{12}=R_{14}=0,\ R_{11}+R_{15}=0 \qquad (23)$

II. $\chi=\overset{*}{\chi}=0,\ R_1+R_6=0,\ R_2+R_5=0,\ R_{12}+R_{14}=0,\ R_{11}=R_{15}=0. \qquad (24)$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



III. $x=\overset{*}{x}=0,\ R_1=R_6=0,\ R_2+R_5=0,\ R_{12}+R_{14}=0,\ R_{11}+R_{15}=0.$ (25)

IV. $x=\overset{*}{x}=0,\ R_1+R_6=0,\ R_2=R_5=0,\ R_{12}+R_{14}=0,\ R_{11}+R_{15}=0.$ (26)

Система (*) в каждом случае сведется к одному уравнению (конгруэнции $W$ из рассмотрения исключены, т.е. считается, что $g+\overset{*}{e}=\overset{*}{g}+e=0$), которое примет соответственно вид:

$$e(\omega_1^3)^2+[eR_2-gR_1]\omega_1^3 d\upsilon+[\alpha\overset{*}{e}R_2+\alpha\overset{*}{g}(\alpha-R_1)-R_{15}(\alpha-R_1)]d\upsilon^2=0, \quad (27)$$

$$e(\omega_1^3)^2+[eR_2-gR_1-R_{12}]\omega_1^3 d\upsilon+[\alpha\overset{*}{e}R_2+\alpha\overset{*}{g}(\alpha-R_1)-R_2R_{12}]d\upsilon^2=0, \quad (28)$$

$$e(\omega_1^3)^2+[eR_2-R_{12}]\omega_1^3 d\upsilon+[\alpha\overset{*}{e}R_2+\alpha^2\overset{*}{g}-\alpha R_{15}-R_2R_{12}]d\upsilon^2=0, \quad (29)$$

$$e(\omega_1^3)^2-[gR_1+R_{12}]\omega_1^3 d\upsilon+[\alpha\overset{*}{g}(\alpha-R_1)-R_{15}(\alpha-R_1)]d\upsilon^2=0. \quad (30)$$

Соотношения $x=\overset{*}{x}=0$ характеризуют описанные в [1] конгруэнции, для которых инварианты $J_2=J_2'=0$ (и, следовательно, $J_5=J_5'=0$).

Дифференцируя каждое соотношение в (23), (24), (25), (26) по два раза по $S$, получим в каждом случае для определения десяти неизвестных функций по десять уравнений вида

$$q_{ji}^k R_k=0 \quad (i=1,\dots,10;\ k=1,\dots,15), \quad (31)$$

где соответствующие $q_{ji}^k$, отличные от нуля, даны в табл. 2,3,4,5.

Уравнение для определения фокусов $\bar{Q}_i=\bar{P}_1+k_i\bar{P}_2$ конгруэнции $\{P_1P_2\}$ во всех случаях принимает вид $k^2-1=0$ (случаи вырождения исключены), т.е. всегда фокусы конгруэнции $\{A_1A_2\}$ преобразуются в фокусы конгруэнции $\{P_1P_2\}$. Исключив из (31) величины $R_k$, для каждого случая получим натуральное уравнение вида

$$\det\|q_{ji}^k\|=0 \quad (32)$$

семейств линейчатых поверхностей, при помощи которых конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ и $\{\bar{A}_3\bar{A}_4\}$ преобразуются в пару $T$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 1

| i \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1^1-\alpha_4^4$ | $\alpha_3^4-\alpha_2^2$ | | $-1$ | | | $1$ | | |
| 2 | $\alpha_4^3$ | $\alpha_1^1-\alpha_3^3$ | $-1$ | | $\alpha_1^2$ | | | $1$ | |
| 3 | $\alpha_4^1$ | | | $\alpha_2^1$ | | $\alpha_1^2$ | | | |
| 4 | $-\alpha_3^1$ | | | $\alpha_1^1-\alpha_2^2$ | | | | | |
| 6 | $\alpha_2^1$ | $\alpha_4^4-\alpha_2^2$ | $3$ | | $\alpha_3^4$ | | | $1$ | |
| 7 | | $\alpha_2^1-\alpha_3^3$ | | | $\alpha_2^2-\alpha_3^3$ | $-1$ | | | $1$ |
| 9 | | | | | $-2\alpha_3^1$ | $\alpha_2^2-\alpha_2^1$ | | | |
| 10 | | | | $\alpha_2^1$ | | $\alpha_3^2$ | | | |
| 13 | $2\alpha_3^1$ | | $2\alpha_3^4$ | | | | $\alpha_3^3-\alpha_4^4$ | $2\alpha_3^4$ | |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 2

| k / b | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2(\alpha_1^1+\alpha_3^3)$ | $-2(\alpha_1^2-\alpha_2^1)$ | | $-1$ | $-1$ | |
| 2 | | $\alpha_1^1+\alpha_4^4$ | | | | $-1$ |
| 3 | | | | $\alpha_4^1$ | $\alpha_4^1$ | $2\alpha_3^1$ |
| 4 | | | | $\alpha_3^1$ | | $\alpha_4^1$ |
| 5 | | | $2\alpha_4^1$ | | $\alpha_3^1$ | $-\alpha_4^1$ |
| 6 | $(\alpha_4^3-\alpha_4^2)(\alpha_1^1+\alpha_4^4)$ | $(\alpha_1^1+\alpha_4^4)'+$ $(\alpha_4^3+\alpha_4^4)(\alpha_4^3-\alpha_3^3)$ | $-\alpha_1^1-\alpha_4^4$ | $-\alpha_2^1$ | $-\alpha_1^2$ | |
| 7 | $2(\alpha_1^1+\alpha_3^3)'+$ $2(\alpha_1^1-\alpha_3^3)(\alpha_1^1-\alpha_4^4)+$ $2(\alpha_1^1-\alpha_2^1)(\alpha_1^1-\alpha_3^3)$ | $2(\alpha_4^3+\alpha_4^4)(\alpha_4^3-\alpha_3^3)-$ $-2(\alpha_4^2-\alpha_4^1)'-$ $-2(\alpha_4^1-\alpha_4^2)(\alpha_4^3-\alpha_3^3)$ | $2(\alpha_4^3-\alpha_2^1)$ | $\alpha_2^2-3\alpha_1^1-2\alpha_3^3$ | $\alpha_1^1-\alpha_2^1$ | $-2(\alpha_2^2+\alpha_3^4)$ |
| 8 | | | $2(\alpha_2^2+\alpha_3^3)\alpha_3^1+$ $+2\alpha_4^1(\alpha_2^2+\alpha_3^4)$ | $(\alpha_4^1)'+2\alpha_2^2\alpha_3^1+$ $+\alpha_4^1(\alpha_1^1-\alpha_2^1)$ | $(\alpha_4^1)'+2\alpha_1^2\alpha_3^1+$ $+\alpha_4^1(3\alpha_2^2+\alpha_3^3-\alpha_1^1)$ | $2\alpha_4^1(\alpha_4^2-\alpha_4^3)+2(\alpha_4^1)'$ |
| 9 | $-2(\alpha_3^1)^2-2(\alpha_4^1)^2$ | $4\alpha_4^1\alpha_3^1$ | $2\alpha_3^1(\alpha_2^2-\alpha_3^4)$ | $(\alpha_3^1)'+\alpha_2^2\alpha_4^1+$ $+\alpha_3^1(\alpha_1^1-\alpha_2^1)$ | $\alpha_4^1(2\alpha_2^2-\alpha_3^4)$ | $\alpha_3^1(\alpha_4^2+\alpha_3^4)+(\alpha_4^1)'$ |
| 10 | $2(\alpha_3^1)^2+2(\alpha_4^1)^2$ | $-4\alpha_4^1\alpha_3^1$ | $2(\alpha_4^1)'$ | $\alpha_2^1\alpha_4^1$ | $(\alpha_3^1)'+\alpha_3^1(\alpha_2^2-\alpha_1^1)+$ $+\alpha_2^1\alpha_4^1+\alpha_4^1(\alpha_4^3-\alpha_2^1)$ | $\alpha_3^1(\alpha_4^1+\alpha_4^3)-(\alpha_4^1)'$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 2 (продолжение)

| i \ k | 9 | 10 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 1 |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | $\alpha_4^1$ | $-2\alpha_3^1$ | $2(\alpha_2^2+\alpha_3^1)$ | $\alpha_4^1$ |
| 4 | $-\alpha_3^1$ | $\alpha_4^1$ | $\alpha_2^2-\alpha_3^4$ | |
| 5 | | $\alpha_4^1$ | $\alpha_4^3-\alpha_2^1$ | $-\alpha_3^1$ |
| 6 | $\alpha_4^3$ | $\alpha_3^1+\alpha_4^4$ | | $\alpha_3^4$ |
| 7 | $2\alpha_4^1+3\alpha_3^3-\alpha_4^4$ | $4(\alpha_4^1-\alpha_2^1)$ | | $\alpha_4^4-\alpha_3^3$ |
| 8 | $\alpha_4^1(2\alpha_2^2+3\alpha_3^3-\alpha_4^4)-$ $-2\alpha_3^1\alpha_4^1+(\alpha_4^1)'$ | $2(\alpha_4^3+\alpha_3^4)\alpha_4^1-2(\alpha_3^1)'-$ $-2\alpha_3^1(\alpha_2^2+\alpha_3^1)$ | $2(\alpha_2^2+\alpha_3^1)'+$ $+2(\alpha_2^2+\alpha_3^1)(\alpha_3^3-\alpha_2^1)$ | $(\alpha_4^1)'-2\alpha_3^1\alpha_3^4+$ $+\alpha_4^1(\alpha_4^4-\alpha_3^3)$ |
| 9 | $(-\alpha_3^1)'+\alpha_3^1(\alpha_3^3-\alpha_4^4)+$ $+\alpha_4^1(2\alpha_2^2-\alpha_2^1)$ | $(\alpha_4^1)'+\alpha_3^1(\alpha_3^4-\alpha_2^2)$ | $(\alpha_2^2-\alpha_3^4)'-2\alpha_4^1+$ $+(\alpha_2^2-\alpha_3^4)(\alpha_3^3-\alpha_2^1)$ | $\alpha_3^4\alpha_4^1$ |
| 10 | $\alpha_4^1(2\alpha_4^3-\alpha_2^1)$ | $(\alpha_4^1)'+\alpha_3^1(\alpha_2^1-3\alpha_4^3)$ | $(\alpha_4^3-\alpha_2^1)'+$ $+(\alpha_3^3-\alpha_2^1)(\alpha_4^3-\alpha_2^1)$ | $\alpha_3^4\alpha_4^1-2\alpha_3^1)'-$ $-\alpha_3^1(\alpha_4^4-\alpha_3^3)$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 3

| i \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2(\alpha_1^4+\alpha_2^2)$ | $-2(\alpha_1^2-\alpha_2^4)$ | | $-1$ | $-1$ | |
| 2 | | $\alpha_1^4+\alpha_4^4$ | | | | $-1$ |
| 3 | | | $2\alpha_4^4$ | $\alpha_3^4$ | $\alpha_3^4$ | |
| 4 | | | $\alpha_3^4$ | | $\alpha_4^4$ | |
| 5 | | | $-\alpha_3^4$ | $\alpha_4^4$ | | $2\alpha_3^4$ |
| 6 | $(\alpha_4^3-\alpha_2^2)(\alpha_1^4+\alpha_4^4)$ | $(\alpha_1^4+\alpha_4^4)'+$ $+(\alpha_1^4+\alpha_4^4)(\alpha_1^4-\alpha_3^4)$ | $-\alpha_2^4-\alpha_4^4$ | $-\alpha_2^4$ | $-\alpha_1^2$ | |
| 7 | $2(\alpha_1^4+\alpha_3^4)'+$ $+2(\alpha_1^4+\alpha_3^4)(\alpha_1^4-\alpha_4^4)+$ $+2(\alpha_1^4-\alpha_4^4)(\alpha_1^4-\alpha_3^4)$ | $2(\alpha_2^4+\alpha_3^4)(\alpha_1^4-\alpha_2^4)-$ $-2(\alpha_1^4-\alpha_2^4)'-$ $-2(\alpha_1^4-\alpha_4^4)(\alpha_2^4-\alpha_3^4)$ | $2(\alpha_4^3-\alpha_2^4)$ | $\alpha_2^4-3\alpha_1^4-2\alpha_3^3$ | $\alpha_1^4-\alpha_2^2$ | $-2(\alpha_1^2+\alpha_3^4)$ |
| 8 | | | $-2(\alpha_4^3-\alpha_2^2)\alpha_3^4+$ $+2(\alpha_4^4)$ | $(\alpha_3^4)'+2(\alpha_2^4)\alpha_4^4+$ $+\alpha_3^4(3\alpha_1^4+2\alpha_3^3-\alpha_2^2)$ | $2\alpha_4^4\alpha_4^4+(\alpha_3^4)'+$ $+\alpha_3^4(\alpha_2^2-\alpha_1^4)$ | $2\alpha_3^4(\alpha_2^2+\alpha_3^4)+$ $+2\alpha_4^4(\alpha_2^4+\alpha_3^3)$ |
| 9 | $4\alpha_4^4\alpha_3^4$ | $-2(\alpha_3^4)^2-2(\alpha_4^4)^2$ | $\alpha_4^4(\alpha_2^4+\alpha_3^4)+(\alpha_4^4)'$ | $\alpha_3^4(2\alpha_2^4-\alpha_3^4)$ | $(\alpha_4^4)'+\alpha_4^2\alpha_3^4+$ $+\alpha_4^4(\alpha_2^2-\alpha_1^4)$ | $(\alpha_4^4)^2(\alpha_2^4-\alpha_3^4)^2$ |
| 10 | $-4\alpha_4^4\alpha_3^4$ | $2(\alpha_3^4)^2+2(\alpha_4^4)^2$ | $\alpha_4^4(\alpha_2^4+\alpha_3^4)-(\alpha_3^4)'$ | $(\alpha_4^4)^2+\alpha_3^4\alpha_3^4+$ $+\alpha_4^4(\alpha_1^4-\alpha_2^2)$ | $\alpha_3^4\alpha_1^4$ | $2(\alpha_3^4)^2$ |

Таблица 3 (продолжение)

| i \ k | 9 | 10 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 1 |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | $-\alpha_3^1$ | $2\alpha_4^1$ | $2(\alpha_1^1+\alpha_3^3)$ | $-\alpha_3^4$ |
| 4 | $\alpha_4^1$ | $-\alpha_3^1$ | $\alpha_2^1-\alpha_3^4$ | |
| 5 | | $-\alpha_3^1$ | $\alpha_4^3-\alpha_1^2$ | $\alpha_4^1$ |
| 6 | $\alpha_4^3$ | $\alpha_1^1+\alpha_4^4$ | | $\alpha_3^4$ |
| 7 | $2\alpha_1^1+3\alpha_3^3-\alpha_4^4$ | $4(\alpha_4^3-\alpha_1^2)$ | | $\alpha_4^4-\alpha_3^3$ |
| 8 | $2\alpha_4^1\alpha_4^3-(\alpha_3^1)'-$ $-\alpha_3^1(3\alpha_3^3+2\alpha_1^1-\alpha_4^4)$ | $2(\alpha_4^1)'+2\alpha_4^1(\alpha_1^1+\alpha_3^3)-$ $-2\alpha_3^1(\alpha_3^4+\alpha_4^3)$ | $2\alpha_3^1+2(\alpha_1^1+\alpha_3^3)'+$ $+2(\alpha_1^1+\alpha_3^3)(\alpha_3^3-\alpha_2^2)$ | $2\alpha_4^1\alpha_3^4-(\alpha_3^1)'-$ $-\alpha_3^1(\alpha_4^4-\alpha_3^3)$ |
| 9 | $\alpha_4^1(\alpha_3^3-\alpha_4^4)+(\alpha_4^1)'-$ $-\alpha_3^1\alpha_1^2$ | $\alpha_4^1(\alpha_3^4+\alpha_2^1)-(\alpha_3^1)'$ | $(\alpha_2^1-\alpha_3^4)(\alpha_3^3-\alpha_2^2)+$ $+(\alpha_2^1-\alpha_3^4)'-2\alpha_4^1$ | $\alpha_3^1\alpha_3^4$ |
| 10 | $\alpha_3^1(\alpha_1^2-2\alpha_4^3)$ | $\alpha_4^1(3\alpha_4^3-\alpha_1^2)-(\alpha_3^1)'$ | $(\alpha_4^3-\alpha_1^2)(\alpha_3^3-\alpha_2^2)+$ $+(\alpha_4^3-\alpha_1^2)'+2\alpha_4^1$ | $(\alpha_4^1)'-\alpha_3^1\alpha_3^4+$ $+\alpha_4^1(\alpha_4^4-\alpha_3^3)$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 4

| i \ k | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_3^4 - \alpha_1^2$ | | -1 | | | 1 |
| 2 | $\alpha_2^1 - \alpha_4^3$ | | | -1 | | |
| 3 | $\alpha_1^1 + \alpha_4^4$ | | | | -1 | |
| 4 | | $2\alpha_4^1$ | $\alpha_3^1$ | $\alpha_3^1$ | | $-\alpha_3^1$ |
| 5 | | | $\alpha_4^1$ | $\alpha_4^1$ | $2\alpha_3^1$ | $\alpha_4^1$ |
| 6 | $(\alpha_3^4-\alpha_1^2)'-2\alpha_4^1+$ $+(\alpha_1^1-\alpha_3^3)(\alpha_3^4-\alpha_1^2)$ | | $\alpha_2^2 - \alpha_3^1$ | | $-\alpha_1^2 - \alpha_3^4$ | $\alpha_3^3 - \alpha_4^4$ |
| 7 | $(\alpha_2^1-\alpha_4^3)'+2\alpha_4^1+$ $+(\alpha_2^1-\alpha_4^3)(\alpha_3^1-\alpha_3^3)$ | $2(\alpha_4^3 - \alpha_2^1)$ | | $\alpha_1^1 - \alpha_2^2$ | $\alpha_4^3 - \alpha_2^1$ | |
| 8 | $(\alpha_2^1+\alpha_4^4)'+$ $+(\alpha_2^1-\alpha_3^3)(\alpha_3^1+\alpha_4^4)$ | $-\alpha_1^1 - \alpha_4^4$ | $-\alpha_2^1$ | $-\alpha_2^2$ | | $\alpha_4^3$ |
| 9 | | $2\alpha_3^1(\alpha_3^2-\alpha_3^4)+2(\alpha_4^1)'$ | $(\alpha_3^1)'+2\alpha_2^1\alpha_4^1+$ $+\alpha_3^1(3\alpha_1^1+2\alpha_3^3-\alpha_2^2)$ | $(\alpha_3^1)'+\alpha_3^1(\alpha_2^2-\alpha_1^1)+$ $+2\alpha_4^1(2\alpha_1^2-\alpha_2^1)$ | $2\alpha_4^1(\alpha_4^1+\alpha_3^3)+$ $+2\alpha_3^1(\alpha_2^2+\alpha_4^4)$ | $2\alpha_4^1(2\alpha_4^3-\alpha_3^4)-(\alpha_3^1)'-$ $-\alpha_3^1(3\alpha_3^3+2\alpha_4^1-\alpha_4^4)$ |
| 10 | | $2\alpha_3^1(\alpha_2^2+\alpha_3^3)+$ $+2\alpha_4^1(\alpha_2^3+\alpha_3^4)$ | $2\alpha_3^1\alpha_2^1+(\alpha_4^1)'+$ $+\alpha_4^1(\alpha_3^1-\alpha_2^2)$ | $(\alpha_4^1)'+2\alpha_3^1\alpha_2^2+$ $+\alpha_4^1(3\alpha_2^2+2\alpha_3^3-\alpha_4^1)$ | $2\alpha_4^1(\alpha_1^2-\alpha_4^3)+$ $+2(\alpha_3^1)'$ | $(\alpha_4^1)'-2\alpha_3^1\alpha_4^3+$ $+\alpha_4^1(3\alpha_3^3+2\alpha_2^2-\alpha_4^4)$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 4 (продолжение)

| i \ k | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | $2\alpha_4^1$ | $2(\alpha_2^1 - \alpha_2^4)$ | $2(\alpha_1^1 + \alpha_3^3)$ | $-\alpha_3^4$ |
| 5 | $-2\alpha_3^1$ | $2(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | | $\alpha_4^4$ |
| 6 | $3\alpha_3^4 - \alpha_4^2$ | | -2 | |
| 7 | $\alpha_2^1 + \alpha_4^3$ | | 2 | $\alpha_4^4 - \alpha_3^3$ |
| 8 | $\alpha_1^1 + \alpha_4^4$ | | | $\alpha_3^4$ |
| 9 | $2(\alpha_4^1)' + 2\alpha_4^1(\alpha_1^1 + \alpha_3^3) - -4\alpha_3^1(\alpha_4^3 - \alpha_3^4)$ | $2(\alpha_3^2 - \alpha_2^1)' + 4\alpha_1^2\alpha_3^3 + +2\alpha_2^1(\alpha_1^1 - \alpha_3^3) - 2\alpha_3^4(\alpha_2^1 + \alpha_3^3)$ | $2(\alpha_2^1 - \alpha_3^4)(\alpha_1^2 - \alpha_2^1) + +2(\alpha_1^1 + \alpha_3^3)(\alpha_3^3 \cdot \alpha_2^2) + 2(\alpha_1^2 + \alpha_3^3)'$ | $2\alpha_3^4\alpha_4^1 - (\alpha_3^4)' - -\alpha_3^1(\alpha_4^4 - \alpha_3^3)$ |
| 10 | $2\alpha_4^1(\alpha_3^3 + \alpha_3^4) - 2(\alpha_3^1)' - -2\alpha_3^1(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | $2(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)' + +2(\alpha_2^2 - \alpha_3^3)(\alpha_3^3 - \alpha_1^1)$ | $2(\alpha_2^1 - \alpha_3^4)(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | $(\alpha_4^1)' - 2\alpha_3^1\alpha_3^4 + +\alpha_4^1(\alpha_4^4 - \alpha_3^3)$ |

Таблица 5

| i \ k | 1 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2(\alpha_1^1+\alpha_3^3)$ | | $-1$ | $-1$ | | $1$ |
| 2 | $\alpha_4^3-\alpha_1^2$ | $-1$ | | | | |
| 3 | $\alpha_2^1-\alpha_3^4$ | $1$ | | | $-2$ | |
| 4 | | $2\alpha_4^1$ | $\alpha_3^1$ | $\alpha_3^1$ | | $-\alpha_3^1$ |
| 5 | | | $\alpha_4^1$ | $\alpha_4^1$ | $2\alpha_3^1$ | $\alpha_4^1$ |
| 6 | $2(\alpha_2^1+\alpha_3^3)'+$ $+2(\alpha_2^1+\alpha_3^3)(\alpha_1^1-\alpha_4^4)$ | $2(\alpha_4^3-\alpha_1^2)$ | $\alpha_2^2-3\alpha_1^1-2\alpha_3^3$ | $\alpha_1^1-\alpha_2^2$ | $-2(\alpha_1^2+\alpha_3^4)$ | $3\alpha_3^3+2\alpha_1^1-\alpha_4^4$ |
| 7 | $(\alpha_4^3-\alpha_1^2)'+$ $+(\alpha_2^1-\alpha_4^4)(\alpha_4^3-\alpha_1^2)$ | | $-\alpha_3^4$ | $-\alpha_1^2$ | | $2\alpha_4^3-\alpha_1^2$ |
| 8 | $(\alpha_2^1-\alpha_3^4)'+2\alpha_4^1+$ $+(\alpha_2^1-\alpha_3^4)(\alpha_2^1-\alpha_4^4)$ | | $\alpha_3^4-2\alpha_2^1$ | $-\alpha_1^2$ | | $\alpha_1^2$ |
| 9 | | $2\alpha_3^1(\alpha_1^2-\alpha_3^4)+2(\alpha_4^1)$ | $(\alpha_3^1)'+2\alpha_2^1\alpha_4^1+$ $+\alpha_3^1(3\alpha_1^1+2\alpha_3^3-\alpha_2^2)$ | $(\alpha_3^1)'+\alpha_3^1(\alpha_2^2-\alpha_1^1)+$ $+2\alpha_4^1(2\alpha_1^2-\alpha_2^1)$ | $2\alpha_4^1(\alpha_1^1+\alpha_3^3)+$ $+2\alpha_3^1(\alpha_1^2+\alpha_3^4)$ | $2\alpha_4^1(2\alpha_4^3-\alpha_3^4)-(\alpha_3^1)'-$ $-\alpha_3^1(3\alpha_3^3+2\alpha_1^1-\alpha_4^4)$ |
| 10 | | $2\alpha_3^1(\alpha_2^2+\alpha_3^3)+$ $+2\alpha_4^1(\alpha_1^2+\alpha_3^4)$ | $2\alpha_3^1\alpha_2^1+(\alpha_4^1)'+$ $+\alpha_4^1(\alpha_1^1-\alpha_2^2)$ | $(\alpha_4^1)'+2\alpha_3^1\alpha_1^2+$ $+\alpha_4^1(3\alpha_2^2+2\alpha_3^3-\alpha_1^1)$ | $2\alpha_4^1(\alpha_1^2-\alpha_4^3)+2(\alpha_3^1)'$ | $(\alpha_4^1)'-2\alpha_3^1\alpha_4^3+$ $+\alpha_4^1(3\alpha_3^3+2\alpha_2^2-\alpha_4^4)$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Таблица 5 (продолжение)

| i \ k | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | $2\alpha_4^1$ | $2(\alpha_1^2 - \alpha_2^1)$ | $2(\alpha_1^1 + \alpha_3^3)$ | $-\alpha_3^1$ |
| 5 | $-2\alpha_3^1$ | $2(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | | $\alpha_4^1$ |
| 6 | $2(\alpha_3^4 + \alpha_4^3)$ | | | $\alpha_4^4 - \alpha_3^3$ |
| 7 | | $-2$ | | $\alpha_3^4$ |
| 8 | | 2 | | $\alpha_3^4$ |
| 9 | $2(\alpha_4^1)' + 2\alpha_4^1(\alpha_1^1 + \alpha_3^3) - -4\alpha_3^1(\alpha_4^3 - \alpha_4^3)$ | $2(\alpha_1^2 - \alpha_2^1)' + 4\alpha_1^2\alpha_3^3 + +2\alpha_2^1(\alpha_1^1 - \alpha_3^3) - 2\alpha_3^4(\alpha_1^1 + \alpha_3^3)$ | $2(\alpha_2^1 - \alpha_3^4)(\alpha_1^2 - \alpha_2^1) + 2(\alpha_1^1 + \alpha_3^3)' + +2(\alpha_1^1 + \alpha_3^3)(-\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | $2\alpha_3^4\alpha_4^1 - (\alpha_3^1)' - -\alpha_3^1(\alpha_4^4 - \alpha_3^3)$ |
| 10 | $2\alpha_4^1(\alpha_4^3 + \alpha_3^4) - 2(\alpha_3^1)' - -2\alpha_3^1(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | $2(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)' + +2(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)(\alpha_3^3 - \alpha_1^1)$ | $2(\alpha_2^1 - \alpha_3^4)(\alpha_2^2 + \alpha_3^3)$ | $(\alpha_4^1)' - 2\alpha_3^1\alpha_3^4 + +\alpha_4^1(\alpha_4^4 - \alpha_3^3)$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таблица 6

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mu_1^1-\mu_4^4$ | $\mu_3^3$ | $2\mu_1^4$ | $-\mu_2^4$ | $\mu_1^2$ | | | $-\mu_1^4$ | 1 | $\mu_1^4$ | | | | | |
| 2 | $\mu_4^3$ | $\mu_1^1-\mu_3^3$ | -1 | $\mu_2^3$ | | $\mu_1^2$ | | | | 1 | | | $\mu_1^4$ | | |
| 3 | $\mu_4^1$ | | | $\mu_2^1$ | | | $\mu_1^2$ | | | | 1 | | | $\mu_1^4$ | |
| 4 | $-\mu_4^2$ | $\mu_3^2$ | $\mu_1^2$ | $\mu_1^1-\mu_2^2$ | | | | $\mu_1^2$ | | | | 1 | | | $\mu_2^4$ |
| 5 | $\mu_2^1$ | | $-\mu_2^4$ | | $\mu_2^2-\mu_4^4$ | $\mu_3^4$ | $\mu_1^4$ | $-2\mu_2^4$ | $\mu_2^3$ | $\mu_2^4$ | | | | | |
| 6 | | $\mu_2^1$ | | | $\mu_4^3$ | $\mu_2^2-\mu_3^3$ | -1 | $\mu_2^3$ | | $\mu_2^3$ | | | $\mu_2^4$ | | |
| 7 | | | $\mu_2^1$ | | $\mu_4^1$ | | $\mu_2^2-\mu_4^1$ | $\mu_2^1$ | | | $\mu_2^3$ | | | $\mu_2^4$ | |
| 8 | | | $\mu_2^1$ | | $-\mu_4^2$ | $\mu_3^2$ | $\mu_2^2$ | | | | | $\mu_2^3$ | | | $\mu_2^4$ |
| 9 | | | $\mu_3^4$ | | $\mu_3^2$ | | | $-\mu_3^4$ | $\mu_3^3-\mu_4^4$ | $2\mu_3^4$ | $\mu_1^4$ | $-\mu_2^4$ | | | |
| 10 | | | | | | $\mu_3^3$ | | | $\mu_4^3$ | | -1 | $\mu_2^3$ | $\mu_3^4$ | | |
| 11 | | | | | | | $\mu_3^2$ | | $\mu_4^1$ | | $\mu_3^1-\mu_1^1$ | $\mu_2^1$ | | $\mu_3^4$ | |
| 12 | | | | | | | | $\mu_3^2$ | $-\mu_4^2$ | $\mu_3^2$ | $\mu_1^2$ | $\mu_3^2-\mu_2^2$ | | | $\mu_3^4$ |
| 13 | | $\mu_4^1$ | $\mu_4^3$ | | | $\mu_4^2$ | | $-\mu_4^3$ | | $2\mu_4^3$ | | | $\mu_4^3-\mu_3^3$ | -1 | $\mu_2^3$ |
| 14 | | | $2\mu_4^4$ | | | | $\mu_4^2$ | $-\mu_4^4$ | | $\mu_4^4$ | $\mu_4^3$ | | | $\mu_4^4-\mu_1^4$ | $\mu_2^4$ |
| 15 | | | $-\mu_4^2$ | $\mu_4^4$ | | | | $2\mu_4^2$ | | $-\mu_4^2$ | | $\mu_4^3$ | $\mu_3^3$ | $\mu_1^2$ | $\mu_4^4-\mu_2^2$ |

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



**В итоге получается**

Теорема 2. Преобразование Егорова пары, состоящей из конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ (не являющейся конгруэнцией $W$) и конгруэнции ее прямых Лапласа в пару $T$, возможно только тогда, когда конгруэнция $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ есть конгруэнция, для которой инварианты $J_2=J_2'=0$, а семейство линейчатых поверхностей, при помощи которых осуществляется преобразование, удовлетворяет одному из натуральных уравнений (32); при этом фокусы конгруэнции $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$ всегда преобразуются в фокусы луча $\bar{P}_1\bar{P}_2$ преобразованной конгруэнции.

Теоремы 1 и 2 дают решение поставленной М.Б.Пергаменщиковым задачи и уточняют приведенное в [2] решение.

3. Поставим задачу: найти натуральное уравнение семейства пар линейчатых поверхностей, принадлежащих произвольной паре конгруэнций, которое может служить для осуществления преобразования Егорова, при котором исходная пара конгруэнций преобразуется в пару $T$.

Деривационные формулы полуканонического репера произвольной пары конгруэнций имеют вид (см. [8], стр.26)

$$d\bar{A}_i=\omega_i^k A_k=(a_i^k\omega_1^3+b_i^k\omega_3^1)\bar{A}_k. \qquad (32')$$

Полагая в формулах (32) $\omega_1^3=ds$, $(a_i^k)_{\omega_3^1=0}=\mu_i^k$, получим деривационные формулы репера произвольной неторсовой пары линейчатых поверхностей, принадлежащих данной паре конгруэнций в виде (см. [8], стр.31)

$$\frac{d\bar{A}_i}{ds}=\mu_i^k\bar{A}_k. \qquad (33)$$

Здесь $\mu_i^k$ связаны соотношениями:

$$\mu_1^1+\mu_2^2+\mu_3^3+\mu_4^4=0,\quad \mu_3^1=0,\quad \mu_1^3=1.$$

Для пятнадцати неизвестных величин $c_{iklm}$ при помощи формул (33) получим следующие деривационные формулы:

$$\frac{\partial R_i}{\partial s}=\tilde{\beta}_i^k R_k;$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где $\tilde{\beta}_i^k$ представлены в таблице 6.

Деривационные формулы преобразованной пары конгруэнций найдем в виде

$$d\bar{P} = \tilde{\omega}_i^k \bar{P}_k ,$$

где $\tilde{\omega}_i^k$ связаны с $\omega_i^k$ следующим образом:

$$\tilde{\omega}_1^1 = \omega_1^1 + R_3 d\upsilon,\ \tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 - R_4 d\upsilon,\ \tilde{\omega}_1^3 = \omega_1^3 + R_2 d\upsilon,\ \tilde{\omega}_1^4 = \omega_1^4 - R_1 d\upsilon,$$
$$\tilde{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + R_7 d\upsilon,\ \tilde{\omega}_2^2 = \omega_2^2 - R_8 d\upsilon,\ \tilde{\omega}_2^3 = \omega_2^3 + R_6 d\upsilon,\ \tilde{\omega}_2^4 = \omega_2^4 - R_5 d\upsilon,$$
$$\tilde{\omega}_3^1 = \omega_3^1 + R_{11} d\upsilon,\ \tilde{\omega}_3^2 = \omega_3^2 - R_{12} d\upsilon,\ \tilde{\omega}_3^3 = \omega_3^3 + R_{10} d\upsilon,\ \tilde{\omega}_3^4 = \omega_3^4 - R_9 d\upsilon,$$
$$\tilde{\omega}_4^1 = \omega_4^1 + R_{14} d\upsilon,\ \tilde{\omega}_4^2 = \omega_4^2 - R_{15} d\upsilon,\ \tilde{\omega}_4^3 = \omega_4^3 + R_{13} d\upsilon,\ \tilde{\omega}_4^4 = \omega_4^4 - (R_3 - R_8 + R_{10}) d\upsilon.$$

Условия расслояемости соответствующих линейчатых поверхностей конгруэнций $\{\bar{P}_1 \bar{P}_2\}$ и $\{\bar{P}_3 \bar{P}_4\}$ в наших терминах примут вид

$$(a_3^2 + a_1^4 a_4^2)(\omega_1^3)^2 + [\alpha b_3^2 - R_{12} + a_3^2 R_2 + a_1^4(\alpha b_4^2 - R_{15}) + a_4^2(\alpha b_1^4 - R_1)]\omega_1^3 d\upsilon +$$
$$+ [R_2(\alpha b_3^2 - R_{12}) + (\alpha b_1^4 - R_1)(\alpha b_4^2 - R_{15})] d\upsilon^2 = 0,$$
$$a_2^4 a_4^1 (\omega_1^3)^2 + [a_2^3(\alpha + R_{11}) + a_2^4(\alpha b_4^1 + R_{14}) + a_4^1(\alpha b_2^4 - R_5)]\omega_1^3 d\upsilon +$$
$$+ [(\alpha + R_{11})(\alpha b_2^3 + R_6) + (\alpha b_2^4 - R_5)(\alpha b_4^1 + R_{14})] d\upsilon^2 = 0,$$
$$(a_1^4 a_4^1 - a_3^2 a_2^3)(\omega_1^3)^2 + [a_1^4(\alpha b_4^1 + R_{14}) + a_4^1(\alpha b_1^4 - R_1) - a_3^2(\alpha b_2^3 + R_6) -$$
$$- a_2^3(\alpha b_3^2 - R_{12})]\omega_1^3 d\upsilon + [(\alpha b_1^4 - R_1)(\alpha b_4^1 + R_{14}) - (\alpha b_3^2 - R_{12})(\alpha b_2^3 + R_6)] d\upsilon^2 = 0, \quad (34$$
$$a_3^2 a_2^4 (\omega_1^3)^2 + [a_2^4(\alpha + R_{11}) + a_3^2(\alpha b_2^4 - R_5) + a_2^4(\alpha b_3^2 - R_{12})]\omega_1^3 d\upsilon +$$
$$+ [(\alpha + R_{11})(\alpha b_1^4 - R_1) + (\alpha b_3^2 - R_{12})(\alpha b_2^4 - R_5)] d\upsilon^2 = 0,$$
$$(a_4^1 + a_4^2 a_3^2)(\omega_1^3)^2 + [a_4^1 R_2 + \alpha b_4^1 + R_{14} + a_4^2(\alpha b_3^2 - R_{12}) + a_3^2(\alpha b_4^2 -$$
$$- R_{15})]\omega_1^3 d\upsilon + [R_2(\alpha b_4^1 + R_{14}) + (\alpha b_4^2 - R_{15})(\alpha b_3^2 - R_{12})] d\upsilon^2 = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где $\omega_3^1 = \alpha d\sigma$ . Требуя, чтобы преобразованная пара конгруэнций являлась парой $T$ , т.е. чтобы система (34) сводилась к одному уравнению, получим следующие соотношения:

$$a_2^3 = a_3^2 = a_4^1 = a_1^4 = 0,\ b_2^3 = b_3^2 = b_4^1 = b_1^4 = 0, \tag{35}$$

$$a_2^4 = 0,\ b_2^4 = 1,\ a_4^2 = 1,\ b_4^2 = 0, \tag{36}$$

$$R_{12} + R_1 = 0,\ R_1 - R_6 = 0,\ R_{12} - R_{14} = 0,\ R_5 + R_{11} = 0,\ R_2 + R_{15} = 0 \tag{37}$$

Из (36) следует, что $\omega_2^4 = \omega_3^1$, $\omega_4^1 = \omega_1^3$ . Условия (35) определяют пару $T$ (см. [9], стр.34). Следовательно, если потребовать, чтобы преобразованная пара конгруэнций являлась парой $T$ , то и исходная пара конгруэнций должна образовывать пару $T$ .

После первого дифференцирования соотношений (37) получаем

$$R_1 = 0, \tag{38}$$

$$R_5 = 0, \tag{39}$$

$$(\mu_3^4 - \mu_2^1)R_2 + R_7 + R_9 = 0, \tag{40}$$

$$(\mu_1^1 + \mu_2^2)R_2 - R_3 + R_8 = 0. \tag{41}$$

Дифференцирование уравнения (39) дает тождество, а при дифференцировании уравнений (38), (41) получим соответственно

$$\mu_3^4 R_2 + R_9 = 0, \tag{42}$$

$$[(\mu_1^1 + \mu_2^2)' + (\mu_1^1 + \mu_2^2)]R_2 + (\mu_1^1 + \mu_2^2)(R_{10} - R_3) = 0. \tag{43}$$

В силу (42) уравнение (40) примет вид

$$R_7 - \mu_2^1 R_2 = 0 \tag{44}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



и дифференцирование его дает

$$[(\mu_2^1)' + \mu_2^1(2\mu_1^1 - \mu_2^2 - \mu_3^3)]R_2 + \mu_2^1(R_{10} - R_8 - 2R_3) = 0. \qquad (45)$$

Дифференцируя уравнения (42), (43) и (45), получаем

$$[(\mu_3^4)' - \mu_3^4(\mu_2^2 + 3\mu_3^3)]R_2 + \mu_3^4(3R_{10} - R_8 - 2R_3) = 0, \qquad (46)$$

$$[(\mu_1^1 + \mu_2^2)'' + (\mu_1^1 + \mu_2^2)'(1 + \mu_1^1 - \mu_3^3) + (\mu_1^1 + \mu_2^2)(\mu_1^1 - \mu_3^3)]R_2 + 2(\mu_1^1 + \mu_2^2)(R_{10} - R_3) + (\mu_1^1 + \mu_2^2)(R_{10} - R_3 + \mu_3^3 R_{13} + \mu_4^3 R_9 - \mu_2^1 R_4 - \mu_1^2 R_7) = 0, \qquad (47)$$

$$(\mu_2^1)'' + (\mu_2^1)'(3\mu_1^1 - 2\mu_3^3 - \mu_2^2) + \mu_2^1(3\mu_1^1 + \mu_4^4) + \mu_2^1(\mu_1^1 - \mu_3^3)(3\mu_1^1 + \mu_4^4)]R_2 + [\mu_2^1(3\mu_1^1 + \mu_4^4) + (\mu_2^1)'](R_{10} - R_3) + (\mu_3^4)'(3R_{10} - R_8 - 2R_3) + 3\mu_3^4(\mu_4^3 R_9 + \mu_3^4 R_{13} - \mu_2^1 R_4 - \mu_1^2 R_7) = 0. \qquad (48)$$

Соотношения (41) - (48) запишем в виде

$$q_i^j R_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 8; \quad j = 2,3,4,7,8,9,10,13) \qquad (49)$$

При условиях (35) - (39) уравнения для определения фокусов $\bar{f}_1 = \bar{P}_1 + k\bar{P}_2$, $\bar{f}_2 = \lambda\bar{P}_1 + \bar{P}_2$ луча $\bar{P}_1\bar{P}_2$ преобразованной конгруэнции и $\bar{g}_1 = \bar{P}_3 + \mu\bar{P}_4$, $\bar{g}_2 = \nu\bar{P}_3 + \bar{P}_4$ луча $\bar{P}_3\bar{P}_4$ сведутся к соотношениям $k = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 0$, $\mu = 0$. Исключая из (4 величины $R_j$, получаем натуральное уравнение

$$\det \| q_i^k \| = 0. \qquad (50)$$

Следовательно, имеет место

Теорема 3. Преобразование Егорова пары конгруэнций $\{\bar{A}_1\bar{A}_2\}$, $\{\bar{A}_3\bar{A}_4\}$ в пару $T$ возможно, если исходная пара конгруэнций также является парой $T$, а семейство пар линейчатых поверхностей, при помощи которых совершается преобразование, определяется натуральным уравнением (50), при этом фокусы лучей $\bar{A}_1\bar{A}_2$, $\bar{A}_3\bar{A}_4$ исходной па

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ы $T$ преобразуются соответственно в фокусы конгруэн-
ий $\{\bar{P}_1\bar{P}_2\}$ и $\{\bar{P}_3\bar{P}_4\}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

. Р.Н.Щербаков. Проективная теория репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Матем. сб., 46(88) : 2, 1958, 159 - 194.
. М.Б.Пергаменщиков. О преобразовании Егорова в теории конгруэнций. Литовский матем. сб., 3, №2, 1967, 257.
. М.Б.Пергаменщиков. Еще о парах конгруэнций. Геом. сб., 1 (Труды Томского ун-та, 160), 1962, 39 - 44.
. Р.Н.Щербаков. Преобразование Егорова в теории конгруэнций. Труды III Всесоюзного матем. съезда, т.1, Москва, Изд. АН СССР, 1956, 176 - 177.
. М.Б.Пергаменщиков. Пара конгруэнций $H$ . Известия вузов, Математика, 3(22), 1961, 91 - 98.
. С.П.Фиников. Пара линейчатых поверхностей, расслояемых двумя семействами кривых. Изв. АН СССР, серия матем., 9, 1945, 79 - 112.
. С.П.Фиников. Теория пар конгруэнций. Москва, 1950.
. Е.Т.Ивлев. Реперах подмногообразий в теории пар конгруэнций в $P_3$ . Геом.сб., 1 (Труды Томского ун-та, 160), 1962, 25 - 38.
. Р.М.Гейдельман. О касательном комплексе пары конгруэнций прямых. Известия вузов, Математика, 3(52), 1966, 32 - 38.

Поступила 1 марта 1970 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

М.В.БРАЗЕВИЧ

# ОБ ОДНОМ ПРОЕКТИВНО-ИНВАРИАНТНОМ КЛАССЕ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной работе рассматривается один специальный класс пар конгруэнций. Впервые этот класс отмечен Е.Т. Ивлевым. в [2] под № 14, как характеризующийся тем свойством, что любая торсовая пара линейчатых поверхностей - параболическая. В работе [4] Р.М.Гейдельман характеризует этот же класс тем, что на обеих конгруэнциях пары инволютивность основного проективитета реализуется при тождестве направлений, и указывает произвол его существования.

1. Дадим другое определение изучаемому классу пар конгруэнций. Пусть ребра $l_1 \equiv A_1A_2$ и $l_2 \equiv A_3A_4$ некоторого проективного репера описывают пару конгруэнций. Деривационные формулы репера будем писать в виде:

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad (i,k = 1,2,3,4), \tag{1}$$

где дифференциальные формы $\omega_i^k$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k] \tag{2}$$

Как известно [3], на каждом луче $l_\alpha$ пары линейчатых поверхностей $(l_1)$ и $(l_2)$ существует проективитет $\Pi_\alpha$ : $M_\alpha \leftrightarrow M'_\alpha$, где $M'_\alpha$ - точка пересечения луча $l_\alpha$ с касательной плоскостью к линейчатой поверхности $(l_\beta)$ в точке пересечения луча $l_\beta$ с касательной плоскостью к линейчатой поверхности $(l_\alpha)$ в точке $M_\alpha$ $(\alpha,\beta = 1,2\,;\ \alpha \neq \beta)$. Пусть выделена пара линейчатых поверхностей $(l_1)$ и $(l_2)$ данной пары конгруэнций, и пусть

$$\Pi_1 : A_1 + tA_2 \leftrightarrow A_1 + t'A_2\,;\quad \Pi_2 : A_3 + \tau A_4 \leftrightarrow A_3 + \tau' A_4\,.$$

Тогда формулы этих проективитетов имеют вид:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$t' = \frac{(\omega_2^3\omega_3^2 + \omega_2^4\omega_4^2)t + (\omega_1^3\omega_3^2 + \omega_1^4\omega_4^2)}{(\omega_2^3\omega_3^1 + \omega_2^4\omega_4^1)t + (\omega_1^3\omega_3^1 + \omega_1^4\omega_4^1)}, \qquad (3)$$

$$\tau' = \frac{(\omega_4^1\omega_1^4 + \omega_4^2\omega_2^4)\tau + (\omega_3^1\omega_1^4 + \omega_3^2\omega_2^4)}{(\omega_4^1\omega_1^3 + \omega_4^2\omega_2^3)\tau + (\omega_3^1\omega_1^3 + \omega_3^2\omega_2^3)}. \qquad (4)$$

Отсюда видно, что если $\Pi_1$ - инволюция, то и $\Pi_2$ - инволюция и наоборот. Пару линейчатых поверхностей $(l_1)$ и $(l_2)$, у которой $\Pi_\alpha$ - инволюция, назовем парой $\Pi$. Совокупность всех пар линейчатых поверхностей, принадлежащих паре конгруэнций $(A_1A_2)$ и $(A_3A_4)$ и являющихся парами $\Pi$, определяется, как легко видеть, из (3) и (4), дифференциальным уравнением:

$$\omega_1^3\omega_3^1 + \omega_1^4\omega_4^1 + \omega_2^3\omega_3^2 + \omega_2^4\omega_4^2 = 0. \qquad (5)$$

Пару конгруэнций, у которой всякая пара линейчатых поверхностей является парой $\Pi$, назовем парой $\Pi$ конгруэнций. Исключив параболические пары конгруэнций, отнесем произвольную пару конгруэнций к реперу $\{A_i\}$ с деривационными формулами (1), у которого $A_1$ и $A_2$ помещены в фокусы луча $l_1$, $A_3$, $A_4$ - в точки пересечения фокальных плоскостей $f_1$ и $f_2$ с соответствующим лучем. Принимая формы $\omega_1^3$ и $\omega_2^4$ за базисные, получаем

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 = a_3^1\omega_1^3 + b_3^1\omega_2^4, \quad \omega_3^2 = a_3^2\omega_1^3 + b_3^2\omega_2^4,$$
$$\omega_4^1 = a_4^1\omega_1^3 + b_4^1\omega_2^4, \quad \omega_4^2 = a_4^2\omega_1^3 + b_4^2\omega_2^4. \qquad (6)$$

Требование, чтобы пара конгруэнций, отнесенная к зафиксированному выше реперу, была парой $\Pi$, приводит (в силу (5)) к следующим соотношениям:

$$a_3^1 = b_4^2 = 0, \quad b_3^1 = -a_4^2. \qquad (7)$$

Тогда формулы (6) принимают вид:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\omega_1^4=\omega_2^3=0,\quad \omega_3^1=a\omega_2^4,\quad \omega_4^2=-a\omega_1^3,$$
$$\omega_3^2=b\omega_1^3+c\omega_2^4,\quad \omega_4^1=p\omega_1^3+q\omega_2^4. \tag{8}$$

В построенном фокальном репере пары $\Pi$ конгруэнций фокусы $F_k$, их фокальные плоскости $f_k$, точки $\Psi_k$ пересечения фокальных плоскостей $f_k$ с соответствующими лучами (по терминологии [4] - $N$ — точки) и уравнения $k$ -ых торсовых пар имеют вид:

$$F_1=A_1,\quad f_1=(A_1A_2A_3),\quad \Psi_1=A_3,\quad \omega_1^3=0,$$
$$F_2=A_2,\quad f_2=(A_1A_2A_4),\quad \Psi_2=A_4,\quad \omega_2^4=0, \tag{9}$$
$$F_\sigma=A_3+\tau_\sigma A_4,\quad f_\sigma=(A_3A_4\Psi_\sigma),\quad \Psi_\sigma=A_1+t_\sigma A_2,$$
$$(\sigma=3,4)$$

где $\tau_\sigma$ и $t_\sigma$ корни следующих уравнений:

$$aq\tau^2+(a^2+pc-qb)\tau-ab=0, \tag{10}$$
$$apt^2+(a^2-pc+qb)t-ac=0. \tag{11}$$

Третья и четвертая торсовые пары [2] линейчатых поверхностей определяются из уравнения

$$qc(\omega_2^4)^2+(bq+pc+a^2)\omega_1^3\omega_2^4+bp(\omega_1^3)^2=0. \tag{12}$$

Дважды сопряженные пары [2] линейчатых поверхностей в случае, когда ни один торс конгруэнции ( $A_1A_2$ ) не соответствует торсу конгруэнции ( $A_3A_4$ ), т.е. $bcpq\neq 0$, определяются из уравнения:

$$qc(\omega_2^4)^2-bp(\omega_1^3)^2=0. \tag{13}$$

В случае, когда только один из торсов конгруэнции ( $A_1A_2$ ) соответствует торсу второй конгруэнции пары, понятие дваж-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ды сопряженных пар теряет смысл, и , наконец, в случае, когда оба торса конгруэнции ( $A_1A_2$ ) соответствуют торсам конгруэнции ( $A_3A_4$ ), то дважды сопряженных пар имеется $\infty^1$ . В работе [4] Р.М.Гейдельман ввел понятие граничных точек лучей и главных линейчатых поверхностей. Для пар $\Pi$ конгруэнций граничные точки $A_1+tA_2$ и $A_3+\tau A_4$ определяются уравнениями:

$$p^2t^4+4apt^3+(4a^2-2pc+4bq)t^2-4act+c^2=0, \qquad (14)$$

$$q^2\tau^4+4aq\tau^3+(4a^2+4pc-2bq)\tau^2-4ab\tau+b^2=0, \qquad (15)$$

а главные поверхности конгруэнций ( $A_1A_2$ ) и ( $A_3A_4$ ) уравнениями:

$$\{bp(\omega_1^3)^2+2bq\omega_1^3\omega_2^4+cq(\omega_2^4)^2\}^2+4a^2bq(\omega_1^3\omega_2^4)^2=0, \qquad (16)$$

$$\{bp(\omega_1^3)^2+2cp\omega_1^3\omega_2^4+cq(\omega_2^4)^2\}^2+4a^2pc(\omega_1^3\omega_2^4)^2=0. \qquad (17)$$

Дифференцируя внешним образом соотношения (8) и применяя лемму Картана, будем иметь

$$\begin{aligned}&\omega_1^2=\alpha_2\omega_1^3+\alpha_1\omega_2^4,\quad \omega_2^1=\beta_1\omega_1^3-\beta_2\omega_2^4,\\ &\omega_3^4=\alpha_3\omega_1^3-\alpha_2\omega_2^4,\quad \omega_4^3=\beta_2\omega_1^3+\beta_3\omega_2^4,\end{aligned} \qquad (18)$$

а также, с учетом условия эквипроективности $\pi_1^1+\pi_2^2+\pi_3^3+\pi_4^4=0$ , следующие зависимости дифференциалов коэффициентов формул (8) от вторичных форм $\pi_i^j$ при фиксированных первичных параметрах:

$$\begin{aligned}&\delta a+2a(\pi_1^1+\pi_2^2)=0,\\ &\delta b+b(\pi_1^1+\pi_2^2-2\pi_3^3)=0,\\ &\delta q+q(3\pi_1^1+3\pi_2^2+2\pi_3^3)=0,\end{aligned} \qquad (19)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\delta c + c(\pi_1^1 + 3\pi_2^2) = 0,$$
$$\delta p + p(3\pi_1^1 + \pi_2^2) = 0.$$

Эти соотношения показывают наличие пяти специальных классов пар $\Pi$ конгруэнций. Рассмотрим четыре из них, которые мы исключим при дальнейшем построении репера:

1) Класс $c=0\ (p=0)$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) первый (второй) торс конгруэнции ( $A_1A_2$ ) соответствует одному из торсов конгруэнции ( $A_3A_4$ ), но точка $A_4$ ( $A_3$ ) не является фокусом луча; б) одна из граничных точек луча $A_1A_2$ - сдвоенная и совпадает с $A_1$ ( $A_2$ ). Кроме того класс обладает тем свойством, что на луче $A_3A_4$ две граничные точки сдвоенные и им соответствует единственная главная поверхность конгруэнции ( $A_3A_4$ )

2) Класс $q=0\ (b=0)$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) первой (второй) торс конгруэнции ($A_1A_2$) соответствует одному из торсов конгруэнции ( $A_3A_4$ ) и точка $A_4$ ( $A_3$ ) является фокусом луча; б) одна из граничных точек луча $A_3A_4$ сдвоенная и совпадает с $A_4$ ( $A_3$ ), и еще обладает тем свойством, что на луче $A_1A_2$ две граничные точки сдвоенные и им соответствует единственная главная поверхность конгруэнции ( $A_1A_2$ ). Произвол каждого из четырех выше-указанных классов - две функции двух аргументов.

Проведем нормирование вершин репера, положив $q=b\neq 0$ $p=c=1$ , при этом исключаются из рассмотрения выше-перечисленные классы. Деривационные формулы построенного канонического репера пары $\Pi$ конгруэнций имеют вид:

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad (i,k=1,2,3,4) \tag{20}$$

$$\omega_1^4=\omega_2^3=0,\ \omega_3^1=a\omega_2^4,\ \omega_4^2=-a\omega_1^3,\ \omega_3^2=b\omega_1^3+\omega_2^4,$$
$$\omega_4^1=\omega_1^3+b\omega_2^4,\ \omega_1^2=\alpha_2\omega_1^3+\alpha_1\omega_2^4,\ \omega_2^1=\beta_1\omega_1^3-\beta_2\omega_2^4,$$
$$\omega_3^4=\alpha_3\omega_1^3-\alpha_2\omega_2^4,\ \omega_4^3=\beta_2\omega_1^3+\beta_3\omega_2^4,\ \omega_i^i=\alpha_i^i\omega_1^3+\beta_i^i\omega_2^4. \tag{21}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Из уравнений структуры проективного пространства обычным путем получаем закон внешнего дифференцирования базисных форм:

$$D\omega_1^3 = (\beta_3^3 - \beta_1^1)[\omega_1^3\omega_2^4], \quad D\omega_2^4 = (\alpha_2^2 - \alpha_4^4)[\omega_1^3\omega_2^4].$$

И основную систему внешних квадратичных уравнений:

$$[d\alpha_2, \omega_1^3] + [d\alpha_1, \omega_2^4] = J_1[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad (\bar{I}_1)$$

$$[d\alpha_3, \omega_1^3] - [d\alpha_2, \omega_2^4] = J_2[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad (\bar{I}_2)$$

$$[d\beta_1, \omega_1^3] - [d\beta_2, \omega_2^4] = J_3[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad (\bar{I}_3)$$

$$[d\beta_2, \omega_1^3] + [d\beta_3, \omega_2^4] = J_4[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad (\bar{I}_4)$$

$$[d\alpha_i^i, \omega_1^3] + [d\beta_i^i, \omega_2^4] = J_i[\omega_1^3\omega_2^4], (i = \overline{5.8}) \qquad (\bar{I}_i)$$

$$[da, \omega_2^4] = H_1[\omega_1^3\omega_2^4] \quad (\bar{I}_9') \qquad [da, \omega_1^3] = -H_2[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad (\bar{I}_{10}')$$

$$[db, \omega_1^3] = -K_2[\omega_1^3\omega_2^4] \quad (\bar{I}_{11}') \qquad [db, \omega_2^4] = K_1[\omega_1^3\omega_2^4], \qquad (\bar{I}_{12}')$$

где $J_1 = \alpha_1(\alpha_1^1 - 2\alpha_2^2 + \alpha_4^4) + \alpha_2(\beta_2^2 - \beta_3^3) + 1,$

$J_2 = \alpha_3(\beta_1^1 - 2\beta_3^3 + \beta_4^4) + \alpha_2(\alpha_2^2 - \alpha_3^3) + b,$

$J_3 = \beta_1(2\beta_1^1 - \beta_2^2 - \beta_3^3) + \beta_2(\alpha_1^1 - \alpha_4^4) - 1,$

$J_4 = \beta_2(\beta_1^1 - \beta_4^4) + \beta_3(2\alpha_4^4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^3) - b,$

$J_5 = \alpha_1^1(\beta_1^1 - \beta_3^3) + \beta_1^1(\alpha_4^4 - \alpha_2^2) - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + a,$

$J_6 = \alpha_2^2(\beta_1^1 - \beta_3^3) + \beta_2^2(\alpha_4^4 - \alpha_2^2) + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + a,$

$J_7 = \alpha_3^3(\beta_1^1 - \beta_3^3) + \beta_3^3(\alpha_4^4 - \alpha_2^2) + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - a,$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$J_8 = \alpha_4^4(\beta_1^1-\beta_3^3)+\beta_4^4(\alpha_4^4-\alpha_2^2)-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3-a\,,$$

$$H_1 = a(\alpha_4^4+\alpha_3^3-\alpha_2^2-\alpha_1^1)+b(\alpha_3-\beta_2)-(\beta_1-\alpha_2)\,,$$

$$H_2 = a(\beta_4^4+\beta_3^3-\beta_2^2-\beta_1^1)+b(\beta_2-\alpha_1)-(\beta_3-\alpha_2)\,,$$

$$K_1 = b(2\alpha_4^4-\alpha_1^1-\alpha_2^2)+(2\beta_1^1-\beta_3^3-\beta_4^4)+2a\beta_2\,,$$

$$K_2 = b(2\beta_3^3-\beta_1^1-\beta_2^2)+(2\alpha_2^2-\alpha_3^3-\alpha_4^4)+2a\alpha_2\,.$$

Из соотношений $(\bar{I}_9')-(\bar{I}_{12}')$ следует

$$\begin{aligned} da &= H_1\omega_1^3+H_2\omega_2^4\,,\\ db &= K_1\omega_1^3+K_2\omega_2^4\,. \end{aligned} \qquad (22)$$

Замыкая эти два уравнения, имеем

$$[dH_1,\omega_1^3]+[dH_2,\omega_2^4]=\{H_1(\beta_1^1-\beta_3^3)+H_2(\alpha_4^4-\alpha_2^2)\}[\omega_1^3\omega_2^4]\,, \qquad (\bar{I}_9)$$

$$[dK_1,\omega_1^3]+[dK_2,\omega_2^4]=\{K_1(\beta_1^1-\beta_3^3)+K_2(\alpha_4^4-\alpha_2^2)\}[\omega_1^3\omega_2^4]\,. \qquad (\bar{I}_{10})$$

В силу известной теоремы С.В.Бахвалова [6] пара $\Pi$ конгруэнций определяется с произволом в три функции двух аргументов.

2. Для пары $\Pi$ дважды сопряженные пары линейчатых поверхностей имеют уравнения:

$$\omega_2^4=\omega_1^3\,,\quad \omega_2^4=-\omega_1^3\,. \qquad (23)$$

В [2] Е.Т.Ивлевым введено понятие $i$-ой основной пары линейчатых поверхностей, т.е. такой пары линейчатых поверхностей, которая не является торсовой и для которой $F_i$ - квазифлекнодальная точка для соответствующего луча. Первая и вторая основные пары линейчатых поверхностей имеют урав-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



нения:

$$\omega_2^4 = -b\omega_1^3, \quad \omega_2^4 = -\frac{1}{b}\omega_1^3, \tag{24}$$

третья и четвертая основные пары определяются из уравнения:

$$a^2b(\omega_2^4)^2 + \{(b^2-a^2-1) - b^2(a^2+b^2-1)\}\omega_1^3\omega_2^4 + a^2b(\omega_1^3)^2 = 0. \tag{25}$$

Каждая пара линейчатых поверхностей $\omega_2^4 = \sigma\omega_1^3$ порождает на соответствующих лучах $A_1A_2$ и $A_3A_4$ проективитеты $\Pi_1$ и $\Pi_2$:

$$t' = \frac{-ab\sigma t + (b+\sigma)}{\sigma(1+b\sigma)t + a\sigma}, \quad \tau' = \frac{-ab\sigma\tau + (b+\sigma)\sigma}{(1+b\sigma)\tau + a\sigma}. \tag{26}$$

Из [3] известно, что двойные точки этих проективитетов суть квазифлекнодальные точки пары $\omega_2^4 = \sigma\omega_1^3$. А поскольку в паре $\Pi$ конгруэнций эти проективитеты инволютивны, то двойные точки этих проективитетов делят гармонически каждую пару соответственных точек.

Для пары $\Pi$ граничные точки на лучах различны. Решая уравнения (14) и (15) и вычисляя сложные отношения четырех граничных точек каждого луча, получаем, что сложное отношение граничных точек луча $A_1A_2$ равно сложному отношению граничных точек луча $A_3A_4$.

Введем в рассмотрение следующие инвариантные точки: на луче $A_1A_2$ точки $M_1$ и $M_2$ ($N_1, N_2$) гармонически сопряженные с точкой $A_1$ ($A_2$) относительно квазифлекнодальных точек дважды сопряженных пар (23) и точку $\Phi = aA_1 + A_2$ ($Q = A_1 - aA_2$) - четвертую гармоническую к точкам $M_1, M_2$, $A_2(N_1, N_2, A_1)$; на луче $A_3A_4$ точки $M_1^*$, $M_2^*(N_1^*, N_2^*)$, гармонически сопряженные с точкой $A_3$ ($A_4$) относительно квазифлекнодальных точек пар (23) и точку $\Phi^* = aA_3 + bA_4$ ($Q^* = bA_3 - aA_4$) - четвертую гармоническую к точкам $M_1^*$, $M_2^*$, $A_4(N_1^*, N_2^*, A_3)$. Тогда имеем следующую геометрическую характеристику инвариантов $a$ и $b$:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$a^2 = -DV(A_1A_2Q\Phi),\quad b^2 = \frac{DV(A_1A_2Q\Phi)}{DV(A_3A_4Q^*\Phi^*)}, \qquad (27)$$

где $DV(...)$ – знак сложного отношения четырех точек. Рассмотрим "боковую" пару конгруэнций $(A_1A_3)$ и $(A_2A_4)$. Торсы конгруэнций $(A_1A_3)$ и $(A_2A_4)$ имеют уравнения:

$$\omega_1^2 = 0,\ \omega_3^4 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_2^1 = 0,\ \omega_4^3 = 0. \qquad (28)$$

Точки, гармонически сопряженные с вершинами репера относительно квазифлекнодальных точек пар линейчатых поверхностей (28), и точки, соответствующие вершинам репера в проективитетах, порожденных парами $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$, на лучах $A_1A_3$ и $A_2A_4$ боковой пары конгруэнций, позволяют получить геометрическую характеристику инвариантов $\alpha_\rho$ и $\beta_\rho$ $(\rho = 1,2,3)$.

Рассмотрим квадрики, проходящие через луч $A_1A_2$ и имеющие соприкосновение первого порядка с лучом $A_3A_4$ вдоль подмногообразий: $\omega_1^3 = 0$, $\omega_2^4 = 0$ и (23). Их уравнения имеют соответственно вид:

$$ax^2x^3 + bx^2x^4 - x^1x^3 = 0, \qquad (q_1)$$

$$ax^1x^4 - bx^1x^3 + x^2x^4 = 0, \qquad (q_2)$$

$$a(x^1x^4 + x^2x^3) + (b+1)(x^2x^4 - x^1x^3) = 0, \qquad (q_3)$$

$$a(x^1x^4 - x^2x^3) + (b-1)(x^2x^4 + x^1x^3) = 0. \qquad (q_4)$$

Отсюда получаем еще одну геометрическую характеристику введенных выше инвариантных точек, а именно $\Phi(Q^*)$ есть точка пересечения поляры точки $A_3(A_2)$ относительно квадрики $(q_1)$ с лучем $A_1A_2(A_3A_4)$, $Q(\Phi^*)$ есть точка пересечения поляры точки $A_4(A_1)$ относительно $(q_2)$ с лучом $A_1A_2(A_3A_4)$; аналогичные характеристики получают точки $M_\alpha, N_\alpha (M_\alpha^*, N_\alpha^*)$ $(\alpha = 1,2)$. Аналогично рассмотрим квадрику, проходящую через луч $A_3A_4$ и имеющую соприкосновение первого порядка

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



с лучом $A_1A_2$ вдоль подмногообразия $\omega_2^4=\sigma\omega_1^3$, не являющегося торсом для конгруэнции $(A_1A_2)$:

$$x^1x^4-\sigma x^2x^3=0. \qquad (q_\sigma)$$

Отсюда построенный канонический репер пары $\Pi$ конгруэнций является общим автополярным тетраэдром третьего рода относительно квадрик $(q_{\sigma=1})$ и $(q_{\sigma=-1})$, т.е. квадрик, задаваемых дважды сопряженными парами линейчатых поверхностей.

Зафиксируем на луче $A_1A_2$ точку $X=A_1+tA_2$. Тогда для каждой точки $Y=A_3+\tau A_4$ соответственного луча $A_3A_4$ найдется такое подмногообразие $\omega_2^4=\sigma\omega_1^3$, что касательная плоскость в точке $X$ к линейчатой поверхности $(A_1A_2)_{\omega_2^4=\sigma\omega_1^3}$ $(A_1A_2)_{\omega_2^4=\sigma\omega_1^3}$, будет пересекать луч $A_3A_4$ в точке $Y$. Выражая $\sigma$ через $t$ и $\tau$ и подставляя в (26), получим еще один проективитет $\Pi_2'$:

$$\tau'=\frac{(1-at)\tau+bt}{bt\tau+t(a+t)}. \qquad (29)$$

Аналогично, каждая фиксированная точка $Y=A_3+\tau A_4$ луча $A_3A_4$ порождает на соответствующем луче $A_1A_2$ проективитет $\Pi_1'$ : $A_1+tA_2 \leftarrow\!\!\!\rightarrow A_1+t'A_2$, где

$$t'=\frac{(a+b\tau)\tau t-\tau}{-\tau t+(b-a\sigma)}. \qquad (30)$$

Проективитет $\Pi_\alpha'$ ($\alpha=1,2$) вырождается, если порождающая его точка луча является либо фокусом, либо точкой пересечения луча с фокальной плоскостью.

Теорема 1. Квазифлекнодальные точки дважды сопряженных пар линейчатых поверхностей на каждом луче являются единственными точками этого луча, которые задают на соответственном луче проективитеты $\Pi_\alpha'$, двойные точки которых совпадают с двойными точками инволютивных проективитетов $\Pi_\alpha$, причем последние задаются дважды сопряженными парами.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Доказательство проведем для луча $A_3A_4$. Двойные точки проективитетов определяются из квадратного уравнения:

$$\tau t^2+(\beta\tau^2+2\alpha\tau-\beta)t-\tau=0$$

и зависят от выбора задающей точки $A_3+\tau A_4$. Двойные точки проективитетов $\Pi_1$ находятся из уравнения:

$$\sigma(1+\beta\sigma)t^2+2\alpha\sigma t-(\beta+\sigma)=0$$

и определяется подмногообразием $\omega_2^4=\sigma\omega_1^3$. Возможность совпадения двойных точек приводит к равенствам:

$$\frac{\tau}{\sigma(1+\beta\sigma)}=\frac{\beta\tau^2+2\alpha\tau-\beta}{2\alpha\sigma}=\frac{\tau}{\beta+\sigma},$$

которые имеют место тогда и только тогда, когда $\sigma=\pm1$ и $(\beta\pm1)\tau^2+2\alpha\tau-(\beta\pm1)=0$. Первое равенство дает дважды сопряженную пару линейчатых поверхностей, второе - квазифлекнодальные точки этой пары.

Теорема 2. Для любых двух точек луча $l_1$ вида $A_1+tA_2$ и $tA_1-A_2$ на соответствующем луче $l_2$ существуют только две точки такого же вида: $A_3+\tau A_4$ и $\tau A_3-A_4$, что любая точка из этой четверки точек задает проективитет $\Pi'_\alpha$, оставляющий неподвижными на луче $l_\alpha$ две точки из указанных четырех. Аналогичное утверждение справедливо и для луча $l_2$.

Доказательство вытекает из соотношения

$$\tau t^2+\beta\tau^2t+2\alpha\tau t-\beta t-\tau=0, \qquad (31)$$

определяющего двойные точки проективитетов $\Pi'_1$ и $\Pi'_2$.

Четыре точки $A_1+tA_2$, $tA_1-A_2$, $A_3+\tau A_4$, $\tau A_3-A_4$, удовлетворяющие условию предыдущей теоремы, назовем $\Pi'$-четверкой точек. Будем говорить, что пара точек одного лу-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ча образует $\Pi'$-четверку с парой точек соответственного луча.

Введем в рассмотрение $\Pi'$-четверки, у которых хотя бы одна пара точек гармонически делит вершины канонического репера. Таких $\Pi'$-четверок всего две:

$$(A_1+A_2, A_1-A_2;\ G_1^*, G_2^*),\quad (G_1, G_2;\ A_3+A_4, A_3-A_4),$$

где точки $G_\alpha = A_1 + t_\alpha A_2$, $G_\alpha^* = A_3 + \tau_\alpha A_4$, а $t_\alpha$ и $\tau_\alpha$ — корни уравнений:

$$t^2 + 2at - 1 = 0,\quad b\tau^2 + 2a\tau - b = 0.$$

Введенные выше точки $\Phi, Q$ $(\Phi^*, Q^*)$ образуют $\Pi'$-четверки с точками $V_\alpha^* = A_3 + \tau_\alpha A_4$ $(V_\alpha = A_1 + t_\alpha A_2)$, где $t_\alpha$ и $\tau_\alpha$ — корни уравнений:

$$at^2 + (a^2+b^2)t - a = 0,\quad ab\tau^2 + (a^2+1)\tau - ab = 0.$$

Примечание: хотя для каждой точки четверок $(F_1, F_2; \Psi_1, \Psi_2)$ и $(F_3, F_4; \Psi_3, \Psi_4)$ проективитеты $\Pi'_\alpha$ вырождаются, но обе четверки удовлетворяют уравнению (31), то их тоже отнесем к $\Pi'$ - четверкам.

3. Рассмотрим частные классы пар $\Pi$ конгруэнций:

1) Натуральное уравнение $b^2 = 1$ выделяет пару $\Pi$ конгруэнций с общим касательным линейным комплексом. Эта же пара характеризуется каждым из следующих свойств: а) Любая $i$-ая основная пара совпадает с одной из дважды сопряженных пар. б) Квазифлекнодальные точки любой дважды сопряженной пары линейчатых поверхностей на любом луче либо совпадают с фокусами этого луча, либо с точками пересечения его с фокальными плоскостями соответствующего луча. в) Пара линейчатых поверхностей $(A_1A_2)_{\omega_2^4 = \omega_1^3}$ и $(A_3A_4)_{\omega_2^4 = -\omega_1^3}$ ( или $(A_1A_2)_{\omega_2^4 = -\omega_1^3}$ и $(A_3A_4)_{\omega_2^4 = \omega_1^3}$ ), проходящая через соответствующие лучи $A_1A_2$ и $A_3A_4$ обладает $R$ свойством [6], т.е. имеет общую касательную

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



демиквадрику ( отсюда, в частности, следует, что никакая пара $\Pi$ конгруэнций не является парой $A$ Карапетяна).
г) $Dv(A_1A_2Q\Phi) = Dv(A_3A_4Q^*\Phi^*)$, причем точки $Q, \Phi, Q^*, \Phi^*$ получают более простую геометрическую характеристику: например, при $b=1$ точка $Q$ есть четвертая гармоническая к точкам $N_1, A_2, A_1$, где $N_1$ - четвертая гармоническая к точкам $\Psi_3, \Psi_4, A_2$ и т.д.

2) Пара конгруэнций $a=0$ входит в класс пар $\theta$ - Попова [1] и геометрически характеризуется каждым из следующих свойств : а) любая $k$-я торсовая пара ( $k = 1,2(3,4)$) совпадает с одной из $i$-ых основных пар ( $i = 3,4(1,2)$) ; б) квазифлекнодальные точки любой пары линейчатых поверхностей на каждом луче гармонически делят вершины репера; в) инволютивные проективитеты, задаваемые своими дважды сопряженными парами линейчатых поверхностей, на любом луче совпадают ; г) $\Pi'$-четверка ( $F_1, F_2; \Psi_1, \Psi_2$ ) совпадает с одной из $\Pi'$-четверок ( $\Phi, Q; V_1^*, V_2^*$ ) или ( $V_1, V_2; \Phi^*, Q^*$ ); д) $\Pi'$-четверки ( $A_1+A_2, A_1-A_2; G_1^*, G_2^*$ ) и ( $G_1, G_2; A_3+A_4, A_3-A_4$ ) совпадают между собой.

3) Пара $a^2-b^2=0$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) $Dv(A_3, A_4, \Phi^*, Q^*) = -1$ ; б) $\Pi'$-четверка ( $G_1, G_2; A_3+A_4, A_3-A_4$ ) совпадает с $\Pi'$-четверкой ( $V_1, V_2; \Phi^*, Q^*$ ).

4) Пара $a^2=1$ характеризуется каждым из следующих свойств : а) $Dv(A_1A_2Q\Phi) = -1$ ; б) $\Pi'$-четверка ( $\Phi, Q; V_1^*, V_2^*$ ) совпадает с ( $A_1+A_2, A_1-A_2; G_1^*, G_2^*$ ).

5) Пара $a^2+b^2=1$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) $Dv(F_1F_2\Psi_3\Psi_4) = -1$ ; б) $\Pi'$-четверка ( $\Psi_3, \Psi_4; F_3, F_4$) совпадает с ( $A_1+A_2, A_1-A_2; G_1^*, G_2^*$ ).

6) Пара $b^2-a^2=1$ характеризуется каждым из следующих свойств: а) $Dv(F_3F_4\Psi_1\Psi_2) = -1$ ; б) $\Pi'$-четверка ( $\Psi_3, \Psi_4; F_3, F_4$) совпадает с ( $G_1, G_2; A_3+A_4, A_3-A_4$ ).
В силу квадратичных соотношений ( $I_k$ ) ( $k = 1,2,\dots,10$) и (22) выше перечисленные классы 1-6 определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



## ЛИТЕРАТУРА

1. С.П.Фиников. Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., 1956.
2. Е.Т.Ивлев. Канонический репер пары конгруэнций в трехмерном проективном пространстве, Геом. сб., 1(Труды Томского ун-та, 160), 1962, 15 - 24.
3. Е.Т.Ивлев. О парах линейчатых поверхностей в $P_3$. Геом. сб., 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 3 - 10.
4. Р.М.Гейдельман. К проективной теории пар конгруэнций прямых, Изв. вузов, Матем., 2, 1971, 42 - 52.
5. Л.З.Кругляков. О 2-семействах прямых в $P_5$ и парах конгруэнций прямых в $P_3$, Сибирский матем. ж., 9, 3, 1968. 554 - 567.
6. Р.Н.Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии, Томск, 1971.

Поступила 1 марта 1971 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Л.В.РЫБЧЕНКО

# О 2-СЕМЕЙСТВАХ ПАР ПРЯМЫХ В $P_4$

В предлагаемой работе исследуется двупараметрическое семейство (2-семейство) пар непересекающихся прямых в четырехмерном проективном пространстве $P_4$. Строится полуканонический репер 2-семейства пар прямых, отнесенного к произвольной системе двух подмногообразий $\Psi_1$ ([1], [9]). Затем находятся некоторые соответствия между точками прямых пары, а также между подмногообразиями и точками прямых. С помощью этих соответствий строится канонический репер 2-семейства пар прямых.

§1. Построение полуканонического репера. Пусть элементом пары являются прямые $L^1 \equiv A_1A_2$ и $L^2 \equiv A_3A_4$. Запишем деривационные формулы репера в виде:

$$dA_j = \omega_j^x A_x , \qquad (1)$$

где $\omega_j^x$ – формы Пфаффа от главных и вторичных параметров [2], удовлетворяющие уравнениям структуры

$$D\omega_j^x = [\omega_j^y \omega_y^x] , \qquad (2)$$

где, как обычно,

$$\Sigma \omega_j^j = 0. \qquad (2^1)$$

Здесь и ниже индексы принимают следующие значения: $x,y,j = 1,\dots,5$; $i,j = 1,2$; $\hat{i},\hat{j} = 3,4$; $p,q = 3,4,5$; $\hat{p},\hat{q} = 1,2,5$. Если взять в качестве базиса формы $\omega_1^4 \equiv \omega^1$ и $\omega_4^1 \equiv \omega^2$, то основные соотношения [1] принимают вид:

$$\omega_i^p = a_i^p \omega^1 + b_i^p \omega^2, \quad \omega_{\hat{i}}^{\hat{p}} = a_{\hat{i}}^{\hat{p}} \omega^1 + b_{\hat{i}}^{\hat{p}} \omega^2, \qquad (3)$$

где

$$a_1^4 = b_4^1 = 1, \quad a_4^1 = b_1^4 = 0. \qquad (4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Здесь и в дальнейшем будем пользоваться обозначениями работы [3]. Обозначим 2-семейство, описываемое прямой $L^i$ через $L^i$ (2), а через $M_i(1+2)$ обозначим гиперповерхность, образованную 2-семейством прямых $L^i$, рассматриваемым как точечное многообразие. Тогда $TM_i$ (1+2) есть касательная гиперплоскость в точке $M_i$ к этой гиперповерхности, а $TL^i(\Psi_1)$- касательная гиперплоскость подмногообразия $\Psi_1$ (предельное положение линейной оболочки прямых $L^i$ и $L^i+dL^i$ вдоль $\Psi_1$). Пусть $H$ - некоторая прямая, зависящая от тех же параметров, что и 2-семейство. Подмногообразие 2-семейства прямых $H$, которое задается уравнением $\omega^i=0$, обозначим $H(\Psi_1^i)$. Имеем

$$TM_1(1+2) \equiv (A_1, A_2, x^i a_i^p A_p, x^i b_i^p A_p), \qquad (5)$$

$$TM_2(1+2) \equiv (A_3, A_4, x^{\hat{i}} a_{\hat{i}}^{\hat{p}} A_{\hat{p}}, x^{\hat{i}} b_{\hat{i}}^{\hat{p}} A_{\hat{p}}), \qquad (5^1)$$

$$TL^1(\Psi_1) \equiv (A_1, A_2, (a_1^p+\lambda b_1^p)A_p, (a_2^p+\lambda b_2^p)A_p), \qquad (6)$$

$$TL^2(\Psi_1) \equiv (A_3, A_4, (a_3^{\hat{p}}+\lambda b_3^{\hat{p}})A_p, (a_4^{\hat{p}}+\lambda b_4^{\hat{p}})A_p). \qquad (6^1)$$

Точка $M_1$, для которой гиперплоскости (5) и (6) совпадают, называется [4] псевдофокусом подмногообразия $L^1(\Psi_1)$. Координаты этой точки удовлетворяют условию:

$$\det \| x^i a_i^p, x^i b_i^p, a_i^p+\lambda b_i^p \| = 0, \qquad (7)$$

если подмногообразие $\Psi_1$ имеет уравнение $\omega^2=\lambda\omega^1$. Соответствие между подмногообразиями $L^1(\Psi_1)$ и точками $M_1$, определяемое формулой (7), называется псевдофокальным (впервые это соответствие рассмотрено в [5]). Аналогично возникает псевдофокальное соответствие 2-семейства $L^2(2)$: $M_2 \longleftarrow L^2(\Psi_1)$, которое определяется условием

$$\det \| x^{\hat{i}} a_{\hat{i}}^{\hat{p}}, x^{\hat{i}} b_{\hat{i}}^{\hat{p}}, a_{\hat{i}}^{\hat{p}}+\lambda b_{\hat{i}}^{\hat{p}} \| = 0. \qquad (8)$$

Полагая

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$a_2^3 = a_2^4 = a_4^2 = b_1^3 = b_3^1 = b_3^2 = 0, \tag{9}$$

помещаем вершины $A_1$ и $A_3$ репера в псевдофокусы подмногообразия $\Psi_2^2$, вершины $A_2$ и $A_4$ – в псевдофокусы подмногообразия $\Psi_1^1$, а вершину $A_5$ – в точку пересечения касательных гиперплоскостей $TA_{J'}$ (1+2) ($J' = 1,2,3,4$).

Фокусы и торсы прямой $A_1A_2$ находятся из условия $(dM_1, A_1, A_2) = 0$, которое в силу (1) и (9) приводит к системе

$$\begin{cases} x^1 a_1^3 \omega^1 + x^2 b_2^3 \omega^2 = 0, \\ x^1 \omega^1 + x^2 b_2^4 \omega^2 = 0, \\ x^1 (a_1^5 \omega^1 + b_1^5 \omega^2) + x^2 (a_2^5 \omega^1 + b_2^5 \omega^2) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $M_1 = x^i A_i$. Отсюда, исключая $\omega^2 : \omega^1$, получаем систему для определения фокусов прямой $L^1$:

$$\begin{cases} x^1 x^2 (b_2^3 - b_2^4 a_1^3) = 0, \\ (x^2)^2 b_2^4 a_2^5 + x^1 x^2 (a_1^5 b_2^4 - b_2^5) - (x^1)^2 b_1^5 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Из уравнений (10) и (11) следует, что при

$$a_2^5 b_1^5 (b_2^3 - b_2^4 a_1^3) = 0 \tag{12}$$

прямая $L^1$ имеет хотя бы один фокус. Аналогично при

$$a_4^5 b_3^5 (a_3^2 - a_3^1 b_4^2) = 0 \tag{12$^1$}$$

прямая $L^2$ имеет хотя бы один фокус.

Известно, что в случаях (12) и (12$^1$) псевдофокальное соответствие 2-семейства $L^1(2)$ и $L^2(2)$ вырождается ([5], [6]). Исключая эти случаи, проведем нормирование, положив

$$(b_2^3 - b_2^4 a_1^3)(a_3^2 - a_3^1 b_4^2) \neq 0, \quad a_2^5 = b_1^5 = a_4^5 = b_3^5 = 1. \tag{13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Таким образом, вершины $A_j$ полностью определяются подмногообразиями $\Psi_1^1$ и $\Psi_1^2$, которые пока произвольны. Следовательно, построен полуканонический репер 2-семейства пар прямых в $P_4$, отнесенного к системе двух подмногообразий $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$.

§2. Некоторые соответствия между точками прямых пары.

1. Соответствие точек $M_1=x^iA_i \longleftrightarrow M_2=x^iA_i$ назовем $\rho$-соответствием, если они являются псевдофокусами одного и того же подмногообразия $\Psi_1$ пары.

Подмногообразие $\Psi_1$ полностью определяется, как только задана хотя бы одна из этих точек. В терминах полуканонического репера (см. (7) и (8)) это соответствие принимает вид

$$\rho = \sigma. \tag{14}$$

Геометрическое место прямых, соединяющихся соответствующие точки, есть демиквадрика

$$x^1x^4 - x^2x^3 = 0. \tag{15}$$

2. Гиперплоскость, содержащую прямые $L^1$ и $L^2$, обозначим $L$. Пусть $CkL(2)$ - характеристика гиперплоскости семейства $L(2)$. Она определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x^5 = 0, \\ x^1a_1^5 + x^2 + x^3a_3^5 + x^4 = 0, \\ x^1 + x^2b_2^5 + x^3 + x^4b_4^5 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

и в общем случае является прямой (которую обозначим $l$), не пересекающей прямые $L^i$. Прямые $L^1$, $L^2$ и $l$ в общем случае определяют единственную квадрику, которую назовем квадрикой $Q$. Квадрика $Q$ задается уравнением

$$ax^2x^4 - bx^2x^3 - cx^1x^4 + gx^1x^3 = 0, \tag{17}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где

$$a=b_2^5-b_4^5,\ b=1-a_3^5b_2^5,\ c=a_1^5b_4^5-1,\ g=a_3^5-a_1^5. \qquad (18)$$

Соответствие между точками прямых $L^i$ пары, устанавливаемое демиквадрикой квадрики $Q$, назовем $d$ - соответствием.

Это $d$-соответствие в неоднородных координатах имеет вид:

$$a\rho\sigma - c\sigma - b\rho + g = 0, \qquad (19)$$

где $\rho = x^2 : x^1$, $\sigma = x^4 : x^3$.

Точки $M_j \in L^j$, находящиеся одновременно в $p$ - соответствии и $d$ - соответствии, назовем $pd$- точками. В силу (19) и (14) уравнение для определения координат $pd$- точек принимает вид:

$$a\rho^2 - (b+c)\rho + g = 0. \qquad (20)$$

3. Соответствие: $M_1 = A_1 + \rho A_2 \longrightarrow M_2 = A_3 + \sigma A_4 \equiv L^2 \cap T M_1 (1+2)$ назовем $k_1$- соответствием, а соответствие $M_2' = A_3 + \sigma' A_4 \longrightarrow M_1' = A_1 + \rho' A_2 \equiv L^1 \cap T M_2' (1+2)$ назовем $k_2$- соответствием.

В силу (5) и ($5^1$) $k_i$- соответствие имеет вид:

$$\sigma(a_1^3 + \rho r - \rho^2 b_2^3) - (1 + \rho s - \rho^2 b_2^4) = 0, \qquad (21)$$

$$\rho'(a_3^1 - \sigma' u - \sigma'^2) - (a_3^2 + \sigma' v - \sigma'^2 b_4^2) = 0, \qquad (22)$$

где

$$r = a_1^3 b_2^5 - b_2^3 a_1^5,\ s = b_2^5 - b_2^4 a_1^5,$$
$$u = a_3^5 - a_3^1 b_4^5,\ v = a_3^2 b_4^5 - b_4^2 a_3^5. \qquad (23)$$

Точки $M_i \in L^i$, находящиеся одновременно в $k_i$ - соответствии и $p$ - соответствии, назовем $pk_i$- точками.

Из (21), (22) и (14) получаем уравнение для определения координат $pk_i$-точек на прямой $L^i$:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\rho^3 b_2^3 - \rho^2(r + b_2^4) + \rho(s - a_2^3) + 1 = 0, \qquad (24)$$

$$\sigma'^3 + \sigma'^2(u - b_4^2) + \sigma'(v - a_3^2) + a_3^2 = 0. \qquad (25)$$

Из уравнений (24) и (25) видим, что на прямой $L^1$ существует в общем случае по три $pk_1$-точки.

4. Гиперплоскость $TM_1(1+2)$ пересекает характеристику $l$ в точке $N_1(mb-a, mg-c, -ma_1, a_1)$, а гиперплоскость $TM_2(1+2)$ - в точке $N_2(-nb_1, -b_1, nc-a, ng-b)$, где

$$m = \frac{a_1^3 + \rho r - \rho^2 b_2^3}{1 + \rho s - \rho^2 b_2^4}, \quad n = \frac{a_3^1 - \sigma u - \sigma^2}{a_3^2 - \sigma v - \sigma^2 b_4^2}, \quad a_1 = a_1^5 b_2^5 - 1, \quad b_1 = 1 - a_3^5 b_4^5.$$

Соответствие $M_1 \longleftrightarrow M_2$, для которого точки $N_1$ и $N_2$ характеристики $l$ совпадают, назовем $h$ - соответствием.

Оно задается уравнением

$$\rho^2\sigma^2(b_2^3 g - b_2^4 c - b_2^3 b_4^2 b + b_2^4 b_4^2 a) + \rho^2\sigma(b_2^3 gu - ub_2^4 c + b_2^3 bv - ab_2^4 v) + \rho\sigma^2(-rg + sc + rb_4^2 b - asb_4^2) + \rho(rga_3^1 - a_3^1 sc + rba_3^2 + asa_3^2) + \sigma(uc - a_1^3 ug - a_1^3 vb + av) + \rho^2(b_2^4 a_3^1 c - b_2^3 a_3^1 g + b_2^3 a_3^2 b - ab_2^4 a_3^2) + \sigma^2(c - a_1^3 g + a_1^3 b_4^2 b - ab_4^2) + \rho\sigma(usc - rug - rub + sva) + (ga_3^1 a_1^3 - a_3^1 c - a_1^3 a_3^2 b + aa_3^2) = 0 \qquad (26)$$

Точки, находящиеся одновременно в $p$ - соответствии и $h$ - соответствии, назовем $ph$ - точками.

Из (26) следует, что на каждой прямой имеется в общем случае четыре $ph$ - точки. Они определяются из (26) при $\rho = \sigma$.

5. Рассмотрим соответствие $M_1 \to M_2 \to M_1'$, где $M_1 = A_1 + \rho A_2$, $M_2 = L^2 \cap TM_1(1+2)$, а $M_1' = L^1 \cap TM_2(1+2)$. Двойные точки такого соответствия назовем, следуя [7], квазифлекнодальными точками прямой $L^1$. Их координаты удовлетворяют уравнению

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\rho^5\{(b_2^4)^2+b_2^4b_2^3u-(b_2^3)^2a_3^1\}+\rho^4\{-2sb_2^4-(b_2^4)^2b_4^2-sub_2^3-b_2^3ru+$$

$$+b_2^4b_2^3v+(b_2^3)^2a_3^2+2a_3^1b_2^3r\}+\rho^3\{s^2-2b_2^4+2sb_2^4b_4^2-b_2^3u+sru-$$

$$-svb_2^3-b_2^4a_1^3u-b_2^4rv-2rb_2^3a_3^2-r^2a_3^1+2a_3^1a_1^3b_2^3\}+\rho^2\{2s-$$

$$-s^2b_4^2+2b_2^4b_4^2+ru-b_2^3v+sua_1^3+srv-b_2^4a_1^3v+r^2a_3^2-$$

$$-2ra_1^3a_3^1-2a_1^3b_2^3a_3^2\}+\rho\{1-2b_4^2s+ua_1^3+rv+vsa_1^3+$$

$$+2a_1^3a_3^2r-a_3^1(a_1^3)^2\}+\{b_4^2+va_1^3+(a_1^3)^2a_3^2\}=0,$$

откуда следует, что на прямой $L^1$ существует в общем случае пять квазифлекнодальных точек. Квазифлекнодальные точки прямой $L^2$ суть двойные точки соответствия $M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2'$, где $M_2=A_3+\sigma A_4, M_1=L^1\cap TM_2(1+2), M_2'=L^2\cap TM_1(1+2)$.

Все соответствия, отмеченные выше, носят инвариантный характер, т.е. не зависят от отнесения пары к системе подмногообразий $\Psi_1^i$.

6. Характеристика $ChL(\Psi_1)$ гиперплоскости $L$ при смещении вдоль подмногообразия $\Psi_1$ есть плоскость, определяемая системой

$$x^5=0,$$
$$x^1(a_1^5+\lambda)+x^2(1+\lambda b_2^5)+x^3(a_3^5+\lambda)+x^4(1+\lambda b_4^5)=0 \tag{27}$$

Она пересекает прямую $L^1$ в точке $M_1=x^iA_i$, для которой

$$x^1(a_1^5+\lambda)+x^2(1+\lambda b_2^5)=0 \tag{28}$$

а прямую $L^2$ – в точке $M_2=x^iA_i$, для которой

$$x^3(a_3^5+\lambda)+x^4(1+\lambda b_4^5)=0. \tag{29}$$

Заметим, что исключение $\lambda$ из (28) и (29) дает соот

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ветствие (17).

Три прямые общего положения в $P_4$ имеют одну общую секущую, которая называется трансверсалью. Предельное положение трансверсали прямых $L^1$, $L^2$ и прямой $L^i + dL^i$ при смещении вдоль подмногообразия $\Psi_1$ обозначим $T_i$. Очевидно, что

$$L^i \cap T_i = L^i \cap ChL(\Psi_1).$$

Если точки $A_1 + \rho A_2$, $A_3 + \sigma A_4$ пересечения прямой $L^i$ и $ChL(\Psi_1)$ являются псевдофокусами подмногообразия $\Psi_1$, то в силу (28), (29), (7) и (8) с учетом (9) и (13) получаем

$$\rho^2 b_2^5 + 2\rho + a_1^5 = 0, \quad \sigma^2 b_4^5 + 2\sigma + a_3^5 = 0. \tag{30}$$

§3. Канонический репер пары. Две прямые, соединяющие соответствующие $pd$- точки, назовем $pd$- прямыми и обозначим их $t^i$. Для построения канонического репера совместим прямую $A_1A_3$ с прямой $t^1$, а вершину $A_2$ репера поместим в одну из $pk_1$- точек. Тогда вершина $A_4$ фиксируется, так как находится в $p$- соответствии с вершиной $A_2$. Вершина $A_5$ фиксируется построением, рассмотренным в § 1. Аналитически в силу (20) и (24) это дает

$$a_1^5 = a_3^5, \; b_2^3 = 0, \quad a \equiv b_2^5 - b_4^5 \neq 0, \tag{31}$$

причем $a \neq 0$, так как нужно исключить случай совпадения $p$- соответствия и $d$- соответствия. Таким образом, получаем канонический репер пары, который назовем $pd$- репером.

Теперь имеем

$$\omega_j^x = a_j^x \omega^1 + b_j^x \omega^2, \tag{32}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где величины $a^{\kappa}_{j}$ и $b^{\kappa}_{j}$ связаны соотношениями, вытекающими из $(2^1)$, (4), (9), (13) и (31). Дифференцируя соотношения (32) внешним образом, получаем систему квадратичных уравнений

$$[da^{\kappa}_{j}\omega^{1}]+[db^{\kappa}_{j}\omega^{2}]=\{a^{\jmath}_{j}b^{\kappa}_{\jmath}-b^{\jmath}_{j}a^{\kappa}_{\jmath}-a^{\kappa}_{j}(a^{\jmath}_{1}b^{4}_{\jmath}-$$
$$-b^{\jmath}_{1}a^{4}_{\jmath})-b^{\kappa}_{j}(a^{\jmath}_{4}b^{1}_{\jmath}-b^{\jmath}_{4}a^{1}_{\jmath})\}[\omega^{1}\omega^{2}]. \qquad (33)$$

Внося сюда $(2^1)$, (4), (9), (13) и (31), сведем систему (33) к 20 квадратичным уравнениям и к двум конечным уравнениям:

$$b^{3}_{5}-b^{1}_{2}a^{3}_{1}-b^{4}_{2}a^{3}_{4}-b^{5}_{2}a^{3}_{5}=0, \qquad (34)$$

$$a^{1}_{1}-b^{1}_{1}a^{5}_{1}+a^{2}_{1}b^{5}_{2}-b^{2}_{1}+a^{3}_{1}-b^{5}_{4}-a^{1}_{3}-a^{2}_{3}b^{5}_{2}-a^{3}_{3}+b^{3}_{3}a^{5}_{1}-a^{4}_{3}b^{5}_{4}+b^{4}_{3}=0.$$

Уравнения (34) получаются при дифференцировании внешним образом уравнений $\omega^{3}_{2}=0$, $\omega^{5}_{1}=\omega^{5}_{3}$. Полученная квадратичная система (33) с учетом (34) является стандартной [8] и имеет старший характер $s_2=10$. Это согласуется с произволом существования рассматриваемого многообразия (десять функций двух аргументов).

§4. Класс $a^{5}_{1}=0$. Рассмотрим случай, когда pd-точки совпадают. Обозначим через $t$ единственную pd-прямую ($t^1=t^2$). Из (20) следует, что в терминах канонического репера указанный выше класс задается уравнением

$$a^{5}_{1}=0. \qquad (35)$$

Присоединяя это уравнение к основной системе дифференциальных уравнений, получим еще одно конечное соотношение:

$$2a^{1}_{1}+a^{2}_{1}b^{5}_{2}-b^{2}_{1}+a^{3}_{1}-b^{5}_{4}-a^{5}_{5}+a^{1}_{2}b^{2}_{4}+b^{3}_{4}a^{1}_{3}-a^{4}_{4}-b^{1}_{5}+b^{5}_{4}a^{1}_{5}=0.$$

Широта класса $a^{5}_{1}=0$ – девять функций двух аргументов.

Пусть $t(\Psi^{2}_{1})$ – линейчатая поверхность, описываемая pd-прямой $t$ вдоль подмногообразия $\Psi^{2}_{1}$, $Tt(\Psi^{2}_{1})$ – касательная гиперплоскость линейчатой поверхности $t(\Psi^{2}_{1})$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Обозначим символом $d_k$ - дифференцирование вдоль подмногообразия $\omega^k = 0$, а $T_i^k$ - предельное положение трансверсали прямых $L^i, L^2$ и $L^i + d_k L^i$ $(i,k = 1,2)$.

Каждое из следующих свойств класса $a_1^5 = 0$ является характеристическим.

1). Гиперплоскость $Tt(\Psi_1^1)$ совпадает с гиперплоскостью $L$.

2). Прямая $T_1^2$ пересекает прямую $L^1$ в точке $A_1$.

3). Прямая $T_2^2$ пересекает прямую $L^2$ в точке $A_3$.

Класс $a_1^5 = 0$ обладает еще и следующими свойствами:

а) Фокус плоскости $(L^i, t)$, соответствующий смещению по подмногообразию $\Psi_1^2$, принадлежит прямой $t$.

б) Точка пересечения характеристики $ChL(\Psi_1^1)$ с прямой $t$ является псевдофокусом подмногообразия $t(\Psi_1^2)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий, Геом. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179 - 191.
2. С.П.Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М., 1948.
3. Л.З.Кругляков. О многообразиях, ассоциированных с семейством $d$-плоскостей в $P_N$. Материалы второй научной конф. по математ. и мех., 1, Томск, 1972, 66 - 68.
4. Л.З.Кругляков. О псевдофокальных семействах $d$-плоскостей в $P_n$, Изв.вузов, Математика, №10(89), 1969, 70 - 77.
5. С.Е.Карапетян. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей в четырехмерном пространстве, Изв. АН Арм.ССР, 15, №2, 1962, 25-43.
6. Г.П.Бочилло. О двупараметрическом многообразии $V_2$ полуневклидовых пространств в $P_4$, Геом. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 28 - 31.
7. В.И.Машанов, Л.З.Кругляков. Квазифлекнодальные пары семейств плоскостей в $P_N$, Материалы второй научной конференции по матем. и мех. 1, Томск, 1972, 73 - 74.
8. Р.Н.Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии, Томск, 1971.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



9. K. Svoboda, V. Havel, J. Kolar. La méthode du repérage des systems de sous - variétes. Comment. mathem. univ. Carolinae, 5, N4, 1964, 183 -201.

Поступила 1 апреля 1972 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В.К.БАРЫШЕВА

# О НЕГОЛОНОМНОМ МНОГООБРАЗИИ 2-ПЛОСКОСТЕЙ В $A_5$

В этой работе рассматривается $9$-параметрическое многообразие $E_9$ в пятимерном эквиаффинном пространстве $A_5$, образующим элементом которого является 2-плоскость $L_2$, на которой заданы три точки и к которой присоединены три гиперплоскости, проходящие через нее. Из [1] и [2] следует, что изучение такого многообразия эквивалентно изучению геометрии системы двух уравнений Пфаффа в 9-мерном пространстве всех двумерных плоскостей в $A_5$.

§1. Канонический репер многообразия $E_9$. Присоединим к многообразию $E_9$ некоторый эквиаффинный репер $(\bar{A}, \bar{e}_i)$ Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i ,$$
$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j , \qquad (1)$$

где $\omega^i$, $\omega_i^j$ - дифференциальные формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\omega^i = [\omega^j, \omega_j^i] ,$$
$$D\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j] \qquad (2)$$

и соотношению

$$\omega_i^i = 0 , \qquad (3)$$

вытекающему из условия эквиаффинности.

Будем считать векторы $\bar{e}_4, \bar{e}_5$ параллельными плоскости $L_2$ многообразия $E_9$, точки $A$, $M_4 = \bar{A} + \bar{e}_4$, $M_5 = \bar{A} + \bar{e}_5$ - заданными точками, а поливекторы $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$, $(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$, $(\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$ - параллельными заданным гиперплоскостям. Тогда формы $\omega^i$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$\omega^{i}_{\hat{\alpha}}$, $\omega^{\beta}_{\alpha}$ ($\hat{\alpha}=4,5$; $\alpha,\beta=1,2,3$; $\alpha\neq\beta$) - главные. Среди этих форм линейно-независимых - девять. Выберем формы $\omega^{\alpha}$, $\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$ за базисные. Тогда

$$\omega^{\hat{\alpha}}=\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\omega^{\alpha}+\Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\beta},$$

$$\omega^{\gamma}_{\beta}=\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\omega^{\alpha}+\Gamma^{\gamma\hat{\alpha}}_{\beta\alpha}\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}}, \qquad (4)$$

$$\omega^{\beta}_{\hat{\alpha}}=\Gamma^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\alpha}\omega^{\alpha}+\Gamma^{\hat{\beta}\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\alpha}\omega^{\alpha}_{\hat{\gamma}}.$$

Из этой системы обычным путем [4] получаем соотношения:

$$\begin{aligned}
&\delta\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\alpha}-\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\alpha}\pi^{\alpha}_{\alpha}+\pi^{\hat{\alpha}}_{\alpha}=0,\\
&\delta\Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}_{\alpha}-\Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}_{\alpha}\pi^{\alpha}_{\alpha}=0,\\
&\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\alpha}(2\pi^{\alpha}_{\alpha}-\pi^{\beta}_{\beta})=0\ (\alpha\neq\beta),\\
&\delta\Gamma^{\beta\hat{\alpha}}_{\alpha\alpha}-\Gamma^{\beta\hat{\alpha}}_{\alpha\alpha}(2\pi^{\alpha}_{\alpha}-\pi^{\beta}_{\beta})=0\ (\alpha\neq\beta),\\
&\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\pi^{\alpha}_{\alpha}=0\ (\alpha\neq\beta),\\
&\delta\Gamma^{\beta\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}\pi^{\alpha}_{\alpha}-\pi^{\hat{\alpha}}_{\alpha}=0\ (\alpha\neq\beta), \qquad (5)\\
&\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\pi^{\gamma}_{\gamma}-\pi^{\alpha}_{\alpha}-\pi^{\beta}_{\beta})=0\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma),\\
&\delta\Gamma^{\gamma\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\gamma\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}(\pi^{\gamma}_{\gamma}-\pi^{\alpha}_{\alpha}-\pi^{\beta}_{\beta})=0\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma),\\
&\delta\Gamma^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\alpha}-\Gamma^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\alpha}\pi^{\alpha}_{\alpha}=0,\\
&\delta\Gamma^{\hat{\beta}\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\alpha}-\Gamma^{\hat{\beta}\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\alpha}\pi^{\alpha}_{\alpha}=0\ (\hat{\alpha}\neq\hat{\beta}),\\
&\delta\Gamma^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}\alpha}-\Gamma^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}\alpha}\pi^{\alpha}_{\alpha}+\pi^{\hat{\beta}}_{\alpha}=0
\end{aligned}$$

(по $\alpha,\beta,\gamma$ не суммировать).
Система величин $\Gamma=(\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\alpha},\Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}_{\alpha},\Gamma^{j}_{i\alpha},\Gamma^{j\hat{\alpha}}_{i\alpha})$ образует

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



фундаментальный геометрический объект первого порядка [9] многообразия $E_9$, который, как будет показано ниже, является основным.

Фиксируем вторичные параметры, положив

$$\Gamma_{\alpha}^{\hat{\alpha}}=0,\quad \pi_{\alpha}^{\hat{\alpha}}=0,$$
$$\Gamma_{\beta 3}^{j}=-1,\quad \pi_{\beta}^{\beta}=0 \qquad (6)$$

( по $\beta$ не суммировать, $\beta\neq 3$ ). Деривационные формулы канонического репера (1), в силу (4), (6), принимают вид:

$$d\bar{A}=\omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}+\Gamma_{\alpha}^{\beta\hat{\alpha}}\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha}\bar{e}_{\beta},$$
$$d\bar{e}_{i}=\Gamma_{i\alpha}^{j}\omega^{\alpha}\bar{e}_{j}+\Gamma_{i\alpha}^{j\hat{\alpha}}\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha}\bar{e}_{j},$$

где коэффициенты $\Gamma_{\alpha}^{\beta\hat{\alpha}}$, $\Gamma_{i\alpha}^{j}$, $\Gamma_{i\alpha}^{j\hat{\alpha}}$ связаны соотношениями (6) и удовлетворяют следующим квадратичным уравнениям:

$$[d\Gamma_{\mu\alpha}^{k},\omega^{\alpha}]+[d\Gamma_{\mu\alpha}^{k\hat{\alpha}},\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha}]+[\omega^{\alpha},\omega^{\beta}](\Gamma_{\mu\beta}^{i}\Gamma_{i\alpha}^{k}-\Gamma_{\mu\alpha}^{i}\Gamma_{i\beta}^{k}+$$
$$+\Gamma_{\mu\gamma}^{k}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma})+[\omega^{\alpha},\omega_{\hat{\alpha}}^{\beta}](\Gamma_{\mu\beta}^{i\hat{\alpha}}\Gamma_{i\alpha}^{k}-\Gamma_{\mu\alpha}^{i}\Gamma_{i\beta}^{k\hat{\alpha}}+\Gamma_{\mu\gamma}^{k\hat{\alpha}}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\alpha}-$$
$$-\Gamma_{\mu\gamma}^{k\hat{\alpha}}\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}+\Gamma_{\mu\beta}^{k\hat{\beta}}\Gamma_{\hat{\beta}\alpha}^{\hat{\alpha}})+[\omega_{\hat{\gamma}}^{\delta},\omega_{\hat{\alpha}}^{\beta}](\Gamma_{\mu\beta}^{i\hat{\alpha}}\Gamma_{i\hat{\delta}}^{k\hat{\gamma}}-$$
$$-\Gamma_{\mu\delta}^{i\hat{\gamma}}\Gamma_{i\beta}^{k\hat{\alpha}}-\Gamma_{\mu\gamma}^{k\hat{\alpha}}\Gamma_{\beta\delta}^{\gamma\delta}+\Gamma_{\mu\beta}^{k\hat{\beta}}\Gamma_{\hat{\beta}\delta}^{\hat{\alpha}\hat{\delta}})=0 \qquad (7)$$
$$[d\Gamma_{\alpha}^{\hat{\beta}\hat{\alpha}},\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha}]-\Gamma_{\alpha\beta}^{j}[\omega^{\alpha},\omega^{\beta}]+[\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha},\omega_{\hat{\alpha}}^{\beta}](\Gamma_{\beta}^{\hat{\beta}\hat{\beta}}\Gamma_{\hat{\beta}\alpha}^{\hat{\alpha}}-\Gamma_{\alpha\beta}^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}-$$
$$-\Gamma_{\hat{\gamma}}^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma})+[\omega_{\hat{\gamma}}^{\delta},\omega_{\hat{\alpha}}^{\beta}](\Gamma_{\beta}^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}\Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\delta}}^{\hat{\beta}\hat{\delta}}-\Gamma_{\hat{\delta}}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}\Gamma_{\hat{\alpha}\beta}^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}-\Gamma_{\hat{\gamma}}^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\Gamma_{\beta\hat{\delta}}^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}+$$
$$+\Gamma_{\beta}^{\hat{\beta}\hat{\beta}}\Gamma_{\hat{\beta}\hat{\delta}}^{\hat{\alpha}\hat{\delta}})=0 \quad (i,k,\mu=1,\ldots,5;\ \alpha,\beta,\delta,\gamma=1,2).$$

Система (7) состоит из двадцати независимых квадратичных уравнений, содержащих 180 функций, связанных восьмью соотношениями (6), и определяет многообразие $E_9$ с произволом двенадцати функций девяти аргументов, так как система (7) является стандартной [4].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



§2. Геометрическая характеристика элементов канонического репера. Характеристики 3-плоскостей $(\bar{A}, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$, соответствующие некоторому подмногообразию $\Psi_1$ [4], имеют уравнения:

$$x^\beta = 0, \qquad \omega^\beta + x^\alpha \omega^\beta_\alpha + x^{\hat{2}} \omega^\beta_{\hat{2}} = 0 \tag{8}$$

$(\alpha \neq \beta$ , $\alpha$ - фиксировано), где $x^\alpha$, $x^{\hat{2}}$ - локальные координаты радиус-вектора в репере, присоединенном к данному элементу. Подмногообразия $\Psi_1$ , заданные системой уравнений

$$\omega^\beta = \omega^1_4 = \omega^2_4 = \omega^3_4 = \omega^1_5 = \omega^2_5 = \omega^3_5 = 0, \tag{9}$$

где $\beta$ принимает любые два значения из множества 1,2,3, геометрически характеризуется каждым из следующих свойств: 1) характеристики 3-плоскостей $(\bar{A}, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$ $(\alpha \neq \beta)$ вдоль этих $\Psi_1$ параллельны 2-плоскости $L_2$ ; 2) касательные к линиям, описываемым точками $M_{\hat{2}}$ вдоль этих $\Psi_1$ , параллельны 3-плоскостям $(\bar{A}, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$ $(\alpha \neq \beta)$.

Уравнения характеристики гиперплоскости $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$ вдоль некоторого $\Psi_1$ имеют вид:

$$x^3 = 0, \qquad \omega^3 + x^1 \omega^3_1 + x^2 \omega^3_2 + x^{\hat{2}} \omega^3_{\hat{2}} = 0 . \tag{10}$$

Построенный в §1 канонический репер характеризуется тем, что выполнены следующие два условия: 1) характеристика гиперплоскости $(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$, соответствующая подмногообразию $\omega^1 = \omega^2 = \omega^1_4 = \omega^2_4 = \omega^3_4 = \omega^1_5 = \omega^2_5 = \omega^3_5 = 0$ , пересекает прямые $(\bar{A}, \bar{e}_\gamma)$ в единичных точках $\bar{M}_\gamma = \bar{A} + \bar{e}_\gamma$ $(\gamma = 1,2)$ 2) прямые $(\bar{A}, \bar{e}_\alpha)$ являются касательными к линиям, описываемым точкой $\bar{A}$ вдоль $\Psi_1$ : $\omega^\beta = \omega^1_4 = \omega^2_4 = \omega^3_4 = \omega^1_5 = \omega^2_5 = \omega^3_5 = 0$ $(\alpha \neq \beta)$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Заметим к тому же, что точки $M_\gamma$ являются псевдофокусами [3] прямых $(\bar{A}, \bar{e}_\gamma)$ в направлении $(\bar{A}, \bar{e}_3)$. Случай, когда псевдофокусы несобственные ($\Gamma^3_{\beta 3}=0$), из рассмотрения исключается.

§3. Голономное подмногообразие $\tilde{\Psi}_4$ есть совокупность всех подмногообразий $\Psi_1$, вдоль которых точка $A$ неподвижна. Назовем точку $A$ центром голономного подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$. Формы $\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$ ($\hat{\alpha}=4,5$; $\alpha=1,2$) возьмем за базисные формы канонического репера подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$. Из $\omega^i=0$ ($i=1,\dots,5$) находим

$$\omega^3_4 = \frac{1}{\Delta}\left(\Gamma^{45}_3\Gamma^{5\hat{\alpha}}_{\alpha}-\Gamma^{55}_3\Gamma^{4\hat{\alpha}}_{\alpha}\right)\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}},$$
$$\omega^3_5 = \frac{1}{\Delta}\left(\Gamma^{54}_3\Gamma^{4\hat{\alpha}}_{\alpha}-\Gamma^{44}_3\Gamma^{5\hat{\alpha}}_{\alpha}\right)\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}}, \qquad (11)$$

где $\Delta=\Gamma^{44}_3\Gamma^{55}_3-\Gamma^{45}_3\Gamma^{54}_3\neq 0$

Тогда для канонического репера подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$ справедливы соотношения:

$$\omega^i_\alpha = A^i_\alpha\omega^1_4+B^i_\alpha\omega^2_4+C^i_\alpha\omega^1_5+D^i_\alpha\omega^2_5,$$
$$\omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} = A^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\omega^1_4+B^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\omega^2_4+C^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\omega^1_5+D^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}\omega^2_5, \qquad (12)$$

где

$$A^i_\alpha=\Gamma^{i4}_{\alpha 1}+\Gamma^{i4}_{\alpha 3}A^3_4+\Gamma^{i5}_{\alpha 3}A^3_5,$$
$$B^i_\alpha=\Gamma^{i4}_{\alpha 2}+\Gamma^{i4}_{\alpha 3}B^3_4+\Gamma^{i5}_{\alpha 3}B^3_5,$$
$$C^i_\alpha=\Gamma^{i5}_{\alpha 1}+\Gamma^{i4}_{\alpha 3}C^3_4+\Gamma^{i5}_{\alpha 3}C^3_5,$$
$$D^i_\alpha=\Gamma^{i5}_{i2}+\Gamma^{i4}_{\alpha 3}D^3_4+\Gamma^{i5}_{\alpha 3}D^3_5,$$
$$A^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}=\Gamma^{\hat{\beta}4}_{\hat{\alpha}1}+\Gamma^{\hat{\beta}4}_{\hat{\alpha}3}A^3_4+\Gamma^{\hat{\beta}5}_{\hat{\alpha}3}A^3_5,$$
$$B^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}=\Gamma^{\hat{\beta}4}_{\hat{\alpha}2}+\Gamma^{\hat{\beta}4}_{\hat{\alpha}3}B^3_4+\Gamma^{\hat{\beta}5}_{\hat{\alpha}3}B^3_5,$$
$$C^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}=\Gamma^{\hat{\beta}5}_{\hat{\alpha}1}+\Gamma^{\hat{\beta}4}_{\hat{\alpha}3}C^3_4+\Gamma^{\hat{\beta}5}_{\hat{\alpha}3}C^3_5, \qquad (13)$$
$$D^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}=\Gamma^{\hat{\beta}5}_{\hat{\alpha}2}+\Gamma^{\hat{\beta}4}_{\hat{\alpha}3}D^3_4+\Gamma^{\hat{\beta}5}_{\hat{\alpha}3}D^3_5,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$A^3_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{\Delta}\left(\Gamma_3^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma_1^{\hat{\beta}4} - \Gamma_3^{\hat{\beta}\hat{\beta}}\Gamma_1^{\hat{\alpha}4}\right),$$

$$B^3_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{\Delta}\left(\Gamma_3^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma_2^{\hat{\beta}4} - \Gamma_3^{\hat{\beta}\hat{\beta}}\Gamma_2^{\hat{\alpha}4}\right),$$

$$C^3_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{\Delta}\left(\Gamma_3^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma_1^{\hat{\beta}5} - \Gamma_3^{\hat{\beta}\hat{\beta}}\Gamma_1^{\hat{\alpha}5}\right),$$

$$D^3_{\hat{\alpha}} = \frac{1}{\Delta}\left(\Gamma_3^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Gamma_2^{\hat{\beta}5} - \Gamma_3^{\hat{\beta}\hat{\beta}}\Gamma_2^{\hat{\alpha}5}\right) \quad (\hat{\alpha} \neq \hat{\beta}).$$

Вдоль $\widetilde{\Psi}_4$ прямые, определяемые уравнениями:

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{e}_4 + t\bar{e}_1, \tag{14}$$

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{e}_5 + t\bar{e}_2, \tag{15}$$

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{e}_4 + t(\bar{e}_4 - \bar{e}_5), \tag{16}$$

описывают 4-семейства (конгруэнции в смысле [5]), а точки $M_4$, $M_5$ описывают гиперповерхности. Конгруэнции, определяемые уравнениями (14), (15), (16), обозначим $(K_1)$, $(K_2)$, $(K)$ соответственно.

Характеристики плоскостей, определяемых центром голономного подмногообразия $\widetilde{\Psi}_4$ и образующими произвольных линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнциям $(K_\alpha)$ $(\alpha = 1,2)$, определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} &x^\beta = x^3 = x^{\hat{\beta}} = 0, \\ &x^\alpha \omega^\beta_\alpha + x^{\hat{\alpha}} \omega^\beta_{\hat{\alpha}} = 0, \\ &x^\alpha \omega^{\hat{\beta}}_\alpha + x^{\hat{\alpha}} \omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} = 0, \\ &x^\alpha \omega^{\hat{\beta}}_\alpha + x^{\hat{\alpha}} \omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

( по $\alpha, \hat{\alpha}$ не суммировать, $\alpha \neq \beta$, $\hat{\alpha} \neq \hat{\beta}$ ).

Как и в трехмерной центроаффинной геометрии [6] для линейчатых поверхностей конгруэнции $(K)$, $(K_\alpha)$ определим центральные линии (собственные или несобственные) как ли-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



нии пересечения этих поверхностей с конусом характеристик тех плоскостей, которые определяются центром голономного подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$ и образующими соответствующих линейчатых поверхностей. Назовем цилиндроидальными (ср. [7]) те линейчатые поверхности, центральные линии которых - несобственные. Из (17) следует, что цилиндроидальная линейчатая поверхность конгруэнции $(K_1)$ $((K_2))$, определяется системой уравнений:

$$\omega^i = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^5 = 0 \quad (\omega^i = \omega_2^1 = \omega_2^3 = \omega_2^4 = 0) \qquad (18)$$

По аналогии с [8] пару конгруэнции $(K')$, $(K'')$ называем центроаффинно-расслояемой от конгруэнции $(K')$ к конгруэнции $(K'')$, если через каждую точку луча конгруэнции $(K')$ можно провести секущую гиперповерхность, касательная гиперплоскость которой параллельна плоскости, определяемой центром $A$ голономного подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$ и соответствующим лучом конгруэнции $(K'')$.

Поставим задачу: найти класс многообразий $E_9$, характеризующийся условием: пара конгруэнций $(K_1)$ и $(K)$ центроаффинно-расслояема от $(K_1)$ к $(K)$ и пара конгруэнций $(K_2)$ и $(K)$ центроаффинно-расслояема от $(K_2)$ к $(K)$.

Условия центроаффинного-расслоения названных пар конгруэнций сводятся к вполнеинтегрируемости систем

$$\begin{cases} \omega_4^1 + t\omega_1^1 = -dt, \\ \omega_4^2 + t\omega_1^2 = 0, \\ \omega_4^3 + t\omega_1^3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_5^1 + t\omega_2^1 = 0, \\ \omega_5^2 + t\omega_2^2 = -dt, \\ \omega_5^3 + t\omega_2^3 = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

вытекающих из условий

$$(d(\bar{e}_4 + t\bar{e}_1), \bar{e}_4, \bar{e}_5) = 0,$$

$$(d(\bar{e}_5 + t\bar{e}_2), \bar{e}_4, \bar{e}_5) = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Внешнее дифференцирование равенств ( * ) дает

$$\begin{cases} [\omega_4^4, \omega_4^\alpha] + [\omega_4^5, \omega_5^\alpha] = 0, \\ [\omega_1^4, \omega_4^\alpha] + [\omega_1^5, \omega_5^\alpha] = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} [\omega_5^4, \omega_4^\alpha] + [\omega_5^5, \omega_5^\alpha] = 0, \\ [\omega_2^4, \omega_4^\alpha] + [\omega_2^5, \omega_5^\alpha] = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Используя (12), получаем, что условия центроаффинного расслоения эквивалентны следующим соотношениям:

$$A_\nu^{\hat\alpha} = B_\nu^{\hat\alpha} = C_\nu^{\hat\alpha} = D_\nu^{\hat\alpha} = A_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = B_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = C_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = D_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = 0. \tag{20}$$

Этот класс многообразия $E_9$ геометрически характеризуется каждым из следующих свойств: 1) конгруэнции ( $K_1$ ) и ( $K_2$ ) являются цилиндрическими, причем цилиндроидальные линейчатые поверхности этих конгруэнций являются цилиндрами, 2) годографы вектор-функций $\bar e_4$ и $\bar e_5$ являются 3-мерными поверхностями с касательными 3-плоскостями, параллельными векторам $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$.

Действительно, из

$$d\bar e_{\hat\alpha} = \omega_{\hat\alpha}^{\alpha} \bar e_\alpha + \omega_{\hat\alpha}^{\hat\beta} \bar e_{\hat\beta}$$

следует, что годографы вектор-функций $\bar e_4, \bar e_5$ являются 3-мерными поверхностями с касательными 3-плоскостями, параллельными векторам $\bar e_\alpha$ ( $\alpha = 1,2,3$ ) лишь при выполнении условий $A_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = B_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = C_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = D_{\hat\alpha}^{\hat\beta} = 0$.

Кроме того, этот класс обладает еще одним свойством: конгруэнция ( $K$ ) и конгруэнция ( $\tilde K$ ) прямых, определяемых уравнением

$$\bar R = \bar A + x^1 \bar e_1 + x^2 \bar e_2,$$

при любых $x_1, x_2$ образует центроаффинно-расслояемую от ( $\tilde K$ ) к ( $K$ ) пару.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Докажем существование подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$, определяемого натуральными уравнениями (20). Из этих уравнений следует, что вдоль этого подмногообразия $\omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\nu}} = \omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\nu}} = 0$. Дифференцируя эти равенства внешним образом, получаем

$$\omega^3_1 = \lambda^3_1 \omega^3_4, \quad \omega^3_2 = \lambda^3_2 \omega^3_4, \quad \omega^4_3 = \lambda^4_3 \omega^3_4,$$
$$\omega^5_3 = \lambda^5_3 \omega^3_4, \quad \omega^3_5 = \lambda^3_5 \omega^3_4.$$

Внешнее дифференцирование этих соотношений новых конечных соотношений не дает. Подставив в (12) все полученные соотношения, выбрав формы $\omega^1_4, \omega^3_4, \omega^1_5, \omega^2_5$ в качестве базисных и продифференцировав полученные соотношения внешним образом получим систему квадратичных уравнений:

$$[\Delta\tilde{A}^{\nu}_{\alpha}, \omega^1_4] + [\Delta\tilde{B}^{\nu}_{\alpha}, \omega^3_4] + [\Delta\tilde{C}^{\nu}_{\alpha}, \omega^1_5] + [\Delta\tilde{D}^{\nu}_{\alpha}, \omega^2_5] = 0,$$
$$[\Delta\tilde{A}^2_4, \omega^1_4] + [\Delta\tilde{B}^2_4, \omega^3_4] + [\Delta\tilde{C}^2_4, \omega^1_5] + [\Delta\tilde{D}^2_4, \omega^2_5] = 0, \qquad (21)$$
$$[\Delta\lambda^3_1, \omega^3_4] = 0, \quad [\Delta\lambda^3_2, \omega^3_4] = 0,$$
$$[\Delta\lambda^4_3, \omega^3_4] = 0, \quad [\Delta\lambda^5_3, \omega^3_4] = 0, \quad [\Delta\lambda^3_5, \omega^3_4] = 0.$$

Здесь $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ - коэффициенты в разложении каждой формы, входящей в деривационные формулы подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$ по базису $\omega^1_4, \omega^3_4, \omega^1_5, \omega^2_5$. Выражения $\Delta\tilde{A}$ и т.д. означают: $\Delta\tilde{A} = d\tilde{A} + \Omega$, где вид формы $\Omega$ не имеет значения. Условие эквиаффинности в (21) учтено, поэтому отсутствуют уравнения, содержащие $\tilde{A}^3_3$, $\tilde{B}^3_3$, $\tilde{C}^3_3$, $\tilde{D}^3_3$. Система (21) стандартная [4], поэтому она в инволюции и широта ее решения - 7 функций 4 аргументов. С таким же произволом существуют подмногообразия $\tilde{\Psi}_4$ многообразия $E_9$, определяемые натуральными уравнениями (20). Ясно, что существует класс многообразий $E_9$ такого вида, но широта этого класса остается неизвестной.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



## ЛИТЕРАТУРА

1. Л.М.Шепеленко. Проективное изгибание двупараметрического семейства ( $p-1$ )-плоскостей в ( $2p-1$ )-мерном проективном пространстве. Геом. сб., 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 29 - 38.
2. В.И.Близникас, К.Н.Гринцевичюс. О неголономной линейчатой геометрии. Третья Прибалтийская геом. конференция. Тезисы докладов, Паланга, 1968, 21 - 25.
3. В.Т.Базылев. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства. Изв.вузов. Математика , 2(51), 1966, 9 - 19.
4. Р.Н.Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1971.
5. Р.М.Гейдельман. Теория аналитических конгруэнций плоскостей в комплексных и двойных неевклидовых пространствах и проективная теория конгруэнций пар плоскостей. Мат. сб. 49(91), 3, 1959, 281 - 316.
6. Mayer O. Geometrie centro-affine differentielle des surfaces. Ann. Sci. Univ. Jassy, 21, 1934, 1 - 77.
7. Н.М.Онищук. Пара, состоящая из конгруэнции и поверхности, в центроаффинном пространстве. Геом. сб., 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 111 - 123.
8. Л.И.Магазинников. Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций. Геом. сб., 5 (Труды Томского ун-та, 181), 1966, 43 - 56,
9. Г.Ф.Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, 2, 1963, 275 - 383,

Поступила 1 марта 1971 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

И.А.ПЕЧНИКОВ

# О ПФАФФОВЫХ СЕМЕЙСТВАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ В ТРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной работе изучаются однопараметрические семейства параболических цилиндров (семейства $Ц_1$), а также пфаффовы(неголономные и голономные) 2-семейства указанных элементов (семейства $Ц_2$) в $A_3$. Часть приведенных здесь результатов опубликована в заметке [7].

§1. О пфаффовых многообразиях в $A_n$. Будем подразумевать под термином "элемент $F$" всякую совокупность конечного числа $m_\alpha$-мерных плоскостей и $m_\beta$-мерных квадрик $(0 \leqslant m_\alpha \leqslant n-1;\ 1 \leqslant m_\beta \leqslant n-1;\ \alpha=1,2,..,k;\ \beta=1,2,...,\ell)$ пространства $A_n$, что обобщает определение элемента, данное Р.Н.Щербаковым ([6], 113). Так как "элемент $F$" в указанном смысле является фигурой в смысле работ [3] и [5], то, наряду с термином "элемент", будем употреблять слово "фигура". Относительно произвольного репера $\{\bar{A}, \bar{m}_i\}$ $(i=1,2,...,n)$ элемент $F$ можно задать совокупностью $k$ систем вида

$$x^{\check{\imath}} = \beta^{\check{\imath}}_{\alpha\hat{\imath}} x^{\hat{\imath}} + \beta^{\check{\imath}}_{\alpha} \qquad (1.1)$$

$(\hat{\imath}=1,2..,m_\alpha;\ \check{\imath}=m_\alpha+1,..,n;\ \alpha=1,2,..,k)$ и $\ell$ систем вида

$$\begin{cases} x^{\check{\imath}} - \beta^{\check{\imath}}_{\beta\hat{\imath}} x^{\hat{\imath}} - \beta^{\check{\imath}}_{\beta} = 0 \\ a_{\beta\hat{\imath}\hat{k}} x^{\hat{\imath}} x^{\hat{k}} + a_{\beta\hat{\jmath}} x^{\hat{\jmath}} + a_{\beta} = 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

$(\hat{\imath},\hat{k}=1,2,...,m_\beta;\ \check{\imath}=m_\beta+1,...,n;\ \beta=1,2,...,\ell)$.

Жанром (ср.[4]) фигуры $F$ называется число $g$ ее независимых инвариантов $J_\tau$ $(\tau=1,2,...,g)$ относительно группы $L_n$ всех аффинных преобразований пространства $A_n$.

Пространством $\mathfrak{N}F$ фигур $F$ называется совокупность всех фигур, которые могут быть заданы системами (1.1) – (1.2) при всевозможных, сохраняющих жанр фигуры, значениях

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



коэффициентов $\beta^{i}_{\alpha i}$, $\beta^{i}_{\alpha}$, $\beta^{i}_{\beta i}$, $\beta^{i}_{\beta}$, $a_{\beta i k}$, $a_{\beta j}$, $a_{\beta}$.

Размерность $N$ пространства $\pi F$ равна числу существенных параметров, от которого зависит множество $\pi F$ всех фигур $F$.

Каждому элементу $F \in \pi F$ по некоторому закону ставится в соответствие точка $N$-мерного арифметического пространства, соответствующая значениям $N$ существенных параметров, определяющих фигуру $F$. Указанное арифметическое пространство будем называть пространством параметров, а координаты его точек - основными параметрами.

Рассмотрим (локально) расслоение-произведение ([1], 22) $\xi(\pi F \times L^{*}_{n}, p, \pi F)$, где $\pi F$ - база, $L^{*}_{n}$ - множество $\{\varrho\}$ всех реперов пространства $A_n$ (очевидно, что $L^{*}_{n}$ изоморфно $L_n$), $p$ - проекция расслоения, ставящая в соответствие любой паре $(F,\varrho) \in \pi F \times L^{*}_{n}$ ее первый элемент $F$. Репер $\varrho$ пары $(F\varrho)$ по отношению к фигуре $F$, принадлежащей этой паре, называется локальным репером фигуры $F$.

Деривационные формулы произвольного репера $\varrho$, фигурирующего в расслоении-произведении $\xi$, имеют вид

$$d\bar{A} = \Omega^{i}\bar{m}_{i}, \qquad d\bar{m}_{k} = \Omega^{i}_{k}\bar{m}_{i}, \tag{1.3}$$

где $\Omega^{i} \equiv \omega^{i} + \pi^{i}$, $\Omega^{i}_{k} \equiv \omega^{i}_{k} + \pi^{i}_{k}$, $\omega^{i}$ и $\omega^{i}_{k}$ - формы Пфаффа, содержащие дифференциалы только основных параметров, $\pi^{i}$, $\pi^{i}_{k}$ - соответствующие формы, содержащие дифференциалы только параметров группы $L_n$ (вторичных параметров При этом выполняются уравнения структуры аффинного пространства

$$D\Omega^{i} = \Omega^{j} \wedge \Omega^{i}_{j}, \quad D\Omega^{i}_{k} = \Omega^{j}_{k} \wedge \Omega^{i}_{j}, \tag{1.4}$$

где $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Включением элемента (фигуры) $F$ в репер будем называть сокращение ([1], 108) $\xi \leftarrow \xi_0$ расслоения-произведения $\xi$ до подрасслоения $\xi_0(\pi F \times H^{*}, p, \pi F)$, где $H^{*}$ -

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



множество всех реперов, относительно которых фигура $F$ задается одними и теми же локальными каноническими уравнениями (т.е. уравнениями, в которых коэффициенты суть либо нули, либо единицы, либо инварианты фигуры $F$ ).

Сокращение $\xi \leftarrow \xi_0$ индуцирует вложение $L_n \leftarrow H$ подгруппы $H$ стационарности фигуры $F$ в группу $L_n$. Этому вложению соответствует вложение алгебры Ли группы Ли $H$ в алгебру Ли группы Ли $L_n$, которое аналитически задается вполне интегрируемой системой $N-g$ уравнений Пфаффа

$$\Pi_\gamma \equiv c_{\gamma i}\pi^i + c_{\gamma i}^k \pi_k^i = 0 \quad (\gamma = 0,1,\dots, N-g-1), \qquad (1.5)$$

где $c_{\gamma i}$, $c_{\gamma i}^k$ - постоянные.

После включения элемента в репер формы

$$\vartheta^\gamma \equiv c_\gamma \Omega^i + c_{\gamma i}^k \Omega_k^i \qquad (1.6)$$

содержат дифференциалы только основных параметров. Присоединяя к совокупности форм $\vartheta^\gamma$ формы $\vartheta^\beta = dJ_\beta$ ( $\beta = N-g,\dots$ $\dots, N-1$ ; $J_\beta$ - инварианты фигуры $F$ ), получаем систему форм $\vartheta^\alpha$ $(\alpha = 0,1,\dots, N-1)$ , одновременное обращение в нуль которых дает условия стационарности фигуры $F$ в пространстве. $\pi F$.

Пусть в расслоении-произведении $\xi_0(\pi F \times H^*_p, \pi F)$ произведено произвольное сечение $S$ ([1], 23). Это сечение можно осуществить, полагая оставшиеся нефиксированными при включении элемента в репер вторичные параметры некоторыми функциями основных параметров и сопоставляя тем самым каждому элементу $F \in \pi F$ некоторый единственный (хотя и произвольно выбранный) репер, который, по аналогии с подвижным репером голономного многообразия ([6], 114), будем называть подвижным репером пространства $\pi F$.

Пусть

$$\bar{\omega}^{\tilde\alpha} \equiv \bar\vartheta^{\tilde\alpha} - \bar\Lambda_{\hat\alpha}^{\tilde\alpha}\bar\vartheta^{\hat\alpha} = 0 \qquad (1.7)$$

система Пфаффа, где $\bar\vartheta^\alpha$ - значения форм $\vartheta^\alpha$ относительно

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



произвольного подвижного репера, $\bar{\Lambda}^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$ - произвольные функции основных параметров; $\hat{\alpha} = 0,1,\ldots,p-1$; $\tilde{\alpha} = p,\ldots,N-1$; $\operatorname{rang}\| \bar{\Lambda}^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \| = N-p$. Независимо от того, является система (1.7) вполне интегрируемой или нет, через произвольный элемент $F_0 \in \pi F$ всегда проходит некоторая совокупность $\Phi_p(F_0)$ однопараметрических семейств фигур $F$, удовлетворяющих указанной системе. Множество $\Phi_p$ всех таких совокупностей (когда $F_0$ пробегает $\pi F$) будем называть (ср. [2]) пфаффовым $p$-семейством фигур $F$ или, кратко, семейством $(F)_p$. Если система (1.7) вполне интегрируема, семейство $(F)_p$ расслаивается на $p$-параметрические семейства фигур $F$, каждое из которых называется голономным $p$-семейством фигур $F$ или семейством $(F)_p$.

Пусть $\Phi_p$ - некоторое (в общем случае, неголономное) семейство $(F)_p$, заданное системой (1.7). Подмногообразием $\Psi_m$ семейства $(F)_p$ будем называть совокупность всех семейств $(F)_1$, задаваемых системой

$$\begin{cases} \bar{\theta}^{\tilde{\alpha}} = 0 \\ \bar{H}^{\sigma} \equiv \bar{\mu}^{\sigma}_{\hat{\alpha}} \theta^{\hat{\alpha}} = 0 \end{cases} \qquad (1.8)$$

($\hat{\alpha} = 0,1,\ldots,p-1$; $\tilde{\alpha} = p,\ldots,N-1$; $\sigma = 1,2,\ldots,p-m$; $\bar{\mu}^{\sigma}_{\hat{\alpha}}$ - произвольные функции основных параметров), полученной присоединением к системе (1.7) $p-m$ линейно-независимых уравнений Пфаффа. Если система (1.8) не вполне интегрируема, подмногообразие $\Psi_m$ называется неголономным.

Для голономного семейства $(F)_p$ указанное определение подмногообразия $\Psi_m$ совпадает с определением $\Psi_m$, данным Р.Н.Щербаковым ([6], 142).

Произвольное семейство $(F)_1$, проходящее через фиксированный элемент $F_0$, можно задать уравнениями:

$$\bar{\theta}^0 : \bar{\theta}^1 : \ldots : \bar{\theta}^{N-1} = a^0 : a^1 : \ldots : a^{N-1}, \qquad (1.9)$$

где $a^0, \ldots, a^{N-1}$ - произвольные функции основных параметров. Ставя в соответствие каждому набору чисел $(a^0_0 : a^1_0 : \ldots : a^{N-1}_0)$, являющихся значениями функций $a^{\alpha}$ $(\alpha = 0,1,\ldots,N-1)$ для некоторого фиксированного элемен-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



та $F_0 \in \pi F$, соответствующую точку $(N-1)$ -мерного проективного пространства $P_{N-1}$, получаем отображение множества $\pi_1(F_0)$ всех семейств $(F)_1$, проходящих через элемент $F_0$, в $P_{N-1}$. При этом каждому семейству $(F)_p$, содержащему $F_0$, соответствует некоторая $(p-1)$ -плоскость в $P_{N-1}$. Указанное отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке $x \in P_{N-1}$ соответствуют все семейства $(F)_1$, для которых соответствующие кривые в пространстве параметров имеют в точке, соответствующей $F_0$, общую касательную. Построенное отображение будем называть [6] диаграммой Циндлера или $Z$ -диаграммой.

Каноническим репером семейства $(F)_p$, определяемого системой вида (1.7), называется такой подвижной репер этого семейства, который инвариантно связан для каждого элемента $F_0 \in \pi F$ с совокупностью $\pi_1(F_0)$ семейств $(F)_1$, содержащих $F_0$ и удовлетворяющих указанной системе.

Деривационные формулы канонического репера можно записать в виде

$$d\mathring{A} = (\mathring{L}^i_{\hat{\alpha}}\mathring{\theta}^{\hat{\alpha}} + \mathring{K}^i_{\tilde{\alpha}}\mathring{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\mathring{m}_i,$$
$$d\mathring{m}_k = (\mathring{L}^i_{k\hat{\alpha}}\mathring{\theta}^{\hat{\alpha}} + \mathring{K}^i_{k\tilde{\alpha}}\mathring{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\mathring{m}_i. \qquad (1.10)$$

Здесь $\mathring{\theta}^{\hat{\alpha}}$, $\mathring{\Theta}^{\tilde{\alpha}}$ представляют собой значения форм $\bar{\theta}^{\hat{\alpha}}$ и $\bar{\Theta}^{\tilde{\alpha}}$ для данного канонического репера; $\mathring{L}^i_{\hat{\alpha}}, \mathring{L}^i_{k\hat{\alpha}}, \mathring{K}^i_{\tilde{\alpha}}, \mathring{K}^i_{k\tilde{\alpha}}$ - инварианты семейства $(F)_p$ (или константы).

Каждый из инвариантов $\mathring{L}^i_{\hat{\alpha}}$, $\mathring{L}^i_{k\hat{\alpha}}$ семейства $(F)_p$ является инвариантом для $\Psi_1$ данного семейства, заданного системой

$$\mathring{\theta}^{\tau} = 0 \quad (\tau = 0,1,\ldots,\hat{\alpha}-1,\hat{\alpha}+1,\ldots,p-1). \qquad (1.11)$$

Функции $\mathring{K}^i_{\tilde{\alpha}}$ и $\mathring{K}^i_{k\tilde{\alpha}}$ не являются инвариантами такого $\Psi_1$. Будем называть инварианты $\mathring{L}^i_{\hat{\alpha}}, \mathring{L}^i_{k\hat{\alpha}}$ - внутренними, а $\mathring{K}^i_{\tilde{\alpha}}$ и $\mathring{K}^i_{k\tilde{\alpha}}$ - внешними инвариантами семейства $(F)_p$.

Аналитически канонизацию репера можно осуществить следующим образом.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Пусть

$$\Theta^{\tilde{\alpha}} \equiv \vartheta^{\tilde{\alpha}} - \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \vartheta^{\hat{\alpha}} = 0 \qquad (1.12)$$

( $\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$ - функции как основных, так и оставшихся нефиксированными после включения элемента в репер вторичных параметров) - система Пфаффа, определяющая расслоение-произведение $\xi^*(\Phi_\rho \times H^*, p^*, \Phi_\rho)$, где $\Phi_\rho$ - некоторое семейст $(F)_\rho$ , $p^*$- проекция расслоения, ставящая в соответствие каждой паре $(\Phi_\rho(F), \varrho)$ , (где $\Phi_\rho(F)$ - совокупность семейств $(F)_1$ , проходящих через произвольный элемент $F \in \pi F$ и принадлежащих данному семейству $(F)_\rho$ ; $\varrho \in H^*$ ) ее первый элемент $\Phi_\rho(F)$.

При произвольном сечении $S$ в $\xi^*$ система (1.12 превращается в систему (1.7).

Внешние дифференциалы форм $\Theta^{\tilde{\alpha}}$ суть 2-формы:

$$D\Theta^{\tilde{\alpha}} = D\vartheta^{\tilde{\alpha}} - \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} D\vartheta^{\hat{\alpha}} - d\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \wedge \vartheta^{\hat{\alpha}}. \qquad (1.13)$$

Вследствие вполне интегрируемости системы $\vartheta^\alpha = 0$ , им

$$D\vartheta^\alpha = \eta^\alpha_\beta \wedge \vartheta^\beta, \qquad (1.14)$$

где $\eta^\alpha_\beta$ - формы Пфаффа, зависящие как от основных, так от вторичных параметров; $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, N-1$.

Из (1.12) - (1.14) находим

$$D\Theta^{\tilde{\alpha}} = -\Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} \wedge \vartheta^{\hat{\beta}} + (\eta^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} - \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \eta^{\hat{\alpha}}_{\tilde{\beta}}) \wedge \Theta^{\tilde{\beta}}, \qquad (1.15)$$

где

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} \equiv d\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} + \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \eta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \eta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \Lambda^{\tilde{\beta}}_{\hat{\beta}} (\eta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \eta^{\hat{\alpha}}_{\tilde{\beta}}). \qquad (1.16)$$

Пусть

$$\begin{cases} \Theta^{\tilde{\alpha}} = 0 \\ \vartheta^{\hat{\alpha}} - a^{\hat{\alpha}} dt = 0 \end{cases} \qquad (1.17)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



система Пфаффа, определяющая расслоение-произведение $\xi_1(\Psi_1 \times H^*; p, \Psi_1)$, где $\Psi_1$ - произвольное семейство $(F)_1$, принадлежащее данному семейству $(F)_p$; $t$ - главный параметр этого $\Psi_1$; $a^{\hat{\alpha}}$ - функции как основных, так и вторичных параметров. Система (1.8) вполне интегрируема, так как состоит из $N$ независимых однородных уравнений относительно дифференциалов $N+1$ переменных. Поэтому

$$\left.\begin{array}{l} D\Theta^{\tilde{\alpha}} \\ \\ \Theta^{\tilde{\beta}} = 0 \\ \theta^{\hat{a}} - a^{\hat{a}} dt = 0 \end{array}\right| = 0. \qquad (1.18)$$

Из (1.15) и (1.18) находим

$$a^{\hat{\beta}} \overset{*}{\Delta}{}^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} \wedge dt = 0, \qquad (1.19)$$

где $\overset{*}{\Delta}{}^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ есть $\Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}$, вычисленные для указанного $\Psi_1$.

Из (1.19) следуют равенства

$$a^{\hat{\beta}} \Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}(\pi) = 0, \qquad (1.20)$$

где $\Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}(\pi)$ - значения $\Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ при фиксации всех основных параметров.

Так как равенства (1.20) выполняются для любого $\Psi_1$, имеем

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}(\pi) \equiv \delta\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} + \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \Pi^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \Pi^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \Lambda^{\tilde{\beta}}_{\hat{\beta}} (\Pi^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}} - \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} \Pi^{\hat{\alpha}}_{\tilde{\beta}}) = 0, \qquad (1.21)$$

где $\Pi^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \Pi^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \Pi^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}}, \Pi^{\hat{\alpha}}_{\tilde{\beta}}$ - соответственно значения форм $\eta^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \eta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \eta^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\beta}}, \eta^{\hat{\alpha}}_{\tilde{\beta}}$ при фиксации всех основных параметров, $\delta$ - символ частного дифференциала по вторичным параметрам.

Соотношения (1.21), вид которых не зависит от вполне-интегрируемости системы (1.12), можно использовать для фиксации вторичных параметров аналогично тому, как это делается в известном алгоритме Картана ([6], I, гл.3). В

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



некоторых случаях указанных соотношений бывает достаточно для полной канонизации репера. В общем случае, с помощью (1.12) можно фиксировать лишь часть вторичных параметров. Для продолжения канонизации репера рассмотрим соотношения:

$$\Delta \tilde{a}^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} = \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \vartheta^{\hat{\beta}} + H^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}\tilde{\alpha}} \Theta^{\tilde{\alpha}}, \qquad (1.22)$$

(где $\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, $H^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}\tilde{\alpha}}$ – некоторые новые функции от основных и оставшихся нефиксированными вторичных параметров), имеющие место в силу (1.21).

Соотношения (1.22), в отличие от (1.12), выполняются тождественно. Поэтому, закон изменения функций $\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ и $H^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}\tilde{\alpha}}$ при изменении вторичных параметров можно найти, продифференцировав (1.22) внешним образом, применив лемму Картана, и, записав полученные соотношения при произвольном образом фиксированных основных параметров, т.е. так же, как это делается в алгоритме Картана. Дальнейшая канонизация репера производится в соответствии с алгоритмом Картана.

§2. Z - диаграмма множества $\mathcal{Z}$, Основные классы семейств $\mathcal{U}_1$. Рассмотрим множество $\mathcal{Z}$ всех параболических цилиндров в трехмерной аффинном пространстве. Присоединим к каждому цилиндру $z \in \mathcal{Z}$ подвижной репер $\{\bar{A}, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3\}$ таким образом, чтобы параболический цилиндр $z$ имел в локальных координатах уравнение

$$(x^1)^2 - 2x^2 = 0. \qquad (2.1)$$

Условия стационарности параболического цилиндра $z \in \mathcal{Z}$ имеют вид $\bar{\vartheta}^\alpha = 0$ $(\alpha = 0,1,\dots,5)$, где

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}^0 \equiv \bar{\omega}^1_3, \quad \bar{\theta}^2 \equiv \bar{\omega}^1_2, \quad \bar{\vartheta}^4 \equiv \bar{\omega}^1 - \bar{\omega}^2_1, \\ &\bar{\vartheta}^1 \equiv \bar{\omega}^2_3, \quad \bar{\vartheta}^3 \equiv 2\bar{\omega}^1_1 - \bar{\omega}^2_2, \quad \bar{\vartheta}^5 \equiv \bar{\omega}^2. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Произвольное 1-семейство параболических цилиндров (семейство $\mathcal{U}_1$) задается системой

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\bar{\theta}^0 : \bar{\theta}^1 : \ldots : \bar{\theta}^5 = a^0 : a^1 : \ldots : a^5 \qquad (2.3)$$

$Z$ - диаграмма отображает множество $\pi_1 z$ всех семейств $\mathcal{U}_1$, проходящих через фиксированный элемент $z \in \pi z$, в пятимерное проективное пространство $P_5$.

Характеристика параболического цилиндра, описывающего семейство $\mathcal{U}_1$, определяется системой

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0, \\ a^2 x^1 x^2 + a^0 x^1 x^3 + a^4 x^1 + a^3 x^2 - a^1 x^3 - a^5 = 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Нетрудно показать, что в общем случае эта характеристика может быть получена пересечением параболического цилиндра некоторым гиперболическим цилиндром, асимптотические плоскости которого суть

$$a^0 x^1 - a^1 = 0 \qquad (D \text{ - плоскость}) \quad (2.5)$$

и

$$a^0(a^1 a^2 + a^0 a^3)x^1 + 2(a^0)^2 a^2 x^2 + (a^0)^3 x^3 + (a^1)^2 a^2 + a^0 a^1 a^3 + 2(a^0)^2 a^4 = 0 \qquad (A \text{ - плоскость}). \quad (2.6)$$

$D$ - плоскость пересекает параболический цилиндр по образующей

$$(x^1)^2 - 2x^2 = a^0 x^1 - a^1 = 0 \qquad (A \text{ - образующая}). \quad (2.7)$$

Точку пересечения $A$ -плоскости и $A$ -образующей назовем $A$ -точкой.

Если $\bar{\theta}^0 = 0$, понятия $A$ - образующей и $A$ - плоскости теряют смысл. В этом случае характеристика (2.1) либо пересекает каждую образующую в единственной точке (при $\bar{\theta}^1 \neq 0$), либо распадается на три образующие (если $\theta^1 = 0$). Семейство $\mathcal{U}_1$ этого частного класса назовем семейством $\mathcal{U}_1^{\sim}$. На $Z$ - диаграмме совокупность всех семейств $\mathcal{U}_1^{\sim}$ (содержащих данный элемент $z$) изобразится гиперплоскостью

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$L_4: \quad a^0 = 0. \tag{2.8}$$

Уравнение

$$2(a^0)^3 a^5 - 2(a^0)^2 a^1 a^4 - a^0 (a^1)^2 a^3 - (a^1)^3 a^2 = 0 \tag{2.9}$$

характеризует (при $a^0 \neq 0$) семейства $U_1$, для которых характеристика (2.4) распадается на $A$-образующую и параболу. Семейства $U_1$ этого класса назовем семействами $U_1^0$. На $Z$-диаграмме семейства $U_1^0$ изображаются точками алгебраической гиперповерхности четвертого порядка $S_4^0$ (2.9), не лежащими в $L_4$.

Гиперповерхность $S_4^0$ пересекается с гиперплоскостью $L_4$ по 3-плоскостям

$$L_3^P: \; a^0 = a^2 = 0 \quad \text{и} \quad L_3^Z: \; a^0 = a^1 = 0. \tag{2.10}$$

3-плоскость $L_3^P$ изображает множество всех семейств $U_1$, для которых характеристика (2.4) становится параболой (семейства $U_1^P$), а 3-плоскость $L_3^Z$ – совокупность семейств $U_1$, для которых характеристика распадается на 3 образующих (семейства $U_1^Z$).

Точки 2-плоскости

$$L_2^{ZP}: \; a^0 = a^1 = a^2 = 0, \tag{2.11}$$

общей для 3-плоскостей $L_3^P$ и $L_3^Z$, соответствуют семействам $U_1^{ZP}$, для которых, по крайней мере, одна из образующих, составляющих характеристику (2.4), становится несобственной (семейства $U_1^{ZP}$).

Точки прямой

$$L_1^{ZK} \quad a^0 = a^1 = a^2 = a^3 = 0, \tag{2.12}$$

инцидентной $L_2^{ZP}$, соответствуют семействам $U_1^{ZP}$, для которых характеристика состоит из одной собственной и сдво-енной несобственной образующих (семейства $U_1^{ZK}$). Наконец, семейство $U_1^D$, для которого характеристика не имеет ни

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



одной собственной точки, изображается на $Z$ - диаграмме точкой $D(0:0:0:0:1)$.

§3. $A$ -репер неособого семейства $Ц_1$. Рассмотрим расслоение-произведение $\xi^4(\Phi_1 \times H^*, p, \Phi_1)$, где $\Phi_1$ - произвольное семейство $Ц_1$, не являющееся семейством $Ц_1^4$. Это расслоение-произведение задается вполне интегрируемой системой Пфаффа

$$\theta^{\tilde{\alpha}} = \Lambda^{\tilde{\alpha}} \theta^0 \quad (\tilde{\alpha} = 1,2,3,4,5). \tag{3.1}$$

Выполним фиксацию вторичных параметров так, чтобы $\Lambda^1 = \Lambda^2 = \Lambda^3 = \Lambda^4 = 0$, тем самым приведя уравнение $D$ -плоскости к виду $x^1 = 0$, а уравнение $A$ -плоскости - к виду $x^3 = 0$. Исключая из рассмотрения семейства $Ц_1^0$, положим $\Lambda^5 = 1$.

Характеристика $D$ -плоскости имеет теперь уравнения

$$x^1 = x^3 + \Lambda_1 = 0, \tag{3.2}$$

где $\Lambda_1$ - коэффициент разложения

$$\omega^1 = \Lambda_1 \theta^0,$$

имеющего место после проведенных фиксаций. Исключая случай, когда эта характеристика инцидентна $A$ -плоскости (семейства $Ц_1^c$), зафиксируем $\Lambda_1 = -1$.

Теперь репер полностью канонизирован, и его деривационные формулы можно, положив $\theta^0 = ds$, записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{A}^0}{ds} = -\bar{m}_1^0 + \bar{m}_2^0 - J_1 \bar{m}_3^0, \quad \frac{d\bar{m}_2^0}{ds} = 2J_5 \bar{m}_2^0 - 2J_3 \bar{m}_3^0, \\ &\frac{d\bar{m}_1^0}{ds} = J_5 \bar{m}_1^0 - \bar{m}_2^0 - J_2 \bar{m}_3^0, \quad \frac{d\bar{m}_3^0}{ds} = \bar{m}_1^0 + (J_4 - J_5) \bar{m}_3^0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $ds, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$ - инварианты семейства $Ц_1$. Построенный канонический репер семейства $Ц_1$ будем называть $A$ -репером.

Характеристика плоскости $x^2 = 0$ ($T$ -плоскости) есть

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



прямая

$$x^2 = x^1 - 1 = 0. \qquad (3.4)$$

Из (2.4) и (2.2) следует геометрическое значение нормировок векторов канонического репера.

Характеристические точки параболического цилиндра находятся из системы

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0, \\ x^1 x^3 - 1 = 0, \\ J_3(x^1)^5 + J_2(x^1)^4 + J_1(x^1)^3 - J_4(x^1)^2 + x^1 - 1 = 0, \end{cases} \qquad (3.5)$$

из третьего уравнения которой и известной теоремы Виета вытекает геометрическое значение инвариантов $J_1, J_2, J_3, J_4$. Находя характеристическую точку $R_{ch}(x^1_{ch}, x^2_{ch}, x^3_{ch})$ $T$-плоскости, получаем $x^3_{ch} = 1 - J_5$, откуда $J_5 = 1 - x^3_{ch}$. $A$-линией семейства $\mathcal{U}_1$, назовем кривую $\bar{r}(s) = \bar{A}(s)$. Главным $A$-регулюсом семейства $\mathcal{U}_1$ будем называть регулюс, описываемый $A$-образующей. Нетрудно видеть, что вырождение $A$-регулюса в торс характеризует семейство $\mathcal{U}_1^0$, а вырождение этого регулюса в цилиндроид - семейство $\mathcal{U}_1^c$.

Натуральное уравнение $J_1 = 0$ характеризует семейство $\mathcal{U}_1$, для которого касательная к $A$-линии в каждой ее точке лежит в $A$-плоскости соответствующего параболического цилиндра. При этом характеристика $A$-плоскости содержит $A$-точку.

Равенство $J_2 = 0$ характеризует семейство $\mathcal{U}_1$, для которого $D$-плоскость является аффинно-средней для диаметральных плоскостей параболического цилиндра, проходящих через характеристические точки (2.5)

Натуральное уравнение $J_3 = 0$ характеризует семейство $\mathcal{U}_1$, для которого одна из характеристических точек элемента становится несобственной (семейство $\mathcal{U}_1^H$).

Для семейства $J_3 = J_2 = 0$ две характеристические точки параболического цилиндра несобственные (семейство $\mathcal{U}_1^{Hd}$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Натуральные уравнения $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ характеризуют семейство $Ц_1$, для которого три характеристические точки несобственные (семейство $Ц_1^{нс}$). А-линия семейства $Ц_1^{нс}$ есть прямая.

§4. Исследование семейства $Ц_2$ с помощью Z -диаграммы. Пфаффово 2-семейство параболических цилиндров (семейство $Ц_2$) задается системой Пфаффа

$$\lambda_\beta^{\tilde\alpha}\bar\theta^\beta = 0 \qquad \begin{matrix}\tilde\alpha = 2,3,4,5;\\ \beta = 0,1,\dots,5\end{matrix} \qquad (*)$$

где $\lambda_\beta^{\tilde\alpha}$ - функции основных параметров, $\operatorname{rang}\|\lambda_\beta^{\tilde\alpha}\| = 4$. Если $\bar\theta^0\wedge\bar\theta^1 \neq 0$ (этим исключается случай семейства $Ц_2^{\bar z}$, характеризующегося тем, что оно содержит подмногообразие $\Psi_1$, являющееся семейством $Ц_1^{\bar z}$), указанную систему можно записать в виде

$$\bar\omega^{\tilde\alpha} \equiv \bar\theta_{\hat\alpha}^{\tilde\alpha} - \bar\Lambda_{\hat\alpha}^{\tilde\alpha}\bar\theta^{\hat\alpha} = 0 \quad (\hat\alpha = 0,1;\ \tilde\alpha = 2,3,4,5). \qquad (4.1)$$

Т.к. в системе (4.1) фигурирует восемь коэффициентов, широта множества всех семейств $Ц_2$ - восемь функций шести аргументов.

Произвольное $\Psi_1$ неособого (т.е.не являющегося семейством $Ц_2^{\bar z}$) семейства $Ц_2$ может быть задано уравнением

$$h_{\hat\alpha}\bar\theta^{\hat\alpha} = 0. \qquad (4.2)$$

Характеристика параболического цилиндра вдоль $\Psi_1$ (4.2) имеет уравнения:

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0, \\ (\bar\Lambda_0^2 h_1 - \bar\Lambda_1^2 h_0)x^1x^2 + h_1x^1x^3 + (\bar\Lambda_0^4 h_1 - \bar\Lambda_1^4 h_0)x^1 + \\ + (\bar\Lambda_0^3 h_1 - \bar\Lambda_1^3 h_0)x^2 + h_0x^3 - (\bar\Lambda_0^5 h_1 - \bar\Lambda_1^5 h_0) = 0, \end{cases} \qquad (4.3)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



откуда следует, что через элемент неособого семейства $Ц_2$ проходят в общем случае одно семейство $Ц_1^{L}(\Psi_1^{L})$ и четыре семейства $Ц_1^{0}$, определяемые уравнением

$$\bar{\Lambda}_1^2 h_0^4 - (\bar{\Lambda}_0^2 + \bar{\Lambda}_1^3) h_0^3 h_1 + (2\bar{\Lambda}_1^4 + \bar{\Lambda}_0^3) h_0^2 h_1^2 + \\ + 2(\bar{\Lambda}_1^5 - \bar{\Lambda}_0^4) h_0 h_1^3 - 2\bar{\Lambda}_0^5 h_1^4 = 0. \qquad (4.4)$$

На $\bar{Z}$ - диаграмме этому соответствует то, что прямая в $P_5$, не имеющая общих точек с $L_3^2$, пересекает в единственной точке $L_4$ и в четырех точках - $S_4^0$.

Рассмотрим семейство всех линий на параболическом цилиндре, каждая из которых является характеристикой вида (4.3). Из (4.3) вытекают

Теорема 1. Каждая образующая параболического цилиндра, описывающего неособое семейство $Ц_2$, является $A$ - образующей для единственного $\Psi_1$, содержащего данный цилиндр.

Теорема 2. Любая точка параболического цилиндра - элемента семейства $Ц_2$ принадлежит единственной характеристике вида (4.3) либо всем линиям указанного вида.

Будем называть точки, через которые проходят все характеристики, фокусами параболического цилиндра.

Для нахождения фокусов получаем систему:

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0, \\ \bar{\Lambda}_1^2 x^1 x^2 + \bar{\Lambda}_1^4 x^1 + \bar{\Lambda}_1^3 x^2 - x^3 - \bar{\Lambda}_1^5 = 0 \\ \bar{\Lambda}_1^2 (x^1)^4 + (\bar{\Lambda}_0^2 + \bar{\Lambda}_1^3)(x^1)^3 + (2\bar{\Lambda}_1^4 + \bar{\Lambda}_0^3)(x^1)^2 + \\ + 2(\bar{\Lambda}_0^4 - \bar{\Lambda}_1^5) x^1 - 2\bar{\Lambda}_0^5 = 0, \end{cases} \qquad (4.5)$$

из которой видно, что элемент неособого семейства $Ц_2$ имеет в общем случае четыре фокуса.

Из формул (2.7), (4.3) и (4.5) вытекает

Теорема 3. Образующая параболического цилиндра, описывающего неособое семейство $Ц_2$, является $A$ - образу-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ющей для $\Psi_1^0$ тогда и только тогда, когда она содержит фокус.

Ниже характеризуются важнейшие частные классы семейств $\mathcal{U}_2$. Каждый из этих классов аналитически характеризуется непротиворечивыми конечными соотношениями (которые в ряде случаев для краткости не выписаны) на коэффициенты $\lambda_\beta^\alpha(\Lambda_\alpha^\alpha)$ Поэтому все указанные классы существуют, и их произвол подсчитывается арифметически.

В зависимости от расположения фокусов (а следовательно, и подмногообразий $\Psi_1^0$) можно выделить следующие частные классы неособых семейств $\mathcal{U}_2$.

Семейство $\mathcal{U}_2^T$ характеризуется тем, что его элемент имеет один сдвоенный и два простых фокуса. На $\mathcal{Z}$ - диаграмме семейство $\mathcal{U}_2^T$ изображается прямой, касающейся гиперповерхности $S_4^0$.

Семейство $\mathcal{U}_2^D$ - тем, что описывающий его параболический цилиндр имеет два сдвоенных фокуса и изображается на $\mathcal{Z}$ - диаграмме двойной касательной к $S_0^4$.

Семейство $\mathcal{U}_2^\tau$ - наличием одного строенного и одного простого фокусов.

Семейство $\mathcal{U}_2^a$ - тем, что все четыре фокуса совпадают.

Семейство $\mathcal{U}_2^P$ $\bar{\Lambda}_1^2=0$ - тем, что, по крайней мере, один из фокусов становится несобственным, $\Psi_1^L$ является семейством $\mathcal{U}_1^P$, и изображается на $\mathcal{Z}$ - диаграмме прямой, имеющей общую точку с $L_3^P$.

Семейство $\mathcal{U}_2^{PD}$ - тем, что один фокус несобственный, один собственный сдвоенный и один собственный простой.

Для семейства $\mathcal{U}_2^{P\tau}$ один фокус является несобственным, а остальные три совпадают между собой.

Семейство $\mathcal{U}_2^{PT}$ $\bar{\Lambda}_1^2=\bar{\Lambda}_0^2+\bar{\Lambda}_1^3=0$ характеризуется тем, что, по крайней мере, два фокуса его элемента - несобственные.

Для семейства $\mathcal{U}_2^{PTO}$ два фокуса несобственные, а остальные два - собственные и совпадают между собой.

Семейство $\mathcal{U}_2^{P\ell}$ $\bar{\Lambda}_1^2=\bar{\Lambda}_0^2+\bar{\Lambda}_1^3=2\bar{\Lambda}_1^4+\bar{\Lambda}_0^3=0$ характеризуется тем, что три фокуса параболического цилиндра несобственные.

Семейство $\mathcal{U}_2^A$, для которого обращаются в нуль все коэффициенты третьего уравнения системы (4.5), кроме $\bar{\Lambda}_0^5$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



характеризуется тем, что его элемент не имеет ни одного собственного фокуса.

Наконец, семейство $\mathcal{U}_2^0$, для которого третье уравнение системы (4.5) образуется в тождество, характеризуется тем, что все $\Psi_1$, кроме $\Psi^L$, являются семействами $\mathcal{U}_1^0$. Элемент семейства $\mathcal{U}_2^0$ имеет бесконечное множество фокусов, заполняющих параболу

$$(x^1)^2 - 2x^2 = \bar{\Lambda}_1^4 x^1 + \bar{\Lambda}_1^3 x^2 - x^3 - \bar{\Lambda}_1^5 = 0, \qquad (4.6)$$

являющуюся характеристикой параболического цилиндра вдоль $\Psi_1^L$. На $Z$ - диаграмме семейство $\mathcal{U}_2^0$ изображается прямой, целиком принадлежащей гиперповерхности $S_4^0$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{U}_2^Z$. На $Z$ - диаграмме оно изображается некоторой прямой в $P_5$, имеющей общую точку с $L_3^Z$. Для семейства $\mathcal{U}_2^Z$ общего вида эта прямая пересекает $S_4^0$ в единственной не лежащей в $L_3^Z$ точке, что соответствует тому, что в общем случае семейство $\mathcal{U}_2^Z$ имеет единственное $\Psi_1^0$, не являющееся $\Psi_1^L$. Исследуя различные возможные случаи пересечения прямой в $P_5$, имеющей общую точку с $L_3^Z$, с гиперповерхностью $S_4^0$ и плоскостями $L_3^Z, L_3^P, L_2^{ZP}, L_1^{ZK}$ можно выделить следующие частные классы семейств $\mathcal{U}_2^Z$.

Семейство $\mathcal{U}_2^{ZO}$ характеризуется тем, что все $\Psi_1$, кроме $\Psi_1^Z$, являются семействами $\mathcal{U}_1^0$.

Семейство $\mathcal{U}_2^{ZR}$ - тем, что оно не содержит $\Psi_1^0$,

Семейство $\mathcal{U}_2^{ZP}$ - тем, что оно содержит $\Psi_1^{ZP}$,

Семейство $\mathcal{U}_2^{ZK}$ - тем, что оно содержит $\Psi_1^{ZP}$,

Семейство $\mathcal{U}_2^{ZD}$ - тем, что оно содержит $\Psi_1^D$.

Семейством $\mathcal{U}_2^Z$ является также семейство $\mathcal{U}_2^L$ характеризующееся тем, что все $\Psi_1$ являются семействами $\mathcal{U}_1^L$. В общем случае семейство $\mathcal{U}_2^L$ имеет единственное $\Psi_1^Z$ и единственное $\Psi_1^P$. Можно выделить следующие подклассы семейств $\mathcal{U}_2^L$: семейство $\mathcal{U}_2^{PA}$, все $\Psi_1$ которого суть семейства $\mathcal{U}_1^P$, семейство $\mathcal{U}_2^{ZA}$, все $\Psi_1$ которого суть семейства $\mathcal{U}_1^Z$.

Семейство $\mathcal{U}_2^{ZA}$ в общем случае содержит единственное $\Psi_1^{ZP}$. Отметим случаи, когда это $\Psi_1^{ZP}$ есть $\Psi_1^{ZK}$ (семейство $\mathcal{U}_2^{ZAK}$) и, когда оно является $\Psi_1^D$ (семейство $\mathcal{U}_2^{ZAD}$). Семейство $\mathcal{U}_2^{ZPA}$ характеризуется тем, что все $\Psi_1$ суть $\Psi_1^{ZP}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



В частном случае оно может содержать $\Psi_1^D$ (семейство $\mathcal{U}_2^{2PAD}$ Наконец, семейство $\mathcal{U}^{3KA}$ характеризуется тем, что все $\Psi_1$ являются семействами $\mathcal{U}^{3K}$, На $Z$ - диаграмме оно изображается прямой (2.12).

§5. $\Phi$ -репер неособого семейства $\mathcal{U}_2$. Пусть

$$\Theta^{\tilde\alpha} \equiv \vartheta^{\tilde\alpha} - \Lambda_{\hat\alpha}^{\tilde\alpha}\vartheta^{\hat\alpha} = 0 \quad \begin{pmatrix} \hat\alpha = 0,1; \\ \tilde\alpha = 2,3,4,5 \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

система Пфаффа, определяющая расслоение-произведение $\xi^*(\Phi_2 \times H^*, \rho, \Phi_2)$, где $\Phi_2$ - некоторое неособое (т.е. не являющееся семейством $\mathcal{U}_2^2$) семейство $\mathcal{U}_2$. Аналитически канонизируем репер, полагая $\Lambda_0^5 = \Lambda_1^5 = \Lambda_0^2 = \Lambda_0^3 = 0$, $\Lambda_0^4 = -1$, $\Lambda_1^2 + \Lambda_1^3 + 2\Lambda_1^4 = 2$. При этом начало репера помещается в один из фокусов параболического цилиндра, в качестве координатных плоскостей выбираются соответственно $D$-, $T$- и $A$ - плоскости параболического цилиндра относительно $\Psi_1^0$, соответствующего фокусу, в который помещено начало репера, и нормировка векторов репера производится так, чтобы один из фокусов параболического цилиндра имел координаты $(1, \frac{1}{2}, 1)$. Построенный канонический репер будем называть $\Phi$ -репером неособого семейства $\mathcal{U}_2$. Для семейств $\mathcal{U}_2^D$, $\mathcal{U}_2^Q$, $\mathcal{U}_2^{P\tau}$, $\mathcal{U}^{P\tau\sigma}$, $\mathcal{U}_2^{P\varepsilon}$, $\mathcal{U}^A$ и $\mathcal{U}_2^0$ построить $\Phi$ -репер нельзя.

Деривационные формулы $\Phi$ -репера неособого семейства $\mathcal{U}_2$, которое в общем случае неголономно, имеют вид:

$$\begin{aligned}
d\mathring{\Phi}_0 &= (\mathring{L}_{\hat\alpha}^1\vartheta^{\hat\alpha} + \mathring{K}_{\tilde\alpha}^1\mathring{\Theta}^{\tilde\alpha})\mathring{\bar m}_1 + \mathring{\Theta}^5\mathring{\bar m}_2 + (\mathring{L}_{\hat\alpha}^3\vartheta^{\hat\alpha} + \mathring{K}_{\tilde\alpha}^3\mathring{\Theta}^{\tilde\alpha})\mathring{\bar m}_3,\\
d\mathring{\bar m}_1 &= (\mathring{L}_{1\hat\alpha}^1\vartheta^{\hat\alpha} + \mathring{K}_{1\tilde\alpha}^1\mathring{\Theta}^{\tilde\alpha})\mathring{\bar m}_1 + \{(\mathring{L}_0^1+1)\vartheta^0 + (\mathring{L}_1^1 - J_2)\vartheta^1 +\\
&\quad + \mathring{K}_2^1\mathring{\Theta}^2 + \mathring{K}_3^1\mathring{\Theta}^3 + (\mathring{K}_4^1-1)\mathring{\Theta}^4 + \mathring{K}_5^1\mathring{\Theta}^5\}\mathring{\bar m}_2 + (\mathring{L}_{1\hat\alpha}^3\vartheta^{\hat\alpha} + \mathring{K}_{1\hat\alpha}^3\mathring{\Theta}^{\tilde\alpha})\mathring{\bar m}_3,\\
d\mathring{\bar m}_2 &= (J_1\vartheta^1 + \mathring{\Theta}^2)\mathring{\bar m}_1 + \{2\mathring{L}_{10}^1\vartheta^0 + (2\mathring{L}_{11}^1 + J_1 + 2J_2 - 2)\vartheta^1 +\\
&\quad + 2\mathring{K}_{12}^1\mathring{\Theta}^2 + (2\mathring{K}_{13}^1 - 1)\mathring{\Theta}^3 + 2\mathring{K}_{14}^1\mathring{\Theta}^4 + 2\mathring{K}_{15}^1\mathring{\Theta}^5\}\mathring{\bar m}_2 +
\end{aligned} \qquad (5.2)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$+(\overset{\circ}{L}{}^{3}_{2\alpha}\overset{\circ}{\theta}{}^{\alpha}+\overset{\circ}{K}{}^{3}_{2\alpha}\overset{\circ}{\Theta}{}^{\alpha})\bar{m}_3,$$

$$d\bar{m}_3=\overset{\circ}{\theta}{}^{0}\bar{m}_1+\overset{\circ}{\theta}{}^{1}\bar{m}_2+(\overset{\circ}{L}{}^{3}_{3\alpha}\overset{\circ}{\theta}{}^{\alpha}+\overset{\circ}{K}{}^{3}_{3\alpha}\overset{\circ}{\Theta}{}^{\alpha})\bar{m}_3,$$

где $\overset{\circ}{\theta}{}^{\alpha}$, $\overset{\circ}{\Theta}{}^{\alpha}$, $J_1$, $J_2$ представляют собой значения форм $\theta^{\alpha}$ и $\Theta^{\alpha}$ и функций $\Lambda^2_1$ и $\Lambda^4_1$ для $\Phi$ -репера; $J_1, J_2, \overset{\circ}{L}{}^{1}_{0}, \overset{\circ}{L}{}^{1}_{1}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{1}, \overset{\circ}{L}{}^{1}_{10}, \overset{\circ}{L}{}^{1}_{11}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{10}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{11}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{20}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{21}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{30}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{31}$ - внутренние инварианты, $\overset{\circ}{K}{}^{1}_{2\alpha}, \overset{\circ}{K}{}^{1}_{3\alpha}, \overset{\circ}{K}{}^{1}_{1\alpha}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{1\alpha}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{2\alpha}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{3\alpha}$ - внешние инварианты неособого семейства $\mathcal{U}_2$. Все инварианты являются в общем случае функциями шести аргументов и удовлетворяют условиям вполне интегрируемости уравнений (5.2).

Фокусы параболического цилиндра суть точки $\Phi_0(0,0,0)$ $\Phi_1(1,\frac{1}{2},1)$ и точки $\Phi_2$ и $\Phi_3$ определяемые системой

$$(\overset{\circ}{x}{}^{1})^2-2\overset{\circ}{x}{}^{2}=\overset{\circ}{x}{}^{3}-1=J_1(\overset{\circ}{x}{}^{1})^2+2(1-J_2)\overset{\circ}{x}{}^{1}+2=0, \qquad (5.3)$$

откуда видно геометрическое значение инвариантов $J_1$ и $J_2$. Геометрический смысл остальных внутренних инвариантов неособого семейства $\mathcal{U}_2$ устанавливаем, выражая их через координаты характеристических точек параболического цилиндра вдоль инвариантных подмногообразий $\overset{\circ}{\theta}{}^{0}=0$ и $\overset{\circ}{\theta}{}^{1}=0$. Геометрическое значение внешних инвариантов устанавливается при рассмотрении семейств $\mathcal{U}_1$, проходящих через произвольный элемент $z$ данного семейства $\mathcal{U}_2$ и не принадлежащих этому семейству. Условия голономности неособого семейства имеют в терминах $\Phi$ -репера вид:

$$\begin{aligned}
&\eta_1\equiv\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1}-\overset{\circ}{L}{}^{3}_{0}+J_2\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0}=0;\\
&\eta_2\equiv(\tfrac{1}{2}J_1-J_2+2)(\overset{\circ}{L}{}^{1}_{10}+\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0}+1)-\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1}-\overset{\circ}{L}{}^{3}_{1}-\overset{\circ}{L}{}^{3}_{10}-\\
&\quad-\overset{\circ}{L}{}^{3}_{11}-\tfrac{1}{2}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{20}-\tfrac{1}{2}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{21}-\overset{\circ}{L}{}^{3}_{30}-\overset{\circ}{L}{}^{3}_{31}=0,\\
&\eta_3\equiv J_{20}+\{J_2(\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1}-\overset{\circ}{L}{}^{1}_{10}+\overset{\circ}{L}{}^{3}_{30})-(2-2J_2-J_1)\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0}+\\
&\quad+\overset{\circ}{L}{}^{3}_{0}+\overset{\circ}{L}{}^{3}_{1}+\overset{\circ}{L}{}^{3}_{31}\}=0,\\
&\eta_4\equiv J_{10}+J_1(\overset{\circ}{L}{}^{3}_{30}-3\overset{\circ}{L}{}^{1}_{10}+\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1}-J_2)+\overset{\circ}{L}{}^{3}_{21}=0,
\end{aligned} \qquad (5.4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



где $J_{10}, J_{20}$ – функции, стоящие в тождествах:

$$dJ_1 = J_{1\hat{\alpha}}\mathring{\theta}^{\hat{\alpha}} + J_{1\tilde{\alpha}}\mathring{\Theta}^{\tilde{\alpha}},\quad dJ_2 = J_{2\hat{\alpha}}\mathring{\theta}^{\hat{\alpha}} + J_{2\tilde{\alpha}}\mathring{\Theta}^{\tilde{\alpha}} \qquad (5.5)$$

Деривационные формулы $\Phi$ -репера голономного неособого семейства $U_2$ получаем, полагая в (5.2) $\mathring{\Theta}^{\tilde{\alpha}} = 0$ при выполнении условий (5.4). Инварианты $\mathring{L}^1_{\hat{\alpha}}, \mathring{L}^3_{\hat{\alpha}}, \mathring{L}^1_{1\hat{\alpha}}, \mathring{L}^3_{1\hat{\alpha}}, \mathring{L}^3_{2\hat{\alpha}}$, $\mathring{L}^3_{3\hat{\alpha}}$, $J_1$ и $J_2$ голономного семейства $U_2$ общего вида, удовлетворяют, помимо соотношений (5.4) внешним дифференциальным уравнениям

$$d\mathring{L}^1_0\wedge\mathring{\theta}^0 + d\mathring{L}^1_1\wedge\mathring{\theta}^1 = \{\mathring{L}^1_1(\mathring{L}^3_{30} - \mathring{L}^1_{10} + \mathring{L}^1_2 - J_2) - \mathring{L}^1_0\mathring{L}^3_{31} + \mathring{L}^3_1\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1,$$

$$d\mathring{L}^3_0\wedge\mathring{\theta}^0 + d\mathring{L}^3_1\wedge\mathring{\theta}^1 = \{\mathring{L}^3_0(\mathring{L}^1_{11} - 2\mathring{L}^3_{31}) + \mathring{L}^3_1(\mathring{L}^1_1 - J_2 - 2\mathring{L}^1_{10} + 2\mathring{L}^3_{30}) -$$
$$- \mathring{L}^1_1\mathring{L}^3_{11} + \mathring{L}^1_0\mathring{L}^3_{10}\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1,$$

$$d\mathring{L}^1_{10}\wedge\mathring{\theta}^0 + d\mathring{L}^0_{11}\wedge\mathring{\theta}^1 = \{\mathring{L}^1_{11}(\mathring{L}^1_1 - J_2 - \mathring{L}^1_{10} + \mathring{L}^3_{30}) - \mathring{L}^1_{10}\mathring{L}^3_{11} - \mathring{L}^1_0 + \mathring{L}^3_{11} - 1\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1,$$

$$d\mathring{L}^3_{10}\wedge\mathring{\theta}^0 + d\mathring{L}^3_{11}\wedge\mathring{\theta}^1 = \{\mathring{L}^3_{11}(\mathring{L}^1_1 - J_2 - 3\mathring{L}^1_{10} + 2\mathring{L}^3_{30}) + 2\mathring{L}^3_{10}(\mathring{L}^3_{11} - \mathring{L}^3_{31}) + \qquad (5.6)$$
$$+ \mathring{L}^3_{20}(\mathring{L}^1_1 - J_2) - \mathring{L}^3_{21}(\mathring{L}^1_0 + 1)\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1,$$

$$d\mathring{L}^3_{20}\wedge\mathring{\theta}^0 + d\mathring{L}^3_{21}\wedge\mathring{\theta}^1 = \{J_1\mathring{L}^3_{10} + \mathring{L}^3_{20}(3\mathring{L}^1_{11} - 2 + 2J_2 + J_1 - 2\mathring{L}^3_{31}) +$$
$$+ \mathring{L}^3_{21}(\mathring{L}^1_1 - J_2 + 2\mathring{L}^3_{30} - 4\mathring{L}^1_{10})\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1,$$

$$d\mathring{L}^3_{30}\wedge\mathring{\theta}^0 + d\mathring{L}^3_{31}\wedge\mathring{\theta}^1 = \{\mathring{L}^1_{11}\mathring{L}^3_{30} - \mathring{L}^3_{11} + \mathring{L}^3_{20} + \mathring{L}^3_{31}(\mathring{L}^1_1 - J_2 - 2\mathring{L}^1_0)\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1.$$

Равенства $\eta_3 = 0$ и $\eta_4 = 0$ равносильны внешним дифференциальным уравнениям:

$$dJ_1\wedge\mathring{\theta}^1 + \{J_1(\mathring{L}^1_1 + \mathring{L}^3_{30} - 3\mathring{L}^1_{10} - J_2) + \mathring{L}^3_{21}\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1 = 0,$$

$$dJ_2\wedge\mathring{\theta}^1 + \{J_2(\mathring{L}^1_1 + \mathring{L}^3_{30} - \mathring{L}^1_{10}) + \mathring{L}^3_{31} + \mathring{L}^3_1 + \mathring{L}^3_0 - \mathring{L}^1_0(2 - 2J_2 - J_1)\}\mathring{\theta}^0\wedge\mathring{\theta}^1 = 0 \qquad (5.7)$$

Произвол голономного семейства $U_2$ общего вида равен четырем функциям двух аргументов, в то время как неголономное семейство $U_2$ определяется, как мы видели, с произволом восьми функций шести аргументов.

Отметим некоторые частные классы неособых семейств $U_2$.

Натуральное уравнение $J_1 = 0$ характеризует семейство $U_2^p$. Натуральное уравнение $J_1 - 2J_2 = -4$ характеризует семейство $U_2^m$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Семейство $J_2 L_1^1 - L_0^1 = 0$ характеризуется тем, что фокус $\Phi_0$ является характеристической точкой параболического цилиндра относительно $\Psi_1^1$.

Неособое семейство $Ц_2$ каждого из указанных классов определяется с произволом семи функций шести аргументов, когда оно неголономно, и с произволом трех функций двух аргументов – в случае голономности.

Натуральные уравнения $J_1 = 0$, $J_2 = 0$ характеризуют семейство $Ц_2^{рт}$, которое будучи неголономным, определяется с произволом шести функций шести аргументов, а в случае голономности – с произволом двух функций двух аргументов.

Натуральные уравнения $L_0^1 = L_1^1 = 0$ характеризуют семейство $Ц_2$, для которого фокус $\Phi_0$ описывает линию (семейство $Ц_2^R$). Неголономное семейство $Ц_2^R$ определяется с произволом шести функций шести аргументов. Для голономного семейства $Ц_2^R$ фокус $\Phi_0$ становится неподвижным. Произвол голономного семейства $Ц_2^R$ – три функции двух аргументов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства, "Мир", М., 1970.
2. Д.М.Синцов. Исследования по теории пфаффовых многообразий, Записки Харьк. мат. об-ва, (4), 16, 1940, 33 - 61.
3. Г.Ф.Лаптев. Геометрия погруженных многообразий, Труды Моск. мат. об-ва, 2, 1953, 275 - 382.
4. В.С.Малаховский. О многообразиях алгебраических фигур, Геом. сб. 5 (Труды Томского ун-та), 5 - 14.
5. В.С.Малаховский. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве, Труды геом. семинара ВИНИТИ, 2, 1969.
6. Р.Н.Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии (курс лекций), Томск, 1971.
7. И.А.Печников. К аффинной геометрии неголономных семейств параболических цилиндров, Материалы второй научной конференции по математике и механике, 1, Томск, 1972, 79-81

Поступила 1 марта 1972 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

И.А.ПЕЧНИКОВ

# ПФАФФОВЫ 3-СЕМЕЙСТВА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ В ТРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной работе, являющейся продолжением работы [4], изучаются неголономные и голономные 3-семейства параболических цилиндров в $A_3$ (семейства $\mathcal{U}_3$) общего вида. Часть приведенных здесь результатов анонсирована в заметках [2] - [3]. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [4].

§ 1. Исследование неособого семейства $\mathcal{U}_3$ с помощью $Z$ -диаграммы. Семейство $\mathcal{U}_3$ общего вида определяется системой трех уравнений Пфаффа на формы $\bar{\vartheta}^\alpha$ $(\alpha = 0,1,\dots,5)$, где $\bar{\vartheta}^0 \equiv \bar{\omega}_3^1$, $\bar{\vartheta}^1 \equiv \bar{\omega}_3^2$, $\bar{\vartheta}^2 \equiv \bar{\omega}_2^1$, $\bar{\vartheta}^3 \equiv 2\bar{\omega}_1^1 - \bar{\omega}_2^2$, $\bar{\vartheta}^4 \equiv \bar{\omega}^1 - \omega_1^2$, $\bar{\vartheta}^5 \equiv \bar{\omega}^2$; $\bar{\omega}_k^i$, $\bar{\omega}^i$ $(i,k = 1,2,3)$ - формы Пфаффа, стоящие в деривационных формулах

$$d\bar{A} = \bar{\omega}^i \bar{m}_i, \quad d\bar{m}_k = \bar{\omega}_k^i \bar{m}_i \qquad (1.1)$$

подвижного репера пространства $\Pi Z$ параболических цилиндров в $A_3$.

На $Z$ -диаграмме семейству $\mathcal{U}_3$ соответствует 2-плоскость в $P_5$.

Неособым семейством $\mathcal{U}_3$ называется семейство $\mathcal{U}_3$, не содержащее семейства $\mathcal{U}_1^{zp}$. Аналитически это выражается тем, что $\bar{\vartheta}^0 \wedge \bar{\vartheta}^1 \wedge \bar{\vartheta}^2 \neq 0$, и систему Пфаффа, задающую неособое семейство $\mathcal{U}_3$, можно записать в виде

$$\bar{\omega}^{\tilde{\alpha}} \equiv \bar{\vartheta}^{\tilde{\alpha}} - \bar{\Lambda}_{\hat{\alpha}}^{\tilde{\alpha}} \bar{\vartheta}^{\hat{\alpha}} = 0 \quad \begin{pmatrix} \hat{\alpha} = 0,1,2; \\ \tilde{\alpha} = 3,4,5 \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

где $\bar{\Lambda}_{\hat{\alpha}}^{\tilde{\alpha}}$ - произвольные аналитические функции основных параметров. На $Z$ - диаграмме неособому семейству $\mathcal{U}_3$ соответствует 2-плоскость $L_2$, не имеющая общих точек с 2-плоскостью $L_2^{zp}$, точки которой изображают семейства $\mathcal{U}_1^{zp}$.

Произвольные пфаффовы подмногообразия $\Psi_1$ и $\Psi_2$ неособого семейства $\mathcal{U}_3$ задаются, соответственно, уравнениями

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\bar{\vartheta}^0 : \bar{\vartheta}^1 : \bar{\vartheta}^2 = h^0 : h^1 : h^2 \qquad (1.3)$$

и

$$k_{\hat{\alpha}} \bar{\vartheta}^{\hat{\alpha}} = 0 \quad (\hat{\alpha} = 0,1,2),$$

где $h^{\hat{\alpha}}$, $k_{\hat{\alpha}}$ - функции основных параметров.

Характеристика параболического цилиндра-элемента неособого семейства $\mathcal{U}_3$ вдоль произвольного $\Psi_1$ есть кривая

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0 \\ h^2 x^1 x^2 + h^0 x^1 x^3 + \bar{\Lambda}^4_{\hat{\alpha}} h^{\hat{\alpha}} x^1 + \bar{\Lambda}^3_{\hat{\alpha}} h^{\hat{\alpha}} x^2 - \\ - h^1 x^3 - \bar{\Lambda}^5_{\hat{\alpha}} h^{\hat{\alpha}} = 0. \end{cases} \qquad (1.4)$$

2-плоскость $L_2$ пересекает каждую из 3-плоскостей $L_3^z$ и $L_3^p$ в единственной точке. Следовательно, через элемент неособого семейства $\mathcal{U}_3$ проходит единственное семейство $\mathcal{U}_1^z$ и единственное семейство $\mathcal{U}_1^p$, имеющие, соответственно, уравнения:

$$\Psi_1^z: \quad \bar{\vartheta}^0 : \bar{\vartheta}^1 : \bar{\vartheta}^2 = 0:0:1 \qquad (1.5)$$

и

$$\Psi_1^p \quad \bar{\vartheta}^0 : \bar{\vartheta}^1 : \bar{\vartheta}^2 = 0:1:0 \qquad (1.6)$$

Прямая, проходящая через точки $Z(0:0:1:\bar{\Lambda}^3_2 : \bar{\Lambda}^4_2 : \bar{\Lambda}^5_2)$ и $P(0:1:0:\bar{\Lambda}^3_1 : \bar{\Lambda}^4_1 : \bar{\Lambda}^5_1)$, соответствующие на $Z$-диаграмме $\Psi_1^z$ и $\Psi_1^p$, изображает единственное семейство $\mathcal{U}_2^L$, проходящее через элемент неособого семейства $\mathcal{U}_3$ и принадлежащее этому семейству $(\Psi_2^L)$.

Легко видеть, что любое $\Psi_2$ неособого семейства $\mathcal{U}_3$ вида $\bar{\vartheta}^0 - c\bar{\vartheta}^0 = 0$ $(c = const)$ есть семейство $\mathcal{U}_2^z(\Psi_2^z)$, а любое $\Psi_2$ вида $\bar{\vartheta}^2 - c\bar{\vartheta}^0 = 0$ - семейство $\mathcal{U}_2^p(\Psi_2^p)$. Отсюда следует

Теорема 1. В неособом семействе $\mathcal{U}_3$ через произвольное $\Psi_1$, не принадлежащее $\Psi_2^L$, проходит единственное $\Psi_2^z$ и $\Psi_2^p$.

2-плоскость $L_2$ пересекает гиперповерхность $S_4^0$ по

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



кривой четвертого порядка

$$a^{\tilde{\alpha}} - \bar{\Lambda}^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\alpha}} a^{\hat{\alpha}} = 0$$

$$2\bar{\Lambda}_0^5 (a^0)^4 + 2(\bar{\Lambda}_1^5 - \bar{\Lambda}_0^4)(a^0)^3 a^1 + 2\bar{\Lambda}_2^5 (a^0)^3 a^2 - \quad (1.7)$$
$$-(\bar{\Lambda}_0^3 + 2\bar{\Lambda}_1^4)(a^0)^2 (a^1)^2 - 2\bar{\Lambda}_2^4 (a^0)^2 a^1 a^2 -$$
$$-\bar{\Lambda}_1^3 a^0 (a^1)^3 - \bar{\Lambda}_2^3 a^0 (a^1)^2 a^2 - (a^1)^3 a^2 = 0$$

(где $\hat{\alpha} = 0, 1, 2$; $\tilde{\alpha} = 3, 4, 5$;

$a^{\alpha}$ - координаты текущей точки $Z$ -диаграммы), соответствующей совокупности всех $\Psi_1$ неособого семейства $\mathcal{U}_3$, каждое из которых является либо семейством $\mathcal{U}_1^0$, либо семейством $\mathcal{U}_1^p$, либо семейством $\mathcal{U}_1^{\tilde{z}}$.

$A$ - образующая параболического цилиндра вдоль произвольного неособого $\Psi_1$ [4], заданного системой (1.3), есть прямая

$$x^1 = \tilde{h}^1, \quad x^2 = \frac{1}{2}(\tilde{h}^1)^2, \quad \text{где} \quad \tilde{h}^1 \equiv \frac{h^1}{h^0}. \quad (1.8)$$

Из (1.8) видно, что любая образующая параболического цилиндра

$$x^1 = c, \quad x^2 = \frac{1}{2} c^2 \quad (1.9)$$

является $A$ - образующей для любого подмногообразия $\Psi_1$, принадлежащего $\Psi_2^{\tilde{z}}$ заданному системой

$$\bar{\vartheta}^1 - c\bar{\vartheta}^0 = 0. \quad (1.10)$$

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между образующими параболического цилиндра и подмногообразиями $\Psi_2$, являющимися семействами $\mathcal{U}_2^{\tilde{z}}$.

В работе [4] показано, что через элемент семейства $\mathcal{U}_2^{\tilde{z}}$ (не являющегося $\mathcal{U}_2^L$ и $\mathcal{U}_2^{\tilde{z}R}$) проходит единственное $\Psi_1^0$. В итоге получается следующий результат.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Теорема 2. Любая образующая параболического цилиндра - элемента неособого семейства, кроме образующих

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0, \\ (x^1)^3 + \bar{\Lambda}_2^3 (x^1)^2 + 2\bar{\Lambda}_2^4 x^1 - 2\bar{\Lambda}_2^5 = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

составляющих характеристику элемента вдоль $\Psi_1^{\tilde{z}} \in \mathcal{U}_3$ входит в характеристику параболического цилиндра вдоль единственного $\Psi_1^0$. Образующие элемента $\tilde{z}$ неособого семейства $\mathcal{U}_3$, входящие в характеристику этого элемента вдоль подмногообразия $\Psi_1^{\tilde{z}}$, назовем $\tilde{z}$ -образующими.

$A$ - точка параболического цилиндра вдоль произвольного $\Psi_1$ неособого семейства $\mathcal{U}_3$ есть точка

$$\begin{cases} x^1 = \tilde{h}^1, \quad x^2 = \frac{1}{2}(\tilde{h}^1)^2, \\ x^3 = -3(\tilde{h}^1)^2\tilde{h}^2 - 2\bar{\Lambda}_1^3(\tilde{h}^1)^2 - 2\bar{\Lambda}_2^3\tilde{h}^1\tilde{h}^2 - \\ \quad - 2(\bar{\Lambda}_1^4 + \bar{\Lambda}_0^3)\tilde{h}^1 - 2\bar{\Lambda}_2^4\tilde{h}^2 - 2\bar{\Lambda}_0^4. \end{cases} \tag{1.12}$$

Если задана некоторая фиксированная точка $\{x_0^1, \frac{1}{2}(x_0^1)^2, x_0^3\}$ параболического цилиндра, то при $3(x_0^1)^2 + 2\bar{\Lambda}_2^3 x_0^1 + 2\bar{\Lambda}_2^4 \neq 0$ найдется единственное $\Psi_1$, для которого эта точка является $A$-точкой. Если точка $\{x_0^1, \frac{1}{2}(x_0^1)^2, x_0^3\}$ лежит на одной из образующих

$$\begin{cases} (x^1)^2 - 2x^2 = 0, \\ 3(x^1)^2 + 2\bar{\Lambda}_2^3 x^1 + 2\bar{\Lambda}_2^4 = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

но для нее $\bar{\Lambda}_1^3(x_0^1)^2 + (\bar{\Lambda}_1^4 + \bar{\Lambda}_0^3)x^1 + \frac{1}{2}x^3 + \bar{\Lambda}_0^4 \neq 0$, то не существует ни одного $\Psi_1$, для которого эта точка является началом $A$-репера.

На каждой из образующих (1.13) найдется по одной точке, для которой $\bar{\Lambda}_1^3(x^1)^2 + (\bar{\Lambda}_1^4 + \bar{\Lambda}_0^3)x^1 + \frac{1}{2}x^3 + \bar{\Lambda}_0^4 = 0$. Эти две точки характеризуются тем, что каждая из них

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



служит началом $A$ -репера для всех $\Psi_1$, принадлежащих $\Psi_2^z$, соответствующему проходящей через нее образующей. Будем называть указанные точки $K$ -точками, образующие (1.13) - $K$-образующими, а $\Psi_2^z$, соответствующее $K$ - образующей - подмногообразием $\Psi_2^{zK}$.

Подмногообразие $\Psi_2^z$

$$\bar{\vartheta}^1 + \frac{1}{3}\bar{\Lambda}_2^3 \bar{\vartheta}^0 = 0 \qquad (1.14)$$

характеризуется тем, что диаметральная плоскость, параболического цилиндра, проведенная через соответствующую ему образующую

$$x^1 = -\frac{1}{3}\bar{\Lambda}_2^3, \quad x^2 = \frac{1}{18}(\bar{\Lambda}_2^3)^2, \qquad (1.15)$$

является аффинно средней для диаметральных плоскостей, проходящих через $K$-образующие. Это $\Psi_2$ будем обозначать $\Psi_2^{zC}$, а образующую (1.15) - $C$-образующей. Подмногообразие $\Psi_1$, одновременно принадлежащее $\Psi_2^{zC}$ и $\Psi_2^{pr}$ будем называть $\Psi_1^C$.

Фокусы параболического цилиндра вдоль произвольного $\Psi_2$, заданного системой (1.3), определяются уравнениями:

$$(x^1)^2 - 2x^2 = 0$$

$$k_0 : k_1 : k = (x^1 x^3 + \bar{\Lambda}_0^4 x^1 + \bar{\Lambda}_0^3 x^2 - \bar{\Lambda}_0^5) : \\ : (\bar{\Lambda}_1^4 x^1 + \bar{\Lambda}_1^3 x^2 - x^3 - \bar{\Lambda}_1^5) : \\ : (x^1 x^2 + \bar{\Lambda}_2^4 x^1 + \bar{\Lambda}_2^3 x^2 - \Lambda_2^5). \qquad (1.16)$$

Отсюда следует

Теорема 3. Любая точка параболического цилиндра, описывающего неособое семейство $\mathcal{U}_3$, является фокусом относительно некоторого $\Psi_2$.

В частности, любая точка параболического цилиндра, не лежащая на $Z$ -образующей, является фокусом для

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



некоторого $\Psi_2$, являющегося неособым семейством $Ц_2$. Поставим в соответствие каждому $\Psi_1$ неособого семейства $Ц_3$ подмногообразие $\Psi_2$, для которого $A$-точка указанного $\Psi_1$ является фокусом. Это соответствие будем называть $АФ$-сетью.

Подмногообразие $\Psi_2$, соответствующее $\Psi_1$ (1.3) в $АФ$-сети, имеет уравнение

$$\begin{aligned}
&\{2\bar{\Lambda}_0^5(h^0)^4+2\bar{\Lambda}_0^4(h^0)^3h^1+(3\bar{\Lambda}_0^3+4\bar{\Lambda}_1^4)(h^0)^2(h^1)^2+\\
&+4\bar{\Lambda}_2^4(h^0)^2h^1h^2+4\bar{\Lambda}_1^3h^0(h^1)^3+4\bar{\Lambda}_2^3h^0(h^1)^2h^2+\\
&+6(h^1)^3h^2\}\bar{\vartheta}^0+\{(2\bar{\Lambda}_1^5-4\bar{\Lambda}_0^4)(h^0)^4-\\
&-(4\bar{\Lambda}_0^3+6\bar{\Lambda}_1^4)(h^0)^3h^1-4\bar{\Lambda}_2^4(h^0)^3h^2-\\
&-5\bar{\Lambda}_1^3(h^0)^2(h^1)^2-4\bar{\Lambda}_2^3(h^0)^2h^1h^2-\\
&-6h^0(h^1)^2h^2\}\bar{\vartheta}^1+\{2\bar{\Lambda}_2^5(h^0)^4-2\bar{\Lambda}_2^4(h^0)^3h^2-\\
&-\bar{\Lambda}_2^3(h^0)^2(h^1)^2-h^0(h^1)^3\}\bar{\vartheta}^2=0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Любому $\Psi_1$, не являющемуся $\Psi_1^L$, соответствует в $АФ$-сети единственное $\Psi_2$. Обратное соответствие неоднозначно: произвольному $\Psi_2^Z$ соответствуют в общем случае четыре $\Psi_1$.

Имеет место

Теорема 4. Подмногообразие $\Psi_1$ тогда и только тогда принадлежит $\Psi_2$, соответствующему ему в $АФ$-сети, когда оно является семейством $Ц_1^0$.

Доказательство этой теоремы вытекает из формул (1.17) и условий того, что $\Psi_1$ неособого семейства $Ц_3$ является семейством $Ц_1^0$.

Отметим некоторые частные классы неособых семейств $Ц_3$.

Семейство $Ц_3^M$ характеризуется аналитически условием $(\bar{\Lambda}_2^3)^3-9\bar{\Lambda}_2^3\bar{\Lambda}_2^4-27\bar{\Lambda}_2^5=0$, а геометрически - тем, что $\Psi^{ZC}$ есть $\Psi_2^{ZR}$.

Семейство $Ц_3^W$, для которого $\{27\bar{\Lambda}_2^5+9\bar{\Lambda}_2^3\bar{\Lambda}_2^4-(\bar{\Lambda}_2^3)^3\}^2+\{6\bar{\Lambda}_2^4-(\bar{\Lambda}_2^3)^2\}^3=0$, характеризуется наличием сдвоенного $\Psi_2^{2R}$, а следовательно, и сдвоенной $Z$-образующей.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Семейство $\mathcal{U}_3^{\tau}$, для которого $(\bar{\Lambda}_2^3)^2 - 6\bar{\Lambda}_2^4 = (\bar{\Lambda}_2^3)^3 + 54\bar{\Lambda}_2^5 = 0$, характеризуется тем, что все $\Psi_2^{2R}$ совпадают между собой (а следовательно, и с $\Psi^C$).

Равенство $(\bar{\Lambda}_0^3 + 2\bar{\Lambda}_1^4 - \bar{\Lambda}_1^3\bar{\Lambda}_2^3)(\bar{\Lambda}_2^3)^2 - 6(\bar{\Lambda}_0^4 - \bar{\Lambda}_1^5 - \bar{\Lambda}_1^3\bar{\Lambda}_2^4)\bar{\Lambda}_2^3 + 18(\bar{\Lambda}_1^3\bar{\Lambda}_2^5 - \bar{\Lambda}_0^5) = 0$ характеризует семейство $\mathcal{U}_3$, для которого $\Psi_1^C$ есть семейство $\mathcal{U}_2^0$ (семейство $\mathcal{U}_2^{C0}$).

Равенства $\bar{\Lambda}_0^3 + 2\bar{\Lambda}_1^4 - \bar{\Lambda}_1^3\bar{\Lambda}_2^3 = \bar{\Lambda}_0^4 - \bar{\Lambda}_1^5 - \bar{\Lambda}_1^3\bar{\Lambda}_2^4 = \bar{\Lambda}_1^3\bar{\Lambda}_2^5 - \bar{\Lambda}_0^5 = 0$ характеризуют семейство $\mathcal{U}_3$, через элемент которого проходит одно неособое семейство $\mathcal{U}_2^0$, и три семейства $\mathcal{U}_2^{\neq 0}$. При этом кривая (1.7) распадается на четыре прямых (семейство $\mathcal{U}_3^0$).

Семейство $\mathcal{U}_3^{0M}$ характеризуется тем, что является одновременно семейством $\mathcal{U}_3^0$ и семейством $\mathcal{U}_3^M$; семейство $\mathcal{U}_3^{0W}$ - тем, что оно есть одновременно семейство $\mathcal{U}_3^0$ и $\mathcal{U}_3^W$; семейство $\mathcal{U}_3^{0\tau}$ - тем, что оно является и семейством $\mathcal{U}_3^0$ и семейством $\mathcal{U}_3^{\tau}$.

## § 2. Канонический репер неособого семейства $\mathcal{U}_3$.

Пусть

$$\Theta^{\tilde{\alpha}} \equiv \vartheta^{\tilde{\alpha}} - \Lambda_{\hat{\alpha}}^{\tilde{\alpha}}\vartheta^{\hat{\alpha}} = 0 \quad \begin{pmatrix} \hat{\alpha} = 0,1,2; \\ \tilde{\alpha} = 3,4,5 \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

где $\Lambda_{\hat{\alpha}}^{\tilde{\alpha}}$ - функции как основных, так и вторичных параметров, - система Пфаффа, определяющая расслоение-произведение [1] $\xi^*(\Phi_3 \times H^*, \rho, \Phi_3)$, где $\Phi_3$ - некоторое неособое семейство $\mathcal{U}_3$, $H^*$ - множество указанное в [4], $\rho$ - проекция расслоения. При произвольном сечении $s$ в $\xi^*$ система (2.1) превращается в (1.1).

Аналитически фиксируем вторичные параметры так, чтобы имели место равенства $\Lambda_1^3 = \Lambda_2^3 = \Lambda_0^3 = \Lambda_0^4 = 0$, $\Lambda_1^4 = -\frac{1}{2}$, $\Lambda_2^4 = -\frac{3}{2}$. Таким образом, получаем канонический репер неособого семейства $\mathcal{U}_3$, координатные плоскости которого суть, соответственно, $D$-, $T$- и $A$-плоскости параболического цилиндра вдоль инвариантного $\Psi_1^C$, а векторы нормированы так, чтобы одна из $K$-точек имела координаты $(1, \frac{1}{2}, 1)$. Этот репер будем называть $C$-репером неособого семейства $\mathcal{U}_3$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Деривационные формулы $C$ -репера имеют вид:

$$
\begin{aligned}
d\bar{C} &= (\overset{\circ}{L}{}^{1}_{\alpha}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + \overset{\circ}{K}{}^{1}_{\tilde{\alpha}}\dot{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\bar{\bar{m}}_1 + (B_1\dot{\vartheta}^0 + B_2\dot{\vartheta}^1 + B_3\dot{\vartheta}^2 + \dot{\Theta}^5)\bar{\bar{m}}_2 + \\
&\quad + (\overset{\circ}{L}{}^{3}_{\hat{\alpha}}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + \overset{\circ}{K}{}^{3}_{\tilde{\alpha}}\dot{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\bar{\bar{m}}_3, \\
d\bar{\bar{m}}_1 &= (\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1\hat{\alpha}}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + \overset{\circ}{K}{}^{1}_{1\tilde{\alpha}}\dot{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\bar{\bar{m}}_1 + \{\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0}\dot{\vartheta}^0 + (\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1} + \tfrac{1}{2})\dot{\vartheta}^1 + (\overset{\circ}{L}{}^{1}_{2} + \tfrac{3}{2})\dot{\vartheta}^2 + \\
&\quad + \overset{\circ}{K}{}^{1}_{3}\dot{\Theta}^3 + (\overset{\circ}{K}{}^{1}_{4} + 1)\dot{\Theta}^4 + \overset{\circ}{K}{}^{1}_{5}\dot{\Theta}^5\}\bar{\bar{m}}_2 + (\overset{\circ}{L}{}^{3}_{1\hat{\alpha}}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + \overset{\circ}{K}{}^{3}_{1\tilde{\alpha}}\dot{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\bar{\bar{m}}_3, \\
d\bar{\bar{m}}_2 &= \dot{\vartheta}^2\bar{\bar{m}}_1 + \{2\overset{\circ}{L}{}^{1}_{12}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + (2\overset{\circ}{K}{}^{1}_{13} - 1)\dot{\Theta}^3 + 2\overset{\circ}{K}{}^{1}_{14}\dot{\Theta}^4 + 2\overset{\circ}{K}{}^{1}_{15}\dot{\Theta}^5\}\bar{\bar{m}}_2 + \\
&\quad + (\overset{\circ}{L}{}^{3}_{2\hat{\alpha}}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + \overset{\circ}{K}{}^{3}_{2\tilde{\alpha}}\dot{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\bar{\bar{m}}_3, \\
d\bar{\bar{m}}_3 &= \dot{\vartheta}^0\bar{\bar{m}}_1 + \dot{\vartheta}^1\bar{\bar{m}}_2 + (\overset{\circ}{L}{}^{3}_{3\hat{\alpha}}\dot{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + \overset{\circ}{K}{}^{3}_{3\tilde{\alpha}}\dot{\Theta}^{\tilde{\alpha}})\bar{\bar{m}}_3,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $B_1, B_2, B_3$; $\overset{\circ}{L}{}^{1}_{\hat{\alpha}}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{\hat{\alpha}}, \overset{\circ}{L}{}^{1}_{1\hat{\alpha}}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{1\hat{\alpha}}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{2\hat{\alpha}}, \overset{\circ}{L}{}^{3}_{3\hat{\alpha}}$ – внутренние инварианты [4]; $\overset{\circ}{K}{}^{1}_{\tilde{\alpha}}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{\tilde{\alpha}}, \overset{\circ}{K}{}^{1}_{1\tilde{\alpha}}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{1\tilde{\alpha}}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{2\tilde{\alpha}}, \overset{\circ}{K}{}^{3}_{3\tilde{\alpha}}$ – внешние инварианты неособого семейства $Ц_3$.

Условия голономности неособого семейства $Ц_3$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\eta_1 \equiv 2\overset{\circ}{L}{}^{3}_{11} - 3\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0} = 0, \\
&\eta_2 \equiv \overset{\circ}{L}{}^{3}_{10} + 3\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0} = 0, \\
&\eta_3 \equiv 2\overset{\circ}{L}{}^{3}_{12} + 6\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1} + 3 = 0, \\
&\eta_4 \equiv 4\overset{\circ}{L}{}^{3}_{10} - 12\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0} - 2\overset{\circ}{L}{}^{1}_{10} - 18\overset{\circ}{L}{}^{1}_{11} + 12\overset{\circ}{L}{}^{3}_{2} + \\
&\quad + 12\overset{\circ}{L}{}^{1}_{12}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{30} - 9 = 0, \\
&\eta_5 \equiv 2B_2 + 3\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0} - 6\overset{\circ}{L}{}^{1}_{2} + \overset{\circ}{L}{}^{1}_{11} - 6\overset{\circ}{L}{}^{1}_{12} - \\
&\quad - 2\overset{\circ}{L}{}^{1}_{12}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{31} - 2\overset{\circ}{L}{}^{3}_{21} + 3 = 0, \\
&\eta_6 \equiv 48_1 - 6B_2 - 6\overset{\circ}{L}{}^{1}_{0} + 18\overset{\circ}{L}{}^{1}_{2} + 12\overset{\circ}{L}{}^{1}_{10} - 6\overset{\circ}{L}{}^{1}_{11} - 18\overset{\circ}{L}{}^{1}_{12} - \\
&\quad - 4\overset{\circ}{L}{}^{1}_{11}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{30} + 4\overset{\circ}{L}{}^{1}_{10}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{31} + 6\overset{\circ}{L}{}^{1}_{12}\overset{\circ}{L}{}^{3}_{31} - 12\overset{\circ}{L}{}^{3}_{1} - 15 = 0,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\eta_7 \equiv B_{20} - B_{11} - B_1(\mathring{L}^1_{11} + \mathring{L}^3_{31}) + B_2(\mathring{L}^1_1 + \mathring{L}^3_{30} + \tfrac{1}{2}) - B_3\mathring{L}^3_{21} - \tfrac{1}{2}\mathring{L}^1_0 - \mathring{L}^3_0 = 0,$$

$$\eta_8 \equiv B_{31} - B_{22} + B_1 - B_2\mathring{L}^3_{32} + 3B_3\mathring{L}^1_{11} - \tfrac{3}{2}\mathring{L}^1_1 + \tfrac{1}{2}\mathring{L}^1_2 + \mathring{L}^3_2 = 0,$$

$$\eta_9 \equiv B_{12} - B_{30} + B_1(\mathring{L}^3_{32} + \mathring{L}^1_{12}) - B_2(\mathring{L}^1_2 + \tfrac{3}{2}) - B_3(3\mathring{L}^1_{10} - \mathring{L}^3_{22}) + \tfrac{3}{2}\mathring{L}^1_0 = 0.$$

где $B_{11}$, $B_{12}$, $B_{20}$, $B_{30}$, $B_{22}$, $B_{31}$ – коэффициенты разложений

$$dB_k = B_{k\hat{\alpha}}\,\mathring{\vartheta}^{\hat{\alpha}} + B_{k\tilde{\alpha}}\,\mathring{\omega}^{\tilde{\alpha}} \qquad (2.4)$$

$(\hat{\alpha} = 0,1,2;\ \tilde{\alpha} = 3,4,5;\ k = 1,2,3).$

Равенства $\eta_7 = \eta_8 = \eta_9 = 0$ равносильны уравнению

$$dB_1 \wedge \mathring{\vartheta}^0 + dB_2 \wedge \mathring{\vartheta}^1 + dB_3 \wedge \mathring{\vartheta}^2 + \{B_1(\mathring{L}^1_{11} + \mathring{L}^3_{31}) + B_2(\mathring{L}^1_1 + \mathring{L}^3_{30} + \tfrac{1}{2}) - B_3\mathring{L}^3_{21} - \tfrac{1}{2}\mathring{L}^1_0 - \mathring{L}^3_0\}\mathring{\vartheta}^0 \wedge \mathring{\vartheta}^1 + \{B_1 - B_2\mathring{L}^3_{32} + 3B_3\mathring{L}^1_{11} - \tfrac{3}{2}\mathring{L}^1_1 + \tfrac{1}{2}\mathring{L}^1_2 + \mathring{L}^3_2\}\mathring{\vartheta}^1 \wedge \mathring{\vartheta}^2 + \{B_1(\mathring{L}^3_{32} + \mathring{L}^1_{12}) - B_2(\mathring{L}^1_2 + \tfrac{3}{2}) - B_3(3\mathring{L}^1_{10} - \mathring{L}^3_{22}) + \tfrac{3}{2}\mathring{L}^1_0\}\mathring{\vartheta}^2 \wedge \mathring{\vartheta}^0 = 0. \qquad (2.5)$$

Для голономного семейства $\mathcal{U}_3$ инварианты $B_1, B_2, B_3$; $\mathring{L}^1_2$, $\mathring{L}^3_{\hat{\alpha}}$, $\mathring{L}^1_{1\hat{\alpha}}$, $\mathring{L}^3_{1\hat{\alpha}}$, $\mathring{L}^3_{2\hat{\alpha}}$. $\mathring{L}^3_{3\hat{\alpha}}$ удовлетворяют, помимо соотношений (2.3), еще шести внешним квадратичным дифференциальным уравнениям.

Произвол неголономного семейства $\mathcal{U}_3$ общего вида – девять функций шести аргументов, голономного семейства $\mathcal{U}_3$ – три функции трех аргументов.

Координатные подмногообразия неособого семейства $\mathcal{U}_3$ суть, в терминах $C$ -репера:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\Psi_1^z: \quad \vartheta^0 = \vartheta^1 = 0,$$
$$\Psi_1^p: \quad \vartheta^0 = \vartheta^2 = 0, \qquad (2.6)$$
$$\Psi_1^c: \quad \vartheta^1 = \vartheta^2 = 0.$$

Геометрически эти $\Psi_1$ охарактеризованы в § 1.

Характеристики параболического цилиндра вдоль подмногообразий (2.6) находятся, соответственно, из уравнений

$$(x^1)^2 - 2x^2 = \frac{1}{2}(x^1)^3 - \frac{3}{2}x^1 - B_3 = 0 \quad \text{(вдоль } \Psi_1^z\text{)}, \qquad (2.7)$$

$$(x^1)^2 - 2x^2 = \frac{1}{2}x^1 + x^3 + B_2 = 0 \quad \text{(вдоль } \Psi_1^p\text{)}, \qquad (2.8)$$

$$(x^1)^2 - 2x^2 = x^1 x^3 - B_1 = 0 \quad \text{(вдоль } \Psi_1^c\text{)}. \qquad (2.9)$$

Из формул (2.7) - (2.9) вытекает геометрическое значение инвариантов $B_1$, $B_2$, $B_3$. Геометрический смысл остальных внутренних инвариантов $C$-репера устанавливаем, выражая их через координаты характеристических точек элемента вдоль подмногообразий (2.6), инварианты $B_1$, $B_2$, $B_3$, а также инварианты $B_{k\alpha}$, определяемые из (2.4).

Натуральное уравнение $B_1 = 0$ характеризует отмеченное в §1 семейство $\mathcal{U}_3^{co}$. Равенство $B_2 = 0$ выделяет семейство $\mathcal{U}_3$, для которого характеристика элемента вдоль $\Psi_1$ проходит через начало $C$-репера (семейство $\mathcal{U}_3^{c\pi}$). Натуральное уравнение $B_3 = 0$ характеризует семейство $\mathcal{U}_3^M$ (см. §1). Натуральное уравнение $B_3^2 = 1$ характеризует упомянутое §1 семейство $\mathcal{U}_3^W$.

Натуральное уравнение

$$8B_1B_2^4 - 8B_1^2B_2^2 - 4B_2^3B_3 + 9B_1B_2^2 + 6B_1B_2B_3 - \\ - B_3^2 - B_1^2 - 3B_2B_3 = 0 \qquad (2.10)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



характеризует такое семейство $Ц_3$, на элементе которого имеется точка, являющаяся фокусом вдоль любого $\Psi_2$. Семейство $Ц_3$ этого класса будем называть семейством $Ц_3^S$, а точку, обладающую указанным свойством - главным фокусом.

Каждое из семейств $Ц_3^{CO}, Ц_3^{CH}, Ц_3^{M}, Ц_3^{W}, Ц_3^{S}$, будучи неголономным, определяется с произволом восемь функций шести аргументов, а в случае голономности - с произволом две функции трех аргументов.

Натуральное уравнения $B_1=B_2=0$ характеризуют семейство $Ц_3$, являющееся одновременно семейством $Ц_3^{CO}$ и семейством $Ц_3^{CH}$ (семейство $Ц_3^{CHO}$). Равенства $B_2=B_3=0$ характеризуют семейство $Ц_3$, которое является одновременно семейством $Ц_3^{M}$ и семейством $Ц_3^{CO}$ (семейство $Ц_3^{com}$).

Натуральные уравнения $B_1=B_3=0$ характеризуют семейство $Ц_3^{S}$, главный фокус которого лежит на $C$-образующей (семейство $Ц_3^{Sd}$).

Каждое из семейств $Ц_3^{CHO}$, $Ц_3^{com}$ и $Ц_3^{sd}$, если оно неголономно, определяется с произволом семь функций шести аргументов, а в случае голономности - с произволом одна функция трех аргументов.

Семейство $Ц_3$, для которого $B_1=B_2=B_3=0$, характеризуется тем, что оно является семейством $Ц_3^{S}$, главный фокус которого совпадает с началом $C$-репера (семейство $Ц_3^{SC}$). Неголономное семейство $Ц_3^{SC}$ определяется с произволом шесть функций шести аргументов, голономное - с произволом четыре функции двух аргументов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства, М., 1970.
2. И.А.Печников. О трехпараметрических семействах параболических цилиндров в трехмерном аффинном пространстве. Материалы итоговой науч. конф. ММФ и НИИ ПММ за 1970 год, 1, Томск, 1970, 159-160.
3. И.А.Печников. О голономных 3-семействах параболических цилиндров в $A_3$. Тезисы докл. четвертой Казахстанской межвузовской конф. по матем. и механике. Алма-Ата, 1970, 162.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



4. И.А.Печников. О пфаффовых многообразиях параболических цилиндров в трехмерном аффинном пространстве. Данный сборник, 155 – 174.

Поступила 1 марта 1972 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Н.В.АМИШЕВА

# КОМПЛЕКСЫ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Трехпараметрические семейства невырожденных центральных кривых второго порядка (коник), плоскости которых образуют трехпараметрическое семейство, назовем комплексами $V_3$.

Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \qquad (i,j,k = 1,2,3) \quad (1)$$

где формы Пфаффа $\omega^i, \omega_i^j$ удовлетворяют уравнениям структуры эквиаффинного пространства

$$D\omega^i = [\omega^k, \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j] \qquad (2)$$

и условию эквиаффинности $\omega_i^i = 0$.

Поместим начало $\bar{A}$ подвижного репера $\{\bar{A}, \bar{e}_i\}$ в центр коники. Кроме того, пусть $\bar{e}_1 = \bar{A}\bar{A}_1$ и $\bar{e}_2 = \bar{A}\bar{A}_2$, где $A_1$ и $A_2$ - точки коники, а вектор $\bar{e}_3$ - произвольный вектор пространства, не компланарный с векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Относительно такого репера уравнения коники имеют вид:

$$(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0 \qquad (3)$$

где $\lambda \neq \pm 1$

Из условия стационарности коники находим, что формы $\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2$, $\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1$, $-d\lambda + \omega_1^1 + \omega_1^2 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2)$ $\omega^\alpha$, $\omega_\alpha^\beta$ - главные $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2)$. Выбирая за независимые формы $\omega_1^3 = v^1$, $\omega_2^3 = v^2$, $\omega^3 = v^3$, исключаем из рассмотрения случай, когда плоскости коник образуют двупараметрическое семейство. Тогда имеем

$$\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2 = a_i v^i, \quad -d\lambda + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2) = c_i v^i$$
$$\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1 = b_i v^i, \quad \omega^1 = m_i v^i, \quad \omega^2 = n_i v^i \qquad (4)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Будем говорить, что прямой $M_1M_2$ плоскости коники соответствует некоторое однопараметрическое семейство коник, если прямая $M_1M_2$ является характеристикой плоскости коники вдоль этого семейства.

Пусть $M(x^1, x^2, 0)$ принадлежит конике. Диаметру $AM$ соответствует однопараметрическое семейство коник

$$\omega^3 = 0, \quad x^1\omega^1 + x^2\omega^2 = 0. \tag{5}$$

Требуя, чтобы диаметр $AM$ и касательная к линии центров однопараметрического семейства (5) были сопряжены относительно коники, получаем

$$-(m_2+\lambda n_2)(x^1)^2+(m_1+\lambda n_1-\lambda m_2-n_2)x^1x^2+(n_1+\lambda m_1)(x^2)^2=0. \tag{6}$$

Уравнение (6) в плоскости определяет два (действительных, мнимых или слившихся) диаметра коники.

Определение 1. Основным диаметром коники, принадлежащей комплексу коник, назовем такой диаметр $AM$, которому соответствует однопараметрическое семейство коник с касательной к линии центров, сопряженной этому диаметру относительно коники. Точки пересечения коники с ее основными диаметрами назовем основными точками. Комплекс коник будем называть комплексом гиперболического, эллиптического или параболического типа, если коника, ему принадлежащая, имеет соответственно два действительных, два мнимых или один основной диаметр. Не вполне интегрируемое уравнение $\omega^3 = 0$ определяет такую неголономную конгруэнцию коник ( [1], [4]), что плоскость коники является касательной плоскостью для неголономной поверхности $(A)_{\omega^3=0}$, заданной уравнением $\omega^3=0$ и центром $A$ коники.

Теорема. Если два фокуса неголономной конгруэнции коник $\omega^3=0$ диаметрально противоположны, то они являются основными точками комплекса коник.

Доказательство. Фокусы неголономной конгруэнции коник [1] $\omega^3=0$ находятся из уравнений:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$a_2(x^1)^3+(c_2-a_1)(x^1)^2+(b_2-c_1)(x^2)^2x^1-b_1(x^2)^3+$$
$$+(m_2+\lambda n_2)(x^1)^2-(n_1+\lambda m_1)(x^2)^2+(n_2-m_1+$$
$$+\lambda m_2-\lambda n_1)x^1x^2=0, \qquad (7)$$
$$(x^1)^2+2\lambda x^1x^2+(x^2)^2-1=0, \quad x^3=0.$$

Пусть точки $A_1(1, 0, 0)$ и $A_1'(-1, 0, 0)$ суть фокусы неголономной конгруэнции коник $v^3=0$. Тогда

$$a_2+m_2+\lambda n_2=0, \qquad (8)$$
$$a_2-m_2-\lambda n_2=0. \qquad (9)$$

Чтобы условия (8) и (9) выполнялись одновременно, необходимо:

$$m_2+\lambda n_2=0. \qquad (10)$$

Равенство (10) в силу уравнения (6) есть условие того, что точки $A_1$ и $A_1'$ – основные точки комплекса коник.

Следствие 1. Если фокус неголономной конгруэнции коник $v^3=0$ совпадает с основной точкой комплекса коник, то и диаметрально противоположная основная точка комплекса коник является фокусом этой неголономной конгруэнции коник.

Следствие 2. Если фокус $M$ неголономной конгруэнции коник $v^3=0$ совпадает с основной точкой комплекса коник, то касательные к линиям, описываемым фокусом $M$ неголономной конгруэнции $v^3=0$ и центром коники однопараметрического семейства, соответствующего диаметру $AM$, параллельны.

Теорема. Для того чтобы все фокусы неголономной конгруэнции коник $v^3=0$ были попарно диаметрально противоположными, необходимо и достаточно, чтобы основные точки комплекса коник были не определены.

Доказательство. Необходимость. Фокусы неголономной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



конгруэнции коник $v^3 = 0$ определяются из системы уравнений (7). Пусть два фокуса суть диаметрально расположенные точки $A_1$ ( 1, 0, 0) и $A_1'$(-1, 0, 0), два других - точки $A_2$ (0, 1, 0) и $A_2'$(0, -1, 0). При этом должны выполняться условия (8), (9) и

$$b_1 + n_1 + \lambda m_1 = 0, \tag{11}$$

$$b_1 - n_1 - \lambda m_1 = 0. \tag{12}$$

Из одновременного выполнения условий (8) и (9) вытекает равенство (10), а из одновременного выполнения условий (11) и (12) вытекает

$$n_1 + \lambda m_1 = 0. \tag{13}$$

Два оставшиеся фокуса находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} &(c_2 - a_1)x^1 + (b_2 - c_1)x^2 + (n_2 - m_1 + \lambda m_2 - \lambda n_1) = 0, \\ &(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Условие

$$n_2 - m_1 + \lambda m_2 - \lambda n_1 = 0 \tag{15}$$

обеспечивает диаметральную противоположность двух последних фокусов. При условиях (10), (13) и (15) в силу (6) основные точки комплекса коник не определены.

Достаточность. Пусть основные точки комплекса коник не определены. Тогда в силу (6) должны выполняться условия (10), (13) и (15). При этих условиях система уравнений (7) примет вид:

$$\begin{aligned} &(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \\ &a_2(x^1)^3 + (c_2 - a_1)(x^1)^2 x^2 + (b_2 - c_1)(x^2)^2 x^1 - b_1(x^2)^3 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Отсюда видно, что если точка $M(x^1, x^2, 0)$ удовлетворяет системе (16), то и точка $M'(-x^1, -x^2, 0)$ удовлетворяет этой системе уравнений. Следовательно, все фокусы неголономной конгруэнции коник $\omega^3 = 0$ попарно диаметрально противоположны.

Следствие. Если основные точки комплексов коник не определены, то подмногообразие $\omega^3 = 0$ голономно.

В самом деле, из условий (10), (13) и (15) следует равенство $m_2 = n_1$, которое является условием голономности подмногообразия $\omega^3 = 0$.

Будем рассматривать комплексы $V_3$ гиперболического типа. Совместим точки $A_1$ и $A_2$ с различными, не лежащими на одном диаметре, основными точками комплекса коник. Тогда

$$m_2 = -\lambda n_2, \quad n_1 = -\lambda m_1, \tag{17}$$

$$m_1 \neq n_2. \tag{18}$$

Формы $\omega_1^2$ и $\omega_2^1$ стали главными. Поэтому можно положить

$$\omega_1^2 = f_i \omega^i, \quad \omega_2^1 = k_i \omega^i. \tag{19}$$

Касательные ко всем интегральным линиям, описываемым точками $A_\alpha$ $(\alpha = 1,2)$ и удовлетворяющим уравнению Пфаффа $\omega^3 = 0$, лежат в плоскостях $\pi_\alpha$, уравнения которых имеют вид

$$(n_2 + f_2)(x^2 - 1) + (\lambda f_2 + \lambda n_2 - a_2)x^2 +$$

$$+ [(f_1 - \lambda m_1)(a_2 - \lambda n_2 - \lambda f_2) - (n_2 + f_2)(m_1 + a_1 - \lambda f_1)]x^3 = 0,$$

$$(k_1 - \lambda m_1)x^2 - (m_2 + b_1 - \lambda k_1)(x^2 - 1) + [(n_2 + k_2)(m_1 + b_1 - \lambda k_1) -$$

$$- (k_1 - \lambda m_1)(b_2 - \lambda n_2 - \lambda k_2)]x^3 = 0.$$

Потребуем, чтобы вектор $\bar{e}_3$ был параллелен линии пересечения этих плоскостей. Тогда

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$(n_2+f_2)(m_1+a_1-\lambda f_1)-(f_1-\lambda m_1)(a_2-\lambda n_2-\lambda f_2)=0 \qquad (20)$$

$$(n_2+k_2)(m_1+b_1-\lambda k_1)-(k_1-\lambda m_1)(b_2-\lambda n_2-\lambda k_2)=0. \qquad (21)$$

Построение репера закончено. Положим

$$\omega_3^1=s_i\upsilon^i, \quad \omega_3^2=p_i\upsilon^i. \qquad (22)$$

Мы исключим из рассмотрения случай $\pi_1\cap\pi_2\equiv A_1A_2$ и случай неопределенности плоскостей $\pi_\alpha$, в том числе случай:

$$a_2=0, \quad n_2+f_2=0. \qquad (23)$$

Из уравнений (7) и условия (17) следует, что в этом случае основная точка $A_1$ есть фокус неголономной конгруэнции коник $\upsilon^3=0$.

Так как для любой прямолинейной неголономной конгруэнции $\upsilon^3=\alpha\upsilon^1$, лучом которой является основной диаметр $AA_1$, фокусы находятся в точках

$$F_1\left(-\frac{n_2}{f_2},0,0\right), \quad F_2(-\alpha,0,0),$$

то при $n_2+f_2=0$ точка $A_1$ становится фокусом этой неголономной прямолинейной конгруэнции. Следовательно, в исключенном случае (23) основная точка коники $A_1$ является одновременно и фокусом неголономной конгруэнции коник $\upsilon^3=0$ и фокусом неголономной прямолинейной конгруэнции $\upsilon^3=\alpha\upsilon^1$, лучом которой является основной диаметр $AA_1$. Аналогичная ситуация для точки $A_2$ наступает при

$$m_2-\lambda k_1+b_2=0, \quad k_1-\lambda m_1=0. \qquad (24)$$

Этот случай тоже исключен.

Замыкание систем уравнений (4), (19) и (22) приводит к системе внешних квадратичных уравнений вида:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$[dm_i, v^i] + A_1[v^2, v^1] + A_2[v^3, v^1] + A_3[v^3, v^2] = 0,$$

$$[dn_i, v^i] + B_1[v^2, v^1] + B_2[v^3, v^1] + B_3[v^3, v^2] = 0,$$

$$[df_i, v^i] + C_1[v^2, v^1] + C_2[v^3, v^1] + C_3[v^3, v^2] = 0,$$

$$[dk_i, v^i] + D_1[v^2, v^1] + D_2[v^3, v^1] + D_3[v^3, v^2] = 0, \qquad (\bar{I})$$

$$[ds_i, v^i] + \mathcal{E}_1[v^2, v^1] + \mathcal{E}_2[v^3, v^1] + \mathcal{E}_3[v^3, v^2] = 0,$$

$$[dp_i, v^i] + Q_1[v^2, v^1] + Q_2[v^3, v^1] + Q_3[v^3, v^2] = 0,$$

$$[d(a_i - \lambda f_i), v^i] + \mathcal{G}_1[v^2, v^1] + \mathcal{G}_2[v^3, v^1] + \mathcal{G}_3[v^3, v^2] = 0,$$

$$[d(b_i - \lambda k_i), v^i] + \mathcal{L}_1[v^2, v^1] + \mathcal{L}_2[v^3, v^1] + \mathcal{L}_3[v^3, v^2] = 0,$$

где, в частности,

$$B_1 = n_1\{f_1 + 2\lambda(f_2 + k_2) - 2a_2 - 2b_2\} + n_3(n_1 - m_2) +$$
$$+ n_2\{3b_1 - \lambda(f_1 + 3k_1) + a_1 - k_2\} + m_2 f_1 - m_1 f_2, \qquad (\bar{II})$$
$$C_1 = f_1\{f_1 + \lambda(f_2 + 2k_2) - a_2 - 2b_2\} + f_2(3b_1 - 3\lambda k_1 -$$
$$- k_2) + f_3(n_1 - m_2) - s_1.$$

Значения остальных коэффициентов для краткости не выписываем. Следует иметь в виду, что с учетом соотношений (17), (18), (20), (21) система $(\bar{I})$ – стандартная [6] и старший характер ее равен пяти.

Для класса $n_2 + f_2 = 0$ из (20) вытекает равенство $a_2(f_1 - \lambda m_1) = 0$. Случай $a_2 = 0$ исключен из рассмотре-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ния. Рассмотрим случай $f_1 = \lambda m_1 = -n_1$.

Плоскость, соответствующая точке $\bar{M} = \bar{A} + t\bar{e}_1$ луча $AA_1$ в нормальной корреляции, описанного этим лучом комплекса [3], имеет уравнение

$$(n_2 + tf_2)x^2 - [(n_2 t_1 - n_1 t_2) - t(n_2 t_3 - n_3 t_2)]x^3 = 0. \qquad (25)$$

Из этого уравнения вытекает, что для класса $n_2 + f_2 = 0$ плоскость коники соответствует в нормальной корреляции точке $A_1$ луча $AA_1$ указанного комплекса.

Так как асимптотические линии на неголономной поверхности $(A_1)_{v^3+v^1=0}$ определяются уравнением

$$(a_1 + m_1 - \lambda t_1 - a_3 - m_3 + \lambda t_3)(v^1)^2 + (n_2 + t_2)(v^2)^2 + \\ + (a_2 + m_2 - \lambda t_1 + n_1 + t_1 - n_3 - t_3)v^1 v^2 = 0, \qquad (26)$$

то для рассматриваемого класса координатная линия $v^1 = v^3 = 0$ является асимптотической линией на этой неголономной поверхности. Касательная к линии центров вдоль $v^1 = v^3 = 0$ параллельна касательной к конике в точке $A_1$. Из (24) следует, что основная точка коники $A_1$ для класса $n_2 + f_2 = 0$ есть фокус всех неголономных прямолинейных конгруэнций $v^3 = \alpha v^1$, описываемых лучом $AA_1$.

Для класса $n_2 + f_2 = 0$ касательная плоскость к неголономной поверхности $(A_1)_{v^3=0}$ пересекает плоскость коники по основному диаметру $AA_1$.

Присоединяя к системе $(\overline{\text{II}})$ соотношения $n_2 = -f_2$ и $n_1 = -f_1$, получим новое конечное соотношение

$$C_1 + B_1 \equiv \lambda m_1(a_2 + \lambda n_2) + n_2(a_1 - 2\lambda^2 m_1) + \lambda n_3(n_2 - n_1) - \\ - \lambda f_3(n_2 + m_1) + m_1 n_2 - s_1 = 0, \qquad (27)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



с учетом которого система (П)вновь приводится к стандартной. Старший характер теперь равен четырем. Следовательно, рассматриваемый класс комплексов $V_3$ имеет произвол четыре функции трех аргументов.

Рассмотрим класс комплексов $V_3$ ,определяемый соотношением $f_2=0,\ f_3 n_2 \neq 0$ .

Уравнение $f_2 x^2-(f_2 n_3-n_2 f_3)x^3=0$ определяет касательную плоскость к цилиндру линейчатого комплекса, лучом которого является основной диаметр $AA_1$ . Следовательно, для класса $f_2=0$ эта плоскость совпадает с плоскостью коники.

Найдем уравнение основного цилиндроида [5] этого линейчатого комплекса. Цилиндроиды комплекса, лучом которого является основной диаметр $AA_1$ , определяются уравнением

$$v^1\left[d\omega_1^1+\omega_1^2(\omega_1^1+\omega_2^2)+v^1\omega_3^2\right]-$$
$$-\omega_1^2\left[dv^1+v^1(\omega_1^1+\omega_3^3)+\omega_1^2 v^1\right]. \qquad (28)$$

Основной цилиндроид характеризуется тем, что направляющая плоскость его совпадает с касательной плоскостью к цилиндру комплекса, которая в нашем случае совпадает с плоскостью коники. Отсюда и из уравнения (28) следует, что основной цилиндроид имеет в нашем случае уравнения:

$$v^1=v^2=0. \qquad (29)$$

Найдем аффинный центр линейчатого комплекса, то есть собственную точку $\bar{M}=\bar{A}+t\bar{e}_1$ прикосновения основного цилиндроида. Касательная плоскость $x^2-(n_3+tf_3)x^3=0$ цилиндроида в точке $M=A+te_1$ должна совпасть с плоскостью $x^2-(f_1-tf_3)x^3=0$ , соответствующей точке $M$ в нормальной корреляции. Следовательно, точка $C\left(\frac{f_3-n_3}{2f_3},\ 0,\ 0\right)$ есть аффинный центр.

Так как при $f_2=0$ точка ребра возврата торса $v^1=v^3=0$ , лучом которого является основной диаметр

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$AA_1$, становится несобственной, то этот торс вырождается в цилиндр, а все неголономные прямолинейные конгруэнции $v^3 = \alpha v^1$, описываемые лучом $AA_1$, являются цилиндрическими. Этот класс комплексов $V_3$ имеет широту четырех функций трех аргументов [6].

Для класса $n_2 = f_2 = 0$ соотношения (17), (22) примут вид $m_2 = 0$, $f_1 = \lambda m_1$, $n_1 = -\lambda m_1$.

Асимптотические линии на неголономной поверхности $(A_1')_{v^3 - v^1 = 0}$ и на неголономной поверхности $(A)_{v^3 = 0}$ имеют соответственно уравнения:

$$(m_1 + m_3 - a_1 - a_3 + \lambda f_1 + \lambda f_3)(v^1)^2 + (n_2 - f_2)(v^2)^2 + \\ + (m_2 - a_2 - \lambda f_2 + n_1 + n_3 - f_1 - f_3) v^1 v^2 = 0, \tag{30}$$

$$m_1 (v^1)^2 + (m_2 + n_1) v^1 v^2 + n_2 (v^2)^2 = 0. \tag{31}$$

Из уравнений (26), (30) и (31) следует, что при $n_2 = f_2 = 0$ уравнения $v^1 = v^3 = 0$ определяют асимптотические линии на трех неголономных поверхностях $(A_1)_{v^1 + v^3 = 0}$, $(A_1')_{v^1 - v^3 = 0}$, $(A)_{v^3 = 0}$.

Так как при $n_2 = f_2 = 0$ имеем $d\bar{e}_1 \parallel \bar{e}_1$, $d^2\bar{e}_1 \parallel \bar{e}_1$ и $d\bar{A} = 0$ вдоль $v^1 = v^3 = 0$, то торс $v^1 = v^3 = 0$ описываемый основным диаметром $AA_1$, вырождается в прямую.

Уравнение (25) в рассматриваемом классе становится неопределенным. Это означает, что линейчатый комплекс описываемый лучом $AA_1$, является специальным. Центр коники совпадает с центром луча этого комплекса, а плоскость

$$n_1 x^1 - m_1 x^2 + (m_1 n_3 - m_3 n_1) x^3 = 0$$

является касательной плоскостью к поверхности, описываемой центром луча.

Из системы квадратичных уравнений (I) с учетом (27)

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



следует, что класс $f_2 = n_2 = 0$ комплекса коник $V_3$ существует с произволом трех функций трех аргументов.

Рассмотрим класс комплексов $V_3$, у которого основные точки не определены. Тогда наше построение канонического репера не проходит. Из уравнения (6) следует, что тогда

$$m_2 = -\lambda n_2, \quad n_1 = -\lambda m_1, \quad m_1 = n_2, \quad m_2 = n_1.$$

Подмногообразие $v^3 = 0$ голономно, так как $m_2 = n_1$. Условия сопряженности направлений в плоскости коники относительно поверхности $(A_3)_{v^3=0}$ и относительно самой коники совпадают.

Определить произвол существования этого класса автору не удалось.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.С.Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом. сб., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1962, 28 - 42.
2. В.С.Малаховский. Канонический репер конгруэнции центральных кривых второго порядка в эквиаффинной геометрии. Геом. сб.,2 (Труды Томского ун-та, 161), 1961, 87-92. 161), 1961, 87 - 92.
3. Н.И.Кованцов. Теория комплексов. Киев, 1963.
4. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179 - 194.
5. Р.Н.Щербаков. Основной цилиндроид линейчатого комплекса. Известия высших учебных заведений. Математика,3(28), 1962, 177 - 188.
6. Р.Н.Щербаков. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск, 1971.

Поступила 1 марта 1972 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Н.В.АМИШЕВА

# О СЕМЕЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Многообразием $(h, m, n)^k$ называется $m$ - параметрическое многообразие алгебраических элементов порядка $k$ в $n$ -мерном пространстве, плоскости которых образуют $h$ -семейство; алгебраическим элементом порядка $k$ называется гиперповерхность порядка $k$, принадлежащая гиперплоскости [4].

В проективном пространстве $P_n$ многообразия $(m,m,n)^2$ изучались В.С.Малаховским. В настоящей работе $m$-параметрическое многообразие $(2 \leqslant m \leqslant n)$ алгебраических элементов второго порядка рассматриваются в эквиаффинном пространстве .

§1. Инвариантные прямые многообразия $(m, m, n)^2$. Деривационные формулы репера $\{A, \bar{e}_a\}$ $(a,b,c = 1,\dots,n)$ в эквиаффинном пространстве имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^a \bar{e}_a, \quad d\bar{e}_a = \omega_a^b \bar{e}_b ,$$

причем формы Пфаффа $\omega^a$, $\omega_a^b$ удовлетворяют уравнениям структуры эквиаффинного пространства

$$D\omega^a = [\omega^b \omega_b^a], \quad D\omega_a^b = [\omega_a^c \omega_c^b]$$

и соотношению $\sum \omega_a^a = 0$

Помещая точку $A$ в центр $(n-2)$-мерной квадрики $Q$ и направляя векторы $\bar{e}_A$ $(A,B,C = 1,\dots,n-1)$ так, чтобы они были компланарны ее гиперплоскости $\ell_{n-1}$, получим уравнения этой квадрики в виде:

$$a_{AB} x^A x^B = 1, \quad x^n = 0. \qquad (1)$$

Известным способом получаем, что формы $da_{AB} - a_{CB}\omega_A^C - a_{AC}\omega$ $\omega^A$, $\omega_A^n$, $\omega^n$ являются главными. Выбирая формы $\omega^\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = n-m+1, \dots, n)$ за независимые, получаем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$da_{AB} - a_{CB}\omega_A^C - a_{AC}\omega_B^C = b_{AB\alpha}\omega^\alpha, \qquad (2)$$

$$\omega_A^n = \Lambda_{A\alpha}^n \omega^\alpha, \quad \omega^i = \Lambda_\alpha^i \omega^\alpha, \quad i = 1,2,\dots,n-m. \qquad (3)$$

Если задано многообразие $(m, m, n)^2$, то точка $A$ (центр квадрики $Q$) описывает $m$-поверхность $(A)$, касательная $m$-плоскость $\mathcal{L}_m$ которой параллельна векторам $\bar{E}_\alpha = \Lambda_\alpha^i \bar{e}_i + \bar{e}_\alpha$. Векторы $\bar{E}_{\hat\alpha} = \Lambda_{\hat\alpha}^i \bar{e}_i + \bar{e}_{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha = n-m+1, \dots, n-1)$ параллельны гиперплоскости $\mathcal{L}_{n-1}$ и, значит, параллельны пересечению касательной плоскости $\mathcal{L}_m$ и плоскости $\mathcal{L}_{n-1}$. Это пересечение обозначим $\mathcal{L}_{m-1}$. Диаметральная $(n-m)$-плоскость $\mathcal{L}_{n-m}$, сопряженная плоскости $\mathcal{L}_{m-1}$ относительно квадрики $Q$, определяется уравнениями:

$$a_{AB}(\Lambda_{\hat\alpha}^i + \delta_{\hat\alpha}^\beta)x^A = 0, \quad x^n = 0 \qquad (4)$$

Выберем подвижной репер таким образом, чтобы векторы $\bar{e}_\alpha$ были параллельны плоскости $\mathcal{L}_m$, а векторы $\bar{e}_i$ параллельны плоскости $\mathcal{L}_{n-m}$. Формы $\omega_i^\beta$ и $\omega_{\hat\alpha}^i$ становятся главными, а коэффициенты уравнений (2) и (3) многообразия связаны соотношениями $\Lambda_\alpha^i = 0$, $a_{i\hat\alpha} = 0$, $\det\|a_{\hat\alpha\hat\beta}\| \neq 0$. Такая фиксация репера исключает из рассмотрения случай, когда в сечении квадрики $Q$ касательной $m$-плоскости $\mathcal{L}_m$ получается нецентральная $(m-2)$-мерная алгебраическая поверхность второго порядка.

Введем обозначения:

$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\beta}^i \omega^\beta, \qquad (5)$$

$$\omega_i^\beta = \Lambda_{i\alpha}^\beta \omega^\alpha. \qquad (6)$$

Пусть точка $\bar{M}_0 = \bar{A} + x_0^{\hat\alpha}\bar{e}_{\hat\alpha}$ – некоторая точка плоскости $\mathcal{L}_{m-1}$, отличная от $A$. Рассмотрим систему уравнений Пфаффа:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\omega^n = 0, \quad x_0^{\hat{\alpha}} \omega_{\hat{\alpha}}^n = 0. \tag{7}$$

Она определяет согласно [5] неголономное $\Psi_{m-1}(M_0)$. В силу формул (3) система уравнений (7) принимает вид:

$$\omega^n = 0, \quad \Lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^n x_0^{\hat{\alpha}} \omega^{\hat{\beta}} = 0 \tag{8}$$

Каждая из интегральных кривых, описываемых точкой $A$ и удовлетворяющих уравнениям (8), касается одной и той же $(m-2)$-плоскости, определяемой уравнениями:

$$x^n = 0, \quad x^i = 0, \quad \Lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x_0^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 0. \tag{9}$$

Квадрика $Q$ пересекается с касательной плоскостью $\mathcal{L}_m$ по $(m-2)$-мерной квадрике $\tilde{Q}$:

$$x^n = 0, \quad x^i = 0, \quad a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 1. \tag{10}$$

Поляра точки $M_0$ относительно квадрики $\tilde{Q}$ есть $(m-2)$-плоскость

$$x^n = 0, \quad x^i = 0, \quad a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x_0^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 1. \tag{11}$$

Требуя параллельность $(m-2)$-мерных плоскостей (9) и (11), получим соотношения, связывающие координаты точки

$$\frac{\Lambda_{\hat{\alpha}\,n-m+1}^n x_0^{\hat{\alpha}}}{a_{\hat{\alpha}\,n-m+1} x_0^{\hat{\alpha}}} = \ldots = \frac{\Lambda_{\hat{\alpha}\,n-1}^n x_0^{\hat{\alpha}}}{a_{\hat{\alpha}\,n-1} x_0^{\hat{\alpha}}} = t, \tag{12}$$

которые можно переписать в виде

$$(\Lambda_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^n - t a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}) x_0^{\hat{\alpha}} = 0. \tag{13}$$

Система уравнений (13) имеет ненулевое решение, если

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\det\| \Lambda^{n}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - t a_{\alpha\beta} \| = 0. \qquad (14)$$

Это уравнение имеет в общем случае $(m-1)$ корней. Каждому корню соответствует прямая, лежащая в плоскости $\mathcal{L}_{m-1}$. Назовем эти прямые основными, а их точки пересечения с квадрикой $Q$ - основными точками этой квадрики.

В плоскости $\mathcal{L}_{m-1}$ существует инвариантный конус, который строится следующим образом. Пусть $\bar{M} = \bar{A} + x^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$ - произвольная точка плоскости $\mathcal{L}_{m-1}$. Поле прямых $AM$ определяет подмногообразие $\Psi_1(M)$, вдоль которого точка $A$ описывает линию с касательной $AM$. Так как $d\bar{A} = \omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}$, то $\Psi_1(M)$ определяется системой

$$\frac{\omega^{n-m+1}}{x^{n-m+1}} = \ldots = \frac{\omega^{n-1}}{x^{n-1}}, \quad \omega^{n} = 0. \qquad (15)$$

Совокупность точек, для которых касательные к линиям, описываемым этими точками вдоль (15), параллельны гиперплоскости $\mathcal{L}_{n-1}$, определяют в $\mathcal{L}_{m-1}$ конус с вершиной в точке $A$:

$$x^{i} = 0, \quad x^{n} = 0, \quad \Lambda^{n}_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 0, \qquad (16)$$

где

$$\Lambda^{n}_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{n}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + \Lambda^{n}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\right)$$

Очевидно, что $(m-2)$-мерный конус (16) не вырождается при $m > 2$. Поэтому предыдущие рассуждения верны для $2 < m \leq n$.

Прямые, попарно сопряженные относительно обеих алгебраических $(m-2)$-мерных квадрик (11) и (16), обозначим $\mathcal{L}_1^{\hat{\alpha}}$.

Главным неголономным подмногообразием $\Psi_{m-1}$ назовем совокупность $\Psi_1$, вдоль которых точка $A$ описы-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



вает линии с касательными, расположенными в $\mathcal{L}_{m-1}$. Очевидно, что главное подмногообразие определяется уравнением $\omega^n=0$.

Теорема 1. Для того чтобы главное подмногообразие было голономным, необходимо и достаточно, чтобы основные прямые совпадали с прямыми $\mathcal{L}_1^{\hat\alpha}$.

Доказательство. Для доказательства направим векторы $\bar{\iota}$ по прямым $\mathcal{L}_1^{\hat\alpha}$, тогда

$$\Lambda^n_{(\hat\alpha\hat\beta)}=0, \quad a_{\hat\alpha\hat\beta}=0 \quad (\hat\alpha\neq\hat\beta). \tag{17}$$

Так как

$$[D\omega^n\omega^n]=\frac{1}{2}\Lambda^n_{[\hat\alpha\hat\beta]}[\omega^{\hat\alpha}\omega^{\hat\beta}\omega^n],$$

то главное подмногообразие голономно, когда

$$\Lambda^n_{[\hat\alpha\hat\beta]}=0. \tag{18}$$

Из (13) и (14) с учетом (17) и (18) вытекает, что основные прямые стали координатными, т.е. основные прямые совпали с прямыми $\mathcal{L}_1^{\hat\alpha}$.

Пусть теперь основные прямые совпадают с прямыми $\mathcal{L}_1^{\hat\alpha}$. Это обеспечивается следующими равенствами:

$$\begin{gathered}\Lambda^n_{n-m+1,\,n-m+1}-ta_{n-m+1,\,n-m+1}=\Lambda^n_{n-m+1,\,n-m+2}=\ldots=\Lambda^n_{n-m+1,\,n-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Lambda^n_{n-1,\,n-m+1}=\ldots=\Lambda^n_{n-1,\,n-2}=\Lambda^n_{n-1,\,n-1}-ta_{n-1,\,n-1}=0.\end{gathered} \tag{19}$$

Так как при выполнении условий (19) равенство (18) также выполняется, то главное подмногообразие голономно. Теорема доказана.

§2. Многообразия $(3,3,n)^2$, $3\le n<6$. Для

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$m=3$ основные точки квадрики $Q$ обладают дополнительными свойствами, которые приведем в данном параграфе.

Характеристика квадрики (1) для некоторого $\Psi_1$ определяется системой уравнений

$$a_{AB}x^A x^B = 1, \quad x^n = 0,$$

$$d(a_{AB}x^A x^B) = 0, \quad dx^n = 0. \tag{20}$$

В силу (2), (3), (5), система (20) при $\omega^n = 0$ примет вид: (теперь $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = n-2, n-1$; $i = 1, \ldots, n-3$ )

$$(b_{ij\hat{\gamma}}x^i x^j + b_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}} - 2a_{ij}\Lambda^i_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}x^{\hat{\alpha}}x^j -$$
$$- 2a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Lambda^{\hat{\alpha}}_{i\hat{\gamma}}x^i x^{\hat{\beta}} - 2a_{\hat{\gamma}\hat{\alpha}}x^{\hat{\alpha}})\omega^{\hat{\gamma}} = 0,$$

$$\Lambda^n_{A\hat{\gamma}}x^A x^{\hat{\gamma}} = 0, \quad x^n = 0, \quad a_{ij}x^i x^j + a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}} = 1. \tag{21}$$

Отсюда видно, что при $n \geq 6$ характеристика существует для любого $\Psi_1$, принадлежащего главному подмногообразию $\Psi_2$. При $n < 6$ только вдоль некоторых $\Psi_1$ принадлежащих $\Psi_2$, квадрика $Q$ имеет характеристики. Совокупность этих характеристик есть ( $n-3$ )-мерное фокальное многообразие

$$(b_{ij,n-2}x^i x^j + b_{\hat{\alpha}\hat{\beta},n-2}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}} - 2a_{ij}\Lambda_{\hat{\alpha},n-2}x^{\hat{\alpha}}x^j -$$
$$- 2a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Lambda^{\hat{\alpha}}_{i,n-2}x^i x^{\hat{\beta}} - 2a_{\hat{\alpha},n-2}x^{\hat{\alpha}})\Lambda^n_{A,n-1}x^A -$$
$$- (b_{ij,n-1}x^i x^j + b_{\hat{\alpha}\hat{\beta},n-1}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}} - 2a_{ij}\Lambda^i_{\hat{\alpha},n-1}x^{\hat{\alpha}}x^j - \tag{22}$$
$$- 2a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Lambda^{\hat{\alpha}}_{i,n-1}x^i x^{\hat{\beta}} - 2a_{\hat{\alpha},n-1}x^{\hat{\alpha}})\Lambda^n_{A,n-2}x^A = 0,$$
$$x^n = 0, \quad a_{ij}x^i x^j + a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}} = 1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Оно, в свою очередь, пересекается с касательной 3-плоскостью в шести точках - шести фокусах квадрики $Q$, определяемых системой:

$$\begin{aligned}&(b_{\hat{\alpha}\hat{\beta},n-2}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}}-2a_{\hat{\alpha},n-2}x^{\hat{\alpha}})\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-1}x^{\hat{\gamma}}-\\&-(b_{\hat{\alpha}\hat{\beta},n-1}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}}-2a_{\hat{\alpha},n-1}x^{\hat{\alpha}})\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2}x^{\hat{\gamma}}=0,\\&x^{n}=x^{i}=0,\quad a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}}=1.\end{aligned}\tag{23}$$

Следующие теоремы устанавливают связь между основными точками и фокусами квадрики $Q$ (ср. §1 работы [6]).

Теорема 2. Если фокус квадрики $Q$ является основной точкой, то и диаметрально противоположная основная точка есть фокус квадрики.

Доказательство. Основные точки квадрики $Q$, принадлежащей многообразию $(3,3,n)^2$, определяются вытекающей из (13) и (14) системой уравнений

$$\begin{aligned}&x^{n}=x^{i}=0,\quad a_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}}=1,\\&(\Lambda^{n}_{\hat{\alpha},n-2}a_{\hat{\beta},n-1}-\Lambda^{n}_{\hat{\alpha},n-1}a_{\hat{\beta},n-2})x^{\hat{\alpha}}x^{\hat{\beta}}=0.\end{aligned}\tag{24}$$

Из систем (23) и (24) утверждение теоремы получается как в [6].

Теорема 3. Если точка $M$ и диаметрально противоположная точка $M'$ есть фокусы квадрики $Q$, принадлежащей многообразию $(3,3,n)^2$, то они являются и основными точками квадрики $Q$.

Доказательство. Так как точки $M(x^{n-2},x^{n-1})$ и $M'(-x^{n-2},-x^{n-1})$ - фокусы квадрики $Q$, то координаты этих точек должны удовлетворять системе (23):

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$(b_{\alpha\beta,n-2}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-1} - b_{\alpha\beta,n-1}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2})\,x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma} +$$

$$+2(a_{n-2,\hat{\beta}}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-1} - a_{n-1,\hat{\beta}}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2})\,x^{\hat{\beta}}x^{\hat{\gamma}} = 0, \qquad (25)$$

$$x^{n} = x^{i} = 0, \quad a_{\alpha\beta}\,x^{\alpha}x^{\beta} = 1,$$

$$-(b_{\alpha\beta,n-2}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-1} - b_{\alpha\beta,n-1}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2})\,x^{\alpha}x^{\beta}x^{\gamma} +$$

$$+2(a_{n-2,\beta}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-1} - a_{n-1,\beta}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2})\,x^{\beta}x^{\gamma} = 0, \qquad (26)$$

$$x^{n} = x^{i} = 0, \quad a_{\alpha\beta}\,x^{\alpha}x^{\beta} = 1 .$$

Складывая первые уравнения из (25) и (26), получаем последнее уравнение системы (24). Теорема доказана.

Теорема 4. Для того чтобы все шесть фокусов квадрики $Q$, принадлежащей многообразию $(3,3,n)^2$, были попарно симметричны относительно центра квадрики, необходимо и достаточно, чтобы основные точки квадрики были неопределенны.

Доказательство. Если основные точки квадрики неопределенны, то уравнениям (24) должны удовлетворять координаты любой точки, принадлежащей квадрике. Это возможно, когда

$$\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2}a_{n-1,\hat{\beta}} - \Lambda^{n}_{\hat{\beta},n-1}a_{\hat{\beta},n-2} = 0 \quad (\text{для всех } \hat{\beta},\hat{\gamma}) \qquad (27)$$

Учитывая соотношения (27), система (23) примет вид:

$$x^{n} = x^{i} = 0, \quad a_{\alpha\beta}\,x^{\alpha}x^{\beta} = 1,$$

$$(b_{\alpha\beta,n-2}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-1} - b_{\alpha\beta,n-1}\Lambda^{n}_{\hat{\gamma},n-2})\,x^{\alpha}x^{\beta}x^{\hat{\gamma}} = 0. \qquad (28)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Если координаты точки $M$ удовлетворяют системе (28), то и координаты диаметрально противоположной точки $M'$ тоже удовлетворяют этой системе. Следовательно, все шесть точек - фокусов квадрики $Q$, попарно диаметрально противоположны.

С другой стороны, соотношениям (25) и (26) могут одновременно удовлетворять координаты любых двух диаметрально противоположных точек $M$ и $M'$ соответственно только при условиях (27), которые дают неопределенность основных точек квадрики $Q$, принадлежащей многообразию $(3, 3, n)^2$.

§3. Связность на многообразии $(m, m, n)^2$. Как показано в работе [2], в $(n-m)$-плоскости $m$-семейства (конгруэнции плоскостей) существует для $n < m(m+1)$ инвариантная $(n-m-1)$-мерная фокусная алгебраическая поверхность порядка $m$, являющейся геометрическим местом фокусов. Относительно построенного в §1 репера $(n-m-1)$-мерная фокусная поверхность определяется системой уравнений

$$x^\alpha = 0, \quad \det \| \delta^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_{i\beta} x^i \| = 0. \tag{29}$$

Поляра порядка $(n-2)$ [3] центра квадрики $Q$ относительно фокусной $(n-m-1)$-поверхности (29) есть $(n-m-1)$-мерная квадрика $Q'$

$$x^\alpha = 0, \quad \Gamma_{(ij)} x^i x^j + \Gamma_i x^i - 1 = 0, \tag{30}$$

где

$$\Gamma_i = -\Lambda^\alpha_{i\alpha}, \quad \Gamma_{(ij)} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}),$$

$$\Gamma_{ij} = -[\Lambda^{n-m+1}_{i,n-m+1}(\Lambda^{n-m+2}_{j,n-m+2} + \dots + \Lambda^{n}_{j,n}) +$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$+\Lambda^{n-m+1}_{i,n-m+1}\Lambda^{n-m+2}_{j,n-m+2}+\ldots+\Lambda^{n-m+1}_{i,n}\Lambda^{n}_{j,n-m+1}]-$$

$$-\Lambda^{n-m+2}_{i,n-m+2}(\Lambda^{n-m+3}_{j,n-m+3}+\ldots+\Lambda^{n}_{j,n})+\ldots+\Lambda^{n-1}_{i,n-1}\Lambda^{n}_{j,n}]. \qquad (31)$$

С многообразием $(m,m,n)^2$ ассоциируется $m$-параметрическое многообразие $V$ $m$-плоских элементов (элементом является пара: точка $A$ и $m$-плоскость $\mathcal{L}_m$) касательных к поверхности, описываемой точкой $A$. Поле $(n-m)$-мерных плоскостей $\mathcal{L}_{n-m}$ является оснащением этого многообразия. В каждой точке $A$ определен линейный оператор $P_A$, действующий на векторы в этой точке по следующему закону. Если $\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2$ $(\bar{v}_1\in\mathcal{L}_m,\ \bar{v}_2\in\mathcal{L}_{n-m})$, то $P_A(\bar{v})=\bar{v}_1$. Композиция $\nabla=P_A\cdot d$ является оператором ковариантного дифференцирования [7]. Задание $\nabla$ определяет на $V$ аффинную связность $(K)$ и превращает $V$ в $m$-мерное пространство аффинной связности, деривационные формулы которого имеют вид:

$$\nabla\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha,$$
$$\nabla\bar{e}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\bar{e}_\beta. \qquad (32)$$

Формы кривизны $(\Sigma^\alpha)$ и кручения $(\Sigma^\beta_\alpha)$ находятся по формулам

$$\Sigma^\alpha\equiv D\omega^\alpha-[\omega^\beta\omega^\alpha_\beta]=0,$$
$$\Sigma^\beta_\alpha\equiv D\omega^\beta_\alpha-[\omega^\gamma_\alpha\omega^\beta_\gamma]=\tfrac{1}{2}\Lambda^i_{\alpha[\gamma}\Lambda^\beta_{i|\mu]}[\omega^\gamma\omega^\mu].$$

Отсюда видно, тензор кручения равен нулю, а тензор кривизны находится по формуле

$$K^\beta_{\alpha\gamma\mu}=\tfrac{1}{2}\Lambda^i_{\alpha[\gamma}\Lambda^\beta_{i|\mu]}. \qquad (33)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



**Теорема 5.** Если тензор Вейля [1] связности $(K)$ равен нулю и центр квадрики $Q'$ совпадает с центром квадрики $Q$, то связность $(K)$ - эквиаффинная [1].

**Доказательство.** Как видно из (30), центр квадрики $Q'$ совпадает с центром квадрики $Q$, когда

$$\Gamma_i = -\Lambda^{\alpha}_{i\alpha} = 0 \qquad (34)$$

для любого значения $i$.

Тензор Вейля в многообразии касательных $m$-плоскостей к $m$-поверхности выражается формулой

$$W^{\beta}_{\alpha\gamma\mu} = K^{\beta}_{\alpha\gamma\mu} + \delta^{\beta}_{\alpha}\frac{K_{\gamma\mu}+K_{\mu\gamma}}{n+1} + \frac{\delta^{\beta}_{\gamma}(nK_{\alpha\mu}+K_{\mu\alpha})-\delta^{\beta}_{\mu}(nK_{\alpha\gamma}+K_{\gamma\alpha})}{n^2-1},$$

где

$$K_{\alpha\gamma} = K^{\beta}_{\alpha\gamma\beta} = (-K^{\beta}_{\alpha\beta\gamma})$$

Учитывая (33) и (34), после преобразований получаем

$$W^{\beta}_{\alpha\gamma\mu} = K^{\beta}_{\alpha\gamma\mu} + \frac{1}{2(n^2-1)}\left[\delta^{\beta}_{\gamma}(n\Lambda^{i}_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{i\mu} + \Lambda^{i}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{i\alpha}) + \right.$$

$$\left. + \delta^{\beta}_{\mu}(n\Lambda^{i}_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{i\gamma} + \Lambda^{i}_{\gamma\beta}\Lambda^{\beta}_{i\alpha})\right]$$

Так как тензор Вейля равен нулю, то для тензора кривизны связности имеем

$$K^{\beta}_{\alpha\gamma\mu} = -\frac{1}{2(n^2-1)}\left[\delta^{\beta}_{\gamma}(n\Lambda^{i}_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{i\mu} + \Lambda^{i}_{\mu\beta}\Lambda^{\beta}_{i\alpha}) + \right.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$+\delta^{\beta}_{\mu}(n\Lambda^{i}_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta}_{i\gamma}+\Lambda^{i}_{\gamma\beta}\Lambda^{\beta}_{i\alpha})].$$

Вычислим форму объемной кривизны [1]:

$$\Sigma^{\beta}_{\beta}=K^{\beta}_{\beta\gamma\mu}[\omega^{\gamma}\omega^{\mu}]=-\frac{n\Lambda^{i}_{\beta\beta}}{2(n^2-1)}(\Lambda^{\beta}_{i\mu}[\omega^{\beta}\omega^{\mu}]+$$

$$+\Lambda^{\beta}_{i\gamma}[\omega^{\gamma}\omega^{\beta}])=-\frac{n}{2(n^2-1)}\Lambda^{i}_{\beta\beta}(\Lambda^{\beta}_{i\mu}-\Lambda^{\beta}_{i\mu})[\omega^{\beta}\omega^{\mu}]=0.$$

Так как форма кручения и форма объемной кривизны равны нулю, то связность $K$ - эквиаффинная. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ж.Фавар. Курс локальной дифференциальной геометрии, Москва, 1960.
2. Р.М.Гейдельман. К теории псевдоконгруэнций и конгруэнций плоскостей многомерного гиперболического пространства и конгруэнций сфер многомерного конформного пространства. Матем. сб., т. 36(78),№2, 1955, 209 - 232.
3. Е.Т.Ивлев, А.А.Лучинин. О полярном соответствии относительно алгебраической гиперповерхности и его приложениях. Геом. сб., в.7 (Труды Томского ун-та, 196), 1968, 23 - 34.
4. В.С.Малаховский. Многообразия алгебраических элементов в $n$ -мерном проективном пространстве. Геом. сб.,в.3 (Труды Томского ун-та, 168), 1962, 28 - 42.
5. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб., в.6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179 - 194.
6. Н.В.Амишева. Комплексы центральных кривых второго порядка в трехмерном аффинном пространстве. Данный сборник.
7. С.Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., "Мир", 1964.

Поступила 1 марта 1970 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Т.В.ЛЫЖИНА

# О ЛИНЕЙЧАТЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ В ТРЕХМЕРНОМ ФЛАГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются двухпараметрические многообразия прямых (конгруэнции) во флаговом пространстве [1].

Деривационные формулы наиболее общего подвижного репера геометрического образа [2] во флаговом пространстве имеют вид:

$$d\bar{A} = \Omega^1\bar{e}_1 + \Omega^2\bar{e}_2 + \Omega^3\bar{e}_3 ,$$
$$d\bar{e}_1 = \Omega_1^1\bar{e}_1 + \Omega_1^2\bar{e}_2 + \Omega_1^3 e_3 ,$$
$$d\bar{e}_2 = \Omega_2^2\bar{e}_2 + \Omega_2^3\bar{e}_3 ,$$
$$d\bar{e}_3 = \Omega_3^3\bar{e}_3 ,$$

где $\Omega_\alpha^i = \omega_\alpha^i + \pi_\alpha^i$, $\omega_\alpha^i$ – первичные формы, $\pi_\alpha^i$ – вторичные формы Пфаффа, $\bar{A}$ – радиус-вектор начала репера, $\bar{e}_3$ – сильноизотропный вектор, а бивектор $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – параллелен изотропной плоскости [3]. Уравнения структуры трехмерного флагового пространства имеют вид:

$$D\Omega^i = [\Omega^j\Omega_j^i] , \quad D\Omega_j^i = [\Omega_j^k\Omega_k^i] , \qquad (2)$$

где $i, j, k = 1,2,3$, $j \le k \le i$.

§ 1. Полуканонический репер. Выбираем вектор $\bar{e}_1$ параллельным лучу конгруэнции и помещаем начало репера в некоторую точку на луче. Тогда получаем

$$\delta\bar{e}_1 = \pi^1\bar{e}_1 , \quad \pi_1^2 = \pi_1^3 = 0 , \quad \delta\bar{A} = \pi^1\bar{e}_1 , \quad \pi^2 = \pi^3 = 0 ,$$

где $\delta$ означает дифференцирование по вторичным параметрам. Тогда формы $\omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3$ содержат дифференциалы только первичных параметров. Примем формы $\omega_1^2$ и $\omega_1^3$ за базисные (исключив тем самым из рассмотрения цилиндрические конгруэнции):

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$\omega^2 = \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3,$$
$$\omega^3 = \gamma\omega_1^2 + \lambda\omega_1^3. \qquad (3)$$

Уравнение $\omega_1^2 = 0$ определяет инвариантное подмногообразие - полуизотропный цилиндроид[x)], так как

$$d\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}_{\omega_1^2=0} \| \{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}.$$

Подмногообразие же $\Psi_1$, определяемое уравнением $\omega_1^3 = 0$, является произвольным. В соответствии с [2] будем считать конгруэнцию отнесенной к этому подмногообразию. Внешнее дифференцирование системы (3) (с учетом уравнений структуры (2)) дает

$$[\Omega^1\omega_1^2] + \beta[\omega_1^3\omega_2^2] = [d\alpha\omega_1^2] + \beta[\Omega_1^1\omega_1^3] +$$
$$+[\omega_1^2\Omega_2^3] + \alpha[\Omega_1^1\omega_1^2] + [d\beta\omega_1^3] + \beta[\omega_1^3\Omega_3^3],$$
$$[\Omega^1\omega_1^3] + \alpha[\omega_1^2\Omega_2^3] + \beta[\omega_1^3\Omega_2^3] + \gamma[\omega_1^2\Omega_3^3] = \qquad (4)$$
$$= [d\gamma\omega_1^2] + \gamma[\Omega_1^1\omega_1^2] + \gamma[\omega_1^2\Omega_2^2] + [d\lambda\omega_1^3] +$$
$$+\lambda[\Omega_1^1\omega_1^3] + \lambda[\omega_1^2\Omega_2^3].$$

Отсюда обычным путем [2] получаем

$$\delta\alpha = \pi^1 - \alpha\pi_1^1 + \beta\pi_2^3, \qquad (5)$$
$$\delta\beta = \beta(\pi_3^3 - \pi_2^2 - \pi_1^1), \qquad (6)$$
$$\delta\gamma = -\alpha\pi_2^3 - \gamma(\pi_3^3 + \pi_1^1 - \pi_2^2), \qquad (7)$$
$$\delta\lambda = \pi^1 - \beta\pi_2^3 - \lambda\pi_1^1. \qquad (8)$$

---

x) т.е. цилиндроид [4], направляющая плоскость которого полуизотропна, т.е. пересекает несобственную прямую во флаговой точке.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Проведем фиксацию $\beta = 1$, $\pi_2^2 + \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0$. При этом исключаются конгруэнции, у которых цилиндроид $\omega_1^2 = 0$ становится полуизотропной плоскостью. При построении полуканонического репера полувторичную [2] форму $\pi_2^3$ оставляем нефиксированной и проводим остальные фиксации независимо от нее. Такой фиксацией является

$$\alpha + \lambda = 0, \quad \pi^1 = 0.$$

Уравнение торсов конгруэнции имеет вид:

$$\varphi = (d\bar{e}_1, \bar{e}_1, d\bar{A}) = -\gamma(\omega_1^2)^2 + 2\alpha\omega_1^2\omega_1^3 + (\omega_1^3)^2 = 0. \qquad (9)$$

Имея в виду, что в силу (5) и (7)

$$-2(\gamma + \alpha^2)\pi_1^1 = \delta(\alpha^2 + \gamma),$$

проведем фиксацию $\alpha^2 + \gamma = 1$, исключив при этом, как видно из (9), параболические конгруэнции.

Подставляя результаты проведенных фиксаций в уравнение (4) и применяя лемму Картана, получаем

$$\begin{aligned} &\omega^1 - d\alpha - \alpha\omega_1^1 + \Omega_2^3 = a\omega_1^2 + b\omega_1^3, \\ &-\Omega_2^2 + \Omega_3^3 - \omega_1^1 = b\omega_1^2 + c\omega_1^3. \end{aligned} \qquad (10)$$

Внешнее дифференцирование системы (10) с учетом уравнений структуры (2) дает

$$\begin{aligned} &[\Omega_2^3, \Omega_3^3 - \Omega_2^2 - \omega_1^1] + a[\omega_1^2\omega_1^1] + b[\omega_1^3\omega_1^1] = \\ &= [da\,\omega_1^2] + a[\omega_1^1\omega_1^2] + a[\omega_1^2\Omega_2^2] + [db\omega_1^3] + \\ &+ b[\omega_1^1\omega_1^3] + b[\omega_1^2\Omega_2^3] + b[\omega_1^3\Omega_3^3], \\ &[db, \omega_1^2] + [dc, \omega_1^3] + b[\omega_1^1\omega_1^2] + b[\omega_1^2\Omega_2^2] + \\ &+ c[\omega_1^1\omega_1^3] + c[\omega_1^2\Omega_2^3] + c[\omega_1^3\Omega_3^3] = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\delta c = c\pi_2^2, \quad \delta b = b\pi_2^2 + c\pi_2^3, \quad \delta a = a\pi_2^2 + 2b\pi_2^3.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Уравнение соприкасающейся квадрики полуизотропного цилиндроида относительно нашего репера имеет вид:

$$a_{22}x_2^2 - c\,x_2x_3 - 2x_1x_3 + 2\alpha x_2 + 2x_3 = 0. \qquad (11)$$

Полагая $c=1$, $\pi_2^2=0$, получаем последнюю фиксацию полуканонического репера, при которой исключаются конгруэнции с таким полуизотропным цилиндроидом $\omega_1^2=0$, соприкасающаяся квадрика которого является параболическим параболоидом [3], а не гиперболическим параболоидом, как в общем случае.

Уравнение торсов конгруэнции принимает вид:

$$(\omega_1^2)^2 - (\alpha\omega_1^2 + \omega_1^3)^2 = 0. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что регулюсы $\omega_1^2=0$ и $\omega_1^3+\alpha\omega_1^2=0$ составляют сопряженную сеть [4]. Фокусы конгруэнции находятся в точках $\bar{F}_1(-1, 0, 0)$ и $\bar{F}_2(1, 0, 0)$. Следовательно, начало полуканонического репера совмещено с центром луча, а вектор $\bar{e}_1$ нормирован так, что

$$\bar{A}-\bar{F}_1 = \bar{F}_2-\bar{A} = \bar{e}_1$$

Вектор $e_2$ параллелен диаметру особого касательного параболоида [3]

$$x_1x_3 + \alpha x_3 + (\alpha^2-1)x_2 = 0 \qquad (13)$$

регулюса $\omega_1^3=0$.

Уравнение касательной плоскости к регулюсу $\omega_1^3=0$ в точке $\bar{M}=\bar{A}+\varkappa\bar{e}_1$ имеет вид:

$$(\bar{R}-\bar{A}, \bar{e}_1, \alpha\bar{e}_2 + (1-\alpha^2)\bar{e}_3 + \varkappa\bar{e}_2) = 0.$$

Поэтому флаговоцентральная точка[x)] регулюса $\omega_1^3=0$ имеет абсциссу $-\alpha$. В точке $\bar{N}=\bar{A}+\alpha\bar{e}_1$, симметричной с флаговоцентральной относительно центра луча, ка-

x) В этой точке касательная плоскость регулюса полуизотропна.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



сательная плоскость

$$(\bar{R}-\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2-\alpha\bar{e}_3+\sigma\bar{e}_3) = 0 \qquad (14)$$

полуизотропного цилиндроида $\omega_1^2 = 0$ является асимптотической плоскостью регулюса $\omega_1^3 = 0$. Уравнения фокальных плоскостей конгруэнции относительно нашего репера имеют вид:

$$x_3 = (-1-\alpha)x_2, \quad x_3 = (1-\alpha)x_2. \qquad (15)$$

Следовательно, векторы $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ нормированы так, что аффинноугловые ксэффициенты $k_1$ и $k_2$ линий пересечения фокальных плоскостей с изотропной плоскостью на единицу отличаются от абсциссы $\alpha$ флаговоцентральной точки регулюса $\omega_1^3 = 0$ :

$$k_1 = -1-\alpha, \quad k_2 = 1-\alpha. \qquad (16)$$

Будем считать [2] оставшийся вторичный параметр некоторой неизвестной функцией главных параметров. Тогда с учетом всех проведенных фиксаций, деривационные формулы полуканонического репера конгруэнции можно записать так:

$$\begin{aligned}
d\bar{A} &= (A_1\omega_1^2 + A_2\omega_1^3)\bar{e}_1 + (\alpha\omega_1^2 + \omega_1^3)\bar{e}_2 + [(1-\alpha^2)\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3]\bar{e}_3, \\
d\bar{e}_1 &= (B_1\omega_1^2 + B_2\omega_1^3)\bar{e}_1 + \omega_1^2\bar{e}_2 + \omega_1^3\bar{e}_3, \\
d\bar{e}_2 &= (K_1\omega_1^2 + K_2\omega_1^3)\bar{e}_2 + (F_1\omega_1^2 + F_2\omega_1^3)\bar{e}_3, \\
d\bar{e}_3 &= (C_1\omega_1^2 + C_2\omega_1^3)\bar{e}_3.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Уравнения структуры флагового пространства дают:

$$D\omega_1^2 = (B_2 - K_2)[\omega_1^3\omega_1^2], \qquad (18)$$

$$D\omega_1^3 = (-B_1 - F_2 + C_1)[\omega_1^3\omega_1^2], \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}
d\alpha &= (-\alpha B_2 + B_1 + K_1 - C_1 + A_2 + F_2)\omega_1^3 + \\
&+ [\alpha^2 + \alpha(B_1 + 2A_2 + 2K_1 - 2C_1) - A_1 + F_1 - 2B_2 - 1]\omega_1^2,
\end{aligned} \qquad (20)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$K_2+B_2-C_2+1=0. \tag{21}$$

Система основных внешних дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
&[dA\omega_1^2]+[dA_2\omega_1^3]=[-A_1(3B_2-C_2+1)+A_2(2B_1+F_2-C_1)][\omega_1^3\omega_1^2],\\
&[dB_1\omega_1^2]+[dB_2\omega_1^3]=[-B_1(2B_2-C_2+1)+B_2(B_1+F_2-C_1)][\omega_1^3\omega_1^2],\\
&[dF_1\omega_1^2]+[dF_2\omega_1^3]=[F_1(-B_2+2K_2-C_2)+F_2(-K_1+B_1+F_2)][\omega_1^3\omega_1^2],\\
&[dK_1\omega_1^2]+[d(-B_2+C_2)\omega_1^3]=[-K_1(2B_2-C_2+1)+\\
&+(B_2-C_2+1)(-B_1-F_2+C_1)][\omega_1^3\omega_1^2],\\
&[dC_1\omega_1^2]+[dC_2\omega_1^3]=[-C_1(2B_2-C_2+1)-C_2(C_1-B_1-F_2)][\omega_1^3\omega_1^2],\\
&[d(B_1+K_1-C_1+F_2-\alpha B_2),\omega_1^3]+[\alpha d(B_1+2K_1-2C_1+2A_2)+\\
&+d(2B_2-F_1),\omega_1^2]+\{\alpha^2+\alpha(B_1+2K_1-2C_1+2A_2+2B_2+\\
&+A_1-F_1+1)](3B_2-C_2+1)+(B_1+K_1-C_1+A_2+F_2-\alpha B_2)(2K_1-\\
&-C_1-F_2+2A_2+2\alpha)+A_2(2B_1+F_2-C_1)\}[\omega_1^3\omega_1^2].
\end{aligned} \tag{22}$$

Применяя теорему Бахвалова [4] к системе (22), находим, что широта решения этой системы, определяющей конгруэнцию, отнесенную к произвольному семейству регулюсов, равна трем функциям двух аргументов. Две функции идут на задание конгруэнции и одна - на задание произвольного семейства регулюсов. Геометрическое значение инвариантов полуканонического репера конгруэнции будет выяснено в §§ 4,5.

§ 2. Канонический репер. Из уравнения (12) видно, что при $\alpha=0$ регулюсы $\omega_1^3=0$ вместе с полуизотропным цилиндроидом $\omega_1^2=0$ образуют сопряженную сеть. Поэтому

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



при $\alpha = 0$ репер становится каноническим.

Регулюс $\omega_1^3 = 0$ характеризуется теперь также тем, что его флаговоцентральная точка совпадает с центром луча.

Обозначим инварианты, векторы и дифференциальные формы канонического репера

$$\bar{e}_i^*,\ \omega_i^{*k},\ A_i^*,\ K_i^*,\ B_i^*,\ C_i^*,\ F_i^*.$$

Деривационные формулы канонического репера конгруэнции имеют вид:

$$\begin{aligned}
d\bar{A}^* &= (A_1^*\omega_1^{*2} + A_2^*\omega_1^{*3})\bar{e}_1^* + \omega_1^{*3}\bar{e}_2^* + \omega_1^{*2}\bar{e}_3^*,\\
d\bar{e}_1^* &= (B_1^*\omega_1^{*2} + B_2^*\omega_1^{*3})\bar{e}_1^* + \omega_1^{*2}\bar{e}_2^* + \omega_1^{*3}\bar{e}_3^*,\\
d\bar{e}_2^* &= (K_1^*\omega_1^{*2} + K_2^*\omega_1^{*3})\bar{e}_2^* + (F_1^*\omega_1^{*2} + F_2^*\omega_1^{*3})\bar{e}_3^*,\\
d\bar{e}_3^* &= (C_1^*\omega_1^{*2} + C_2^*\omega_1^{*3})\bar{e}_3^*.
\end{aligned} \tag{25}$$

Уравнения (18), (19), (20), (21) сводятся к

$$\begin{aligned}
&D\omega_1^{*2} = (B_2^* - K_2^*)[\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}],\\
&D\omega_1^{*3} = (-B_1^* - F_2^* + C_1^*)[\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}],\\
&K_2^* + B_2^* - C_2^* + 1 = 0,\\
&B_1^* + K_1^* - C_1^* + A_2^* + F_2^* = 0,\\
&A_1^* - F_1^* + 2B_2^* + 1 = 0,
\end{aligned}$$

а система основных внешних дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
&[dA_1^*, \omega_1^{*2}] + [dA_2^*, \omega_1^{*3}] = [-A_1^*(3B_2^* - C_2^* + 1) + A_2^*(2B_1^* + F_2^* - C_1^*)][\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}],\\
&[dB_1^*\omega_1^{*2}] + [dB_2^*\omega_1^{*3}] = [-B_1^*(2B_2^* - C_2^* + 1) + B_2^*(B_1^* + F_2^* - C_1^*)][\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}],\\
&[dF_1^*\omega_1^{*2}] + [dF_2^*\omega_1^{*3}] = [F_1^*(-B_2^* + 2K_2^* - C_2^*) + F_2^*(B_1^* - K_1^* + F_2^*)][\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}],\\
&[dK_1^*\omega_1^{*2}] + [dK_1^*\omega_1^{*3}] = [-K_1^*(2B_2^* - C_2^* + 1) +\\
&+(B_2^* - C_2^* + 1)(-B_1^* - F_2^* + C_1^*)][\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}],
\end{aligned} \tag{29}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$[dC_1^*\omega_1^{*2}]+[dC_2^*\omega_1^{*3}]=[-C_1^*(2B_2^*-C_2^*+1)-$$
$$-C_2^*(-B_1^*-F_2^*+C_1^*)][\omega_1^{*3}\omega_1^{*2}].$$

Широта решений системы (29) равна двум функциям двух аргументов, что соответствует произволу существования конгруэнции.

§ 3. Связь канонического и полуканонического репера. Из геометрической характеристики векторов канонического и полуканонического реперов непосредственно следует, что

$$\bar{A}=\bar{A}^*,\ \bar{e}_1=\bar{e}_1^*,\ \bar{e}_2=n\bar{e}_2^*+l\bar{e}_3^*,\ \bar{e}_3=q\bar{e}_3^*, \tag{30}$$

где $n\neq 0$. Дифференцируя (30) и используя деривационные формулы обоих реперов, в силу линейной независимости базисных векторов, получаем

$$\begin{aligned}
&q=n=1,\ l=\alpha,\ \omega^1=\omega^{*1},\\
&\omega^2=\omega^{*2}=\omega_1^{*3},\ \omega^2\alpha+\omega^3=\omega_1^{*2}=\omega^{*3},\\
&\omega_1^1=\omega_1^{*1},\ \omega_1^2=\omega_1^{*2},\ \omega_1^2\alpha+\omega_1^3=\omega_1^{*3},\\
&\omega_2^2=\omega_2^{*2},\ \omega_3^3=\omega_3^{*3},\ \omega_2^2\alpha+\omega_2^3=\omega_2^{*3}+d\alpha+\alpha\omega_3^{*3}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда вытекают формулы, выражающие инварианты канонического репера через инварианты полуканонического:

$$\begin{aligned}
&A_1^*=A_1-A_2\alpha, && C_1^*=C_1-C_2\alpha,\\
&A_2^*=A_2, && K_2^*=K_2,\\
&B_1^*=B_1-B_2\alpha, && K_1^*=K_1-K_2\alpha,\\
&B_2^*=B_2, && F_1^*=\alpha^2(C_2-K_2)+\alpha(K_1-F_2-C_1)+F_1-\alpha_1+\alpha\alpha_2,\\
&C_2^*=C_2, && F_2^*=\alpha(K_2-C_2)+F_2-\alpha_2.
\end{aligned} \tag{32}$$

где $d\alpha=\alpha_1\omega_1^2+\alpha_2\omega_1^3$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



§ 4. Репер регулюса, принадлежащего конгруэнции. Положив в деривационных формулах (17) полуканонического репера

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^2 = ds \tag{33}$$

и обозначив

$$A_1\Big|_{\omega_1^3=0} = a, \quad \alpha\Big|_{\omega_1^3=0} = m, \quad B_1\Big|_{\omega_1^3=0} = b,$$
$$K_1\Big|_{\omega_1^3=0} = k, \quad F_1\Big|_{\omega_1^3=0} = f, \quad C_1\Big|_{\omega_1^3=0} = c, \tag{34}$$

получим деривационные формулы канонического репера регулюса, принадлежащего конгруэнции (ср.[5]).

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = a\bar{e}_1 + m\bar{e}_2 + (1-m^2)\bar{e}_3, \quad \frac{d\bar{e}_2}{ds} = k\bar{e}_2 + f\bar{e}_3,$$
$$\frac{d\bar{e}_1}{ds} = b\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \qquad \frac{d\bar{e}_3}{ds} = c\bar{e}_3. \tag{35}$$

Найдем формулы, выражающие инварианты репера произвольного регулюса через дифференциальные формы и инварианты канонического репера конгруэнции.

Прежде всего из формул (33) и (31) имеем

$$ds = \omega_1^2 = \overset{*}{\omega}{}_1^2.$$

В силу $\omega_1^3 = 0$ инварианты репера произвольного регулюса конгруэнции вычисляются следующим образом:

$$a = \frac{(d\bar{A}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}{ds(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = \frac{A_1^* \overset{*}{\omega}{}_1^2 + A_2^* \overset{*}{\omega}{}_1^3}{\overset{*}{\omega}{}_1^2}$$

$$m = \frac{(\bar{e}_1, d\bar{A}, \bar{e}_3)}{ds(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)} = \frac{\overset{*}{\omega}{}_1^3}{\overset{*}{\omega}{}_1^2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



и так далее.

Таким образом, выявились следующие основные инвариантные дифференциальные формы конгруэнции:

$$ds = \overset{*}{\omega}{}_1^2 = \omega_1^2$$

$$ads = A_1^* \overset{*}{\omega}{}_1^2 + A_2^* \overset{*}{\omega}{}_1^3 = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_1^3,$$

$$mds = \overset{*}{\omega}{}_1^3 = \omega_1^2\alpha + \omega_1^3,$$

$$bds = B_1^* \overset{*}{\omega}{}_1^2 + B_2^* \overset{*}{\omega}{}_1^3 = B_1\omega_1^2 + B_2\omega_1^3,$$

$$kds = K_1^* \overset{*}{\omega}{}_1^2 + K_2^* \overset{*}{\omega}{}_1^3 = K_1\omega_1^2 + K_2\omega_1^3,$$

$$cds = C_1^* \overset{*}{\omega}{}_1^2 + C_2^* \overset{*}{\omega}{}_1^3 = C_1\omega_1^2 + C_2\omega_1^3,$$

$$f(ds)^3 = (F_1^* \overset{*}{\omega}{}_1^2 + F_2^* \overset{*}{\omega}{}_1^3)(\overset{*}{\omega}{}_1^2)^2 + \overset{*}{\omega}{}_1^3 \overset{*}{\omega}{}_1^2 [(C_1^* - K_1^*)\overset{*}{\omega}{}_1^2 +$$

$$+ (C_2^* - K_2^*)\overset{*}{\omega}{}_1^3] + \overset{*}{\omega}{}_1^2 d\overset{*}{\omega}{}_1^3 - \overset{*}{\omega}{}_1^3 d\overset{*}{\omega}{}_1^2 =$$

$$= (F_1\omega_1^2 + F_2\omega_1^3)(\omega_1^2)^2 + \omega_1^3\omega_1^2[(C_1 - K_1)\omega_1^2 +$$

$$+ (C_2 - K_2)\omega_1^3] + \omega_1^2 d\omega_1^3 - \omega_1^3 d\omega_1^2.$$

Шесть из этих форм являются линейными.

Находим геометрическую характеристику инвариантов репера регулюса, принадлежащего конгруэнции. Ранее было показано, что $-m = -\alpha\Big|_{\omega_1^3 = 0}$ - абсцисса флаговоцентральной точки. Аффинноугловой коэффициент проекции касательной к геометрическому месту центров лучей регулюса на асимптотическую плоскость $(\bar{R} - \bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$ регулюса равен $\frac{a}{m}$. Это дает геометрическую характеристику инварианта $a$. Координата $x_2$ центра соприкасающейся квадрики рассматриваемого регулюса

$$a_{33}(x_3)^2 + 2a_{23}x_2x_3 - f(x_2)^2 + 2x_1x_3 - 2(1-m^2)x_2 + 2mx_3 = 0$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



равна $m^2-1/f$ , откуда вытекает геометрическая характеристика инварианта $f$ . Рассматривая линию $\bar{B}=\bar{A}+\bar{e}_1|_{\omega_1^3=0}$ , находим, что касательная к ней пересекает изотропную плоскость в точке

$$\left(0;\ -\frac{m+1}{a+b};\ \frac{m^2-1}{a+b}\right),$$

что дает геометрическую характеристику инварианта $b$ . Рассматривая линию $C=A+e_2|_{\omega_1^3=0}$ , находим, что касательная к ней пересекает полуизотропную плоскость в точке

$$\left(-\frac{a}{m+k};\ 0;\ \frac{m^2-1-f}{m+k}\right). \qquad (41)$$

Так как инварианты $a, m, f$ геометрически охарактеризованы, то (41) дает геометрическую характеристику инварианта $k$ . Рассматривая линию $\bar{D}=\bar{A}+\bar{e}_3$ находим, что касательная к ней пересекает асимптотическую плоскость регулюса в точке

$$\left(-\frac{a}{1-m^2+c};\ -\frac{m}{1-m^2+c};\ 0\right), \qquad (42)$$

что дает геометрическую характеристику инварианта $c$ .

Так как канонический репер является частным случаем полуканонического, то приведенные геометрические характеристики дают и характеристики инвариантов канонического репера $A_1^*$, $B_1^*$, $K_1^*$, $F_1^*$, $C_1^*$.

Заметим еще, что точка

$$\bar{R}=\bar{A}+\frac{m^2-1}{f}\bar{e}_2+\alpha\bar{e}_1 \qquad (43)$$

пересечения характеристики асимптотической плоскости регулюса с прямой $\{\bar{A}\bar{e}_2\}$ совпадает с такой точкой луча цилиндроида $\bar{r}=\bar{A}+\sigma\bar{e}_2$ , в которой касательная плоскость

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



$$(\bar{R}-\bar{A},\ \bar{e}_2,\ a\bar{e}_1+(1-m^2)e_3+\sigma f e_3)=0 \qquad (44)$$

цилиндроида совпадает с асимптотической плоскостью регулюса $\bar{R}=\bar{A}+\sigma\bar{e}_1$. Эта же точка является ординатой центра соприкасающейся квадрики регулюса $\bar{R}=\bar{A}+\sigma\bar{e}_1$. Отметим некоторые частные классы регулюсов, принадлежащих конгруэнции. Регулюс $m=0$ характеризуется тем, что центр луча является флаговоцентральной точкой регулюса, принадлежащего конгруэнции. Регулюс $f=0$ - цилиндроид. Регулюс $b=0$ характеризуется тем, что годограф вектор-функции $\bar{M}=\bar{e}_1$ есть кривая, лежащая в изотропной плоскости. Регулюсы $m=\pm 1$ суть торсы. Регулюс $c=0$ характеризуется тем, что $d\bar{e}_3=0$. Регулюс $k=0$, имеет горографом вектор-функции $\bar{R}=\bar{e}_2$ сильноизотропную прямую. Регулюс $f-c=0$ характеризуется тем, что касательная годографа вектор-функции $\bar{l}=\bar{e}_2-\bar{e}_3$ параллельна диаметру особого касательного параболоида рассматриваемого регулюса.

§ 5. Репер полуизотропного цилиндроида, принадлежащего конгруэнции. Положив в деривационных формулах (25) канонического репера

$$\omega_1^{*2}=0,\quad \omega_1^{*3}\Big|_{\omega_1^{*2}=0}=ds^*$$

и обозначив

$$A_2^*\Big|_{\omega_1^{*2}=0}=a^*,\quad B_2^*\Big|_{\omega_1^{*2}=0}=b^*,\quad K_2^*\Big|_{\omega_1^{*2}=0}=k^*,$$

$$C_2^*\Big|_{\omega_1^{*2}=0}=c^*,\quad F_2^*\Big|_{\omega_1^{*2}=0}=f^*,$$

где $k^*+b^*-c^*+1=0$

получим деривационные формулы канонического репера полуизотропного цилиндроида, принадлежащего конгруэнции.

Находим геометрическую характеристику инвариантов полуизотропного цилиндроида. Аффинноугловой коэффициент характеристики плоскостей $(\bar{R}-\bar{A},\ \bar{e}_1,\ \bar{e}_2)=0$ равен

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



инварианту $\rho^*_1$. Линия пересечения плоскости $(\bar{R}-\bar{A}^*, d\bar{A}^*, d^2\bar{A}^*)=0$ с изотропной плоскостью $(\bar{R}-\bar{A}^*, \bar{e}_2, \bar{e}_3)=0$ имеет аффинноугловой коэффициент, равный $a^*$.

Рассматривая линии $\bar{M}^*=(\bar{A}^*+\bar{e}_1^*)\Big|_{\omega_1^2=0}$, $\bar{N}^*=(\bar{A}^*+\bar{e}_3^*)\Big|_{\omega_1^2=0}$, находим, что касательные к ним пересекают изотропную плоскость и плоскость $(\bar{R}-\bar{A}^*, \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*)=0$ соответственно в точках:

$$\left(0; -\frac{1}{a^*+b^*}; -\frac{1}{a^*+b^*}\right), \quad \left(-\frac{a^*}{c^*}; -\frac{1}{c^*}; 0\right).$$

Суммируя результаты § 4, 5, получим, что все инварианты канонического репера конгруэнции геометрически охарактеризованы.

§ 6. Частные классы конгруэнций. Конгруэнции $A_1^*=0$ определяются с произволом[x] в одну функцию двух аргументов и характеризуется тем, что центральная поверхность является изотропным цилиндром.

Конгруэнции $A_1^*=A_2^*=0$ определяются с произволом в одну функцию двух аргументов и характеризуются тем, что центральная поверхность вырождается в изотропную плоскость.

Конгруэнции $B_1^*=B_2^*=0$ определяются с произволом, равным четырем функциям одного аргумента, и характеризуются тем, что индикаторная поверхность [5] вырождается в изотропную плоскость.

Конгруэнции $C_1^*+B_1^*-K_1^*=0$ характеризуются тем, что центр соприкасающейся квадрики регулюса $\omega_1^3=0$ лежит на прямой, параллельной диаметру особого касательного параболоида этого регулюса (произвол - одна функция двух аргументов).

Конгруэнции $(A_1^*+B_1^*-A_2^*-B_2^*)(A_1^*-B_1^*+A_2^*-B_2^*)=0$ характеризуются тем, что одна из фокальных поверхностей вырождается в линию, а один торс - в конус. Произвол су-

---

x) Широта классов определяется при помощи системы (29).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



ществования таких конгруэнций - одна функция двух аргументов.

Конгруэнция $(-A_2^*-C_1^*+B_1^*)(F_1^*-2B_2^*-1)+$
$+(F_1^*-2B_2^*)' = A_2^*(4B_2^*+2-C_2^*+F_1^*)+(F_1^*-2B_2^*-$
$-1)(-B_1^*-K_1^*+C_1^*-A_2^*)+A_2^{*''}$ является конгруэнцией Рибокура.

Конгруэнция $(2B_2^*+1)B_2^*+(B_1^*-K_1^*+C_1^*)(A_2^*-F_1^*-$
$-K_1^*-C_1^*)=0$ является конгруэнцией W.

Конгруэнции $B_1^*/A_1^*=B_2^*/A_2^*$ характеризуются соответствием изотропных линий на фокальных поверхностях и определяются с произволом в одну функцию двух аргументов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б.А.Розенфельд. Неевклидовы пространства. М., "Наука", 1969.
2. Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб., 6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 179 - 194.
3. Л.Б.Выжгина, И.Н.Семенова, И.М.Тюрина. Квадрики во флаговом пространстве. Уч.зап. МОПИ им.Крупской, 123, № 3, 1963, 491 - 507.
4. Р.Н.Щербаков. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.
5. Р.Н.Щербаков. Некоторые вопросы аффинной теории прямолинейных конгруэнций. Математический сборник, 37(79), № 3, 1955, 527 - 556.

Поступила 1 марта 1970 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В.В.СЛУХАЕВ, Р.Н.ШЕРБАКОВ

# ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ СТАТЬИ В.С.МАЛАХОВСКОГО "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЁННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР"

Статья В.С.Малаховского опубликована в ротапринтном сборнике трудов Калининградского университета "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (вып.2, 1971). В дальнейшем она будет фигурировать как "рецензируемая работа" или как [1].

Автор известен нам как противник развитого в Томске "метода репеража подмногообразий" (МРП). Он посвятил свой доклад [2] на конференции в Минске "анализу принципиальных ошибок" томских геометров и даже объявил там указанный метод "порочным".

Учитывая возможные последствия аналогичных выступлений В.С.Малаховского, мы решили прокомментировать эту работу.

Прежде всего заметим, что в последнем параграфе В.С.Малаховский получает результаты работ [3] (для евклидова пространства [4], [5], выполненных с помощью МРП. Таким образом, о неправильности результатов этих работ не может быть и речи, коль скоро автор рецензируемой работы смог получить их своим методом, который он, по-видимому, считает вполне корректным. Отсюда следует, что целью рецензируемой работы (сам автор о назначении данной работы ничего не говорит, замечая лишь на стр.5, что в ней "рассматриваются общие вопросы"), по-видимому, является

или 1/ показать, что результаты, получаемые методом репеража подмногообразий, могут быть получены другим, существенно отличающимся от МРП методом, который автор и предлагает в своей работе,

или 2/ показать, что никакого особого "метода репеража подмногообразий" нет, так как он сводится к другим известным методам,

или 3/ показать недостаточную обоснованность МРП, состоящую в том, что при работе этим методом пропускался до сих пор некоторый важный шаг (исследование "относительной инвариантности форм"), в связи с чем автор желает восполнить этот "пробел"

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



и показать, каким способом те же результаты могут быть получены "правильно".

В первом случае вызывает удивление, что автор ограничился получением лишь простейших результатов( т.е. построением полуканонического репера [6] ) и не проанализировал более сложные и тонкие вещи, полученные с помощью МРП (см., напр., [7] , [8] и др. ).

Во втором случае следует заметить, что большинство применяемых в современной математике методов может быть сведено к другим (например, к "методу флюксий", а в локальной дифференциальной геометрии - к "методу внешних форм"). Но тогда достаточно было бы заменить в выражении "метод репеража подмногообразий" слово "метод" словом "методика", и на этом полемика закончилась бы.

В третьем случае цель работы представляется разумной: автор ставит перед собой задачу обоснования МРП, стремится восполнить пробелы в доказательствах работ [3] - [5] , пытается дать лучшую, чем в [6] , схему, по которой можно было бы проводить более строгие доказательства и т. д. Решение такой задачи весьма необходимо, так как обоснование МРП, данное в [6] , во-первых, неформально, а во-вторых, производится с точностью до работ Э. Картана [9] и С.П.Финикова [10] , которые современному уровню строгости уже не удовлетворяют(см., напр., [11] ). Одной из попыток в этом направлении является работа [12] , авторы которой сознают, что и эта работа является скорее постановкой проблемы, чем её решением.

Посмотрим же, какое обоснование предлагает В.С.Малаховский. Главными в системе предлагаемых им основных понятий являются, по-видимому, следующие три: 1/ понятие "относительно инвариантной системы форм Пфаффа на многообразии" ( [1] стр. 7), 2/ два новых определения подмногообразия или "пфаффова подмногообразия"(одно из них дано в [1] на стр. 13, а второе - в заметке [2] ), 3/ понятия "квазиканонического" и "индуцированно- канонического" реперов. Разберём их последовательно.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Прежде всего заметим, что автор рецензируемой работы называет "формой на многообразии" не то же самое, что под этими словами понимается в теории дифференцируемых многообразий (см., напр., [13]). Именно, формой на многообразии он называет форму

$$\theta^{\alpha} = A_i^{\alpha}(a,u)\Omega^i \qquad (1)$$

(формула 2.1 из [1], стр. 7). Это выражение является однородным многочленом относительно дифференциалов главных [14] параметров, но в коэффициенты входят и главные, и вторичные [14] параметры. Поскольку В.С.Малаховский пользуется системой понятий, изложенных в [14], то он, по-видимому, считает главные и вторичные параметры независимыми, т.е., так же как и в [15], у него строится главное расслоенное многообразие, у которого локальными координатами на базе являются главные параметры, а локальными координатами пространства расслоения являются главные и вторичные параметры. В этом случае форма (1) является дифференциальной формой специального вида на пространстве главного расслоения (в (1) не входят дифференциалы вторичных параметров).

Заметим, что возможна и другая точка зрения на вторичные параметры; их можно считать произвольными функциями главных параметров. Такая точка зрения особенно ясно прослеживается в работах геометров тензорной школы (см., напр., [16], [17]), где коэффициенты формул перехода от одного репера к другому являются частными производными новых криволинейных координат по старым, т.е. функциями точки многообразия. Среди работ, выполненных методом внешних форм, эта точка зрения последовательно проведена, например, в работах С.С.Бюшгенса (см., напр., [18]). Частично она проводится и в [6] (см. стр. 190).

Если первая точка зрения соответствует теории расслоенных пространств [19], то вторая - теории пучков [20] (т.е. фактически рассматривается пучок ростков локальных сечений

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



главного расслоенного многообразия).

Перейдём к разбору понятия "относительно инвариантной системы форм". Как уже было замечено выше, это - система форм специального вида на пространстве главного расслоения. Определение относительно инвариантной системы форм чрезвычайно неудачно по трём причинам. 1/ Оно дано не "внутренним образом", а через вычислительную процедуру (формулой (2.2) рецензируемой работы). 2/ Операция $\delta\theta^\alpha$ в этой формуле никак не определена, что такое $\delta$ можно только гадать: или это "вариация" формы $\theta^\alpha$ в смысле С.П.Финикова (см. [21], стр.55), или это выражение, возникшее из "билинейного коварианта Фробениуса" ([10], стр.81) *, или что-нибудь другое- неясно. (Мы уж не говорим о том, что о значении выражений $B^\alpha_\beta(a,u,\delta u)$, входящих в определение, вообще ничего не сказано). В работе, претендующей на построение системы основных понятий, такие вещи должны быть точно определены. 3/ В.С.Малаховский не замечает, что его условие "относительной инвариантности" означает, что характеристическая система линейных форм ([10], гл. IV) для системы уравнений Пфаффа $\theta^\alpha = 0$ (полученной из системы форм (1)) содержит только главные формы. С учётом этого замечания, теорема 2.2 становится тривиальным следствием того известного факта, что для вполне интегрируемой системы Пфаффа характеристическая система уравнений Пфаффа совпадает с исходной (см. [10] стр. 312), а теорема 2.1 - столь же тривиальным следствием теоремы 2.2.

Известно (см. [10], стр.307, ср. так же [28], стр.78), что первые интегралы характеристической системы уравнений для системы $\theta^\alpha = 0$ образуют наименьшее число переменных, через которые можно выразить все уравнения системы $\theta^\alpha = 0$ так, что и в дифференциалы, и в коэффициенты будут входить только переменные этой группы, если преобразовывать систему $\theta^\alpha = 0$ с помощью операций замены переменных и замены

---

* Точная формула для этого "ковариантa" приводится, например, в [22], стр. 24. У С.П.Финикова в [10] она приведена только для случая, когда операторы дифференцирования $d$ и $\delta$ перестановочны, т.е. когда их скобка равна нулю.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



системы $\theta^\alpha = 0$ на эквивалентную (см. [29]). Поэтому можно сказать, что вторичные параметры входят в относительно инвариантную систему форм несущественно, т.е. система может быть заменена эквивалентной системой, содержащей только первичные параметры. Поэтому сформулированное В.С.Малаховским в [2] определение подмногообразия $\Psi_k$ совпадает с точностью до замены системы Пфаффа на эквивалентную с определением, введенным в [6]. Оно не вызывает возражений, если отбросить малоудачную фразу насчет "первой дифференциальной окрестности", заимствованную В.С.Малаховским из 23 (стр.7).

Определение пфаффова подмногообразия из [1] вызывает значительные возражения. Цитируем его (стр.13 из [1]).

Определение 4.1. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\theta^\alpha \equiv A^\alpha_\xi(a,u)\Omega^\xi + \Omega^\alpha = 0, \quad \alpha = k+1,\dots,m; \quad \xi = 1,\dots,k. \qquad (2)$$

Пфаффовым подмногообразием многообразия $\mathfrak{M}_m$, или подмногообразием $\Psi_k$ называется совокупность интегральных кривых системы (2)*, принадлежащих многообразию $\mathfrak{M}_m$.

Это определение неудовлетворительно, так как не определено отношение принадлежности между интегральными кривыми системы (2) и многообразием $\mathfrak{M}_m$.

Но, может быть, исходя из доказательства теоремы 4.1, можно догадаться, что именно понимает автор под "принадлежностью интегральной кривой системы (2) многообразию $\mathfrak{M}_m$"? Эта теорема формулируется следующим образом:

"Система уравнений (2) тогда и только тогда определяет подмногообразие $\Psi_k$, когда система форм $\theta^\alpha$ относительно инвариантна".

Если бы доказательство достаточности условия теоремы заканчивалось словами: "следовательно, система (2) имеет интегральные кривые; принадлежащие $\mathfrak{M}_m$", а доказательство необходимости начиналось бы словами: "предположим, что система (2) имеет интегральные кривые, принадлежащие $\mathfrak{M}_m$

---

* В рецензируемой работе система (2) обозначена (4.1).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



то легко было бы догадаться, что автор понимает под "принадлежностью". Но в доказательстве ничего подобного нет. В нём говорится только, что "интегральная кривая относительно инвариантной системы (2) является интегральной кривой системы $\tilde{\theta}^\alpha = 0$, получающейся из (2) инфинитезимальным изменением вторичных параметров", и о том, что "подмногообразие $\Psi_k$ инвариантно относительно инфинитезимального изменения вторичных параметров". Не доказывается, почему это эквивалентно "принадлежности интегральных кривых многообразию $m_m$" и не объясняется, что следует понимать под "инфинитезимальным изменением". По-видимому, - "бесконечно-малое", но замена слов: "бесконечно-малое" на "инфинитезимальное" не прибавляет строгости в математической работе. Вряд ли в современной работе, претендующей на обоснование и определение системы основных понятий, можно считать корректными подобные "доказательства".* В этом доказательстве автор допускает удивительные небрежности. Упоминавшаяся уже "система $\tilde{\theta}^\alpha = 0$" имеет вид $\theta^\alpha + \delta\theta^\alpha = 0$. Ух не вводит ли В.С.Малаховский новую интерпретацию выражений $\delta\theta^\alpha$ как "бесконечно-малых" форм? Во всяком случае, выражение $\tilde{\theta}^\alpha = \theta^\alpha + \delta\theta^\alpha$ не является формой Пфаффа, так как оно не является однородным многочленом относительно дифференциалов, и не является дифференциальной формой в смысле [13]. Поэтому "система" $\tilde{\theta}^\alpha = 0$" не есть система Пфаффа, и о каких её интегральных кривых может идти речь? Таким образом, доказательство теоремы 4.1 совершенно некорректно и не проясняет смысл определений 4.1, так как последнее при доказательстве не используется.

Заметим ещё, что "интегральные кривые системы (2), принадлежащие $m_m$" нельзя понимать как кривые в пространстве главных параметров, заданные уравнениями

$$u^i = u^i(t), \qquad (3)$$

которые при подстановке в систему (2) обращают её уравнения в тождества. Во-первых, потому, что уравнения (3) только в

---

* Это, конечно, не означает, что мы отрицаем эвристическую ценность рассуждений, использующих бесконечно-малые. Речь идёт только об использовании их в системе основных понятий.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



пространстве главных параметров определяют кривую, а в пространстве всех (т.е. главных и вторичных) параметров, на котором задана система (2), уравнения (3) определяют не кривые, а многообразия размерности $1+\tau$, где $\tau$ - число вторичных параметров. Во-вторых, такое понимание привело бы к тому, что одна и та же совокупность кривых в пространстве главных параметров выступала бы то как $\Psi_k$, то как $\Psi_\ell$, где $\ell > k$.

Таким образом, одно из двух данных В.С.Малаховским определений пфаффова подмногообразия, данное в [2], фактически (с точностью до эквивалентности системы уравнений Пфаффа) совпадает с определением подмногообразия $\Psi_k$ из [6], а другое, дачное в [1], совершенно некорректно.

Если использовать определение подмногообразия $\Psi_k$ из [6], или аналогичные определения Д.М.Синцова [30] или Г.Врэнчану [31], то совершенно ясно, что задание подмногообразия эквивалентно заданию в пространстве всех главных параметров системы уравнений Пфаффа или, что то же самое, распределения [13].

Если же поставить задачу: в каком случае система уравнений Пфаффа, заданная на пространстве главного расслоения (т.е. на пространстве главных и вторичных параметров), определяет пфаффово подмногообразие на пространстве одних только главных параметров, то здесь следует, прежде всего, определить: каким образом и в каком смысле дифференциальная система на одном многообразии может определять пфаффово подмногообразие на другом. В рецензируемой работе это не определено.

Здесь могут быть использованы различные концепции. Например, если считать вторичные параметры произвольными функциями главных (т.е. рассматривать пучок ростков локальных сечений главного расслоения), то любая система форм на пространстве расслоения определяет пфаффово подмногообразие на базе. Каждому конкретному выбору подвижного репера [6] (или поля реперов [24]) соответствует конкретный выбор пфаффова подмногообразия. Относительная инвариантность системы форм в таком случае означает (это следует из свойств

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



характеристической системы для этой системы форм), что ло-
ому конкретному заданию вторичных параметров как функций
лавных соответствует одно и то же подмногообразие.

Если же считать главные и вторичные параметры незави-
имыми переменными, то приходим к другой (хотя, конечно,
квивалентной) точке зрения . В этом случае система уравнений
а пространстве всех параметров не определяет, строго гово-
я, пфаффова подмногообразия на пространстве главных пара-
етров, даже если вторичные параметры не входят явно в сис-
ему. Система вида (2) определяет некоторый класс пфаффовых
одмногообразий базы. Уравнения пфаффовых подмногообразий,
ринадлежащих этому классу, получаются из системы (2), если
оложить вторичные параметры произвольными функциями глав-
ых (см. [6] ,стр. 189,190). В этом случае условие относи-
ельной инвариантности означает, что класс содержит только
дно подмногообразие.

Последними из введённых В.С.Малаховским новых понятий,
а которых мы остановимся, являются "квазиканонический ре-
ер" ( [1] ,стр. 12) и "индуцировано канонический репер"
[1] ,стр. 13). Внутреннего противоречия в этих опреде-
ениях нет (если не считать того, что "репер индуцирован-
ого порядка $\nu$ ", к которому относится многообразие $\mathfrak{M}^*_m$ ,
огласно определению 3.2 будет одним и тем же для любого
$\mathfrak{M}^*_m$ „ полученного оснащением $\mathfrak{M}_m$ , т.е. является
ычным "репером порядка $\nu$ " многообразия $\mathfrak{M}_m$ ). Беда
олько в том, что В.С.Малаховский путает введённый им
ндуцированно-канонический репер" с "полуканоническим
епером"' [6] . Это видно из примера п.3 в §5. Репер, полу-
енный в [5] , не является репером никакого порядка в сму-
е Э.Картана ( [9] ,см. также [14] ). Таким образом,
епер, построение которого В.С.Малаховский в п.3 §5 рецен-
руемой работы заимствует из [5] , являясь полуканоничес-
м, не является квазиканоническим вопреки утверждению
тора (стр. 17). Легко видеть, что для многих многообразий
т"репера порядка $\nu$ ", которому соответствует число "сво-
дных вторичных параметров", в точности равное $k(m-k)$ .
ледовательно, квазиканонический репер в общем случае не

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



существует.

Резюмируя, можно сделать следующие выводы по поводу основного содержания статьи В.С.Малаховского:

1. Понятие относительно инвариантной системы форм давно известно и полезно, но предлагаемое автором определение неудачно, так как в нём не используются свойства таких систем, характеризующие их внутренним образом (характеристическая система содержит только главные формы). Из-за этого доказательства теорем 2.1, 2.2 и 3.1 неоправданно усложнены, хотя сами теоремы весьма тривиальны.

2. Определение 4.1 пфаффова подмногообразия и формулировка теоремы 4.1 неудовлетворительны, а доказательство теоремы 4.1 некорректно. Теорема 4.2 тривиальна, если пользоваться определением подмногообразия $\Psi_k$ из [6].

3. Автор путает введённый им в рецензируемой работе квазиканонический репер с полуканоническим в смысле [6].

4. В работе много мелких погрешностей и неточностей. Вот ещё один пример: на стр. 12 утверждается, что геометрический объект определяет фигуру, но в [25] фигура определяется как множество точек, а если объект определяет коррелятивный элемент, или нуль-систему, или, наконец, свободный вектор, то где тут точечное множество?

В заключение мы считаем себя обязанными сказать следующее. Вызывают удивление приёмы, которые В.С.Малаховский употребляет по отношению к работам предшественников. Если ему не нравится употребляемая ими терминология, то он заменяет её своей, не сравнивая её с принятой ранее терминологией и не объясняя, как это принято, почему он считает старую терминологию неудачной. Так, например, он говорит об оснащённом многообразии, а не о многообразии, отнесённом к подмногообразию [6], и утверждает, что Р.Н Щербаков и его ученики исследовали "оснащённые многообразия", а чешские геометры К.Свобода, В. Гавел и И. Коларж [26] "рассматривали инволютивные оснащённые многообразия некоторых классов фигур". Так как понятие "инволютивного оснащённого многообразия" у В.С.Малаховского не определяется, то непонятно, что же рассматривали чешские геометры. Между тем достаточно по-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



смотреть на заголовок их работы, чтобы выяснить, что они занимались "реперажем системы подмногообразий". Румынские геометры Г.Георгиев и И.Попа, оказывается, по В.С.Малаховскому, исследовали " многообразие индуцирующих фигур". Такой метод изложения содержания работ предшественников может создать ложное впечатление, что все они развивают круг идей, выдвинутых автором.

Нельзя, наконец, не отметить некорректность замечания В.С.Малаховского ( [1] ,стр. 8) по поводу работы [27] Г.Георгиева и И.Попа. В этом замечании говорится об ошибочности одного из "замечаний" работы [27] . В.С.Малаховский пишет так, как будто та система основных понятий, которой пользуется он сам, полностью совпадает с той, которой пользуются Г.Георгиев и И.Попа. А между тем критикуемое В.С. Малаховским замечание 1 работы [27] начинается словами: "В отличие от обычной процедуры" ... и т.д., так что надо было бы сначала вникнуть в суть предлагаемой в [27] "необычной процедуры", прежде чем объявлять ее ошибочной.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1.В.С.Малаховский. Дифференциальная геометрия оснащённых многообразий фигур. Труды Калининградского ун-та, Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 2, 1971, 5-19.

2.В.С.Малаховский. Подмногообразия фигур в однородном пространстве. Третья республиканская конференция математиков Белоруссии. Тезисы докладов, ч.1, Минск, 1971, 54-56.

3.Р.Н.Щербаков. Репер линии на поверхности в аффинной дифференциальной геометрии. Уч. зап. Бурятского пединститута, 3, 1952, 15-40.

4. Р.Н.Щербаков. Репер линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции (метрическая теория). Уч. зап. Бурятского пединститута, 5, 1954, 61-89.

5.Р.Н.Щербаков. Эквиаффинный полуканонический репер комплекса прямых. Геом. сб., 1 (Труды Томского ун-та, 160), 1962, 70-81.

6.Р.Н.Щербаков. О методе подвижного репера и репеража подмногообразий. Геом. сб.,6 (Труды Томского ун-та, 191), 1967, 177-194.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



7. Р.Н.Щербаков. Эквиаффинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса. Матем. сб., 60(102), 2, 1963, 131-158.

8. Е.Т.Ивлев. Репераж подмногообразий в теории пар комплексов в $P_3$. Сибирский матем. ж., 4, №4, 1963, 799-820.

9. Э.Картан. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963.

10. С.П.Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.-Л., 1948.

11. Å. Svec. Cartan's Method of Specializations of Frames. Чехословацкий матем. ж., 16(91), №4, 1966, 552 - 59

12. Р.Н.Щербаков, В.В.Слухаев. Репераж и расслоения. Данный сборник.

13. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, 1964.

14. Г.Ф.Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, 2, 1953, 275-382.

15. Г.Ф.Лаптев. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Труды третьего всесоюзного математического съезда. 3, 1958, 409-418.

16. И.А.Схоутен, Д.Дж.Стройк. Введение в новые методы дифференциально-геометрических исследований. М.-Л., 1939-1948.

17. П.К.Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва, 1964.

18. С.С.Бюшгенс. Геометрия векторного поля. Известия АН СССР, серия матем., 10, 1946, 73-96.

19. Д.Хьюзмоллер. Расслоенные пространства. Москва, 1970

20. Р.Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. Москва, 1961.

21. С.П.Фиников. Теория конгруэнций. М.-Л., 1950.

22. К.Номидзу. Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1960.

23. Р.Н.Щербаков. О методе репераж подмногообразий. Геом. сб., 3, 1963, 5-11.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



284. А.Картан. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Москва, 1971.

285. Б.С.Малаховский. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геом. ссеминара ВИНИТИ, 2, 1969, 179-206.

286. K. Svoboda, V. Havel, I. Kolář. La méthode du repérage des systemes de sous-variétés. Comm. math. Univ. Carolinae, 5, 4, 1964, 183-201.

287. Gh. Gheorghiev, I. Popa. Sur la méthode du „repérage" et la théorie des variétés „équiparametriques". C.R. Acad. Sci., Paris, 263, 1966, 911-914.

288. Н.Г.Чеботарёв. Теория групп Ли. М.-Л., 1940.

299. П.К.Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. 1947.

300. Д.М.Синцов. Исследования по теории пфаффовых многообразий. Геом. сб. II, Труды сектора геометрии инст. математ. и мех., Харьков, 1940, 63-83.

311. Gh. Vrănceanu. Studio geometrico dei sistemi anolonomi. Opera matematică, I, Bucureşti, 1969, 138-169.

Поступила 1 марта 1972 г.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СЕМИНАР Н.Г.ТУГАНОВА В ТОМСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В 1971 году на заседаниях семинара были заслушаны и обсуждены следующие доклады:

4.П. Е.Т.Ивлев. О проективно-инвариантных линиях многомерной поверхности с заданным оснащением.

11.П. В.В.Слухаев. О дифференциальной геометрии стационарного движения идеальной жидкости.

18.П. М.В.Бразевич. Об одном проективно-инвариантном классе пар конгруэнций в $P_3$.

25.П. А.Е.Масленков. Об одном 2-семействе пар непересекающихся линейных подпространств в $A_4$.

4.Ш. В.И.Машанов /Иркутск/, Л.З.Кругляков /Омск/. Основные определения и обозначения в многомерной дифференциальной геометрии однородных пространств.

18.Ш. Л.З.Кругляков /Омск/. О касательных подпространствах и характеристиках семейства $d$-плоскостей в проективном пространстве.

25.Ш. И.Г.Мулин /Абакан/. О некоторых классах римановых пространств со специальной структурой тензора кривизны.

1.1У. Н.Н.Горбанев. О некоторых классах квазистационарных потоков.

8.1У. А.Е.Масленков. Некоторые частные классы многообразий $E(L_2, \ell, 2)$

15.1У. В.И.Машанов /Иркутск/. О паре линейчатых поверхностей.

22.1У. В.А.Труппов /Иркутск/. Некоторые вопросы теории $(2n-2)$-параметрических многообразий нуль-пар в $A_n$.

29.1У. И.Е.Болдырева /Новосибирск/. О 2-семействах пар прямых в $P_5$.

6.У. Л.В.Львова /Барнаул/. Линейчатая геометрия квазиэллиптического пространства.

13.У. В.В.Слухаев, Р.Н.Щербаков. Репераж и расслоения.

20.У. Л.З.Кругляков /Омск/, В.И.Машанов /Иркутск/. О трансверсалях в многомерном проективном пространстве.

27.У. Л.З.Кругляков /Омск/. О характеристических многообразиях семейства $d$-плоскостей в проективном пространстве.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



9.1X. Е.Е.Вольпер. Алгебраические многообразия семейства пар плоскостей.

16.1X. Е.Т.Ивлев. Дифференциальная геометрия эквипараметрических многообразий в проективном пространстве, связанных с многомерной поверхностью.

30.1X. Е.М.Горбатенко. Алгебраический вариант теоремы Фробениуса.

21.X. М.В.Бразевич. Об одной классификации пар комплексов в $P_3$.

28.X. Л.З.Кругляков. Семейства $d$-плоскостей в $P_n$, обладающие торсами.

18.X1. А.П.Ерохина. О преобразованиях Егорова.

25.X1. И.А.Печников. О некоторых основных понятиях неголономной дифференциальной геометрии.

16.XП. В.В.Слухаев, Р.Н.Щербаков. Дифференциально-топологические аспекты метода Картана.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

## СОДЕРЖАНИЕ

Р. Н. Щербаков, В. В. Слухаев. Реперах и расслоения . . . . . 5

В. В. Слухаев. О дифференциальных системах на расслоенном многообразии . . . . . 10

А. А. Лучинин. О парах $m$-поверхностей в $n$-мерном проективном пространстве . . . . . 21

Л. З. Кругляков. О 3-семействах прямых в $P_5$ . . . . . 29

Г. В. Шуленина. Репераж подмногообразий в многообразиях коник в трехмерном проективном пространстве . . . . . 49

А. Е. Шиллеров. О четырехпараметрическом поле направлений в трехмерном проективном пространстве . . . . . 72

Э. М. Кондакова, Е. Т. Ивлев. О некоторых геометрических объектах $n$-семейства невырожденных нуль-пар в $P_n$ . . . . . 87

А. П. Ерохина. К вопросу о преобразованиях Егорова в проективной теории конгруэнций . . . . 96

М. В. Бразевич. Об одном проективно-инвариантном классе пар конгруэнций в трехмерном пространстве . . . . . 120

Л. В. Рыбченко. О 2-семействах пар прямых в $P_4$ . . . . . 134

В. К. Барышева. О неголономном многообразии 2-плоскостей в $A_5$ . . . . . 145

И. А. Печников. О пфаффовых семействах параболических цилиндров в трехмерном аффинном пространстве . . . . . 155

И. А. Печников. Пфаффовы 3-семейства параболических цилиндров в трехмерном аффинном пространстве . . . . . 175

Н. В. Амишева. Комплексы центральных кривых второго порядка в трехмерном эквиаффинном пространстве . . . . . 187

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru



Н. В. Амишева. О семействах алгебраических элементов второго порядка в эквиаффинном пространстве . . . . . 198

Т. В. Лыжина. О линейчатых конгруэнциях в трехмерном флаговом пространстве . . . . . 210

В. В. Слухаев, Р. Н. Щербаков. Замечания по поводу статьи В.С.Малаховского "Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур" . . 224

Геометрический семинар Н.Г.Туганова в Томском университете . . . . . 236

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Редактор издательства
Е.В.Лукина

КЗ 03364 Подписано к печати 16 мая 1972 г.
Бумага 60x90 1/16; печ.л. 15; бум.л. 7,5
уч.-изд.л. 9,6. Заказ 417 Тираж 400
Цена 1 руб.

Издательство ТГУ, Томск, пр.Ленина, 36.
Ротапринт ТГУ, Томск, ул.Никитина, 17.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

1-212887

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00931838