Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1965

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

...ого социалистического государства — Советс...
...шиеся воза, Китайской Народной Республики и ...
...лепных побе...ств, строящих социализм, являются с...
...ения были с ...гарантией безопасности социалис...
...ской интеллигенц... также одним из главных факто...
...м. Благодаря наличи... ляют действенную силу пр...
...х экономических связей ме... оказывают решающее в...
...м и Венгерской Народной ...ира и консолидации ...
...озный подъем народного хозяйст...
...юза в период семилетнего плана бу...ение для мог...
...ровать социалистическое строительство в ...ет благо...
...ране и способствовать осуществлению на...тельст...
...циалистических целей.

Мы глубоко уверены в том, что семилетний ...ан Советского Союза — грандиозный план ми... и социализма — повысит сознательность рево...ционных социалистов всего мира. Этот план — ...льное оружие: он дает множество новых аргу...нтов тем, кто живет и борется во имя мира и со...ализма в любой стране.

Все человечество заинтересовано в том, чтобы ...ветский Союз смог претворить в жизнь задачи, ...меченные в семилетнем плане. Это представ...ет интерес и для тех буржуазных кругов Запа..., которые сохраняют необходимую трезвость и ... выхода из созданного империалистами

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 5

864426

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1965

513

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Редакторы выпуска: профессор Р. Н. Щербаков,
профессор В. С. Малаховский, доцент Е. Т. Ивлев.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ОТ РЕДАКТОРОВ

Настоящий пятый выпуск «Геометрического сборника» содержит работы, выполненные участниками геометрического семинара Н. Г. Туганова при кафедре геометрии Томского университета в 1963—1964 гг. Большая часть статей посвящена той же тематике, что и работы, опубликованные в предыдущих выпусках. Работа В. С. Малаховского представляет собою часть подготавливаемой участниками семинара монографии по современным методам дифференциально-геометрических исследований, основывающихся на методе внешних форм Картана. Работы В. В. Слухаева и В. П. Долговых отражают сравнительно новую проблематику—дифференциально-геометрическую трактовку теории векторного поля с приложениями к гидромеханике. Публикуемые работы московского геометра В. В. Рыжкова относятся к теории точечных отображений пространств. Эта теория была предметом обсуждения нашего семинара в 1964 г., когда В. В. Рыжков сделал цикл докладов. В статье чешских геометров В. Гавела и И. Клапки рассматривается одна задача теории поверхностей с проективной связностью, тесно связанная с аналогичной задачей проективно-дифференциальной теории поверхностей, которой в свое время занимался Р. Н. Щербаков. Как обычно, в конце сборника дан обзор работы семинара.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. С. МАЛАХОВСКИЙ

О МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФИГУР

В работе вводятся некоторые новые понятия для геометрических объектов n-мерного однородного пространства, рассматриваются алгебраические фигуры и определяемые ими группы преобразований.

Получены некоторые свойства многообразий простых, составных и индуцирующих алгебраических фигур.

§ 1. Геометрические объекты n-мерного однородного пространства

Рассмотрим n-мерное однородное пространство с фундаментальной r-членной группой Ли G, определяемой линейно независимыми формами Пфаффа $\Theta^s(u^p, du^q)$ и структурными постоянными $C^s_{pq}(p, q, s = 1, 2, \ldots, r)$ (см. [1], стр. 285). Между семействами реперов различных пространств E^* представления группы G (пространств с фундаментальной группой G) всегда можно установить взаимно-однозначное соответствие, инвариантное относительно преобразований группы G. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что все пространства представления группы G отнесены к семейству реперов заданного однородного пространства E_n. Такое отнесение эквивалентно установлению общей параметризации u^s преобразований группы G во всех пространствах ее представления.

Геометрическим объектом Φ ранга N пространства E_n называется ([1], стр. 294, [2], стр. 151) точка N-мерного пространства E^*_N представления группы G. Координаты a^I $(I = 1, 2, \ldots, N)$ точки Φ относительно заданного репера пространства E_n называются компонентами геометрического объекта, а само пространство E^*_N — пространством объекта.

Формулы преобразования компонент a^I геометрического объекта Φ при переходе от одного репера к другому запишем в виде

$$\bar{a}^I = F^I(a, u). \tag{1.1}$$

Обозначим буквой R ранг матрицы $\| f^I_s(a) \|$, где

$$f^I_s(a) = \left(\frac{\partial F^I}{\partial u^s}\right)_{u=0}, \tag{1.2}$$

где $u = 0$ означает единичный элемент группы G.

Так как совокупность всех преобразований группы G не может оставлять неподвижными одновременно все точки ее пространства представления, то

$$0 < R \leqslant \min(r, N). \tag{1.3}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Определение 1. Жанром ρ геометрического объекта $\Phi(a^I)$ называется число

$$\rho = N - R. \tag{1.4}$$

Из (2.3) следует, что

$$0 \leqslant \rho < N. \tag{1.5}$$

В дальнейшем мы будем задавать геометрический объект вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений стационарности

$$\omega^I \equiv da^I - f^I_s(a)\,\Theta^s(u, du) = 0, \tag{1.6}$$

эквивалентной конечным соотношениям (1.1) (см. [1], стр. 296).

Условимся считать, что индексы p_0, q_0, s_0 принимают значения $-\rho+1,\ldots,0$, индексы p_1, q_1, s_1 — значения $1, 2,\ldots, N-\rho$, индексы I, J, K — значения $-\rho+1,\ldots, N-\rho$, а нумерацию инвариантных форм Θ^s и уравнений (1.6) производить так, чтобы

$$\det \| f^{s_1}_{p_1} \| \neq 0. \tag{1.7}$$

Формы Пфаффа ω^I называются первичными формами геометрического объекта, а первые интегралы вполне интегрируемой системы уравнений (1.6) — его первичными параметрами. Первичные формы ω^{s_0} называются побочными, первичные формы ω^{s_1} — главными.

Теорема 1. Жанр ρ геометрического объекта (1.6) совпадает с числом его независимых абсолютных инвариантов относительно преобразований группы G.

Доказательство. Так как ранг матрицы $\| f^I_s \|$ равен $N-\rho$, то $f^I_{s_0} = \lambda^{s_1}_{s_0} f^I_{s_1}$. Полагая

$$V^{s_1} = \Theta^{s_1} - \lambda^{s_1}_{s_0}\Theta^{s_0}, \tag{1.8}$$

приводим систему (1.6) к виду:

$$\omega^I \equiv da^I - f^I_{s_1}(a)\,V^{s_1}(u, du) = 0. \tag{1.9}$$

Инвариантные формы V^{s_1}, Θ^{s_0} определяют группу G^*, изоморфную группе G. Находя из уравнений $\omega^{p_1} = 0$ формы V^{s_1} и подставляя их значения в оставшиеся уравнения (1.9), мы получим вполне интегрируемую систему

$$\omega^{s_0} \equiv da^{s_0} - A^{s_0}_{p_1}(a^I)\,da^{p_1} = 0, \tag{1.10}$$

определяющую ρ независимых абсолютных инвариантов объекта (первых интегралов системы (1.10)

$$i^{s_0} = i^{s_0}(a^I). \tag{1.11}$$

Теорема доказана.

Определение 2. Геометрический объект $\Phi_1(a_1^{I_1})$ ранга N_1 и геометрический объект $\Phi_2(a_2^{I_2})$ ранга N_2 называются k (раз)-инцидентными, если их компоненты (относительно некоторого репера пространства E_n) связаны k соотношениями (уравнениями инцидентности)

$$\varphi^\alpha(a_1^{I_1}, a_2^{I_2}) = 0 (\alpha = 1, 2,\ldots, k), \tag{1.12}$$

причем ранги якобиевых матриц $\left\| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a_1^{I_1}} \right\|$ и $\left\| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a_2^{I_2}} \right\|$ равны k.

Из определения следует, что

$$k \leqslant \min(N_1, N_2). \tag{1.13}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если $N_2 < N_1$ и $k = N_2$, то уравнения инцидентности (1.12) можно записать в виде

$$a_2^{I_2} = \psi^{I_2}(a_1^{I_1}), \tag{1.14}$$

и мы получим случай охвата одного геометрического объекта $(a_2^{I_2})$ другим $(a_1^{I_1})$ (см. [1], стр. 300).

Если $k = N_1 = N_2$, то геометрические объекты $a_1^{I_1}$ и $a_2^{I_2}$ являются подобными ([1], стр. 301).

Теорема 2. Ранги и жанры подобных геометрических объектов совпадают.

Доказательство. Если геометрический объект $\Phi_1(a_1^{I_1})$ ранга N_1 жанра ρ_1 подобен геометрическому объекту $\Phi_2(a_2^{I_2})$ ранга N_2 жанра ρ_2, то

$$a_1^{I_1} = F_1^{I_1}(a_2^{I_2}),\ a_2^{I_2} = F_2^{I_2}(a_1^{I_1}). \tag{1.15}$$

Следовательно,

$$N_1 = N_2.$$

Из уравнений

$$da_1^I = f_s^I(a_1)\,\Theta^s,\ da_2^I = \varphi_s^I(a_2)\,\Theta^s$$

стационарности геометрических объектов Φ_1 и Φ_2 следует, что

$$\varphi_s^I = \frac{\partial F_2^I}{\partial a_1^K} f_s^K.$$

Следовательно, ранг $N_1 - \rho_2$ матрицы $\|\varphi_s^I\|$ равен наименьшему из рангов матриц $\left\|\frac{\partial F_2^I}{\partial a_1^K}\right\|$ и $\|f_s^K\|$, т. е. $N_1 - \rho_1$. Поэтому

$$\rho_1 = \rho_2.$$

Определение 3. Геометрический объект $\Phi(a^I)$ называется специально координированным, если компоненты a^{s_0} являются абсолютными инвариантами, а компоненты a^{s_1} зависят только от параметров u^s группы G.

Теорема 3. Для любого геометрического объекта $\Psi(b^I)$ существует специально координированный подобный объект.

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений стационарности геометрического объекта Ψ ранга N жанра ρ

$$db^{s_1} - f_{p_1}^{s_1}(b^I)\,\Theta^{p_1}(u, du) = 0,\ db^{s_0} - f_{p_1}^{s_0}(b^I)\,\Theta^{p_1}(u, du) = 0. \tag{1.16}$$

Так как $\det\|f_{p_1}^{s_1}\| \neq 0$, то фиксацией $N - \rho$ групповых параметров можно придать $N - \rho$ главным компонентам объекта Ψ фиксированные постоянные значения (как правило, нули или единицы) и привести систему (1.16) к виду

$$\Theta^{s_1}(u, du) = 0,\quad db^{s_0} = 0. \tag{1.17}$$

Первые интегралы $a^{s_0} = b^{s_0}$, $a^{s_1} = f^{s_1}(u)$ этой системы образуют специально координированный геометрический объект $\Phi(a^I)$, подобный объекту Ψ.

§ 2. Алгебраические фигуры однородного пространства

Определение 4. Подмножество F пространства E_n называется алгебраической фигурой, если его можно включить в систему $R(F)$ подмножеств пространства E_n, изоморфную некоторому конечномерному пространству представления группы G. Система $R(F)$ называется пространством фигуры F.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Каждой алгебраической фигуре F пространства E_n соответствует, очевидно, целый класс подобных геометрических объектов: $F = \{\Phi\}$. Ранг N и жанр ρ любого геометрического объекта этого класса мы назовем рангом и жанром фигуры F.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только алгебраических фигур и под термином „фигура“ будем всегда подразумевать алгебраическую фигуру.

Среди геометрических объектов класса F существуют специально координированные (теорема 3). Система дифференциальных уравнений стационарности специально координированного объекта имеет вид

$$da^{s_1} = f^{s_1}_{p_1}(a^{q_1})\,\theta^{p_1}(u, du),\quad da^{s_0} = 0. \tag{2.1}$$

Определение 5. Совокупность $R_1(F)$ всех фигур пространства E_n, эквивалентных данной (получающихся из данной с помощью всевозможных преобразований группы G), называется первым пространством фигуры F. Две фигуры $F_1(a^I_1)$ и $F_2(a^I_2)$, для которых $a^{s_1}_1 = a^{s_1}_2$, называются концентричными. Совокупность $R_2(F)$ всех фигур пространства E_n, концентричных данной, называется вторым пространством фигуры F. Пространство $R(F)$ фигуры F изоморфно прямому произведению пространств $R_1(F)$ и $R_2(F)$.

Пространства $R_1(F)$, $R_2(F)$ и $R(F)$ имеют размерности $N-\rho$, ρ и N. Если $\rho = 0$, то пространство $R_2(F)$ является пустым, а пространство $R(F) = R_1(F)$ транзитивно относительно преобразований группы G. Если же $\rho > 0$, то пространство $R(F)$ разбивается на ρ-параметрическое семейство систем интранзитивности, каждая из которых состоит из $\infty^{N-\rho}$ эквивалентных между собой фигур.

Рассмотрим в качестве примера эллипс на эвклидовой плоскости с группой G движений. Он, очевидно, является фигурой ранга 5 жанра 2. Специально координированный объект a^I эллипса можно определить следующим образом: компоненты a^{-1}, a^0 — полуоси эллипса, компоненты a^1, a^2 — координаты его центра, компонента a^3 — угол наклона большой от эллипса к оси Ox заданного репера R_0 пространства E_2. Пространство $R_1(F)$ является трехмерным. Оно образовано всевозможными эллипсами плоскости с одинаковыми полуосями a^{-1}, a^0. Два эллипса с общими главными диаметрами являются концентричными. Пространство $R_2(F)$ является двумерным, пространство $R(F)$ — пятимерным.

Рассмотрим два пространства фигур $R(F)$ и $R(\overline{F})$. Если существует отображение пространства $R(F)$ на пространство $R(\overline{F})$, при котором любой геометрический объект образа охватывается любым геометрическим объектом прообраза, то говорят, что фигура F охватывает или индуцирует фигуру $\overline{F}$.

В зависимости от наличия или отсутствия охватываемых фигур можно выделить различные классы фигур пространства E_n.

Определение 6. Фигура F ранга N называется простой, если она не охватывает никакой другой фигуры меньшего ранга; фигура F ранга N называется индуцирующей, если она охватывает единственную простую фигуру $\overline{F}$ ранга $\overline{N} < N$ (индуцированную фигуру). Фигура F ранга N называется составной, если она является объединением $k \geqslant 2$ простых фигур $F_1, \ldots, F_k$ рангов $N_1, \ldots, N_k$.

Пространство $R(F)$ индуцирующей фигуры расслаивается на $\infty^{\overline{N}}$ $(N-\overline{N})$ мерных подпространств, каждое из которых образовано всеми фигурами F, индуцирующими одну и ту же фигуру $\overline{F}$. Пространство

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$R(F)$ составной фигуры является прямым произведением пространств $R(F_1),\ldots, R(F_k)$.

§ 3. Группа преобразований, определяемая фигурой

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (2.1) дает представление группы G как группы преобразований пространства $R(F)$

$$\bar{a}^{s_1} = F^{s_1}(a^{p_1}, u^q), \quad \bar{a}^{s_0} = a^{s_0}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим систему $r+\rho$ форм Пфаффа $\Theta^s(u^p, du^q)$, $\Theta^{s_0} = du^{s_0}$. Так как

$$D\Theta^s = \frac{1}{2} C^s_{pq} [\Theta^p \Theta^q], \quad D\Theta^{s_0} = 0, \tag{3.2}$$

то эта система форм определяет $(r+\rho)$-членную группу Ли G' с групповыми параметрами u^α $(\alpha, \beta = -\rho+1,\ldots, r)$. Система форм Θ^{s_0} определяет ρ — членную группу G''. Из (3.2) следует, что группы G и G'' являются нормальными делителями группы G, причем G'' — центральный нормальный делитель. Очевидно, группа G' изоморфна прямому произведению групп G и G''. Формулы

$$\bar{a}^{s_1} = F^{s_1}(a^{p_1}, u^q), \qquad \bar{a}^{s_0} = a^{s_0} + u^{s_0} \tag{3.3}$$

определяют транзитивное представление группы G' в пространстве $R(F)$ фигуры F. Из (3.3) следует, что группа G определяется конечными уравнениями $u^{s_0} = 0$. Она осуществляет переход от фигуры F к эквивалентной ей фигуре. Группа G'' определяется уравнениями $u^s = 0$. Она осуществляет переход от фигуры F к концентричной ей фигуре.

Если существует представление группы G' в пространстве E_n, то группа G'_* называется группой преобразований пространства E_n, определяемой фигурой F (группой фигуры F). Представление в пространстве E_n группы G'' образует группу концентричности фигуры F.

Задавая в пространстве E_n различные фигуры ненулевого жанра и определяя их группы, можно получить представление различных групп Ли в одном и том же однородном пространстве.

Рассмотрим, например, евклидово трехмерное пространство E_3, отнесенное к ортонормированному реперу, с фундаментальной группой G движений. В качестве фигуры F возьмем сферу радиуса R с центром в точке $M(a^i)$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Сфера является фигурой ранга 4 жанра 1. Геометрический объект $\Phi(R, a^i)$ специально координированный.

Группа сферы — это 7-членная группа подобия

$$\bar{x}^i = \lambda c^i_k x^k + c^i, \tag{3.4}$$

где $\|c^i_k\|$ — ортогональная матрица и $\lambda \neq 0$, а группа концентричности сферы — одночленная группа гомотетий.

§ 4. Случай неистинного представления группы G

Если представление группы G в пространстве неистинное ([1], стр. 285), то группа G содержит нетривиальный нормальный делитель, оставляющий неподвижной каждую точку пространства E_n. В этом случае группу G можно заменить фактор-группой $G = G/D$, где D — максимальный нетривиальный нормальный делитель группы G.

Пусть нормальный делитель D определяется обращением в нуль r_1 форм

$$\bar{\Theta}^a = c^a_b \Theta^b + c^a_{\bar{b}} \Theta^{\bar{b}} \quad (a, b, c, d, l = 1, 2,\ldots, r_1; \quad \bar{b} = r_1+1,\ldots, r), \tag{4.1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

образующих характеристическую систему. Допустим для определенности, что

$$\det \| c_b^a \| \neq 0. \tag{4.2}$$

Тогда практически переход от группы G к фактор-группе $\bar{G}$ осуществляется заменой в уравнениях

$$dx^i = \xi_s^i(x)\,\Theta^s \tag{4.3}$$

стационарности точки пространства E_n r_1 форм Θ^a формами $\bar{\Theta}^b$ и $\Theta^{\bar{b}}$ с помощью (4.1):

$$\Theta^a = \overset{*}{c}{}_b^a\,\bar{\Theta}^b + \overset{*}{c}{}_{\bar{b}}^a\,\Theta^{\bar{b}}. \tag{4.4}$$

При этом всегда формы $\Theta^{\bar{b}}$ исключаются из уравнений (4.3), и эти уравнения приводятся к виду

$$dx^i = \xi_b^i(a)\,\bar{\Theta}^b. \tag{4.5}$$

Так как система форм $\bar{\Theta}^a$ — характеристическая, то дифференцируя внешним образом соотношения (4.1) и учитывая (4.3), находим

$$D\bar{\Theta}^a = \frac{1}{2}\,\bar{C}_{bc}^a\,[\bar{\Theta}^b\,\bar{\Theta}^c], \tag{4.6}$$

где

$$\bar{C}_{bc}^a = c_p^a\,C_{de}^p\,\overset{*}{c}{}_b^d\,\overset{*}{c}{}_c^e. \tag{4.7}$$

Используя формулы (4.5), (4.7), мы можем свести исследование к теории однородного пространства с фундаментальной r_1-членной группой $\bar{G}$. Поэтому при рассмотрении примеров, связанных с проективным пространством, можно не оговаривать особо случай неистинного представления группы G.

§ 5. Многообразия простых и составных фигур

Рассмотрим m — мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ простых фигур ранга N жанра ρ. Оно определяется системой $N-m$ дифференциальных уравнений

$$\omega^\xi = \Lambda_\alpha^\xi\,\omega^\alpha. \tag{5.1}$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать, что индексы α, β, γ принимают m определенных значений из чисел $-\rho+1,\ldots,N-\rho$, а индексы ξ, η, ς — оставшиеся значения из этой совокупности чисел.

Дифференцируя внешним образом (5.1), получим

$$[\Delta\Lambda_\alpha^\xi\,\omega^\alpha] = 0, \tag{5.2}$$

где

$$\Delta\Lambda_\alpha^\xi = d\Lambda_\alpha^\xi + \omega_\alpha^\xi + \Lambda_\alpha^\eta\,\omega_\eta^\xi - \Lambda_\beta^\xi(\omega_\alpha^\beta + \Lambda_\alpha^\eta\,\omega_\eta^\beta), \tag{5.3}$$

$$\omega_K^I = -\frac{\partial f_s^I(a)}{\partial a^K}\,\Theta^s(u,\,du).$$

Из (5.1), (5.2) заключаем, что многообразие $\mathfrak{M}_m$ определяется с произволом $N-m$ функций m аргументов.

Осуществляя последовательные продолжения системы (5.1), мы получим внутренние объекты (см. [1], стр. 330)

$$\Gamma_1 = \{a^I,\,\Lambda_\alpha^\xi\},\quad \Gamma_2 = \{\Gamma_1;\,\Lambda_{\alpha_1\alpha_2}^\xi\},\ldots,\quad \Gamma_g = \{\Gamma_{g-1},\,\Lambda_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_g}^\xi\}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

различных порядков ($g = 1, 2, \ldots$). Так как результаты альтернирования величин $\Lambda^{\xi}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_g}$ по любой паре нижних индексов определяются с помощью компонент $\Lambda^{\xi}_{\alpha_1}, \ldots, \Lambda^{\xi}_{\alpha_2\ldots\alpha_{g-1}}$, то ранг N_g внутреннего фундаментального объекта Γ_g порядка g многообразия $\mathfrak{M}_m$ равен

$$N_g = m + C^m_{m+g}(N - m). \tag{5.4}$$

При фиксированных первичных параметрах объект Γ_g определяется системой дифференциальных уравнений вида

$$\delta a^I = f^I_s(a)\,\pi^s, \quad \delta\Lambda^{\xi}_{\alpha_1} = \Phi^{\xi}_{\alpha_1 s}(a, \Lambda)\,\pi^s, \ldots, \quad \delta\Lambda^{\xi}_{\alpha_1\ldots\alpha_g} = \Phi^{\xi}_{\alpha_1\ldots\alpha_g s}(a, \Lambda)\,\pi^s, \tag{5.5}$$

где π^s — значения форм $\Theta^s(u, du)$, а δ — символ дифференцирования при фиксированных первичных параметрах.

Если R_g — ранг матрицы

$$\Lambda_g = \|f^I_s;\ \Phi^{\xi}_{\alpha_1 s}, \ldots, \Phi^{\xi}_{\alpha_1\ldots\alpha_g s}\|, \tag{5.6}$$

то жанр $\rho_g = N_g - R_g$ объекта Γ_g определяет количество независимых абсолютных инвариантов многообразия $\mathfrak{M}_m$ до g-го порядка включительно.

Формула (5.4) позволяет находить нижнюю границу порядка основного объекта ([1], стр. 347), однократное продолжение которого определяет многообразие $\mathfrak{W}_m$ с точностью до констант.

Теорема 4. Если N_ν — первое число в монотонно возрастающей последовательности $N_1, N_2, \ldots$, большее или равное размерности r фундаментальной группы G пространства E_n, то порядок основного объекта многообразия не ниже ν. Если, кроме того, жанр ρ_ν равен $N_\nu - r$, то порядок основного объекта равен ν.

Эта теорема облегчает во многих случаях определение порядка основного объекта. Сначала мы находим число N_ν, удовлетворяющее неравенствам

$$N_{\nu-1} < r \leqslant N_\nu. \tag{5.7}$$

Затем осуществляем ν продолжений системы (5.1) и вычисляем ранг R_ν матрицы Λ_ν. Если $R_\nu = r$, то объект Γ_ν является основным, и жанр $\rho_\nu = N_\nu - R_\nu$ определит количество независимых абсолютных инвариантов многообразия $\mathfrak{M}_m$. Если же $R_\nu < r$, то, последовательно продолжая систему, находим первое число $R_{\nu+\nu_0}$, равное r ($\nu_0 = 1, 2, \ldots$). Объект $\Gamma_{\nu+\nu_0}$ будет основным. Процесс отыскания основного объекта облегчается, если отнести многообразие к реперу порядка g ($0 \leqslant g \leqslant \nu$) ([1], стр. 352).

Рассмотрим конкретные примеры, известные в дифференциальной геометрии.

1) Поверхность в трехмерном евклидовом пространстве ($N = 3$, $m = 2$, $r = 6$, $\rho_2 = 2$). По формуле (5.4) находим $N_1 = 5$, $N_2 = 8$. Так как $N_1 < r = N_2 - \rho_2$, то внутренний фундаментальный объект Γ_2 является основным (сравни [3], стр. 408).

2) Поверхность в трехмерном эквиаффинном пространстве ($N = 3$, $m = 2$, $r = 11$, $\rho_3 = 1$). Имеем $N_1 = 5$, $N_2 = 8$, $N_3 = 12$. Так как $N_2 < r = N_3 - \rho_3$, то внутренний фундаментальный объект Γ_3 является основным (сравни [3], стр. 421).

3) Конгруэнция прямых в эвклидовом пространстве ($N = 4$, $m = 2$, $r = 6$, $\rho_1 = 2$). Имеем $N_1 = 8 = r + \rho_1$. Следовательно, объект Γ_1 является основным (сравни [3], стр. 415).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

4) Комплекс прямых в евклидовом пространстве ($N=4$, $m=3$, $r=6$, $\rho_1=1$). Так как $N_1=7=r+\rho_1$, то объект Γ_1 является основным (сравни [3], стр. 416).

5) Гиперповерхность S в $(n+1)$-мерном проективном пространстве ($N=n+1$, $m=n$, $r=n^2+4n+3$). По формуле (5.4) находим

$$N_1=2n+1,\quad N_2=\frac{1}{2}n(n+5)+1,\quad N_3=\frac{1}{6}n(n^2+6n+17)+1,\quad N_4=\frac{1}{24}n(n^3+10n^2+35n+74)+1. \tag{5.8}$$

Так как при $n>3$ имеем $N_3>r>N_2$, то, относя гиперповерхность S к реперу первого порядка, находим сразу систему дифференциальных уравнений внутреннего фундаментального объекта Γ_3 третьего порядка (см. [1], стр. 359)

$$\omega^{n+1}=0,\quad \omega_i^{n+1}=\Lambda_{ij}\omega^j,\quad \nabla\Lambda_{ij}+\Lambda_{ij}(\omega_0^0+\omega_{n+1}^{n+1})=\Lambda_{ijk}\omega^k,$$
$$\nabla\Lambda_{ijk}+\Lambda_{ijk}(2\omega_0^0+\omega_{n+1}^{n+1})+\Lambda_{(ij}\omega_{k)}^0-\Lambda_{(ij}\Lambda_{k)l}\omega_{n+1}^l=\Lambda_{ijkl}\omega^l \tag{5.9}$$

(∇ — символ ковариантного дифференцирования, круглые скобки означают циклирование и $i, j, k, l=1, 2,\ldots, n$).

Из вида уравнений (5.9) (в них отсутствует форма Пфаффа ω_{n+1}^0) следует, что $R_3=\min(N_3, r-1)$. Продолжая систему (5.9) (см. [1], стр. 360), находим $R_4=r$. Следовательно, внутренний фундаментальный объект Γ_4 является основным (сравни [1], стр. 368). Гиперповерхность S имеет

$$\rho_4=\frac{1}{4!}n(n^3+10n^2+11n-22)-2 \tag{5.10}$$

независимых абсолютных инвариантов до 4-го порядка включительно. При $n=2$ получаем $\rho_4=2$ (сравни [3], стр. 428).

Рассмотрим теперь многообразие $\mathfrak{M}_m$ составных фигур F ранга N. Если фигура F является объединением фигур $F_1,\ldots, F_k$ рангов $N_1,\ldots, N_k$ и фигура F_i $(i=1,\ldots, k)$ описывает h_i-мерное многообразие, то формула, позволяющая вычислять ранг внутренних фундаментальных объектов различных порядков, записывается в виде

$$N_g=m+C_{h_1+g}^{h_1}(N_1-h_1)+\cdots+C_{h_k+g}^{h_k}(N_k-h_k), \tag{5.11}$$

причем, очевидно,

$$m=h_1+h_2+\cdots+h_k. \tag{5.12}$$

Используя формулу (5.11), мы можем находить нижнюю границу порядка основного объекта многообразия $\mathfrak{W}_m$ составных фигур по теореме 4.

§ 6. Многообразия индуцирующих фигур

Многообразие индуцирующих фигур F удобно обозначить символом $(h, m, n)_F$, где n — размерность пространства E_n, m — размерность данного многообразия, h — размерность индуцированного многообразия. Если N — ранг индуцирующей фигуры F, $\overline{N}$ — ранг индуцированной фигуры $\overline{F}$, то всегда

$$h\leqslant m<N-\overline{N}+h,\qquad 0\leqslant h\leqslant\overline{N}. \tag{6.1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Первичные формы $\omega^{\bar{I}}$ индуцированной фигуры $\bar{F}$ всегда можно включить в число первичных форм индуцирующей фигуры F. Поэтому система дифференциальных уравнений многообразия $(h, m, n)_F$ индуцирующих фигур записывается в виде

$$\omega^a = \Lambda_i^a \omega^i, \quad \omega^x = \Lambda_a^x \omega^a. \tag{6.2}$$

Здесь и в дальнейшем условимся считать, что индексы i, j, k принимают h определенных значений из чисел $-\bar{\rho}+1,\ldots, \overline{N}-\bar{\rho}$, индексы v, w — $(m-h)$ значений из чисел $-\rho+1,\ldots, -\bar{\rho}$; $\overline{N}-\bar{\rho}+1,\ldots, N-\rho$, индексы a, b, c и x, y, z принимают все оставшиеся значения в соответствующей группе чисел, а индексы α, β, γ принимают совокупность значений индексов i и v.

Дифференцируя внешним образом уравнения (6.2), находим

$$[\Delta\Lambda_i^a \omega^i] = 0, \quad [\Delta\Lambda_\alpha^x \omega^\alpha] = 0, \tag{6.3}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda_i^a &= d\Lambda_i^a - \Lambda_j^a(\Lambda_i^b\omega_b^j + \omega_i^j) + \Lambda_i^b\omega_b^a + \omega_i^a, \\ \Delta\Lambda_\alpha^x &= d\Lambda_\alpha^x - \Lambda_\beta^x(\Lambda_\alpha^t\omega_t^\beta + \omega_\alpha^\beta) + \Lambda_\alpha^t\omega_t^x + \omega_\alpha^x \end{aligned} \tag{6.4}$$

и индекс t принимает совокупность значений индексов a и x. Замкнутая система уравнений (6.2), (6.3) определяет многообразие $(h, m, n)^F$ с произволом s_m функций m аргументов, где

$$s_m = \begin{cases} N-m, \text{ если } m = h, \\ N-\overline{N}-m+h, \text{ если } m > h. \end{cases} \tag{6.5}$$

Разрешая квадратичные уравнения (6.3) по лемме Картана, получим систему дифференциальных уравнений

$$d\Lambda_i^a = \Phi_{is}^a(a, \Lambda)\,\theta^s + \Lambda_{ij}^a\omega^j \qquad d\Lambda_\alpha^x = \Phi_{\alpha s}^x(a, \Lambda)\,\theta^s + \Lambda_{\alpha\beta}^x\omega^\beta, \tag{6.6}$$

которая вместе с уравнениями (6.2) определяет внутренний фундаментальный объект первого порядка $\Gamma_1 = \{a^I; \Lambda_i^a, \Lambda_\alpha^x\}$.

Здесь
$$\begin{aligned} \Phi_{is}^a &= f_{s,i}^a + \Lambda_i^b f_{s,b}^a - \Lambda_j^a(f_{s,i}^j + \Lambda_i^b f_{s,b}^j), \\ \Phi_{\alpha s}^x &= f_{s,\alpha}^x + \Lambda_\alpha^t f_{s,t}^x - \Lambda_\beta^x(f_{s,\alpha}^\beta + \Lambda_\alpha^t f_{s,t}^\beta), \quad \Lambda_v^a = 0, \\ \Lambda_{ij}^a &= \Lambda_{ji}^a, \qquad \Lambda_{\alpha\beta}^x = \Lambda_{\beta\alpha}^x, \qquad f_{s,K}^I = \frac{\partial f_s^I}{\partial a^K}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Уравнения (6.2), (6.6) при фиксированных первичных параметрах запишутся в виде

$$\delta a^{\bar{I}} = f_s^{\bar{I}}(a^{\bar{J}})\,\pi^s, \quad \delta a^g = f_s^g(a^I)\,\pi^s \ (g = -\rho+1,\ldots, -\bar{\rho}; \overline{N}-\bar{\rho}-1,\ldots, N-\rho)$$

$$\delta\Lambda_i^a = \Phi_{is}^a(a^{\bar{I}}, \Lambda_j^b)\,\pi^s, \quad \delta\Lambda_\alpha^x = \Phi_{\alpha s}^x(a^I, \Lambda_i^a, \Lambda_\beta^y)\,\pi^s. \tag{6.8}$$

Из этих уравнений следует, что системы величин a^I, $a^{\bar{I}}$, $\{a^{\bar{I}}, \Lambda_i^a\}$ образуют подобъекты внутреннего фундаментального объекта Γ_1. Объект a^I определяет локальную фигуру F многообразия $(h, m, n)_F$; его подобъект a^b определяет индуцированную локальную фигуру $\bar{F}$. Геометрическая характеристика подобъекта $\{a^{\bar{I}}, \Lambda_i^a\}$ зависит от свойств индуцированного многообразия фигур (см., например, [4], § 7).

Формулы, позволяющие с помощью теоремы 4 определять нижнюю границу порядка основного объекта многообразия $(h, m, n)_F$, имеют вид

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$N_g = m + C^h_{h+g}(\overline{N} - h) + C^m_{m+g}(N - \overline{N} - m + h). \qquad (6.9)$$

В качестве примера рассмотрим многообразие $(h, m, n)^k_p$, образующим элементом которого является невырожденная алгебраическая гиперповерхность четного порядка $k = 2t$ $(p+1)$-мерной плоскости P_{p+1} n-мерного проективного пространства P_n. Такая алгебраическая поверхность при $p \leqslant n-2$ является индуцирующей фигурой ранга $N_{p,n,k} = (p+2)\cdot(n-p-1) + C^k_{p+k-1} - 1$ жанра $\rho_{p,n,k}$, где $\rho_{p,n,k} = 0$, если $k = 2$; $\rho_{p,n,k} = C^k_{p+k-1} - (p+2)^2$, если $k > 2$. Индуцируемая ей $(p+1)$-мерная плоскость является фигурой ранга $\overline{N}_{p,n} = (p+2)(n-p-1)$ жанра 0. Полагая в формулах (6.9) $N = N_{p,n,k}$, $\overline{N} = \overline{N}_{p,n}$ и учитывая, что размерность r-проективной группы без учета нормировок (т. е. размерность фактор-группы $\overline{G} = G/D$, где одночленный нормальный делитель перенормировок) равна $n^2 + 2n$, мы сможем по теореме 4 определить нижнюю границу порядка основного объекта многообразия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского математического общества, т. 2, 275—383, 1953.

2. Вагнер В. В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии. Дополнение к книге Веблена и Уайтхеда „Основания дифференциальной геометрии". ИИЛ, М, 1949.

3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана, ГИТЛ, М.—Л., 1948.

4. Малаховский В. С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сб., вып. 3 (Труды Томского ун-та, т. 168), 28—42, 1963.

5. Малаховский В. С. Общая характеристика многообразия плоских алгебраических элементов. Геометрический сб., вып. 4 (Труды Томского ун-та, т. 176)), 11—19, 1964.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. В. РЫЖКОВ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ОБОБЩАЮЩИХ КОНФОРМНЫЕ

п. 1. Рассмотрим два n-мерные евклидова пространства E_n и E_n', отнесенные к прямоугольным декартовым координатам $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ соответственно. Точечное отображение E_n в E_n' задается уравнениями

$$T: \quad y^i = y^i(x^j). \tag{1}$$

Предполагается, что $y^i(x^j)$ суть вещественно-аналитические функции своих аргументов с неисчезающим якобианом $\det \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$. Отображение рассматривается в области, где оно однозначно обратимо.

В окрестности пары соответствующих точек (x_0^i) (y_0^j) главная линейная часть отображения

$$A_{x_0}: \quad y^i - y_0^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x^j - x_0^j) \tag{2}$$

представляет собой аффинное отображение, касательное к данному отображению в точке (x_0^i). Будем называть эллипсоидом растяжений образ единичной гиперсферы

$$\sum_{i=1}^{n}(x^i - x_0^i)^2 = 1$$

пространства E_n при отображении A_{x_0}; уравнение эллипсоида растяжений имеет вид

$$g_{ij}(y^i - y_0^i)(y^j - y_0^j) = 1, \tag{3}$$

где $g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y_0^i} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial y_0^j}$ суть коэффициенты метрической формы пространства E_n, отнесенного к декартовым координатам пространства E_n', как к параметрам.

Конформное отображение может быть определено требованием, чтобы эллипсоид растяжений был во всех точках рассматриваемой области сферой. Хорошо известно, что при $n \geqslant 3$ конформные отображения сводятся к инверсиям. Более общие классы отображений можно выделить, налагая какие-либо условия на поле эллипсоидов растяжений.

Мельци [1], [2] рассмотрел вопрос о возможности отображений, для которых равны некоторые из полуосей эллипсоида растяжений.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В работе [1] показано, что отображения трехмерных пространств, для которых эллипсоид растяжений является эллипсоидом вращения, существуют с произволом одной функции трех аргументов*). В работе [2] задача ставится в общей форме для отображений n-мерных пространств. Эллипсоид растяжений (а вместе с ним и отображение) относится к типу $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = n$, если у него имеется p_1 равных между собой полуосей, p_2 также равных, но отличных от предыдущих полуосей, и т. д. Так, в трехмерном случае сфера относится к типу (3), эллипсоид вращения—к типу (2,1), трехосный эллипсоид—к типу (1, 1, 1). Мельци написал дифференциальные уравнения для общей постановки вопроса и рассмотрел некоторые геометрические интерпретации аффинных отображений типа $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$.

В данном сообщении мы напишем, пользуясь методом подвижного репера и внешних форм, уравнения, определяющие отображения произвольного типа $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$, и установим теорему существования для случая, когда $p_\nu \leqslant 2$, т. е. для того случая, когда есть $\left(\text{в произвольном числе } k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ пары равных полуосей, но никакие три полуоси не равны между собой. Наводящие соображения позволяют высказать также гипотезу о существовании отображений более общих типов.

п. 2. Будем задавать точку (x^i) пространства E_n ее радиус-вектором x и свяжем с каждой точкой E_n репер $e_1, \ldots, e_n$, орты которого e_α суть прообразы полуосей эллипсоида растяжений при отображении A_x. Орты соответствующих полуосей e'_α примем за координатные орты пространства E'_n в точке y, соответствующей x. Тогда $A_x e_\alpha = \lambda_\alpha e'_\alpha$, где λ_α — величина соответствующей полуоси эллипсоида растяжений. Уравнения движения репера для каждого из пространств E_n, E'_n будут иметь вид

$$dx = \pi^\alpha e_\alpha, \qquad dy = \overset{*}{\pi}{}^\alpha e'_\alpha,$$

$$de_\alpha = \sigma_\alpha^\beta e_\beta, \qquad de'_\alpha = \overset{*}{\sigma}{}_\alpha^\beta e'_\beta, \tag{4}$$

$$\sigma_\alpha^\beta = -\sigma_\beta^\alpha, \qquad \overset{*}{\sigma}{}_\alpha^\beta = -\overset{*}{\sigma}{}_\beta^\alpha.$$

Напишем также уравнения структуры

$$D\pi^\alpha = [\pi^\gamma \sigma_\gamma^\alpha], \qquad D\overset{*}{\pi}{}^\alpha = [\overset{*}{\pi}{}^\gamma \overset{*}{\sigma}{}_\gamma^\alpha],$$

$$D\sigma_\alpha^\beta = [\sigma_\alpha^\gamma \sigma_\gamma^\beta], \qquad D\overset{*}{\sigma}{}_\alpha^\beta = [\overset{*}{\sigma}{}_\alpha^\gamma \overset{*}{\sigma}{}_\gamma^\beta]. \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (2), определяющие аффинное отображение A_x, можно записать в виде

$$A_x dx = dy,$$

откуда

$$\pi^\alpha \lambda_\alpha e'_\alpha = \overset{*}{\pi}{}^\alpha e'_\alpha$$

или

$$\overset{*}{\pi}{}^\alpha = \lambda_\alpha \pi^\alpha \tag{6}$$

(без суммирования по α).

Уравнения (6) суть основные уравнения задачи: для определения отображений типа $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ следует полагать в них

*) Этот случай позднее исследован Г. В. Бушмановой [3].

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p_1};\ \lambda_{p_1+1} = \ldots = \lambda_{p_1+p_2}$$

и т. д.

Дифференцируем уравнения (6) внешним образом; используя уравнения структуры, получаем

$$[\overset{*}{\pi}{}^{\gamma}\overset{*}{\sigma}{}^{\alpha}_{\gamma}] = [d\lambda_\alpha \pi^\alpha] + \lambda_\alpha [\pi^\gamma \sigma^\alpha_\gamma]$$

или, заменяя $\overset{*}{\pi}{}^{\gamma}$ через $\lambda_\gamma \pi^\gamma$;

$$[\lambda_\gamma \overset{*}{\sigma}{}^{\alpha}_{\gamma} - \lambda_\alpha \sigma^\alpha_\gamma,\ \pi^\gamma] + [d\lambda_\alpha \pi^\alpha] = 0. \tag{7}$$

Здесь и ниже суммирование производится по γ. Уравнениям (7) легко придать вид

$$[\lambda_\gamma \overset{*}{\sigma}{}^{\alpha}_{\gamma} - \lambda_\alpha \sigma^\alpha_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} d\lambda_\alpha,\ \pi^\gamma] = 0 \tag{8}$$

или короче $[\psi_{\alpha\gamma},\ \pi^\gamma] = 0,$ (9)

где $$\psi_{\alpha\beta} = \lambda_\beta \overset{*}{\sigma}{}^{\alpha}_{\beta} - \lambda_\alpha \sigma^\alpha_\beta + \delta_{\alpha\beta} d\lambda_\alpha, \tag{10}$$

т. е. $$\psi_{\alpha\alpha} = d\lambda_\alpha,\ \psi_{\alpha\beta} = \lambda_\beta \overset{*}{\sigma}{}^{\alpha}_{\beta} - \lambda_\alpha \sigma^\alpha_\beta,\ \alpha \neq \beta.$$

Если при некоторых фиксированных значениях индексов α, β соответствующие λ_α, λ_β положить равными между собой, то это равносильно введению линейных зависимостей между формами ψ_{ij}

$$\psi_{\alpha\alpha} = \psi_{\beta\beta},\ \psi_{\alpha\beta} = -\psi_{\beta\alpha}.$$

В общем случае следует рассматривать уравнения (9) с учетом этих простых зависимостей между $\psi_{\alpha\beta}$; точная форма этих зависимостей указывается типом $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ отображения, которое мы хотим определить.

Несложное исследование показывает, что система (9) будет в инволюции тогда и только тогда, когда все p_ν удовлетворяют условию $p_\nu \leqslant 2$. Поэтому остановимся на случае, когда эллипсоид растяжений относится к типу $(2, 2, \ldots, 2; 1, \ldots, 1)$ (k пар равных полуосей, $n - 2k$ — различных полуосей). В этом случае характеры системы (9) оказываются равными

$$s_1 = n,\ s_2 = n, \ldots, s_{n-1} = n,\ s_n = n - 2k,$$

откуда и вытекает предложение.

Теорема. Отображения типа $p_1 = \ldots = p_k = 2,\ p_{k+1} = \ldots = p_{n-2k} = 1$ существуют с произволом $n - 2k$ функций n аргументов при $n > 2k$ и с произволом n функций $(n-1)$ аргумента при $n = 2k$.

Объяснить, почему одно условие $\lambda_1 = \lambda_2$ сразу сокращает произвол на две функции максимального числа аргументов, можно тем, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ появляется возможность вращения репера, угол поворота репера становится произвольной функцией n аргументов. Это позволяет высказать следующее предположение. Если, например, полагать $\lambda_1 = \ldots \lambda_{p_1}$, то можно ожидать, что из произвола в n функций n аргументов для общего отображения мы потеряем $p_1 - 1$ ввиду наложения $p_1 - 1$ условия $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p_1}$ и еще $\frac{1}{2} p_1 (p_1 - 1)$ на появившийся произвол вращения репера, а всего $\frac{1}{2} (p_1 + 2)(p_1 - 1)$ функций. Поэтому правдоподобно предположение, что при условии

89479

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s}(p_\nu+2)(p_\nu-1)<n$ произвол отображения типа $(p_1, \ldots, p_s)$ будет составлять $n-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{s}(p_\nu+2)(p_\nu-1)$ функций n аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melzi G. Rend. matem. e sue appl. S. V, vol. XVI, 1957, 96—117.
2. Melzi G. Rend. Ist. Lombardo, Sci. mat., fis., chim. e geol., 1961, A95, № 2, 301—306.
3. Бушманова Г. В. Изв. высш. учебн. зав. Математика, 1962, № 2, 27—34.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. В. РЫЖКОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ АФФИННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

В данном сообщении решается задача отыскания таких точечных соответствий аффинных пространств, для которых касательное аффинное соответствие имеет в каждой точке тотально линеаризирующую прямую a. В п. 1 приводятся необходимые определения и даются ссылки на относящиеся сюда работы; в п. 2 рассматривается случай, когда тотально линеаризирующие прямые во всех точках параллельны между собой; в п. 3 задача решается в случае, когда плоскость индикатрисы тотально линеаризирующих прямых имеет размерность $s > 1$. В п. 4 приводятся некоторые дальнейшие сведения о найденных классах соответствий.

п. 1. Рассмотрим два аффинных пространства $A_n(x^i)$ и $A'_n(y^i)$ и достаточно гладкое соответствие между ними T, определяемое уравнениями

$$T:\ y^i = f^i(x^j),\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

В окрестности пары соответствующих точек $M_0(x^i_0) \in A_n$ и $M'_0(y^i_0) \in A'_n$ уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$y^i - y^i_0 = a^i_j(x^j - x^j_0) + \frac{1}{2} b^i_{jk}(x^j - x^j_0)(x^k - x^k_0) + [3], \tag{2}$$

где

$$a^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j_0},\ b^i_{jk} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j_0 \partial x^k_0},\ \det a^i_j \neq 0.$$

Линейные члены в уравнениях (2) определяют аффинное соответствие K_{af}, касательное к T. Кроме того, в паре точек M_0, M'_0 можно задать ∞^n гомографий, касательных к T; они определяются уравнениями вида

$$K(p_j):\ y^i - y^i_0 = \frac{a^i_j(x^j - x^j_0)}{1 - p_j(x^j - x^j_0)}.$$

Напомним определение характеристических соответствий, а также введенные Чехом [1] понятия $K(p_j)$ — линеаризирующего соответствия и тотально линеаризирующей прямой.

Характеристические направления в точках M_0, $M'_0 = TM_0$ суть те, в направлении которых инфлексионные линейные элементы E_2 переходят в инфлексионные же элементы. Уравнения, которыми определяются характеристические направления, имеют вид

$$b^i_{jk}(x^j - x^j_0)(x^k - x^k_0) = \lambda a^i_j(x^j - x^j_0).$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Под $K(p_j)$ — линеаризирующим соответствием понимается квадратичное (вообще говоря, не кремоново) соответствие в связке прямых с центром M_0, определяемое уравнениями

$$l^i \to \bar{l}^i = (b^i_{jk} - 2p_k a^i_j)\, l^k l^j, \tag{3}$$

где l^i — произвольный вектор, определяющий прямую связки (аналогичные уравнения для связки с центром M_0' нет необходимости приводить). В цикле работ [1] Э. Чех использовал также понятие тотально линеаризирующей прямой. Прямая l^i называется $K(p_j)$ — тотально линеаризирующей, если она является образом всех прямых связки M_0, кроме тех, для которых $\bar{l}^i = 0$. Последние именуются $K(p_j)$ — главными; они всегда имеют характеристические направления; напротив, всякая характеристическая прямая является $K(p_j)$ — главной для подходяще выбранных гомографий $K(p_j)$. В указанных работах Э. Чех полностью исследовал соответствия, имеющие в каждой паре соответствующих точек тотально линеаризирующую прямую при надлежащем выборе касательной гомографии $K(p_j)$. Бенеш, Керндл и Крейзлик [2] рассмотрели вопрос о соответствии плоскостей, для которых в каждой паре точек существует K_{af} — тотально линеаризирующая прямая (можно отметить, что для плоскостей соответствующая задача в проективном случае тривиальна, так как каждая из характеристических прямых может быть тотально линеаризирующей). Исследование проведено методом подвижного репера с применением теории систем в инволюции и распадается на большое число частных случаев; уравнения, определяющие соответствия, получены только для части этих случаев.

Здесь мы даем решение для соответствия пространств любой размерности и получаем уравнения соответствий (с использованием неявно заданных функций и квадратур).

Напишем уравнения нашей задачи. K_{af} — линеаризирующее соответствие мы получим, полагая в формулах (3) $p_j = 0$

$$\bar{l}^i = b^i_{jk} l^j l^k.$$

Условие существования K_{af} — тотально линеаризирующей прямой будет означать, что все квадратичные формы $\Omega^i = b^i_{jk} l^j l^k$ пропорциональны

$$\Omega^i \equiv b^i_{jk} l^j l^k = a^i \Omega. \tag{4}$$

Здесь Ω — некоторая квадратичная форма. Учитывая, что b^i_{jk} суть вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k}$ в данной произвольной точке, можно вместо уравнений (4) написать условие пропорциональности вторых дифференциалов d^2y^i:

$$d^2y^1 : d^2y^2 : \ldots : d^2y^n = a^1 : a^2 : \ldots : a^n.$$

Мы можем рассматривать эти соотношения как инвариантные, так как независимые переменные подвергаются лишь линейным преобразованиям. Кроме того, заметим, что предположение $d^2y^i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ведет лишь к тривиальному случаю аффинного соответствия.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Введем в рассмотрение размерность s минимального подпространства, содержащего индикатрису*) тотально линеаризирующих прямых, мы обозначим ее через $s = \dim\{a^i\}$. Ясно, что $1 \leqslant s \leqslant n$.

п. 2. Положим сначала $s = 1$. Это значит, что тотально линеаризирующие прямые во всех точках параллельны между собой. Не нарушая общности, положим

$$a^1 : a^2 : \ldots : a^n = 1 : 0 : \ldots : 0.$$

Тогда будем иметь

$$d^2y^2 = \ldots = d^2y^n = 0.$$

За счет выбора подходящих координатных систем в A_n и A_n' можно равенства, определяющие y^i (так как во всяком случае $y^2, \ldots, y^n$ линейно выражаются через x^i), привести к виду:

$$y^1 = \Phi(x^i),$$

$$y^2 = x^2$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^n = x^n,$$

где $\Phi(x^i)$ — произвольная функция n аргументов. Для плоского случая это соответствует п. 2.2 в работе [2], оставленному авторами без подробного анализа. Для проективного случая это отвечает способу получения точечного соответствия с помощью двух проектирований гиперповерхности, указанному Э. Чехом. Для разобранного здесь аффинного случая проще всего охарактеризовать этот вид преобразования A_n в A_n' как „сдвиг“ пространства в направлении прямой $x^2 = \ldots = x^n = 0$. Все точки пространства смещаются в направлении, параллельном этой прямой, величина же их смещения — произвольная функция координат этих точек.

п. 3. Рассмотрим теперь общий случай $1 < s \leqslant n$. Не нарушая общности, положим $a^{s+1} = \ldots = a^n = 0$. Между остальными a^i не будет существовать линейных зависимостей с постоянными коэффициентами. Уравнения

$$d^2y^{s+1} = \ldots = d^2y^n = 0$$

дают нам возможность при надлежащем согласовании координатных систем в A_n и A_n' полагать

$$y^{s+1} = x^{s+1},$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^n = x^n.$$

Впрочем, здесь не исключен и случай $s = n$, когда такие уравнения отсутствуют.

Оставшиеся уравнения имеют вид:

$$d^2y^1 : d^2y^2 : \ldots : d^2y^s = m^1 : m^2 : \ldots : 1,$$

где мы свели m^s к единице. Рассмотрим подробней одно из этих уравнений, например $d^2y^1 = m^1 d^2y^s$.

Условие совместности равенств

$$\frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{1}{m^1} \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^j},$$

*) Индикатриса получается проведением через произвольную фиксированную точку прямых, параллельных тотально линеаризирующим.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{\partial^2 y^s}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{1}{m^1} \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^k}$$

приводит к

$$\frac{\partial m^1}{\partial x^k} \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial m^1}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^k} = 0,$$

и так как j, k могут иметь здесь любые значения, то ранг якобиевой матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial m^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial m^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^i \partial x^n} \end{pmatrix}$$

для m^1, $\frac{\partial y^1}{\partial x^i}$ равен единице. Следовательно, m^1 и $\frac{\partial y^1}{\partial x^i}$ функционально зависимы и в силу того, что $m^1 \neq \text{const}$, можно полагать, что $\frac{\partial y^1}{\partial x^i}$ является функцией от m^1. Точно так же $\frac{\partial y^1}{\partial x^i}$ (при любых i) суть функции от $\frac{m^2}{m^1}$, от $\frac{m^3}{m^1}$ и т. д., откуда очевидна функциональная зависимость любой пары m^i. Введем для симметрии, чтобы не отдавать предпочтения ни одной из величин m^i, какую-либо функцию $p = p(m^1)$. Производные $\frac{\partial y^1}{\partial x^i}$ будут функциями от p; для удобства запишем эти функции в форме некоторых интегралов:

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^i} = \int \lambda^1(p)\, \varphi_i(p)\, dp. \tag{5}$$

Эти уравнения определят y^1 (с точностью до линейных членов) при условии, что p удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x^1} : \frac{\partial p}{\partial x^2} : \cdots : \frac{\partial p}{\partial x^n} = \varphi_1(p) : \varphi_2(p) : \cdots : \varphi_n(p), \tag{6}$$

получаемых как условия совместности уравнений (5).

Эти уравнения немедленно интегрируются из геометрических соображений. Действительно, они просто выражают, что $\operatorname{grad} p$ имеет постоянное направление во всех точках поверхности уровня $p = \text{const}$. Следовательно, поверхность уровня — плоскость и p определяется как неявнозаданная функция из уравнения вида

$$\varphi_1(p)\, x^1 + \ldots + \varphi_n(p)\, x^n - \varphi(p) = 0. \tag{7}$$

Непосредственно проверяется, что всякая функция p, определяемая уравнением (7), при произвольном выборе $\varphi(p)$ удовлетворяет системе (6).

Остальные координаты $y^2, \ldots, y^s$ находятся в той же форме, что и y^1, причем $\varphi_i(p)$ будут для них те же самые. Итак, преобразование искомого типа задается уравнениями

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} = \int \lambda^\alpha(p)\, \varphi_i(p)\, dp, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$y^{s+1} = x^{s+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^n = x^n,$$

где p определяется из уравнения

$$\varphi_i(p)\, x^i - \varphi(p) = 0.$$

Всего в написанных равенствах, при данном s, $1 < s \leqslant n$, участвует $n+s+1$ произвольных функций одного аргумента p, а именно, n функций $\varphi_i(p)$, s функций $\lambda^\alpha(p)$ и функция $\varphi(p)$. Произвол решения следует исчислять в $n+s-1$ функций одного аргумента, так как $\varphi_i(p)$ можно нормировать

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(p) = 1,$$

а преобразование параметра p вида $p = p(p^*)$ дает, например, возможность свести одну из функций $\lambda^\alpha(p)$ к единице.

Нетрудно записать и конечные выражения для y^i. Опуская интегрирование, напишем сразу готовый результат, допускающий непосредственную проверку

$$y^\alpha = \left(\int \lambda^\alpha(p)\, \varphi_i(p)\, dp\right) x^i - \int \lambda^\alpha(p)\, \varphi(p)\, dp,$$

$$y^{s+1} = x^{s+1},$$

$$\ldots\ldots \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, s. \tag{9}$$

$$y^n = x^n,$$

Нами доказана

Теорема. Соответствия аффинных пространств, для которых в каждой точке существует тотально линеаризирующая прямая, сводятся к двум типам: 1) Тотально линеаризирующая прямая имеет постоянное направление. Отображения определяются формулами п. 2 и зависят от одной произвольной функции n переменных. 2) Размерность плоскости индикатрисы тотально линеаризирующей прямой $s > 1$. При $1 < s \leqslant n$ соответствия существуют с произволом $n+s-1$ функций одного аргумента и задаются уравнениями вида (9).

п. 4. Для общего проективного случая геометрическая характеристика второго типа отображений, описанных в нашей теореме, дана в работе [1]. Они получаются заданием гомографий в соответствующих гиперплоскостях двух однопараметрических семейств гиперплоскостей пространств A_n и A'_n. В данном случае эти гомографии должны сводиться к аффинным соответствиям, определяемым уравнениями (9) при постоянном p.

Заметим, что полученные нами результаты можно было бы выводить из общего случая, изученного Э. Чехом, но приведенное здесь решение задачи намного проще. Представляло бы интерес дать подобный вывод и для общего проективного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Čech E. Čas. pest. mat. I: 74 (1949), 32—46; II: 75 (1950). 123—136; III: 75 (1950), 137—158.

2. Beneš J., Kerndl J., Krejzlik J. Sb. Vojen. akad. A. Zápotockého vyznam. rádem. rep. B. 11, № 3 (1963), 83—98.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

Р. Н. ЩЕРБАКОВ, Г. П. БОЧИЛЛО

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

Проективно-дифференциальная теория комплекса прямых представляет собой один из трудных разделов линейчатой дифференциальной геометрии, так как до сих пор не удалось осуществить достаточно симметричный репераж, который позволил бы проникнуть в свойства комплекса, связанные с дифференциальной окрестностью достаточно высокого порядка [1]. Этим объясняется и то, что пока изучены лишь немногие проективно-инвариантные подмногообразия комплекса [2], а из частных классов комплексов подробно изучены лишь комплексы, инфлекционные центры которых описывают двупараметрические многообразия, в частности, комплексы с кратными инфлекционными центрами (см. [3]). В этой заметке изучаются некоторые новые подмногообразия — специальные линейчатые поверхности, впервые отмеченные С. Е. Каранетяном [4], и сопряженные с ними неголономные конгруэнции. Их рассмотрение привело к новой геометрической характеристике комплексов с одним кратным инфлекционным центром и комплексов, инфлекционные центры которых образуют гармоническую четверку. Последние комплексы отмечены Н. И. Кованцовым, но исключены из рассмотрения при канонизации репера (см. [3], стр. 182). Исследование ведется в терминах полуканонического репера, построенного в [2], с сохранением соответствующих обозначений и терминологии (см. также [5]). Все латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, 4.

§ 1. Комплекс, отнесенный к неголономной конгруэнции W

Пусть луч комплекса является лучом A_1A_2 репера, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_i = \omega_i^j A_j. \tag{1}$$

Приняв формы ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4 за базисные и построив полуканонический репер, описанный в [2], получим соотношения

$$\begin{gathered}\omega_1^3 = \omega_2^3 + \omega_2^4,\\ \omega_2^1 + \omega_4^3 = B\omega_2^3 + \omega_2^4,\\ \omega_2^1 - \omega_1^2 - \omega_3^4 + \omega_2^2 - \omega_1^1 = B\omega_1^4 + E\omega_2^3 + F\omega_2^4,\\ \omega_2^1 - \omega_4^3 + 2(\omega_2^2 + \omega_3^3) = F\omega_2^3 + (4B - 2)\,\omega_2^4\end{gathered} \tag{2}$$

и ряд других соотношений, которые мы здесь не будем выписывать.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Если за конгруэнцию $\omega_1^4 = 0$ мы возьмем одну из неголономных конгруэнций W, т. е. неголономную конгруэнцию, имеющую фокусы A_1 и $A_1 - A_2$ в инфлекционных центрах, то будем иметь

$$E = 0,\ F = 2B - 1. \tag{3}$$

Тогда (см. [5]) инфлекционными центрами будут точки

$$C_1 = A_1,\ C_2 = A_2,\ C_3 = A_1 - A_2,\ C_4 = A_1 + (3B - 2)\,A_2, \tag{4}$$

а соответствующими квазиинфлекционными центрами — точки

$$I_1 = A_1 + \frac{3B-2}{1-B} A_2,\ I_2 = A_1 + (B-1)\,A_2,$$
$$I_3 = A_1 + \frac{2B-1}{B} A_2,\ I_4 = A_1 + \frac{B(3B-2)}{1-2B} A_2. \tag{5}$$

Заметим, что при $B = \frac{2}{3}$ и $B = \frac{1}{3}$ комплекс будет обладать одним кратным инфлекционным центром $C_1 \equiv C_4$ или $C_3 \equiv C_4$ соответственно. Этот случай будет рассмотрен в § 4.

Как известно [6], в общем случае комплекс содержит шесть неголономных конгруэнций W. В рассматриваемом репере они будут задаваться следующими уравнениями

$$W_{13} \equiv \omega_1^4 = 0,$$
$$W_{23} \equiv \omega_2^4 = 0,$$
$$W_{12} \equiv \omega_2^3 + \omega_2^4 = 0,$$
$$W_{14} \equiv \omega_1^4 + (3B-1)(\omega_2^3 + \omega_2^4) = 0, \tag{6}$$
$$W_{24} \equiv (3B-1)\,\omega_2^3 + \omega_2^4 = 0,$$
$$W_{34} \equiv \omega_1^4 + (3B-2)\,\omega_2^4 = 0.$$

Здесь индексы у буквы W означают номера инфлекционных центров, являющихся фокусами соответствующей неголономной конгруэнции W, и можно поэтому считать, что всегда $W_{ij} = W_{ji}$. В определении, данном в [6], голономные конгруэнции W не входят в число неголономных W. В настоящей работе в этом исключении нет необходимости.

§ 2. Специальные линейчатые поверхности

Основную роль в проективной теории комплекса играет относительно инвариантная квадратичная дифференциальная форма

$$\varphi \equiv \omega_2^4(\omega_2^3 + \omega_2^4) - \omega_1^4\omega_2^3, \tag{7}$$

нуль-поверхностями которой являются торсы комплекса. Как известно, две линейчатые поверхности $\omega_1^3 : \omega_2^3 : \omega_2^4$ и $\tilde{\omega}_1^3 : \tilde{\omega}_2^3 : \tilde{\omega}_2^4$ будут сопряжены (т. е. будут гармонически пересекаться — см. [7], гл. XV, или [8]) тогда и только тогда, когда определяющие их формы Пфаффа будут соответствовать друг другу в поляритете относительно формы φ, т. е., если

$$\omega_2^4(\tilde{\omega}_2^3 + \tilde{\omega}_2^4) + (\omega_2^3 + \omega_2^4)\tilde{\omega}_2^4 - \omega_2^3\tilde{\omega}_1^4 - \omega_1^4\tilde{\omega}_2^3 = 0. \tag{8}$$

Этот поляритет относит каждой линейчатой поверхности $\tilde{\omega}_1^3 : \tilde{\omega}_2^3 : \tilde{\omega}_2^4$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

неголономную конгруэнцию, состоящую из всех линейчатых поверхностей, сопряженных с данной.

С. Е. Карапетян предложил в [4] наряду с основным поляритетом (8) рассматривать поляритет, определяемый некоторой другой относительно инвариантной квадратичной дифференциальной формой. В качестве такой формы он взял форму, распадающуюся на две формы Пфаффа, каждая из которых обращается в нуль для одной из неголономных конгруэнций (6). Линейчатую поверхность, которой соответствует одна и та же неголономная конгруэнция в обоих рассматриваемых поляритетах, он назвал специальной линейчатой поверхностью и нашел три таких поверхности.

Так как в общем случае имеется 6 неголономных конгруэнций W, то можно составить 15 относительно инвариантных квадратичных форм и для каждой находить „специальные" линейчатые поверхности. Геометрически здесь можно различить только два случая: когда вторая форма составляется из форм (6), соответствующих неголономным конгруэнциям W с разными фокусами (например, $W_{13}W_{24}=0$), и когда эти конгруэнции имеют общий фокус (например, $W_{13}W_{23}=0$). Соответственно этому введем

Определение. Специальной линейчатой поверхностью первого рода называется такая косая линейчатая поверхность комплекса, которой соответствует одна и та же неголономная конгруэнция в поляритете относительно формы φ и одной из форм $W_{ij}W_{kl}$, где W_{ij} W_{kl} суть линейные формы, обращение которых в нуль определяет неголономные конгруэнции с фокусами в различных инфлекционных центрах (в общем случае это значит, что все четыре индекса i, j, k, l — различны). Специальной линейчатой поверхностью второго рода называется такая косая линейчатая поверхность, которой соответствует одна и та же неголономная конгруэнция в поляритете относительно формы φ и одной из форм $W_{kj}W_{kl}$, где W_{kj} и W_{kl} суть линейные формы, обращение которых в нуль определяет неголономные конгруэнции с фокусами в инфлекционных центрах C_k (общий для обеих), C_j и C_l (индексы k, j, l в общем случае различны).

Ниже находятся и геометрически характеризуются все специальные линейчатые поверхности первого и второго рода в комплексе с различными инфлекционными центрами $\left(\text{т. е. при } B\neq\frac{1}{3}, B\neq\frac{2}{3}\right)$.

Теорема 1. В комплексе с четырьмя различными инфлекционными центрами через каждый луч проходит только три специальных линейчатых поверхности первого рода, каждая из которых является общей косой линейчатой поверхностью двух неголономных конгруэнций $W_{ij}=0$ (с разными фокусами).

Доказательство. Рассмотрим форму

$$W_{13}W_{24}. \tag{9}$$

Линейчатой поверхности $\omega_1^3:\tilde{\omega}_2^3:\tilde{\omega}_2^4$ в поляритете относительно этой формы соответствует неголономная конгруэнция

$$\{(3B-1)\,\tilde{\omega}_2^3+\tilde{\omega}_2^4\}\,\omega_1^4+(3B-1)\,\omega_2^3\tilde{\omega}_1^4+\omega_2^4\tilde{\omega}_1^4=0. \tag{10}$$

Она совпадет с неголономной конгруэнцией (8) только для линейчатых поверхностей

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\frac{(3B-1)\,\tilde{\omega}_2^3+\tilde{\omega}_2^4}{-\tilde{\omega}_2^3}=\frac{(3B-1)\,\tilde{\omega}_1^4}{\tilde{\omega}_2^4-\tilde{\omega}_1^4}=\frac{\tilde{\omega}_1^4}{\tilde{\omega}_2^3+2\tilde{\omega}_2^4}, \tag{11}$$

т. е. для трех линейчатых поверхностей:

$$l_1: \quad \tilde{\omega}_1^4:\tilde{\omega}_2^3:\tilde{\omega}_2^4=0:1:(1-3B), \tag{12}$$

$$l_2: \quad \tilde{\omega}_1^4:\tilde{\omega}_2^3:\tilde{\omega}_2^4=(1-3B):1:0, \tag{13}$$

$$l_3: \quad \tilde{\omega}_1^4:\tilde{\omega}_2^3:\tilde{\omega}_2^4=(3B-2):1:-1. \tag{14}$$

С другой стороны, эти же самые линейчатые поверхности получаются при решении систем уравнений $W_{13}=W_{24}=0$, $W_{23}=W_{14}=0$ $W_{12}=W_{34}=0$. Геометрически очевидно (и может быть проверено непосредственной выкладкой), что эти же самые линейчатые поверхности получатся, если вместо формы (9) взять форму $W_{12}W_{34}$ или $W_{14}W_{23}$.

Теорема 2. Специальные поверхности первого рода образуют тройку попарно сопряженных линейчатых поверхностей, т. е. пересекаются друг с другом в каждом луче гармонически.

Доказательство. Подставляя в (8) значения форм Пфаффа двух каких-либо линейчатых поверхностей из (12), (13) и (14), каждый раз получим тождество.

Каждые две из специальных линейчатых поверхностей определяют, очевидно, неголономную конгруэнцию, сопряженную третьей. Они имеют следующие уравнения

$$\Omega_1\equiv\omega_1^4+(3B-2)\,\omega_2^3+(6B-3)\,\omega_2^4=0, \tag{12}$$

$$\Omega_2\equiv\omega_1^4-(3B-1)\,\omega_2^3-\omega_2^4=0, \tag{13}$$

$$\Omega_3\equiv\omega_1^4+(3B-1)\,\omega_2^3+\omega_2^4=0. \tag{14}$$

Здесь конгруэнция $\Omega_\alpha=0$ сопряжена с линейчатой поверхностью l_α ($\alpha=1, 2, 3$).

Теорема 3. Фокусы неголономной конгруэнции, сопряженной с одной из специальных линейчатых поверхностей первого рода, гармонически делят фокусы двух неголономных конгруэнций $W_{ij}=0$, именно тех, которые содержат указанную специальную линейчатую поверхность.

Доказательство. Определив фокусы F_1 и F_2 неголономной конгруэнции $\Omega_1=0$, получим

$$F_{1,2}=A_1+(3B-2)\,A_2\pm\sqrt{(3B-1)(3B-2)}\,A_2. \tag{15}$$

Отсюда следует, что

$$DV(C_2,\ C_4,\ F_1,\ F_2)=DV(C_1,\ C_3,\ F_1,\ F_2)=-1.$$

Так как все неголономные конгруэнции $\Omega_\alpha=0$ и неголономные конгруэнции $W_{ij}=0$ равноправны, то теорема доказана.

Замечание. Как известно ([3], стр. 171—172), точки прикосновения главной линейчатой поверхности комплекса гармонически делят две пары инфлекционных центров. Как мы только что доказали, специальные линейчатые поверхности первого рода также обладают этим свойством. Так как для двух пар точек на прямой можно указать только одну пару точек, гармонически делящую обе эти пары, и так как точки прикосновения вполне определяют линейчатую

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

поверхность комплекса, то специальные линейчатые поверхности первого рода совпадают с косыми главными линейчатыми поверхностями. С. Е. Карапетян в [4] по существу пришел к теореме [3], но не заметил, что найденные им линейчатые поверхности являются главными. Очевидно, что неголономные конгруэнции $\Omega_2 = 0$ суть главные неголономные конгруэнции, отмеченные в [2] и [8].

Прежде чем переходить к геометрической характеристике специальных поверхностей второго рода напомним, что неголономная конгруэнция, один из фокусов которой совпадает с инфлекционным центром, называется (см. [8] и [2]) биграничной. Параболическую неголономную конгруэнцию, единственный фокус которой является инфлекционным центром, естественно назвать биграничной параболической конгруэнцией. Каждому инфлекционному центру C_i соответствует одна такая конгруэнция, а всего их — четыре. Так как все параболические неголономные конгруэнции можно задать уравнением [2]

$$\omega_1^4 + a^2\omega_2^3 + (2a-1)\,\omega_2^4 = 0,$$

где $a = f + 1$, а f — координата фокуса $A_1 + fA_2$, то уравнения биграничных параболических конгруэнций имеют вид

$$\begin{aligned} &\pi_1 \equiv \omega_1^4 + \omega_2^3 + \omega_2^4 = 0, \\ &\pi_2 \equiv \omega_2^3 = 0, \\ &\pi_3 \equiv \omega_1^4 - \omega_2^4 = 0, \\ &\pi_4 \equiv \omega_1^4 + (3B-1)^2\,\omega_2^3 + (6B-3)\,\omega_2^4 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь неголономная конгруэнция $\pi_i = 0$ имеет фокус в точке C_i.

Теорема 4. В комплексе с четырьмя различными инфлекционными центрами через каждый луч проходит двенадцать различных косых специальных поверхностей второго рода. Каждая из этих поверхностей характеризуется тем, что она, не будучи торсом, одновременно принадлежит одной из неголономных конгруэнций $W_{ij} = 0$ и одной из биграничных параболических неголономных конгруэнций.

Доказательство. Составим квадратичную форму из левых частей уравнений каких-нибудь двух неголономных конгруэнций $W_{ij} = 0$ с общим фокусом, например:

$$W_{13}W_{23} \equiv \omega_1^4\omega_2^4$$

и будем искать линейчатую поверхность $\omega_1^4 : \omega_2^3 : \omega_2^4$, соответствующую одной и той же неголономной конгруэнции в поляритетах относительно этой формы и формы φ. Для нее уравнение

$$\omega_2^4\tilde{\omega}_1^4 + \omega_1^4\tilde{\omega}_2^4 = 0$$

должно совпадать с (8), т. е. должно быть

$$\frac{\omega_2^4}{-\omega_2^3} = \frac{0}{\omega_2^4 - \omega_1^4} = \frac{\omega_1^4}{2\omega_2^4 + \omega_2^3}. \tag{17}$$

При $\omega_2^4 = \omega_1^4 = 0$ имеем торс, принадлежащий одновременно неголономным конгруэнциям $W_{13} = 0$ и $W_{23} = 0$. Единственная косая линейчатая поверхность, удовлетворяющая условиям (17), задается так:

$$L_{312}: \qquad \omega_1^3 : \omega_2^3 : \omega_2^4 = 1 : -1 : 1.$$

Эта же самая линейчатая поверхность получится, если решить совместно уравнение $\pi_3 = 0$ и уравнение $W_{12} = 0$. Так как все неголо-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

номные конгруэнции $W_{ij}=0$ и параболические биграничные геометрически равноправны, то все специальные линейчатые поверхности второго рода можно найти, решая каждое из уравнений (18) с каждым из уравнений (6) и отбрасывая торсы. Мы получим следующие 12 различных косых поверхностей

$$\begin{aligned}
&L_{123}(1:-1:0), && L_{312}(1:-1:1),\\
&L_{124}(3B-2:1:1-3B), && L_{314}(3B-1:-3B:3B-1),\\
&L_{134}(2-3B:3B-3:1), && L_{324}(1-3B:1:1-3B),\\
&L_{213}(0:0:1), && L_{413}(0:3-6B:(3B-1)^2),\\
&L_{214}(1-3B:0:1), && L_{423}((3B-1)^2:-1:0),\\
&L_{234}(2-3B:0:1), && L_{412}((3B-2)^2:-1:1).
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь линейчатая поверхность L_{ijk} принадлежит неголономным конгруэнциям $\pi_l=0$ и $W_{jk}=0$ и получена исходя из поляритетов относительно форм φ и $W_{ji}W_{ki}$. Теорема доказана.

Теорема 5. Специальная линейчатая поверхность второго рода L_{ijk} имеет точками соприкосновения инфлекционный центр C_i и точку P_{ijk}, которая вместе с C_i гармонически разделяет инфлекционные центры C_j и C_k.

Доказательство. Имея в виду геометрическую равноправность всех 12 поверхностей L_{ijk}, достаточно провести доказательство для одной из них, например, для L_{213}. Определяя обычным путем ([3], стр. 77, [2], стр. 409) точки соприкосновения этой линейчатой поверхности, получаем точки C_2 и $P_{213}=A_1-\frac{1}{2}A_2$. Равенство

$$DV(P_{213},\ C_2,\ C_1,\ C_3)=-1$$

показывает, что теорема верна.

Как известно, задание точек соприкосновения вполне определяет линейчатую поверхность комплекса, проходящую через данный луч, и сопряженную с ней неголономную конгруэнцию. Из доказанных теорем 3 и 5 следует, что для данного луча специальные линейчатые поверхности первого рода (и специальные неголономные конгруэнции) определяются заданием трех пар точек, каждая из которых гармонически делит две пары различных инфлекционных центров, а каждая из специальных линейчатых поверхностей второго рода определяется указанием одного инфлекционного центра и точки, которая вместе с этим центром гармонически разделяет два других.

Теорема 6. Три специальные линейчатые поверхности второго рода $L_{i_1i_2i_3}$ (i_α различны и принимают только некоторые три из значений 1, 2, 3, 4) принадежат одной и той же неголономной конгруэнции, фокусы которой образуют гармонические четверки с их точками соприкосновения.

Для доказательства достаточно проверить утверждения для одной из шести возможных троек. Например, линейчатые поверхности L_{123}, L_{231} и L_{312}, очевидно, принадлежат одной и той же неголономной конгруэнции $\omega_1^4+\omega_2^3=0$. Ее фокусы суть $Q_{1,2}=A_1+xA_2$, где $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$. Точки соприкосновения поверхности L_{231}, суть A_2 и $A_1-\frac{1}{2}A_2$. Имеем $DV\left(Q_1,\ Q_2,\ A_2,\ A_1-\frac{1}{2}A_2\right)=-1$ и т. д.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 3. Комплексы, инфлекционные центры которых образуют гармоническую четверку

Анализируя геометрическую конструкцию, образованную точками соприкосновения специальных линейчатых поверхностей, или просто сравнивая выражения (12), (13), (14) и (18), замечаем, что совпадение каких-либо двух из них возможно только в следующих случаях:

$$B=\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad B=0,\quad B=1,\quad B=\frac{1}{2}. \tag{19}$$

Первые два случая, когда мы имеем совпадение двух инфлекционных центров, будут рассмотрены в следующем параграфе.

При $B=0$ поверхность L_{123} совпадает с L_{423}, а поверхность L_{214} совпадает с L_{314}, причем поверхность $L_{123}\equiv L_{423}$ сопряжена с $L_{214}\equiv L_{314}$. Заметим, что при этом все инфлекционные центры совпадают с несоответствующими квазиинфлекционными. Именно, из (4) и (5) при $B=0$ имеем

$$C_1=I_4,\ C_2=I_3,\ C_3=I_2,\ C_4=I_1.$$

При $B=1$ мы получаем аналогичную геометрическую картину:

$$L_{134}\equiv L_{234},\ L_{312}\equiv L_{412},$$
$$C_1=I_2,\ C_2=I_1,\ C_3=I_4,\ C_4=I_3.$$

Наконец, при $B=\frac{1}{2}$ имеем:

$$L_{213}\equiv L_{413},\ L_{124}\equiv L_{324},$$
$$C_1=I_3,\ C_2=I_4,\ C_3=I_1,\ C_4=I_2.$$

Легко видеть, что в каждом из этих случаев инфлекционные центры образуют гармонические четверки, а именно при $B=0$ имеем $DV(C_1,\ C_4,\ C_2,\ C_3)=-1$, при $B=1$ получаем $DV(C_1\ C_2,\ C_3,\ C_4)=-1$, наконец, при $B=\frac{1}{2}$ оказывается $DV(C_1,\ C_3,\ C_2,\ C_4)=-1$. Отсюда следует, что каждый раз мы получаем комплекс одного и того же класса, характеризующийся тем, что инфлекционные центры образуют гармоническую четверку (в [3] они определяются соотношением $\alpha=0$). Аналитическое различие возникает из-за того, что мы берем за координатную неголономную конгруэнцию $W\omega_1^4=0$, в первом и во втором случае ту, фокусы которой принадлежат по одному двум гармонически разделяющимся парам, а в третьем — ту, фокусы которой принадлежат одной и той же паре. Кроме того, в первом и третьем случаях за вершины репера A_1 и A_2 взяты точки из двух гармонически разделяющихся пар, а во втором — из одной.

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 7. Среди комплексов с четырьмя различными инфлекционными центрами только в комплексах, инфлекционные центры которых образуют гармоническую четверку, имеет место совпадение специальных поверхностей. При этом всегда совпадают две и только две пары специальных поверхностей второго рода, причем совпавшие поверхности становятся сопряженными.

Если потребовать, чтобы квазиинфлекционный центр совпал с одним из инфлекционных центров, то получится или $B=\frac{2}{3}$ ($I_1=$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$= C_1$), или $B = 0$, или $B = 1$, или $B = \frac{1}{2}$. Учитывая геометрическую равноправность всех инфлекционных центров, получаем еще одну характеристику рассматриваемых комплексов.

Теорема 8. Комплексы, инфлекционные центры которых образуют гармоническую четверку, характеризуются тем, что каждый инфлекционный центр является квазиинфлекционным центром, соответствующим другому инфлекционному центру. При этом, если $C_i = I_j$ и $C_k = I_l$ (i, j, k, l — все различны), то совпадают специальные линейчатые поверхности второго рода $L_{ipq} \equiv L_{jpq}$ и $L_{kpq} \equiv L_{lpq}$.

§ 4. Комплексы C_2

В заключение исследуем специальные линейчатые поверхности в комплексе с одним двойным инфлекционным центром (такие комплексы Н. И. Кованцов [3] назвал комплексами C_2). В этом случае имеется только одна неголономная конгруэнция W (в смысле определения, данного в [6]), именно та, которая имеет фокусы в двух простых (не кратных) инфлекционных центрах. Неголономные же конгруэнции, имеющие один из фокусов в кратном инфлекционном центре, не подходят под указанное определение вследствие вырождения одной фокальной поверхности и невозможности поэтому говорить о соответствии асимптотических линий. В наших терминах комплекс C_2 может быть задан условием $B = \frac{2}{3}$ или $B = \frac{1}{3}$. Удобнее положить $B = \frac{1}{3}$, т. е. поместить вершины репера A_1 и A_2 в простые инфлекционные центры C_1 и C_2. Тогда инфлекционными центрами станут точки

$$A_1 = C_1,\ A_2 = C_2,\ A_1 - A_2 = C_3^*,$$

а квазиинфлекционными точки

$$I_1 = A_1 - \frac{3}{2} A_2,\quad I_2 = A_1 - \frac{2}{3} A_2$$

(для кратного инфлекционного центра понятие соответствующего квазиинфлекционного теряет смысл).

В качестве форм W_{a3} будем рассматривать те, которые получаются из форм (6) при $B = \frac{1}{3}$, т. е. формы:

$$W_{13} \equiv \omega_1^4,\ W_{23} \equiv \omega_2^4,$$
$$W_{12} \equiv \omega_2^3 + \omega_2^4,\ W_{33} \equiv \omega_1^4 - \omega_2^4. \tag{20}$$

Уравнения $W_{13} = 0$ и $W_{23} = 0$ определяют неголономные конгруэнции с одним фокусом в простом и одним фокусом в двойном инфлекционных центрах, уравнение $W_{12} = 0$ — неголономную конгруэнцию W (оба фокуса в простых центрах), а уравнение $W_{33} = 0$ определяет параболическую неголономную конгруэнцию с фокусом в двойном инфлекционном центре C_3^*. Последнюю можно рассматривать как предельный случай неголономной конгруэнции W, когда ее фокусы совпали.

Так как совпадение поляритетов можно аналитически трактовать и в данном случае так же, как в § 2, то можно сохранить

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

определения специальных поверхностей первого и второго рода, данные в § 2, и для комплексов C_2, понимая под формами $W_{\alpha\beta}$ формы (20) и считая, что индексы у буквы W могут пробегать только значения 1, 2, 3 (соответственно этому будем писать $W_{\alpha\beta}$ вместо W_{ij}). Но тогда в комплексе C_2 окажется только одна специальная поверхность первого рода

$$\tilde{\omega}_1^4 : \tilde{\omega}_2^3 : \tilde{\omega}_2^4 = 1 : -1 : 1, \tag{21}$$

которая возникает при рассмотрении поляритетов относительно форм φ и W_{12} W_{33}. Она принадлежит неголономным конгруэнциям $W_{12} = 0$ и $W_{33} = 0$ и сопряжена неголономной конгруэнции $\omega_1^4 + \omega_2^4 = 0$, фокусы которой суть $A_1 \pm A_2$ и гармонически делят фокусы неголономной конгруэнции $W_{12} = 0$. Таким образом, единственная специальная поверхность первого рода, имеющаяся в комплексе C_2, обладает теми же свойствами, что и в общем случае (см. теоремы 1 и 3). Заметим еще, что поверхность (21) получается из (14) при $B = \frac{1}{3}$, а поверхности (12) и (13) при $B = \frac{1}{3}$ совпадают с торсом $\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0$. Отсюда следует, что отмеченный С. Е. Карапетяном класс комплексов (16c) (см. [4], стр. 347) есть класс комплексов C_2.

Согласно принятому определению специальные поверхности второго рода в комплексе C_2 нужно прежде всего искать при помощи поляритетов относительно форм $W_{12}W_{13}$, $W_{21}W_{23}$, $W_{31}W_{32}$. Соответственно получатся три поверхности:

$$L_{123}(1 : -1 : 0),\ L_{213}(0 : 0 : 1),\ L_{312}(1 : -1 : 1). \tag{22}$$

Затем, учитывая кратность центра C_3^*, мы должны рассмотреть форму $(W_{13})^2$, в которую превратилась теперь форма $W_{13}W_{14}$, и форму $(W_{23})^2$, в которую превратилась $W_{23}W_{24}$. Получим еще две поверхности:

$$L_{133}(1 : -2 : 1),\ L_{233}(1 : 0 : 1). \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что именно эти пять косых поверхностей получатся из (18) при $B = \frac{1}{3}$ (остальные совпадут с ними или станут торсами). Хотя две из четырех бинраничных параболических конгруэнций (16) теперь совпадают, но свойство специальных поверхностей второго рода, отмеченное в теореме 4, сохраняется и для комплексов C_2: поверхность $L_{\alpha\beta\gamma}$ есть общая линейчатая поверхность конгруэнции $W_{\beta\gamma} = 0$ и бинраничной параболической $\pi_\alpha = 0$. В этом можно убедиться непосредственным подсчетом при помощи формул (16), (22) и (23).

Для трех поверхностей (22) сохраняется и свойство, отмеченное в теореме 5 для общего случая, а для поверхностей (23) оно, естественно, теряет смысл. Вместо него здесь имеет место.

Теорема 9. Те специальные линейчатые поверхности второго рода ($L_{\mu 33}$) в комплексе C_2, которые принадлежат неголономной конгруэнции $W_{33} = 0$ (параболической с фокусом в двойном инфлекционном центре), сопряжены неголономным конгруэнциям $W_{\nu 3} = 0$, имеющим двойной центр общим фокусом (здесь $\mu \neq \nu$; $\mu, \nu = 1, 2$).

Доказательство сводится к определению точек соприкосновения поверхностей (23) или к применению очевидного свойства бинраничных параболических конгруэнций и теоремы 4.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отметим еще, что линейчатая поверхность (21) является одновременно специальной поверхностью первого и второго рода. Отсюда и из формул (12), (13), (14), (18) следует

Теорема 10. Только в комплексах с кратными инфлекционными центрами существуют линейчатые поверхности, являющиеся специальными первого и второго рода одновременно.

Вместо шести троек линейчатых поверхностей второго рода, рассмотренных в теореме 6, в комплексе C_2 останется только две: тройка L_{123}, L_{213}, L_{312}, которая обладает свойством, отмеченным в теореме 6, и тройка L_{312}, L_{133}, L_{233}, принадлежащая конгруэнции $W_{33}=0$. Последние три линейчатые поверхности имеют одну общую точку прикосновения C_3^* и три различные, составляющие гармоническую четверку с C_3^*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Труды IV всесоюзного математического съезда, II, 1964, 215—221.

2. Щербаков Р. Н. Проективный полуканонический репер линейчатого комплекса. Anal. stiint. univ. Iasi, sect. I, VIII, 2, 1962, 395—415.

3. Кованцов Н. И. Теория комплексов. Изд-во Киевского ун-та, 1963.

4. Карапетян С. Е. О комплексах прямых трехмерного проективного пространства. Мат. сб., 56 (98): 3, 1962, 343—352.

5. Щербаков Р. Н. Квазиинфлекционные центры на луче линейчатого комплекса. Доклады второй сибирской конференции по математике и механике. Томск, 1962, 109—110.

6. Щербаков Р. Н. О неголономных конгруэнциях W. Доклады АН СССР, 138, № 4, 1961, 802—804.

7. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

8. Щербаков Р. Н. Эквиаффинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса. Мат. сб., 60 (102) : 2, 1963, 131—158.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. В. ГАВЕЛ, И. КЛАПКА

СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ И ОСЕВЫЕ СИСТЕМЫ КРИВЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

1. Введение

Э. Бомпиани ([6], стр. 688) определил осевую аксиальную систему Σ кривых, ассоциированную с конгруэнцией Γ прямых, проходящих через точки поверхности Π трехмерного проективного пространства и не лежащих в соответствующих касательных плоскостях, следующим образом: осевая система Σ состоит из всех линий на поверхности Π, чьи соприкасающиеся плоскости в каждой точке $A \in \Pi$ содержат проходящий через A луч l конгруэнции Γ. Двойственное понятие — лучевая (радиальная) система $\tilde{\Sigma}$ кривых поверхности Π, ассоциированная конгруэнции $\tilde{\Gamma}$ прямых, лежащих по одной в касательных плоскостях α и не содержащих соответствующие точки касания. Кривая лучевой системы характеризуется тем, что ее лучевая точка (т. е. характеристическая точка плоскости $\alpha \ni A$ полосы касательных плоскостей вдоль кривой) лежит на соответствующем луче $\tilde{l}$ конгруэнции $\tilde{\Gamma}$.

Если лучи l и $\tilde{l}$ соответствуют в основном поляритете поверхности ([5], стр. 64), то соответствующие системы Σ и $\tilde{\Sigma}$ называются полярными.

Ниже мы будем заниматься обобщением следующих двух проблем.

Проблема I (решена Э. Бомпиани в 1924 г. см. [1]): определить поверхность Π проективного пространства P_3, на которой существует осевая система Σ кривых, содержащая бесконечное множество сопряженных сетей.

Проблема II (решена Й. Брейха в 1954 г., [2], по предложению И. Клапки): определить поверхность Π проективного пространства P_3, на которой существуют пара полярных систем кривых (осевая Σ и лучевая $\tilde{\Sigma}$) и бесконечное множество таких сопряженных сетей, что кривые одного семейства сети содержатся в системе Σ, а кривые второго семейства той же сети — в системе $\tilde{\Sigma}$.

Решением проблемы I являются поверхности с кривизной Фубини $K = -\frac{1}{\beta\gamma}(\ln|\beta\gamma|)_{uv} = -8$, причем осевая система ассоциирована конгруэнции Γ ребер Грина поверхности ([6], стр. 713 или [1]). Решением проблемы II являются поверхности Чеха с кривизной Фубини $K = -2$, причем осевая и лучевая системы ассоциированы конгруэнциям директрис Вильчинского первого и второго рода.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Частичное решение обеих проблем предложил Р. Н. Щербаков ([7], стр. 80—82), который ограничился рассмотрением конгруэнций Γ, $\tilde{\Gamma}$ канонических прямых первого и второго рода. Его исследование основано на применении специального репера сопряженной сети на поверхности в P_3. Й. Брейха, не будучи знаком со статьей [7], провел решение проблемы посредством модификации построения Бомпиани.

2. Обобщение проблемы I и II для поверхности проективной связности

Приведенные определения осевых и лучевых систем кривых, ассоциированных конгруэнциям Γ и $\tilde{\Gamma}$, сохраняют смысл и для многообразий $P^2_{0,3}$ ([8], стр. 531), которые в дальнейшем будем кратко называть поверхностями (проективной связности). Направление, сопряженное данному в точке A поверхности Π, есть направление, которое соответствует ему в некотором проективитете, двойными элементами которого являются асимптотические направления. Этот проективитет является инволюцией только при нулевом кручении (см. [8], стр. 537). Мы будем применять обобщение основного поляритета, данное А. Швецем ([10], стр. 387, 394), и введенный тем же автором [9] „метод фиктивного погружения в плоское пространство“.

Сформулируем проблемы I* и II*, являющиеся обобщением проблем I и II для поверхностей проективной связности.

Проблема I*. Найти поверхность Π проективной связности, на которой существует осевая система Σ кривых, содержащая бесконечное множество сопряженных сетей.

Проблема II*. Найти поверхность Π проективной связности, на которой существуют пара полярных систем кривых (осевая Σ и лучевая $\tilde{\Sigma}$) и бесконечное множество таких сопряженных сетей, что кривые одного семейства принадлежат системе Σ, а кривые другого семейства той же сети—системе $\tilde{\Sigma}$.

3. Специальные реперы для поверхности проективной связности

Для решения проблем I* и II* применим специальные подвижные реперы, построенные А. Швецем ([10], стр. 387 и далее). Если A_0 — точка поверхности, то инфинитезимальное перемещение специального репера дано уравнениями

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + du A_1 + dv A_2, \\ dA_1 &= \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \beta du A_2 + (1-h)\, dv A_3, \\ dA_2 &= \omega_2^0 A_0 + \gamma dv A_1 + \omega_2^2 A_2 + (1+h)\, du A_3, \\ dA_3 &= \omega_3^0 A_0 + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где u, v — асимптотические параметры, $\omega_i^j = a_i^j du + b_i^j dv$, β, γ — обобщенные коэффициенты Фубини, h—кручение ([8], стр. 537). В дальнейшем всюду предполагается, что

$$\beta \neq 0, \qquad \gamma \neq 0, \qquad h \neq 1, \qquad h \neq -1. \tag{2}$$

Прямые A_0A_1, A_0A_2 — асимптотические касательные, плоскости $A_0A_1A_3$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$A_0A_2A_3$ касаются квадрик Ли $Q(\nu, \infty)$ и $Q(\nu, 0)$ в точках A_1 и A_2 ([10], стр. 394). Дальнейшей специализацией репера можно придать прямой A_0A_3 какое угодно направление.

Дуализация репера $A_0A_1A_2A_3$ приводит к дуальному реперу дуальной поверхности $\tilde{\Pi}$:

$$\tilde{A}_0 = -[A_0A_1A_2], \qquad \tilde{A}_1 = (1+h)\,[A_0A_1A_3],$$

$$\tilde{A}_2 = -(1-h)\,[A_0A_2A_3], \qquad \tilde{A}_3 = [A_1A_2A_3],$$

инфинитезимальные перемещения которого даются уравнениями ([10], стр. 392):

$$d\tilde{A}_0 = -\omega_3^3\tilde{A}_0 + du\tilde{A}_1 + dv\tilde{A}_2,$$

$$d\tilde{A}_1 = (1+h)\omega_3^2\tilde{A}_0 + \left(\left(\frac{h_u}{1+h} - a_2^2\right)du + \left(\frac{h_v}{1+h} - b_2^2\right)dv\right)\tilde{A}_1 -$$

$$-\frac{1+h}{1-h}\beta du\tilde{A}_2 + (1+h)dv\tilde{A}_3, \qquad (3)$$

$$d\tilde{A}_2 = (1-h)\omega_3^1\tilde{A}_0 - \frac{1-h}{1+h}\gamma\,dv\,\tilde{A}_1 + \left(\left(\frac{-h_u}{1-h} - a_1^1\right)du +$$

$$+\left(\frac{-h_v}{1-h} - b_1^1\right)\tilde{A}_2 + (1-h)\,du\tilde{A}_3.$$

$$d\tilde{A}_3 = -\omega_3^0\tilde{A}_0 - \frac{1}{1+h}\omega_2^0\tilde{A}_1 + \frac{1}{1-h}\omega_1^0\tilde{A}_2 - \omega_0^0\tilde{A}_3,$$

Сравнивая (3) с системой, аналогичной (1)

$$d\tilde{A}_0 = \tilde{\omega}_0^0\tilde{A}_0 + du\tilde{A}_1 + dv\tilde{A}_2,$$

$$d\tilde{A}_1 = \tilde{\omega}_1^0\tilde{A}_0 + \tilde{\omega}_1^1\tilde{A}_1 + \tilde{\beta}du\tilde{A}_2 + (1-\tilde{h})\,dv\tilde{A}_3,$$

$$d\tilde{A}_2 = \tilde{\omega}_2^0\tilde{A}_0 + \tilde{\gamma}\,dv\tilde{A}_1 + \tilde{\omega}_2^2\tilde{A}_2 + (1+\tilde{h})\,du\tilde{A}_3,$$

$$d\tilde{A}_3 = \tilde{\omega}_3^0\tilde{A}_0 + \tilde{\omega}_3^1\tilde{A}_1 + \tilde{\omega}_3^2\tilde{A}_2 + \tilde{\omega}_3^3\tilde{A}_3,$$

получаем, что репер $\tilde{A}_0\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3$ является специальным репером поверхности $\tilde{\Pi}$, причем

$$\tilde{\beta} = -\frac{1+h}{1-h}\beta, \qquad \tilde{\gamma} = -\frac{1-h}{1+h}\gamma, \qquad \tilde{h} = -h.$$

Полярная к осевой системе, ассоциированной конгруэнции прямых A_0A_3, лучевая система представляет собой осевую систему кривых на поверхности Π, ассоциированную конгруэнции прямых $\tilde{A}_0\tilde{A}_3$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

4. Сопряженные сети, канонические прямые и кривизна Фубини для поверхности проективной связности

Если $\frac{dv}{du} = M(u,v)$ есть дифференциальное уравнение семейства кривых на поверхности П, отличных от асимптотических, то $\frac{dv}{du} = -\frac{1+h}{1-h} M(u,v)$ есть дифференциальное уравнение семейства, сопряженного к первому семейству; геометрическое значение этой сопряженности указано в [8], стр. 537. Оба семейства образуют сопряженную сеть на поверхности. Как было отмечено раньше, эта сопряженность направлений не является вообще инволюторной и имеет двойными элементами асимптотические направления. Так как направлению $dv:du$ соответствует направление $-\frac{1+h}{1-h}(dv:du)$, причем $-\frac{1+h}{1-h}$ есть двойное отношение проективитета, который является инволюторным только при $h=0$. Можно рассматривать и более общие проективитеты в пучке направлений в точке $A_0 \in \Pi$ с самосопряженными асимптотическими направлениями, где направлению, данному отношением $\frac{dv}{du}$, отвечает направление, данное отношением

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m h^m \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} b_m h^m\right)\cdot(dv:du),$$

причем $a_0:b_0 = -1$.

Каноническую прямую индекса λ в точке $A_0 \in \Pi$ определим как прямую $[A_0,\ x^1 A_1 + x^2 A_2 + A_3]$ локального пространства, где

$$2x^1 = b_1^1 - b_2^2 - (\ln\beta)_v + \lambda(\ln\beta^2\gamma)_v,$$

$$2x^2 = a_2^2 - a_1^1 - (\ln\gamma)_u + \lambda(\ln\beta\gamma^2)_u;$$

геометрическое значение этих прямых описал Б. Ценкл ([3], стр. 594). Для $\lambda = \frac{1}{2}$ получим ребро Грина, для $\lambda = \frac{1}{3}$ — ось Чеха, для $\lambda = 0$ — директрису Вильчинского. Если прямая A_0A_3 специального репера поверхности П есть каноническая прямая индекса λ, то

$$b_1^1 - b_2^2 - (\ln|\beta|)_v + \lambda(\ln|\beta^2\gamma|)_v = a_2^2 - a_1^1 - (\ln|\gamma|)_u + \lambda(\ln|\beta\gamma^2|)_u.$$

Кривизна Фубини поверхности П определена формулой

$$K = -\frac{1}{\beta\gamma}(\ln|\beta\gamma|)_{uv}$$

(ср. [6], стр. 713).

5. Решение проблемы I*

Пусть поверхность П связана с конгруэнцией прямых $l = A_0A_3$. Сначала выведем дифференциальное уравнение аксиальной системы Σ кривых поверхности П, ассоциированной этой конгруэнции. Соприкасающаяся плоскость в точке A_0 кривой системы Σ, данной уравнением

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$v = v(u)$, или плоскость $\left(A_0 \frac{dA_0}{du} \frac{d^2A_0}{du^2}\right)$ проходит через прямую $l = A_0A_3$ конгруэнции Г, если $\left(A_0 \frac{dA_0}{du} \frac{d^2A_0}{du^2} A_3\right) = 0$, что в силу (1) приводит к уравнению

$$v'' = -\beta - v'(a_2^2 - a_1^1) + v'^2(b_1^1 - b_2^2) + v'^3\gamma \tag{4}$$

(здесь и в дальнейшем штрихом обозначены обыкновенные производные по аргументу u).

Теорема 1. Поверхность П, являющаяся решением проблемы I*, имеет нулевое кручение $h = 0$.

Доказательство. Пусть $v' = M(u, v)$ есть дифференциальное уравнение семейства аксиальных кривых, ассоциированных конгруэнции Г; тогда $v' = HM$, где $H = -(1 + h) : (1 - h)$, есть дифференциальное уравнение сопряженного семейства. Имеем $v'' = M_u + MM_v$ для первого семейства и $v'' = HM_u + H^2MM_v + H_uM + HH_vM^2$ — для второго.

Уравнения (4) для этих же семейств дают

$$M_u + MM_v = -\beta - (a_2^2 - a_1^1)M + (b_1^1 - b_2^2)M^2 + \gamma M^3, \tag{5}$$

$$H_uM + HM_u + HH_uM^2 + H^2MM_v = -\beta - (a_2^2 - a_1^1)HM + (b_1^1 - b_2^2)H^2M^2 + \gamma H^3M^3. \tag{6}$$

Умножив (5) на H^2 и вычтя его из (6), получим

$$M_u(H - H^2) = -H_uM - HH_vM^2 - H^2(-\beta - (a_2^2 - a_1^1)M + (b_1^1 - b_2^2)M^2 + \gamma M^3) - \beta - (a_2^2 - a_1^1)HM + (b_1^1 - b_2^2)H^2M^2 + \gamma H^3M^3,$$

откуда

$$(M^2)_u = 2MM_u = \frac{2}{H - H^2}((\beta H^2 - \beta)M + (-H_u + H^2(a_2^2 - a_1^1) - H(a_2^2 - a_2^2))M^2 - HH_vM^3 + (-H^2\gamma + H^3\gamma)M^4). \tag{7}$$

Умножив (5) на H и вычтя его из (6), получим

$$MM_v(H^2 - H) = -H_uM - H_vM^2 - H(-\beta - (a_2^2 - a_1^1)M + (b_1^1 - b_2^2)M^2 + \gamma M^3) - \beta - (a_2^2 - a_1^1)HM + (b_1^1 - b_2^2)H^2M^2 + \gamma H^3M^3,$$

откуда

$$(M^2)_v = 2MM_v = \frac{2}{H^2 - H}((-\beta + \beta H) - H_uM + (-H_v - (b_1^1 - b_2^2)H + (b_1^1 - b_2^2)H^2)M^2 + (-H\gamma + H^3\gamma)M^3. \tag{8}$$

Найдя условия интегрируемости системы (7), (8) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях M, получим, что существование бесконечного множества решений пары уравнений (7), (8) эквивалентно равенству указанных коэффициентов. Сравнив коэффициенты при M^{-1}, получим

$$\frac{2}{H - H^2}(\beta H^2 - \beta) \cdot \frac{1}{H^2 - H}(-\beta + \beta H) = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

откуда, так как $H \neq 1$, следует $H = -1$ и $h = 0$. Теорема доказана*).

Положим $H = -1$. Тогда уравнения (7), (8) примут вид

$$\frac{1}{2}(M^2)_u = -(a_2^2 - a_1^1)M^2 + \gamma M^4, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}(M^2)_v = -\beta + (b_1^1 - b_2^2)M^2. \tag{10}$$

Условие интегрируемости теперь выглядит так

$$-(a_{2v}^2 - a_{1v}^1)M^2 - (a_2^2 - a_1^1)2MM_v + \gamma_v M^4 + 4\gamma M^3 M_v =$$
$$= -\beta_u + (b_{1u}^1 - b_{2u}^2)M^2 + (b_1^1 - b_2^2)2MM_u$$

и после подстановки M_u и M_v из (9) и (10) дает

$$(2\gamma(b_1^1 - b_2^2) + \gamma_v)M^4 + (-(a_2^2 - a_1^1)_v - (b_1^1 - b_2^2)_u - 4\beta\gamma)M^2 + \\ + 2\beta(a_2^2 - a_1^1) + \beta_u = 0. \tag{11}$$

Аннулирование коэффициентов ведет к соотношениям

$$b_1^1 - b_2^2 + \frac{1}{2}(\ln|\gamma|)_v = 0,$$

$$a_2^2 - a_1^1 + \frac{1}{2}(\ln|\beta|)_u = 0, \tag{12}$$

$$K = -\frac{1}{\beta\gamma}(\ln|\beta\gamma|)_{uv} = -\infty.$$

Заметим, что рассуждение можно обратить: если для поверхности II нулевого кручения выполнены условия (12), то она решает проблему I*. Принимая во внимание то, что сказано в § 4, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Поверхность II является решением проблемы I* тогда и только тогда, когда $h = 0$, $K = -8$ и конгруэнция Г есть конгруэнция ребер Грина.

Как следствие получается

Теорема 3. Пусть Г — конгруэнция ребер Грина поверхности II с нулевым кручением. Если осевая система, ассоциированная конгруэнции Г, содержит хотя бы одну сопряженную сеть, то эта система содержит однопараметрическое семейство таких сетей и $K = -8$.

Действительно, при сделанных предположениях в уравнении (11) исчезают коэффициенты при M^4, M^0 и M^2.

Вопрос о том, какой конгруэнции Г, связанной с поверхностью II нулевого кручения, ассоциирована осевая система кривых, содержащая хотя бы одну (действительную) сопряженную сеть, частично решен Р. Н. Щербаковым ([7], стр. 80—82). Вопрос о нахождении всех таких конгруэнций остается открытым.

6. Решение проблемы II*

Пусть к поверхности II, отнесенной к специальному реперу, присоединена конгруэнция Г прямых A_0A_3. Дифференциальные

*) Можно поставить вопрос, какие выводы относительно количества искомых сетей вытекают из сравнения остальных коэффициентов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

уравнения осевой системы и полярной ей лучевой системы (т. е. осевой системы кривых поверхности, ассоциированной с конгруэнцией Г прямых A_0A_3) имеют, соответственно, вид

$$v'' = -\beta - v'(a_2^2 - a_1^1) + v'^2(b_1^1 - b_2^2) + v'^3\gamma,$$

$$v'' = -\tilde{\beta} - v'(\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_1^1) + v'^2(\tilde{b}_1^1 - \tilde{b}_2^2) + v'^3\tilde{\gamma}.$$

Второе уравнение в силу (3) может быть представлено в виде

$$v'' = \frac{1+h}{1-h} - v'\left(a_2^2 - a_1^1 + \frac{2h_u}{1-h^2}\right) + v'^2\left(b_1^1 - b_2^2 + \frac{2h_v}{1-h^2}\right) - v'^3\gamma\frac{1-h}{1+h}$$

или

$$v'' = -H\beta - v'(a_2^2 - a_1^1 - H_u) + v'^2(b_1^1 - b_2^2 - H_v) + v'^3\gamma H^{-1}. \quad (13)$$

Отсюда вытекает

Теорема 4. Поверхность П, являющаяся решением проблемы II*, имеет нулевое кручение $h = 0$.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 1, и мы его опустим.

Положим теперь $H = -1$, т. е. $h = 0$. Уравнение (13) принимает вид

$$v'' = \beta + v'(a_2^2 - a_1^1) - v'^2(b_1^1 - b_2^2) - v'^3\gamma. \quad (14)$$

Пусть $v' = M(u, v)$ есть дифференциальное уравнение семейства кривых, погруженных в осевую систему Σ, ассоциированную к конгруэнции Г, и $v' = -M(u, v)$—дифференциальное уравнение сопряженного семейства, погруженного в полярную лучевую систему $\tilde{\Sigma}$.

Тогда имеют силу соотношения

$$M_u + MM_v = -\beta - (a_2^2 - a_1^1)M + (b_1^1 - b_2^2)M^2 + \gamma M^3, \quad (5)$$

$$-M_u + MM_v = \beta + (a_2^2 - a_1^1)M + (b_1^1 - b_2^2)M^2 + \gamma M^3, \quad (15)$$

из которых вытекает:

$$M_u = -\beta - (a_2^2 - a_1^1)M, \quad (9)$$

$$M_v = (b_1^1 - b_2^2)M + \gamma M^2. \quad (16)$$

Условием интегрируемости системы (9), (16) (и, следовательно также (5), (15)) будет

$$-\beta_v - (a_{2v}^2 - a_{1v}^1)M - (a_2^2 - a_1^1)M_v = (b_{1u}^1 - b_{2u}^2)M + (b_1^1 - b_2^2)M_u + \gamma_u M^2 + 2\gamma M M_u,$$

откуда после подстановки M_u, M_v по (9), (16) получим

$$(\gamma(a_2^2 - a_1^1) - \gamma_u)M^2 + (-(a_2^2 - a_1^1)_v - (b_1^1 - b_2^2)_u + 2\beta\gamma)M + \beta(b_1^1 - b_2^2) - \beta_v = 0. \quad (17)$$

Аннулирование коэффициентов ведет к соотношениям

$$a_2^2 - a_1^1 - (\ln|\gamma|)_u = 0,$$

$$b_1^1 - b_2^2 - (\ln|\beta|)_v = 0,$$

$$K = -\frac{1}{\beta\gamma}(\ln|\beta\gamma)_{uv} = -2.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Рассуждение можно обратить: если поверхность Π нулевого кручения удовлетворяет условиям (18), то она является решением проблемы II*.

В итоге получается

Теорема 5. Поверхность Π решает проблему II* тогда и только тогда, когда $K=-2$, $h=0$ и Γ является конгруэнцией директрис Вильчинского.

Аналогично с теоремой 3 получается

Теорема 6. Пусть Γ является конгруэнцией директрис Вильчинского поверхности Π с нулевым кручением. Если осевая система, ассоциированная конгруэнции Γ, содержит одно семейство сопряженной сети и полярная лучевая система содержит второе семейство, то существует однопараметрическая система таких сопряженных сетей и $K=-2$.

Далее заметим, что проблема I Э. Бомпиани и проблема II Й. Брейхи являются особенными случаями проблемы I* и проблемы II*, когда поверхность Π погружена в проективное пространство P_3. Следовательно, и решение проблемы I, II получим, решая проблемы I*, II*, если учитывать условие, что поверхность Π погружена в P_3.

7. Заключительные замечания

Применяя дуализацию из § 3 к построениям § 4, получим следующий результат.

Теорема 7. Пусть поверхность Π имеет нулевое кручение. При корреляции локального пространства в точке $A_0\in\Pi$, определенной соответствующими парами $A_0\to\tilde{A}_0$, $A_1\to\tilde{A}_1$, $A_2\to\tilde{A}_2$, $A_3\to\tilde{A}_3$, каждая из асимптотических касательных является самосопряженной, и образом каждой канонической прямой с индексом λ поверхности Π является каноническая прямая с индексом λ поверхности $\tilde{\Pi}$.

Утверждение об асимптотических касательных очевидно.

Докажем остальную часть утверждения теоремы.

Положим

$$2x^1=b_1^1-b_2^2-(\ln\beta)_v+\lambda(\ln\beta^2\gamma)_v,$$

$$2x^2=a_2^2-a_1^1-(\ln\gamma)_u+\lambda(\ln\beta\gamma^2)_u,$$

$$B=x^1A_1+x^2A_2+A_3,\quad \tilde{B}=x^1\tilde{A}_1+x^2\tilde{A}_2+x^3\tilde{A}_3.$$

Тогда канонической прямой с индексом λ в точке $A_0\in\Pi$ будет $[A_0B]$ а ее образом в исследуемой корреляции будет прямая $[\tilde{A}_0\tilde{B}]$. На основании взаимного отношения между a_1^1, a_2^2, b_1^1, b_2^2, β, γ и $\tilde{a}_1^1$, $\tilde{a}_2^2$, $\tilde{b}_1^1$, $\tilde{b}_2^2$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ (ср. соотношения (I), (3) из § 3) получаем

$$b_1^1-b_2^2-(\ln\beta)_v+\lambda(\ln\beta^2\gamma)_v=\tilde{b}_1^1-\tilde{b}_2^2-(\ln\tilde{\beta})_v+\lambda(\ln\tilde{\beta}^2\tilde{\gamma})_v,$$

$$a_2^2-a_1^1-(\ln\gamma)_u+\lambda(\ln\beta\gamma^2)_u=\tilde{a}_2^2-\tilde{a}_1^1-(\ln\tilde{\gamma})_u+\lambda(\ln\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^2)_u,$$

откуда вытекает завершение доказательства.

В отношении к поверхности Π можно ставить условия, приведенные в проблеме II* при дуализации иных реперов, чем специальные реперы из § 3. Можно показать, что при исследовании этого обобщения играют существенную роль именно дуализации, сохраняющие

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

асимптотические касательные и каноническую прямую с каждым индексом λ. Дуализация из §3 является по теореме 7 одной из них. Вопросы, касающиеся этой темы вместе с обобщением обеих проблем I*, II* в проблему, касающейся пары поверхностей с проективной связностью, исследуются в работах [11], [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Bompiani. Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario, Boll. Un Mat. Ital. 3 (1924), N. 1, 1—7.

2. J. Brejcha. O axialnich a dualne axialnich systemech car na plose v S_3, obsahujicich konjugovane site, Cas. pest. mat. 79 (1954), 252—260.

3. B. Cenkl. La normale d'une surface dans l' espace a connexion projective, Чех. мат. жур. 12 (1962), 582—606.

4. B. Cenkl. Rovnice struktury prostoru s projektivni konexi, Cas.pest., в печати.

5 G. Fubini—E. Čech. Introduction a la geometrie differentielle des surfaces, Paris, 1931.

6. G. Fubini—E. Čech. Geometria proiettiva differenziale 1 (Bologna 1926), II (Bologna 1927).

7. Р. Н. Щербаков. Репер линии на поверхности в проективно-дифференциальной геометрии. Уч. зап. Бурят-Монгольского гос. пединститута, вып. 3, 1953, 41—91.

8. A. Švec. L' application des varietes a connexion a certains problemes de la geometrie differentielle, Чех. мат. жур. 10 (1960), 523—550.

9. A. Švec. K vykladu teorie prostoru s konexi, Cas. pest. mat. 86 (1961), 425—432.

10. A. Švec Sur la geometrie differentielle d'une surface plongee dans un espace a trois dimensions a connexion projective, Чех. мат. жур. (1961), 386—397.

11. V. Havel. Konjugierte Netze und Axialsysteme eines Flachenpaares, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 5 (1964), в печати.

12. V. Havel. Die Čechschen Kollineationen eines Flachenpaares, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 5 (1964), 133—143.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

Л. И. МАГАЗИННИКОВ

ЦЕНТРОАФФИННО-РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ

В работе введено понятие центроаффинной расслояемости пары конгруэнций, а затем это понятие применено к исследованию некоторых сетей линий на поверхности.

§ 1. Центроаффинная расслояемость пары конгруэнций

Пусть дана пара конгруэнций

$$R = A_1 + vA_3, \tag{1_1}$$

$$R = mA_1 + wA_2. \tag{1_2}$$

Определение 1. Пара конгруэнций (1) называется центроаффинно-расслояемой в сторону от конгруэнции (1_1) к конгруэнции (1_2), если через каждую точку луча конгруэнции (1_1) можно провести секущую поверхность, касательная плоскость которой параллельна плоскости, определяемой центром пространства и соответствующим лучом конгруэнции (1_2).

Найдем условие одностороннего центроаффинного расслоения пары конгруэнций. По определению этого расслоения требуется, чтобы условие

$$(d[A_1 + v_0A_3],\ A_1,\ A_2)=0 \tag{2}$$

выполнялось при любом v_0. Тогда уравнение

$$dv_0 + v_0\omega_3^3 + \omega_1^3 = 0 \tag{3'}$$

должно быть вполне интегрируемым при любом v_0, откуда

$$\begin{gathered}[\omega_1^1,\ \omega_1^3] + [\omega_1^2,\ \omega_2^3] = 0,\\ [\omega_3^1,\ \omega_1^3] + [\omega_3^2,\ \omega_2^3] = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть конгруэнция (1) дана. Тогда с произволом двух функций двух аргументов к ней можно присоединить конгруэнцию (1_2) так, чтобы при этом образовалась пара центроаффинно-расслояемая в сторону от конгруэнции (1_1) к (1_2).

Доказательство. Из четырех главных форм ω_1^1, ω_1^2, ω_3^1, ω_3^2 данной конгруэнции (1) лишь две, например, ω_1^2, ω_3^1 независимы. Поэтому имеем:

$$\omega_1^1 = a\omega_3^1 + b\omega_1^2, \tag{4}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\omega_3^2 = c\omega_3^1 + g\omega_1^2.$$

Внеся (4) в (3), получим

$$\omega_1^3 = \frac{\beta}{a}\omega_1^2 + \frac{\gamma}{a}\omega_3^1,$$

$$\omega_2^3 = \left[\frac{g}{c}\left(\beta - \frac{b\gamma}{a}\right) - \frac{\beta}{ac}\right]\omega_1^2 + \left(\beta - \frac{b\gamma}{a}\right)\omega_3^1. \tag{5}$$

(где β и γ неизвестные функции) при условии, что данная конгруэнция не уницентральная ($c \neq 0$), и фокус ее не совпадает с A_1 ($a \neq 0$).

Две другие главные формы луча конгруэнции (1) можно выбрать произвольно:

$$\omega_2^1 = \lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_3^1,$$

$$dm + m\omega_1^1 = \lambda_3\omega_1^2 + \lambda_4\omega_3^1. \tag{6}$$

Система уравнений (5) и (6) имеет решение с произволом в две функции двух аргументов.

Если $c = 0$ (тогда $g \neq 0$, в силу $[\omega_1^2, \omega_3^1] \neq 0$), то из (3) найдем:

$$\omega_1^3 = \beta\omega_1^2 + \alpha\omega_3^1,$$

$$g\omega_2^3 = \gamma\omega_3^1 + \beta\omega_1^2,$$

$$b\alpha - \beta a = -\frac{\beta}{g},$$

т. е. теорема справедлива и в этом случае.

Пусть теперь $a = 0$. Этого можно добиться выбором вторичного параметра $\pi_1^3 = 0$. Форма ω_1^3 становится главной, а потому

$$\omega_1^3 = p_1\omega_1^2 + p_2\omega_3^1. \tag{7}$$

Если луч конгруэнции (l_1) задан, то функции p_1 и p_2 нам известны. Из (3) при условии (7) получим

$$\omega_2^3 = (p_1 - p_2bg)\,\omega_1^2 - p_2b\omega_3^1. \tag{8}$$

Теперь главные формы ω_1^3 и ω_2^3 определены, а формы ω_2^1 и $dm + m\omega_1^1$ по-прежнему можно задать в виде (6). Теорема доказана.

Определение 2. Пара конгруэнций, центроаффинно-расслояемая в обе стороны, называется центроаффинно-расслояемой.

Потребуем, чтобы пара конгруэнций (1) была центроаффинно-расслояема в сторону от конгруэнции (l_2) к конгруэнции (l_1). Получим:

$$[d\ln m + \omega_1^1, \omega_1^2] + [\omega_1^3, \omega_3^2] = 0,$$

$$[\omega_2^1, \omega_1^2] + [\omega_2^3, \omega_3^2] = 0. \tag{9}$$

Следовательно, центроаффинно-расслояемая пара конгруэнций определяется системой:

$$[\omega_1^1, \omega_1^3] + [\omega_1^2, \omega_2^3] = 0,$$

$$[\omega_3^1, \omega_1^3] + [\omega_3^2, \omega_2^3] = 0,$$

$$[d\ln m + \omega_1^1, \omega_1^2] + [\omega_1^3, \omega_3^2] = 0, \tag{10}$$

$$[\omega_2^1, \omega_1^2] + [\omega_2^3, \omega_3^2] = 0.$$

Теорема 2. К любой конгруэнции с произволом в четыре функции одного аргумента можно присоединить другую конгруэнцию так,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

чтобы при этом образовалась центроаффинно-расслояемая пара конгруэнций.

Доказательство. Пусть конгруэнция $R = A_1 + vA_3$ дана. Луч присоединяемой конгруэнции запишем в виде $R = mA_1 + vA_2$. Используя (4) и (10), найдем выражения главных форм луча присоединяемой конгруэнции через главные формы луча данной конгруэнции:

$$\omega_1^3 = \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_1^2,$$

$$\omega_2^1 = -\beta\omega_3^1 + \gamma\omega_1^2,$$

$$c\omega_2^3 = (a\beta - b\gamma)(c\omega_3^1 + g\omega_1^2) - \beta\omega_1^2,$$

$$c(d\ln m + \omega_1^1) = \rho c\omega_1^2 + (\beta c - \alpha g)(c\omega_3^1 + g\omega_1^2),$$

где α, β, γ, ρ — неизвестные функции. Эта система имеет решение с произволом в четыре функции одного аргумента. Теорема доказана.

Следующая теорема геометрически характеризует второе и четвертое условия центроаффинной расслояемости в соотношениях (10).

Теорема 3. Если пара конгруэнций (1) центроаффинно-расслояема в сторону от конгруэнции (1_1) к конгруэнции (1_2), то через каждую точку прямой, проходящей через центр пространства параллельно лучу первой конгруэнции, можно провести поверхность, касательная плоскость которой параллельна плоскости, определяемой центром пространства и лучом конгруэнции (1_2).

Это свойство пары конгруэнций будем называть R-свойством.

Доказательство. Прямая, проходящая через центр пространства параллельно лучу конгруэнции (1_1), имеет уравнение

$$R = vA_3.$$

Требуя, чтобы выполнялось $(d(vA_3), A_1, A_2) = 0$, получим

$$dv + v\omega_3^3 = 0.$$

По условию теоремы это уравнение должно быть вполне интегрируемым, что и приводит ко второму соотношению в (3). Теорема доказана.

§ 2. Сети линий поверхности, совокупности касательные которых образуют центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций

Пусть дана поверхность A_1. Поместим векторы A_2 и A_3 в касательную плоскость этой поверхности, тогда

$$\omega_1^1 = 0, \tag{11}$$

откуда

$$\omega_2^1 = p_1\omega_1^2 + p_2\omega_1^3,$$

$$\omega_3^1 = p_2\omega_1^2 + p_3\omega_1^3. \tag{12}$$

Линии $\omega_1^2 = 0$ и $\omega_1^3 = 0$ на поверхности никак не фиксированы. Касательные к ним описывают конгруэнции

$$R = A_1 + vA_3,$$

$$R = A_1 + vA_2. \tag{13}$$

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием центроаффинной односторонней расслояемости пары конгруэнций, образованных прямыми, касающимися некоторых двух семейств линий одной поверхности, если эти конгруэнции обладают свойством R, является то, что цилиндроидальная линейчатая поверхность одной из этих конгруэнций

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

соответствует торсу (ребро возврата которого находится на данной поверхности) другой, или то, что линейчатая поверхность, образованная касательными к линиям одного семейства вдоль линии другого семейства, является цилиндроидальной [5].

Доказательство. Потребуем, чтобы пара конгруэнций (13) при условии (11) и (12) была односторонне центроаффинно-расслояемой. Из (3) получим:

$$\omega_2^3 = p_4\omega_1^2, \quad p_2 = p_4p_5,$$
$$\omega_3^2 = p_6\omega_1^2 + p_5\omega_1^3. \tag{14}$$

Центральные точки произвольных линейчатых поверхностей конгруэнций (13) имеют радиус-векторы:

$$R_1 = A_1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2} A_3,$$
$$R_2 = A_1 - \frac{\omega_1^3}{\omega_2^3} A_2. \tag{15}$$

Так как в силу (14) теперь $[\omega_1^2, \omega_2^3] = 0$, то доказательство теоремы следует из теоремы 3.

Теорема 5. На любой поверхности с произволом в две функции одного аргумента существуют сети линий, касательные к которым образуют односторонние центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций.

Доказательство. Пусть дана произвольная поверхность, отнесенная к асимптотическим линиям (в формулах (12) тогда надо положить $p_1 = p_3 = 0$), и на ней задано два семейства линий

$$\omega_1^3 = \lambda_1\omega_1^2,$$
$$\omega_1^3 = -\lambda_2\omega_1^2. \tag{16}$$

Касательные к этим линиям описывают конгруэнции:

$$R = A_1 + v(A_2 + \lambda_1 A_3), \tag{17_1}$$
$$R = A_1 + v(A_2 - \lambda_2 A_3). \tag{17_2}$$

Центральные линии произвольных линейчатых поверхностей этих конгруэнций имеют уравнения вида

$$R = A_1 + \frac{\lambda_1\omega_1^2 - \omega_1^3}{d\lambda_1 + \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \lambda^2\omega_3^2 + \omega_2^3}(A_2 + \lambda_1 A_3),$$
$$R = A_1 + \frac{\lambda_2\omega_1^2 + \omega_1^3}{d\lambda_2 + \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \lambda^2\omega_3^2 - \omega_2^3}(A_2 - \lambda_2 A_3).$$

Потребуем, чтобы пара конгруэнций (17) была центроаффинно-расслояема в сторону от конгруэнции (17_1) к (17_2). Тогда она должна удовлетворять условиям теоремы 5. Первое из них приводит к

$$d\lambda_2 + \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \lambda_2^2\omega_3^2 - \omega_2^3 = v(\lambda_1\omega_1^2 - \omega_1^3),$$

а второе требует, чтобы уравнение

$$(d(v[A_2 + \lambda_1 A_3]),\ A_1,\ A_2 - \lambda_2 A_3) = 0$$

выполнялось при любом v, т. е., чтобы уравнение

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$d\ln v = \frac{d\lambda_1 + \lambda_1\omega_3^3 + \lambda_1\lambda_2\omega_3^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \omega_2^3}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

было вполне интегрируемым при любом v. Отсюда получим

$$[d\lambda_1,\ \lambda_2\omega_3^3 + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 - \lambda_2^2)\,\omega_3^2 - p\lambda_1\omega_1^2 + p\omega_3^1] + A\,[\omega_1^2,\ \omega_1^3] = 0,$$

где A—некоторый коэффициент, значение которого нам не важно.

Итак, неизвестные функции λ_1 и λ_2 удовлетворяют двум квадратичным уравнениям:

$$[d\lambda_1, \lambda_2\omega_3^3 + (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 - \lambda_2^2)\,\omega_3^2 - \mu\lambda_1\omega_1^2 + \mu\omega_3^3] + A\,[\omega_1^2, \omega_1^3] = 0,$$

$$[d\lambda_2 + \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \lambda_2^2\omega_3^2 - \omega_2^3,\ \lambda_1\omega_1^2 - \omega_1^3] = 0.$$

По теореме Бахвалова следует, что функции λ_1 и λ_2 можно определить с произволом в одну функцию одного аргумента каждую. Теорема доказана.

Потребуем, чтобы пара конгруэнций (13) была центроаффинно-расслояемой, тогда получим лишь еще одно дополнительное соотношение $p_6 = 0$. В этом случае поверхность характеризуется системой:

$$\begin{gathered}\omega_2^1 = p_1\omega_1^2 + p_2\omega_1^3,\\ \omega_3^1 = p_2\omega_1^2 + p_3\omega_1^3,\\ \omega_2^3 = p_4\omega_1^2,\ p_2 = p_4p_5,\\ \omega_3^2 = p_5\omega_1^3.\end{gathered} \tag{18}$$

Условие ее интегрируемости имеет вид:

$$\begin{gathered}[dp_1 - 2p_1\omega_2^2 + (p_3p_4 + p_1p_5)\,\omega_1^3,\ \omega_1^2] + [dp_2 - p_2(\omega_3^3 + \omega_2^2),\ \omega_1^3] = 0.\\ [dp_2 - p_2(\omega_3^3 + \omega_2^2),\ \omega_1^2] + [dp_3 - 2p_3\omega_3^3 + (p_1p_5 - p_2p_5)\,\omega_1^2,\ \omega_1^3 = 0\\ [dp_4 + p_4(\omega_3^3 - 2\omega_2^2) + (p_1 + p_4p_5)\,\omega_1^3, \omega_1^2] = 0,\\ [dp_5 - p_5(2\omega_3^3 - \omega_2^2) + p_3\omega_1^2,\ \omega_1^3] = 0,\quad p_2 = p_4p_5.\end{gathered} \tag{19}$$

Из этой системы видно, что поверхность при наличии системы (18) определяется четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Теорема 6. Если пара конгруэнций (13) обладает свойством R и выполняется хотя одно из нижеследующих свойств:

1) цилиндроидальная линейчатая поверхность каждой из этих конгруэнций соответствует торсу другой конгруэнции, ребро возврата которого находится на данной поверхности;

2) каждая из линейчатых поверхностей, образованная касательными к ребру возврата на поверхности A_1 торса одной конгруэнции вдоль ребра возврата торса другой, является цилиндроидальной;

3) если данные линии не сопряжены, а произведение абсцисс центральных точек любых соответствующих линейчатых поверхностей, не зависит от выбора этих линейчатых поверхностей, то пара (13) центроаффинно-расслояема.

Доказательство. Первый и второй пункты теоремы доказываются аналогично доказательству теоремы 4.

Произведение абсцисс центральных точек любых линейчатых поверхностей конгруэнций (13) равно

$$\frac{\omega_1^2\,\omega_1^3}{(p_4\omega_1^2 + q\omega_1^3)\,(p_5\omega_1^3 + p_6\omega_1^2)}$$

(здесь $p_4\omega_1^2 + q\omega_1^3 = \omega_2^3$).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Оно не зависит от выбора линейчатых поверхностей только при

$$qp_5=0, \quad p_4p_6=0.$$

Так как конгруэнции (13) обладают свойством R, то $p_2=p_4p_5$. Если рассматриваемые линии не сопряжены, то $p_2\neq 0$, а потому $q=p_6=0$, и мы приходим к системе (18). Теорема доказана.

Следствие. Только подкласс поверхностей T (Цицейки) [2], характеризующийся тем, что конгруэнции прямых, касающихся их асимптотических линий, обладают свойством R, допускает центроаффинное расслоение этих конгруэнций. Широта этого подкласса—одна функция одного аргумента.

Доказательства требует лишь последнее утверждение. Пусть координатные линии поверхности A_1—асимптотические. Тогда $p_1=p_3=0$. Полагая в уравнениях (19) $p_1=p_3=0$, $p_2=p_4p_5$, а затем разрешая их по лемме Картана, получаем:

$$d\ln p_2-(\omega_3^3+\omega_2^2)+p_5\omega_1^3=0,$$

$$d\ln p_5-2\omega_3^3+\omega_2^2=0.$$

Замыкание второго из этих уравнений приводит к тождеству, а первое дает:

$$(\omega_2^2-\omega_3^3)=\gamma\omega_1^3,$$

$$[d\gamma+\gamma\omega_3^3,\ \omega_1^3]=0.$$

Отыскание рассматриваемого класса поверхностей сводится к определению функции γ, удовлетворяющей одному квадратичному уравнению, следовательно, этот класс определяется одной произвольной функцией одного аргумента.

§ 3. Конгруэнции, допускающие центроаффинное расслоение со своим преобразованием Лапласа (конгруэнции L)

В этом параграфе рассматриваются сопряженные сети линий, совокупность касательных к которым образует одностороннюю центроаффинно-расслояемую пару конгруэнций, что, очевидно, совпадает с рассмотрением конгруэнций, допускающих центроаффинное расслоение со своим преобразованием Лапласа.

Определение 3. Конгруэнция, которая вместе со своим преобразованием Лапласа образует одностороннюю центроаффинно-расслояемую пару, называется конгруэнцией L. Фокальная сеть конгруэнции L называется сетью L, а эта пара называется парой L.

Пусть конгруэнция

$$R=A_1+vA_3 \tag{20}$$

дана. Отнесем ее к ненормированному реперу, построенному в [4], с деривационными формулами:

$$dA_1=\omega_1^2A_2+m_1\omega_3^1A_3,$$

$$dA_2=m_2\omega_1^2A_1+(m_3\omega_3^1+m_4\omega_1^2)A_2+(m_5\omega_3^1+m_6\omega_1^2)A_3, \tag{21}$$

$$dA_3=\omega_3^1A_1+(c\omega_3^1+g\omega_1^2)A_2+(m_7\omega_3^1+m_8\omega_1^2)A_3.$$

Условия их интегрируемости имеют вид:

$$[dm_1,\ \omega_3^1]=\{m_1(2m_8-cm_2)-m_5\}[\omega_3^1,\ \omega_1^2],$$

$$[dm_2,\ \omega_1^2]=\{m_2(2m_3-m_1g)-m_6\}[\omega_3^1,\ \omega_1^2],$$

$$[dm_3,\ \omega_3^1]+[dm_4,\ \omega_1^2]=\{m_5g-m_6c-m_3(cm_2-$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$
\begin{gathered}
-m_8)-m_4(m_1g-m_3)\}[\omega_3^1,\omega_1^2],\\
[dm_5,\omega_3^1]+[dm_6,\omega_1^2]=\{m_5(2m_8-m_4-cm_2)+\\
+m_6(2m_3-m_7-m_1g)-m_1m_2\}[\omega_1^2,\omega_3^1],\\
[dm_7,\omega_3^1]+[dm_8,\omega_1^2]=\{cm_6-m_5g-m_7(cm_2-m_8)-\\
-m_8(m_1g-m_3)\}[\omega_3^1,\omega_1^2],\\
[dc,\omega_3^1]+[dg,\omega_1^2]=\{1+m_4c+m_7g-c^2m_2-g^2m_1\}[\omega_3^1,\omega_1^2].
\end{gathered}
\tag{22}
$$

В построенном репере A_1 является фокусом данной конгруэнции, а конгруэнция

$$R=A_1+vA_2 \tag{23}$$

является преобразованием Лапласа данной конгруэнции.

Теорема 7. Конгруэнции L суть уницентральные конгруэнции, преобразованиями Лапласа которых являются цилиндрические конгруэнции. Конгруэнции L определяются четырьмя произвольными функциями одного аргумента.

Доказательство. Потребуем, чтобы пара конгруэнций (20) и (23) была центроаффинно-расслояемой в сторону от конгруэнции (20) к (23). Из (3) с учетом (22) получаем

$$m_5=0,\quad cm_6=0.$$

Если $m_5=m_6=0$, то имеем $\omega_2^3=0$, откуда $[\omega_2^1,\omega_1^2]=0$ и $m_1m_2=0$, но при этом поверхность A_1 вырождается в торс, и задача теряет смысл. Будем считать, что $m_1m_2\neq 0$, а потому и $m_6\neq 0$. Итак, натуральные уравнения

$$c=m_5=0 \tag{24}$$

в построенном репере определяют конгруэнции L. Так как теперь $[\omega_1^2,\omega_3^2]=0$, то конгруэнция (20)—уницентральная, а из $[\omega_2^1,\omega_2^3]=0$ следует, что конгруэнция (23) цилиндрическая.

Пронормируем репер (21) условием $m_1=m_2=1$. Внося его и соотношения (24) в (22), получим

$$
\begin{gathered}
m_8=0,\\
2m_3-m_6=g
\end{gathered}
$$

и четыре независимых внешних квадратичных уравнения на четыре неизвестные функции. Следовательно, конгруэнции L определяются четырьмя произвольными функциями одного аргумента. Теорема доказана.

Теорема 8. Поверхности, которые могут быть фокальными для конгруэнций L, определяются четырьмя произвольными функциями одного аргумента. На этих поверхностях существует не более трех сетей L.

Доказательство. В силу теоремы 7 достаточно доказать лишь последнее утверждение.

Пусть дана поверхность A_1. Направив векторы A_2 и A_3 по касательным к асимптотическим линиям ее и проведя одно нормирование, получим:

$$
\begin{gathered}
\omega_1^1=0,\quad \omega_2^1=\omega_1^3,\quad \omega_3^1=\omega_1^2,\\
2\omega_2^3=2p_1\omega_1^2+p_2\omega_1^3,\\
\omega_2^2+\omega_3^3=p_2\omega_1^2+p_3\omega_1^3,\\
2\omega_3^2=p_3\omega_1^2+2p_4\omega_1^3.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Зададим на поверхности произвольную линию

$$\lambda\omega_1^2 = \omega_1^3 \tag{26}$$

и ей сопряженную

$$\lambda\omega_1^2 = -\omega_1^3. \tag{26'}$$

Касательные к этим линиям описывают следующие конгруэнции:

$$R = A_1 + v(A_2 + \lambda A_3), \tag{27_1}$$

$$R = A_1 + v(A_2 - \lambda A_3). \tag{27_2}$$

Центральные линии их произвольных линейчатых поверхностей имеют уравнения:

$$R_1 = A_1 + \frac{(\lambda\omega_1^2 - \omega_1^3)(A_2 + \lambda A_3)}{d\lambda + \omega_2^3 + \lambda(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \lambda^2\omega_3^2},$$

$$R_2 = A_1 + \frac{(\lambda\omega_1^2 + \omega_1^3)(A_2 - \lambda A_3)}{d\lambda + \lambda(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \omega_2^3 + \lambda^2\omega_3^2}.$$

Если конгруэнция (27_1) уницентральная, а (27_2)—цилиндрическая, то

$$\begin{aligned} d\lambda + \omega_2^3 + \lambda(\omega_3^3 - \omega_2^2) - \lambda^2\omega_3^2 &= \mu(\lambda\omega_1^2 - \omega_1^3), \\ d\lambda - \omega_2^3 + \lambda(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \lambda^2\omega_3^2 &= \nu(\lambda\omega_1^2 - \omega_1^3), \end{aligned} \tag{28}$$

где μ, ν — некоторые множители пропорциональности. Из этих уравнений получаем

$$2\lambda^3 p_4 + \lambda^2 p_3 - \lambda p_2 - 2p_1 = 0. \tag{28'}$$

Теорема доказана.

Если из уравнения (28′) найти значение λ и подставить его в одно из уравнений (28), то мы найдем натуральное уравнение искомых поверхностей.

Теорема 9. Элементы центроаффинных длин дуг [1] конгруэнции L и ее преобразования Лапласа пропорциональны. Обратно, если элементы центроаффинных длин дуг некоторой уницентральной конгруэнции и ее преобразования Лапласа пропорциональны, то эта конгруэнция L.

Доказательство. Пусть конгруэнция (20) уницентральная ($c = 0$). Элементы центроаффинных длин дуг этой конгруэнции и (23) находятся по формулам:

$$ds_1 = \frac{\omega_1^2\,\omega_3^1}{g\omega_1^2}, \quad ds_2 = \frac{\omega_1^2\,\omega_3^1}{m_5\omega_3^1 + m_6\omega_1^2}.$$

Только при $m_5 = 0$, $ds_1 = \lambda ds_2$, причем λ не зависит от выбора линейчатых поверхностей.

Теперь имеем $m_5 = c = 0$. Теорема доказана.

Теорема 10. Пусть дана пара конгруэнций

$$R = A_1 + vA_3, \tag{29_1}$$

$$R = A_1 + vA_2, \tag{29_2}$$

каждая из которых является преобразованием Лапласа другой. Необходимым и достаточным условием того, чтобы пара (29) была парой L, является проективная расслояемость [3] пары конгруэнций

$$R = A_1 + vA_3, \tag{$29_1'$}$$

$$R = mA_1 + vA_2 \tag{$29_2'$}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

в сторону от конгруэнции $(29_1')$ к конгруэнции $(29_2')$, причем $m=\text{const}$ вдоль торса конгруэнции (29_2) с ребром возврата на поверхности A_1.

Доказательство. Требуя, чтобы пара конгруэнций (29) была проективно расслояема в сторону от конгруэнции (29_1) к конгруэнции $(29_2')$, получаем:

$$\frac{m}{1-m}[\omega_3^1, \omega_1^1] + [\omega_3^2, \omega_2^1] + \left[d\left(\frac{1}{1-m}\right), \omega_3^1\right] = 0,$$

$$\frac{1}{1-m}\{[\omega_1^2, \omega_2^1] - [\omega_1^3, \omega_3^1]\} - [\omega_3^1, \omega_1^3] - [\omega_3^2, \omega_2^3] + \left[d\left(\frac{1}{1-m}\right), \omega_1^1\right] = 0, \quad (30)$$

$$[\omega_1^1, \omega_1^3] + [\omega_1^2, \omega_2^3] + \frac{1}{1-m}[\omega_1^3, \omega_1^1] = 0.$$

Но соотношения (30) при $[dm, \omega_3^1] = 0$ и (3) при наличии формул (21) эквивалентны между собой.

Ниже мы укажем еще одно свойство конгруэнций L. Для этого проведем некоторые общие построения.

Теорема 11. Пусть дана пара конгруэнций

$$R = A_1 + vA_3, \quad (31)$$

$$R = mA_1 + vA_2. \quad (32)$$

Только тогда, когда конгруэнция (31) — уницентральная, а (32) — цилиндрическая, через каждую точку луча конгруэнции (31) можно провести секущую поверхность, вырождающуюся в конус с вершиной в центре пространства, касательная плоскость которого вдоль его образующей параллельна соответствующему лучу конгруэнции (32).

Если задать конгруэнцию (31), то конгруэнция (32) определится с произволом в две функции двух аргументов.

Доказательство. Пусть дана на луче конгруэнции (31) произвольная точка

$$M = A_1 - \lambda A_3.$$

По условию теоремы при любом λ должно иметь место

$$(dM, A_1 - \lambda A_3, A_2) = 0, \qquad \text{т. е.}$$

уравнение

$$d\lambda + \lambda^2\omega_3^1 + (\omega_3^3 - \omega_1^1)\lambda - \omega_1^3 = 0$$

должно быть вполне интегрируемым при любом λ. Требуя это, получим:

$$[\omega_3^2, \omega_2^1] = 0,$$

$$[\omega_1^2, \omega_2^1] + [\omega_2^3, \omega_3^2] = 0, \quad (33)$$

$$[\omega_1^2, \omega_2^3] = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega_2^3 = k_1\omega_1^2, \quad \omega_2^1 = -k_1\omega_3^2.$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к

$$[dk_1 + k_1(\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1), \omega_1^2] = 0,$$

$$[dk_1 + k_1(\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1)\omega_3^2] = 0,$$

откуда или $[\omega_1^2, \omega_3^2] = 0$, или

$$dk_1 + k_1(\omega_3^3 - 2\omega_2^2 + \omega_1^1) = 0.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Замыкание последнего уравнения имеет вид

$$2k_1[\omega_2^1, \omega_1^2] = 0.$$

Если $k_1 \neq 0$, т. е. конгруэнция (32) не вырождается в пучок параллельных прямых, то $[\omega_2^1, \omega_1^2] = 0$, и пара конгруэнций (31) и (32) определяется системой:

$$\begin{aligned} [\omega_2^1, \omega_1^2] &= 0, \\ [\omega_2^1, \omega_2^3] &= 0, \\ [\omega_1^2, \omega_3^2] &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Из двух последних соотношений следует, что конгруэнция (31) унецентральная, а (32)—цилиндрическая.

Пусть задана унецентральная конгруэнция (31). Выбирая формы ω_1^2 и ω_3^1 за независимые, можем записать:

$$\omega_1^1 = a\omega_1^2 + b\omega_3^1,$$

$$\omega_3^2 = g\omega_1^2.$$

Из соотношений (34) из четырех $dm + m\omega_1^1$, ω_2^1, ω_2^3, ω_1^3 главных форм луча конгруэнции (32) определятся:

$$\omega_2^1 = \alpha\omega_1^2,$$

$$\omega_2^3 = \beta\omega_1^2.$$

Две же другие главные формы можно выбрать произвольно. Следовательно, при заданной конгруэнции (31) конгруэнцию (32) можно присоединить с произволом в две функции двух аргументов. Теорема доказана.

Этой теоремой дана новая геометрическая характеристика унецентральной и цилиндрической конгруэнции.

Теорема 12. Конгруэнция L характеризуется тем, что через каждую точку ее луча можно провести секущую поверхность, вырождающуюся в конус с вершиной в центре пространства, касательная плоскость которого вдоль образующей параллельна соответствующему лучу конгруэнции, полученной из данной преобразованием Лапласа.

Доказательство следует из того, что условия (33) и (3) при наличии формул (21) эквивалентны между собой.

Из соотношений (10) видно, что не существует конгруэнций, допускающих центроаффинное расслоение в обе стороны со своими преобразованиями Лапласа. Имеет место

Теорема 13. Пусть дана пара конгруэнций

$$\begin{aligned} R &= A_1 + vA_3, \\ R &= A_1 + vA_2, \end{aligned} \tag{35}$$

лучи которых сопряжены на поверхности A_1. Только тогда, когда пара (35) является парой L, можно с произволом в одну функцию одного аргумента подобрать такую функцию m, что пара конгруэнций

$$\begin{aligned} R &= A_1 + vA_3, \\ R &= mA_1 + vA_2 \end{aligned} \tag{36}$$

будет центроаффинно-расслояемой.

Доказательство. Так как векторы A_2 и A_3 сопряжены на поверхности A_1, то имеют место формулы (21). Требуя, чтобы пара (36) при наличии формул (21) была центроаффинно-расслояемой, из (10)

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

получим $m_5 = c = 0$, т. е. пара (35) становится парой L и

$$[d \ln m + gm_1\omega_3^1, \omega_1^2] = 0,$$

откуда m определяется с произволом в одну функцию одного аргумента.

§ 4. Соответствие асимптотических линий на центроаффинно-расслояющих поверхностях

Пусть дана центроаффинно-расслояемая в сторону от конгруэнции (1_1) к конгруэнции (1_2) пара конгруэнций (1). Асимптотические линии на произвольной расслояющей поверхности $R = A_1 + v_0 A_3$ конгруэнции (1_1) имеют уравнение

$$(\omega_1^1\omega_1^3 + \omega_1^2\omega_2^3) + v_0(\omega_3^1\omega_1^3 + \omega_3^2\omega_2^3) = 0. \tag{37}$$

В общем случае уравнение этих линий зависит от v_0. Если же

$$\mu(\omega_1^1\omega_1^3 + \omega_1^2\omega_2^3) + \lambda(\omega_3^1\omega_1^3 + \omega_3^2\omega_2^3) = 0, \tag{38}$$

где λ и μ—некоторые множители, не зависящие от v, то на всех расслояющих поверхностях асимптотические линии соответствуют.

Пусть конгруэнция (1_1) дана, главные формы ее луча связаны зависимостями (4). Поставим задачу: по заданной конгруэнции (1_1) найти такую конгруэнцию (1_2), чтобы полученная таким образом пара конгруэнций (1_1) и (1_2) удовлетворяла соотношениям (3) и (38).

Зададим конгруэнцию (1_2) в виде

$$R = mA_1 + vA_2. \tag{39}$$

Формы $m\omega_1^1 + dm$, ω_2^1, ω_1^3, ω_2^3 являются главными. Положим

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= q_1\omega_1^2 + q_2\omega_3^1, \\ \omega_2^1 &= q_3\omega_1^2 + q_4\omega_3^1, \\ \omega_2^3 &= q_5\omega_1^2 + q_6\omega_3^1, \\ dm + m\omega_1^1 &= m_1\omega_1^2 + m_2\omega_3^1, \end{aligned} \tag{40}$$

где q_i, m_i—неизвестные функции, которые, согласно задаче, требуется найти.

Подставляя (4) и (40) в (3) и (38), получим:

$$\begin{gathered} q_6 + bq_2 - aq_1 = 0, \\ q_1 + cq_5 - q_6 g = 0, \\ \rho aq_2 + \lambda(q_2 + cq_6) = 0, \\ \rho(bq_1 + q_5) + \lambda g q_5 = 0, \\ \rho(aq_1 + bq_2 + q_6) + \lambda(q_1 + cq_5 + q_6 g) = 0. \end{gathered}$$

Или:

$$\begin{gathered} q_6 + bq_2 - aq_1 = 0, \\ q_1 + cq_5 - q_6 g = 0, \\ \rho aq_1 + \lambda g q_6 = 0, \\ \mu aq_2 + \lambda(q_2 + cq_6) = 0, \\ \mu(bq_1 + q_5) + \lambda g q_5 = 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Пусть $aq_1 \neq 0$ (этот случай рассмотрим особо). Имеем:

$$\rho = -\frac{\lambda g q_6}{aq_1}.$$

Соотношения (41) теперь приводятся к виду:

$$\begin{aligned} &q_6 + bq_2 - aq_1 = 0, \\ &q_1 + cq_5 - q_6 g = 0, \\ &ac(q_2q_5 - q_1q_6) = 0, \\ &bg(q_1q_6 - q_2q_5) = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

В случае $b = c = 0$ приходим к вырождению данной конгруэнции в связку прямых, а потому при $aq_1 \neq 0$ имеет место $q_2q_5 - q_1q_6 = 0$, следовательно, $[\omega_1^3, \omega_2^3] = 0$, т. е. искомая конгруэнция уницентральная.

Отсюда и из теоремы 1 следует

Теорема 14. Пусть дана пара конгруэнций

$$R = A_1 + vA_3, \qquad (*)$$

$$R = mA_1 + vA_2, \qquad (**)$$

центроаффинно-расслояемая в сторону от конгруэнции (*) к (**). Если точка A_1 не является фокусом конгруэнции (*) ($a \neq 0$) и эта конгруэнция не уницентральная ($c \neq 0$), то асимптотические линии на всех расслояющих поверхностях соответствуют тогда и только тогда, когда конгруэнция (**) уницентральная. Какая бы ни была задана конгруэнция (*), конгруэнцию (**) в этом случае можно присоединить с произволом в две функции двух аргументов.

Рассмотрим теперь исключенный случай $aq_1 = 0$.

1) Пусть $a = 0$. Если исключить случаи вырождения конгруэнций пары в пучки прямых, то возможны следующие два случая:

а) $a = q_6 = q_2 = 0, \quad q_1 + cq_5 = 0.$

В этом случае данная конгруэнция является общим случаем конгруэнций, фокальная поверхность которой вырождается в кривую. Действительно, теперь $dA_1 = \omega_1^2(bA_1 + A_2 + q_1A_3)$, а присоединяемая конгруэнция также уницентральная. Все расслояющие поверхности в этом случае вырождаются в торсы, ребра возврата которых соответствуют кривой, в которую вырождается фокальная поверхность конгруэнции.

б) $a = 0, \; bq_1 + q_5 = 0, \; q_6 + bq_2 = 0, \; q_1 + cq_5 - q_6 g = 0.$

Данная конгруэнция теперь определяется системой:

$$\begin{aligned} &\omega_1^1 = b\omega_1^2, \\ &\omega_2^3 = -b\omega_1^3, \\ &\omega_1^3 = \frac{q_1 bg}{bc - 1}\omega_1^2 + q_2\omega_3^1, \\ &\omega_3^2 = c\omega_3^1 + g\omega_1^2. \end{aligned} \tag{43}$$

Мы здесь положили $bc - 1 \neq 0$, исключив тем самым из рассмотрения случай параболических конгруэнций.

Система (43) сводится к следующей системе:

$$\begin{aligned} &\omega_1^1 = b\omega_1^2, \\ &\omega_2^3 = -b\omega_1^3, \end{aligned} \tag{44}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$db + \omega_2^1 - b\omega_2^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 = \frac{\gamma bg}{(bc-1)^2}\omega_1^2 + \frac{\gamma}{bc-1}\omega_3^1,$$

$$\omega_3^2 = c\omega_3^1 + g\omega_1^2.$$

Замыкания первых трех уравнений обращаются в тождества в силу остальных уравнений системы, а два последних определяют заданную конгруэнцию с произволом в одну функцию двух аргументов.

Из (44) имеем

$$[\omega_1^3,\ \omega_3^1 - b\omega_3^2] = 0.$$

Учитывая условие (*) и (44), найдем, что асимптотические линии поверхности A_1 имеют уравнение $(\omega_1^3)^2 = 0$, т. е. эта поверхность вырождается в торс. Его прямолинейные образующие параллельны вектору $R = bA_1 + A_2$ и определяют вместе с центром пространства плоскость, в которой лежат соответствующие лучи присоединяемой конгруэнции, которая в этом случае также уницентральная. В соотношениях (40) на функции q_3, q_4 m_1 и m_2 никаких ограничений не получено, следовательно, искомую конгруэнцию можно присоединить с произволом в две функции двух аргументов.

Покажем, что в рассматриваемом случае данная конгруэнция является произвольной, фокальная поверхность которой вырождается в торс.

Пусть имеем конгруэнцию $R = A_1 + vA_3$. Поместим точку A_1 в фокус. Тогда

$$\omega_1^1 = b\omega_1^2,$$

$$\omega_3^2 = c\omega_3^1 + g\omega_1^2. \qquad (45_1)$$

Совместим плоскость $(R, A_1, A_2) = 0$ репера с плоскостью, определяемой касательной к одной из асимптотических линий и центром пространства. Тогда эта асимптотическая линия имеет уравнение $\omega_1^3 = 0$, а касательная к ней имеет уравнение

$$R = A_1 + v(bA_1 + A_2).$$

Потребуем, чтобы поверхность A_1 вырождалась в торс, получим:

$$db + \omega_2^1 - b\omega_2^2 = 0,$$

$$\omega_2^3 = -\lambda\omega_1^3. \qquad (45_2)$$

Дифференцирование (45_1) и (45_2) внешним образом приводит к

$$\omega_1^3 = \frac{\gamma bg}{(bc-1)^2}\omega_1^2 + \frac{\gamma}{bc-1}\omega_3^1 \qquad (45_3)$$

$$\omega_2^3 = -b\omega_1^3. \qquad (45_4)$$

Таким образом, получены все соотношения системы (44).

Если ни одна из конгруэнций пары (I) не вырождается в связку прямых, то при $q_1 = 0$ возможен только один случай:

$$q_1 = q_2 = 0, \quad c = 0, \quad q_6 = 0.$$

При этом пара определяется тремя произвольными функциями двух аргументов и характеризуется тем, что обе конгруэнции пары уницентральные, причем уницентр конгруэнции (I_2) совпадает с точкой mA_1.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mayer O. Congruentele de drepte in geometria centroaffine. Acad. R.PR. Fill. Jasi, stud. cerc. sti, t. 1, 1951, 67—93.

2. Mayer O. Geometrie centro-affine differentielle des surfaces. Ann. Sci, Univ Jassy, t. 1—4, 1934, 1—77.

3. Фиников С. П. Теория пар конгруэнций, М., 1956.

4. Магазинников Л. И. К центроаффинной теории прямолинейных конгруэнций. Геометрический сборник, выпуск 3 (Труды ТГУ, т. 168). 1963, 132—149.

5 Онищук Н. М Пара, состоящая из конгруэнции и поверхности в центроаффинном пространстве. Геометрический сборник, выпуск 2 (труды ТГУ, т. 161), 1962, 111—123.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

Н. М. ОНИЩУК

К ВОПРОСУ О ЦЕНТРОАФФИННОЙ РАССЛОЯЕМОСТИ ПАР ЛИНЕЙЧАТЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

В работе рассматриваются пары линейчатых конгруэнций с пересекающимися лучами в трехмерном центроаффинном пространстве.

В первом параграфе дана геометрическая характеристика центроаффинно-расслояемой [1] паре конгруэнций с пересекающимися лучами. Во втором—рассмотрена пара M (см. [2]), через точки поверхности (P) которой можно провести прямые так, что получится конгруэнция (K_1), образующая с конгруэнцией (K) центроаффинно-расслояемую пару.

§ 1. Центроаффинно-расслояемые конгруэнции с пересекающимися лучами

Пусть (K_1) и (K_2)—две линейчатые конгруэнции, соответствующие лучи K_1 и K_2 которых пересекаются в точке C. Через H обозначим плоскость, определяемую прямыми K_1 и K_2. Отнесем рассматриваемую пару конгруэнций к реперу $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, где O — центр пространства, вектор $\boldsymbol{e}_3$ является радиус-вектором точки C, векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ суть направляющие векторы прямых K_1 и K_2. При таком выборе репера из рассмотрения исключаются пары конгруэнций, плоскости H которых проходят через центр пространства. Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\boldsymbol{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta . \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Формы $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^1, \omega_2^3, \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3$ являются главными, из них за независимые примем ω_3^1, ω_3^2, оставшиеся главные формы будут линейными комбинациями этих форм:

$$\begin{aligned} \omega_3^3 &= \Gamma_{3i}^3 \omega_3^i , \\ \omega_j^3 &= \Gamma_{ji}^3 \omega_3^i . \\ \omega_1^2 &= \Gamma_{1i}^2 \omega_3^i , \\ \omega_2^1 &= \Gamma_{2i}^1 \omega_3^i . \end{aligned} \tag{2}$$

(Здесь и в дальнейшем индексы i, j, k, p принимают значения 1, 2). При выборе форм ω_3^i за независимые формы из рассмотрения исключились пары конгруэнций, для которых поверхность (C) является конусом с вершиной в центре пространства.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Условиями полной интегрируемости системы (2) являются квадратичные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&[d\Gamma^3_{3i} - \Gamma^3_{3j}\omega^j_i + (\Gamma^3_{ij} + \Gamma^3_{3i}\Gamma^3_{3j})\,\omega^j_3, \omega^i_3] = 0,\\
&[d\Gamma^3_{jt} - \Gamma^3_{jk}\omega^k_i - \Gamma^3_{ki}\omega^k_j + (\Gamma^3_{ji}\Gamma^3_{3k} - \Gamma^3_{3i}\Gamma^3_{jk})\,\omega^k_3, \omega^i_3] = 0,\\
&[d\Gamma^2_{1i} - \Gamma^2_{1k}\omega^k_i + \Gamma^2_{1i}(\omega^2_2 - \omega^1_1) + \Gamma^2_{1i}\Gamma^3_{3k}\omega^k_3 + \Gamma^3_{1i}\omega^2_3, \omega^i_3] = 0,\\
&[d\Gamma^1_{2i} - \Gamma^1_{2k}\omega^k_i + \Gamma^1_{2i}(\omega^1_1 - \omega^2_2) + \Gamma^1_{2i}\Gamma^3_{3k}\omega^k_3 + \Gamma^3_{2i}\omega^1_3, \omega^i_3] = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

В эти пять независимых уравнений входят 12 неизвестных форм, т. е. эта система определяет решение с произволом семи функций двух аргументов. Две функции двух аргументов идут на выбор нормировки векторов e_i. Следовательно, пара конгруэнций с пересекающимися лучами определяется с произволом пяти функций двух аргументов. Из системы (3) находим

$$
\begin{aligned}
&\delta\Gamma^3_{3i} = \Gamma^3_{3j}\pi^j_i,\\
&\delta\Gamma^3_{ji} = \Gamma^3_{jk}\pi^k_i + \Gamma^3_{ki}\pi^k_j,\\
&\delta\Gamma^2_{1i} = \Gamma^2_{1k}\pi^k_i + \Gamma^2_{1i}(\pi^1_1 + \pi^2_2),\\
&\delta\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{2k}\pi^k_i + \Gamma^1_{2i}(\pi^1_1 + \pi^2_2),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам,
π^k_i — вторичные формы.

Поставим задачу: найти центроаффинно-расслояемую пару конгруэнций (K_1) и (K_2) с пересекающимися соответствующими лучами.

Пусть $e_3 + \beta e_1$ и $e_3 + \alpha e_2$ — радиус-векторы произвольных точек прямых K_1 и K_2. По определению центроаффинно-расслояемой пары (см. [1]) имеем:

$$
\begin{aligned}
&(d(e_3 + \alpha e_2),\ e_1,\ e_3) = 0,\\
&(d(e_3 + \beta e_1),\ e_2, e_3) = 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем равенства

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= -\alpha\omega^2_2 - \omega^2_3,\\
d\beta &= -\beta\omega^1_1 - \omega^1_3,
\end{aligned}
$$

внешнее дифференцирование которых приводит к следующим квадратичным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&[\omega^1_3, \omega^2_1] + [\omega^3_3, \omega^2_3] + \alpha\{[\omega^1_2, \omega^2_1] + [\omega^3_2\omega^2_3]\} = 0,\\
&[\omega^2_3, \omega^1_2] + [\omega^3_3, \omega^1_3] + \beta\{[\omega^2_1, \omega^1_2] + [\omega^3_1, \omega^1_3]\} = 0.
\end{aligned}
$$

Так как эти равенства должны тождественно выполняться для любых α и β, то условия центроаффинной расслояемости конгруэнций (K_1) и (K_2) запишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
&[\omega^1_3, \omega^2_1] + [\omega^3_3, \omega^2_3] = 0,\\
&[\omega^1_2, \omega^2_1] + [\omega^3_2, \omega^2_3] = 0,\\
&[\omega^2_3, \omega^1_2] + [\omega^3_3, \omega^1_3] = 0,\\
&[\omega^2_1, \omega^1_2] + [\omega^3_1, \omega^1_3] = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

или, в силу равенств (2), в виде:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0,\quad \Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=0,\quad \Gamma^3_{21}-\Gamma^3_{12}=0,$$
$$\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}=0. \tag{6}$$

Из формул (4) имеем:

$$\delta(\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31})=(\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31})\pi^1_1,$$
$$\delta(\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32})=(\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32})\pi^2_2,$$
$$\delta(\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{21})=(\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{21})(\pi^1_1+\pi^2_2),$$
$$\delta(\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11})=(\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11})(\pi^1_1+\pi^2_2).$$

Отсюда следует, что функции $\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}$, $\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}$, $\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_{12}$, $\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}$ являются относительными инвариантами.

Таким образом, в выбранном реперe центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций с пересекающимися лучами определяются уравнениями $\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{21}=\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32}-\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}=0$. Из системы (3) заключаем, что такие пары конгруэнций существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Исследуем геометрические свойства найденной пары. В плоскости H между пучком прямых, проходящих через точку C, и всеми характеристиками плоскостей H установим взаимно-однозначное соответствие следующим образом. Всякой прямой D плоскости H, проходящей через точку C, поставим в соответствие характеристику L плоскости H, соответствующую смещению вдоль присоединенной к поверхности (C) линейчатой поверхности конгруэнции (K) (см. [2], стр. 114). Это соответствие назовем основным проективитетом.

Теорема 1. Если D_1 и D_2 — две произвольные прямые, проходящие через точку C и не совпадающие с линией пересечения плоскости H с касательной плоскостью поверхности (C), а L^1 и L_2 — прямые, соответствующие им в основном проективитете, то точки пересечения прямой D_1 с L_2 и прямой D_2 с L_1 лежат на прямой, параллельной линии пересечения плоскости H с касательной плоскостью к поверхности (C), тогда и только тогда, когда пара конгруэнций с пересекающимися лучами принадлежит классу $\Gamma^3_{21}-\Gamma^3_{12}=0$.

Доказательство. Найдем характеристику плоскостей H при смещении в произвольном направлении

$$x^3=1, \tag{7}$$
$$\omega^3_1x^1+\omega^3_2x^2+\omega^3_3=0.$$

Уравнения произвольной прямой D_i $(i=1,2)$, проходящей через точку C, запишем в виде

$$\alpha^i_1x^1-\alpha^i_2x^2=0,$$
$$x^3=1. \tag{8}$$

Тогда линейчатая поверхность конгруэнции (D_i), присоединенная к (C), определится уравнением

$$\alpha^i_2\omega^2_3-\alpha^i_1\omega^1_3=0. \tag{9}$$

Из системы (7) получаем уравнения характеристики L_i плоскостей H при смещении по линейчатой поверхности (9)

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$(\alpha_2^i\Gamma_{11}^3+\alpha_1^i\Gamma_{12}^3)x^1+(\Gamma_{21}^3\alpha_2^i+\alpha_1^i\Gamma_{22}^3)x^2+\Gamma_{31}^3\alpha_2^i+\Gamma_{32}^3\alpha_1^i=0,$$

$$x^3=1. \tag{10}$$

Векторы

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_3-\frac{\alpha_2^2\Gamma_{31}^3+\alpha_1^2\Gamma_{32}^3}{\alpha_2^1(\alpha_2^2\Gamma_{11}^3+\alpha_1^2\Gamma_{12}^3)+\alpha_1^1(\alpha_2^2\Gamma_{21}^3+\alpha_1^2\Gamma_{22}^3)}(\alpha_2^1\boldsymbol{e}_1+\alpha_1^1\boldsymbol{e}_2) \tag{11}$$

и

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_3-\frac{\alpha_2^1\Gamma_{31}^3+\alpha_1^1\Gamma_{32}^3}{\alpha_2^2(\alpha_2^1\Gamma_{11}^3+\alpha_1^1\Gamma_{12}^3)+\alpha_1^2(\Gamma_{21}^3\alpha_2^1+\alpha_1^1\Gamma_{22}^3)}(\alpha_2^2\boldsymbol{e}_1+\alpha_1^2\boldsymbol{e}_2)$$

являются радиус-векторами точек пересечения, соответственно, прямых D_1 с L_2 и D_2 с L_1. Направляющий вектор

$$\boldsymbol{a}=\{-\alpha_2^2(\alpha_2^1\Gamma_{31}^3+\alpha_1^1\Gamma_{32}^3)[\alpha_2^1(\alpha_2^2\Gamma_{11}^3+\alpha_1^2\Gamma_{12}^3)+\alpha_1^1(\alpha_2^2\Gamma_{21}^3+$$
$$+\alpha_1^2\Gamma_{22}^3)]+\alpha_2^1(\alpha_2^2\Gamma_{31}^3+\alpha_1^2\Gamma_{32}^3)[\alpha_2^2(\alpha_2^1\Gamma_{11}^3+\alpha_1^1\Gamma_{12}^3)+\alpha_1^2(\alpha_2^1\Gamma_{21}^3+$$
$$+\alpha_1^1\Gamma_{22}^3)]\}\boldsymbol{e}_1+\{-\alpha_1^2(\Gamma_{31}^3\alpha_2^1+\alpha_1^1\Gamma_{32}^3)[\alpha_2^1(\alpha_2^2\Gamma_{11}^3+\alpha_1^2\Gamma_{12}^3)+$$
$$+\alpha_1^1(\alpha_2^2\Gamma_{21}^3+\alpha_1^2\Gamma_{22}^3)]+\alpha_1^1(\alpha_2^2\Gamma_{31}^3+\alpha_1^2\Gamma_{32}^3)[\alpha_2^2(\alpha_2^1\Gamma_{11}^3+\alpha_1^1\Gamma_{12}^3)+$$
$$+\alpha_1^2(\alpha_2^1\Gamma_{21}^3+\alpha_1^1\Gamma_{22}^3)]\}\boldsymbol{e}_2$$

прямой, проходящей через рассматриваемые точки пересечения, параллелен направляющему вектору

$$\Gamma_{32}^3\boldsymbol{e}_1-\Gamma_{31}^3\boldsymbol{e}_2 \tag{12}$$

линии пересечения плоскости H с касательной плоскостью поверхности (C) лишь тогда, когда выполняется равенство

$$(\Gamma_{32}^3\alpha_1^2+\Gamma_{31}^3\alpha_2^2)(\Gamma_{31}^3\alpha_2^1+\Gamma_{32}^3\alpha_1^1)(\alpha_1^2\alpha_2^1-\alpha_1^1\alpha_2^2)(\Gamma_{21}^3-\Gamma_{12}^3)=0.$$

Так как прямые D_1 и D_2 различны и ни одна из них не совпадает с линией пересечения плоскости H с касательной плоскостью поверхности (C), то $\Gamma_{32}^3\alpha_1^2+\Gamma_{31}^3\alpha_2^2\neq 0$, $\Gamma_{31}^3\alpha_2^1+\Gamma_{32}^3\alpha_1^1\neq 0$, $\alpha_1^2\alpha_2^1\neq\alpha_1^1\alpha_2^2$ и, следовательно, последнее равенство эквивалентно следующему равенству

$$\Gamma_{21}^3-\Gamma_{12}^3=0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Для того, чтобы линейчатая поверхность конгруэнции (K_i), присоединенная к поверхности (C), соответствовала линейчатой позерхности конгруэнции (K_j), присоединенной к первому центральному преобразованию поверхности (C) по направлению конгруэнции (K_i), необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль относительный инвариант

$$\Gamma_{ji}^i+\Gamma_{3j}^3\ (i,\ j=1,2;\quad i\neq j \text{ не суммировать!}).$$

Доказательство. Уравнения характеристик плоскостей, проходящих через центр пространства и через лучи конгруэнций (K_1) и (K_2) при смещении по любому направлению имеют вид:

$$x^2=0,$$
$$\omega_1^2x^1+\omega_3^2x^3=0, \tag{13}$$
$$x^1=0,$$
$$\omega_2^1x^1+\omega_3^1x^3=0. \tag{14}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда следует, что линейчатая поверхность $\omega_3^k = 0$ конгруэнции (K_i) является присоединенной к поверхности (C) $(i, k = 1, 2;\ i \neq k)$. Прямая, проходящая через центр пространства параллельно касательной к линии $\omega_3^k = 0$ поверхности (C), пересекает луч K_i в точке C_i' с координатами $x^i = \dfrac{1}{\Gamma_{3i}^3}$, $x^k = 0$, $x^3 = 1$. Точка C_i' принадлежит первому центральному преобразованию (см. [2], стр. 115) поверхности (C) по направлению конгруэнции (K^i). Значит, уравнение $\omega_1^2 + \Gamma_{31}^3\omega_3^2 = 0$ определяет линейчатую поверхность конгруэнции (K_1), присоединенную к (C_1'), а уравнение $\omega_2^1 + \Gamma_{32}^3\omega_3^1 = 0$ — линейчатую поверхность конгруэнции (K_2), присоединенную к (C_2') (см. (13) и (14)). Легко заметить, что формы ω_3^2 и $\omega_2^1 + \Gamma_{32}^3\omega_3^2$, а также ω_3^1 и $\omega_1^2 + \Gamma_{31}^3\omega_3^2$ пропорциональны лишь при выполнении равенств $\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$, $\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^3 = 0$.

Замечание. Теорему 2 можно сформулировать иначе: для того, чтобы пара конгруэнций (K_1) и (K_2) с пересекающимися лучами принадлежала классу $\Gamma_{ji}^i + \Gamma_{3j}^3 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы касательная к линии пересечения поверхности (C) с присоединенной к поверхности (C_j') линейчатой поверхностью конгруэнции (K_j) лежала в плоскости, проходящей через центр пространства и луч K_i конгруэнции (K_i), где (C_j') — первое центральное преобразование поверхности (C) по направлению конгруэнции (K_j), $i, j = 1, 2;\ i \neq j$.

Теорема 3. Подкласс $\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{31}^3\Gamma_{32}^1 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 = 0$ выделяется в классе $\Gamma_{21}^3 - \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$ пар конгруэнций (K_1), (K_2) тем, что характеристика плоскости, проходящей через луч конгруэнции (K_i) и центр пространства, при смещении вдоль той линейчатой поверхности, которая соответствует цилиндроидальной линейчатой поверхности конгруэнции (K_j), пересекает луч K_i в точке, симметричной относительно C точке пересечения прямых K_i и L_j (здесь L_j — прямая, соответствующая прямой K_j в основном проективитете; $i, j = 1, 2;\ i \neq j$).

Доказательство. Точка пересечения прямой K_i с прямой L_j, соответствующей прямой K_j в основном проективитете, имеет радиус-вектор

$$r_i^0 = e_3 - \frac{\Gamma_{3j}^3}{\Gamma_{ij}^3} e_i \tag{15}$$

(это следует из формул (11) при $\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 0$). Из уравнений (13) и (14) видим, что линейчатая поверхность $\omega_i^j = 0$ является цилиндроидальной линейчатой поверхностью конгруэнции (K_i). Из этих же уравнений находим характеристику плоскостей, проходящих через центр пространства и лучи конгруэнции (K_i) при смещении по линейчатой поверхности $\omega_j^i = 0$:

$$(\Gamma_{ij}^j\Gamma_{ji}^i - \Gamma_{ii}^j\Gamma_{jj}^i)\,x^i + \Gamma_{ji}^i\,x^3 = 0, \qquad x^j = 0. \tag{16}$$

(по i, j не суммировать!)

Точка пересечения прямой (16) с лучом K_i имеет радиус-вектор

$$e_3 + \frac{\Gamma_{ji}^i}{\Gamma_{ii}^j\Gamma_{jj}^i - \Gamma_{ij}^j\Gamma_{ji}^i} e_i. \tag{17}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Потребуем, чтобы точка с радиус-вектором (17) совпадала с точкой, симметричной относительно C точке (15). Тогда

$$\Gamma^3_{ij}\Gamma^i_{ji} = \Gamma^3_{3j}(\Gamma^j_{ii}\Gamma^i_{jj} - \Gamma^j_{ij}\Gamma^i_{ji}).$$

Придавая i, j значения 1, 2 $(i \neq j)$, получим

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{21}\Gamma^3_{12} &= \Gamma^3_{32}(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{21}), \\ \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{21} &= \Gamma^3_{31}(\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12}). \end{aligned} \tag{18}$$

При условиях $\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{31} = \Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{21} - \Gamma^3_{12} = 0$ равенства (18) принимают вид:

$$\begin{aligned} -\Gamma^3_{32}\Gamma^3_{12} &= \Gamma^3_{32}(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32}), \\ -\Gamma^3_{31}\Gamma^3_{12} &= \Gamma^3_{31}(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{31}\Gamma^2_{32}). \end{aligned}$$

Прямая K_i не является линией пересечения касательной плоскости поверхности (C) с плоскостью H, значит $\Gamma^3_{3i} \neq 0$ (см. (12), и мы получаем

$$\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} = 0.$$

Теорема доказана.

Таким образом, доказанные в этом параграфе три теоремы в общем случае полностью характеризуют геометрически центроаффинно-расслояемую пару конгруэнций с пересекающимися лучами.

§ 2. Включение пары M в центроаффинно-расслояемую пару конгруэнций

Пара M есть (см. [2], стр. 161) двупараметрическое семейство прямых K с фиксированными на них точками P. Отнесем пару M к подвижному реперу $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, где O — центр пространства, $\boldsymbol{e}_3$ — радиус-вектор точки P поверхности (P), $\boldsymbol{e}_1$ — направляющий вектор луча K конгруэнции (K), $\boldsymbol{e}_2$ — произвольный вектор, не компланарный с $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$. Деривационные формулы такого репера имеют вид $d\boldsymbol{e}_\alpha = \omega^\beta_\alpha \boldsymbol{e}_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Формы $\omega^1_3, \omega^2_3, \omega^3_3, \omega^2_1, \omega^1_2$ являются главными формами пары M. Примем за независимые формы ω^i_3 $(i = 1, 2)$ (тем самым исключаем из рассмотрения пары M, у которых поверхность (P) является конусом с вершиной в центре пространства). Тогда оставшиеся главные формы пары M будут линейной комбинацией этих форм:

$$\begin{aligned} \omega^3_3 &= \Gamma^3_{3i}\omega^i_3, \\ \omega^3_1 &= \Gamma^3_{1i}\omega^i_3, \\ \omega^2_1 &= \Gamma^2_{1i}\omega^i_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Внешнее дифференцирование системы (1) приводит к следующим квадратичным уравнениям:

$$\begin{aligned} &[d\Gamma^3_{3i} + \Gamma^3_{3i}\omega^3_3 - \Gamma^3_{3k}\omega^k_i + \omega^3_i,\ \omega^i_3] = 0, \\ &[d\Gamma^3_{1i} - \Gamma^3_{1k}\omega^k_i + \Gamma^2_{1i}\omega^3_2 - \Gamma^3_{1i}\omega^1_1,\ \omega^i_3] = 0, \\ &[d\Gamma^2_{1i} - \Gamma^2_{1k}\omega^k_i + \Gamma^2_{1i}(\omega^3_3 + \omega^2_2 - \omega^1_1) + \Gamma^3_{1i}\omega^2_3,\ \omega^i_3] = 0, \\ &(i, k = 1, 2). \end{aligned} \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^3_{3i} &= \Gamma^3_{3k}\pi^k_i - \pi^3_i,\\ \delta\Gamma^3_{1i} &= \Gamma^3_{1k}\pi^k_i + \Gamma^3_{1i}\pi^1_1 - \Gamma^2_{1i}\pi^3_2,\\ \delta\Gamma^2_{1i} &= \Gamma^2_{1k}\pi^k_i - \Gamma^2_{1i}(\pi^2_2 - \pi^1_1).\end{aligned} \tag{3}$$

Из последнего равенства находим

$$\delta\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{11}(2\pi^1_1 + \pi^2_2). \tag{3'}$$

Следовательно, Γ^2_{11} — относительный инвариант. Выясним, какой класс пар M определяется уравнением $\Gamma^2_{11} = 0$.

Характеристика плоскости, проходящей через центр пространства и луч конгруэнции (K), при смещении вдоль произвольной линейчатой поверхности в выбранном реперe определяется уравнениями

$$\begin{aligned}x^2 &= 0,\\ \omega^2_1 x^1 + \omega^2_3 x^3 &= 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Характеристика (4) является одной и той же для всех линейчатых поверхностей конгруэнции (K) тогда и только тогда, когда формы ω^2_1 и ω^2_3 пропорциональны, а это может быть лишь при $\Gamma^2_{11} = 0$. Такие конгруэнции рассматривались Л. И. Магазинниковым [3] и названы им уницентральными [4].

Таким образом, класс $\Gamma^2_{11} = 0$ пар M характеризуется тем, что конгруэнция (K) этой пары является уницентральной.

Поставим задачу: через точки поверхности (P) пары M провести прямые так, чтобы получилась конгруэнция (K_1), образующая с конгруэнцией (K) центроаффинно-расслояемую в сторону от (K) к (K_1) пару.

Вектор e_2 направим по лучу K_1 искомой конгруэнции, тогда условиями центроаффинной расслояемости конгруэнций (K) и (K_1) в сторону от конгруэнции (K) к конгруэнции (K_1) будут уравнения

$$\begin{aligned}[\omega^2_3, \omega^1_2] + [\omega^3_3, \omega^1_3] &= 0,\\ [\omega^2_1, \omega^1_2] + [\omega^3_1, \omega^1_3] &= 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Так как пара M задана, то ее главные формы $\omega^i_3, \omega^3_3, \omega^2_1, \omega^3_1$ известны. Неизвестными формами в рассматриваемой задаче являются формы ω^1_2, ω^3_2, управляющие выбором конгруэнции (K_1). Условия центроаффинной расслояемости (5) не накладывают ограничений на выбор формы ω^3_2. Найдем форму ω^1_2.

При $\Gamma^2_{11} \neq 0$ из уравнений (5), учитывая равенство (1), имеем

$$\omega^1_2 = -\Gamma^3_{32}\omega^1_3 + \frac{\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}}{\Gamma^2_{11}}\,\omega^2_3. \tag{6}$$

Чтобы определить произвол выбора формы ω^3_2, представим ее в виде

$$\omega^3_2 = \alpha\omega^1_3 + \beta\omega^2_3. \tag{7}$$

Если продифференцировать внешним образом это уравнение, то в полученное квадратичное уравнение войдут две неизвестных формы $d\alpha$ и $d\beta$. Это позволяет сделать вывод: при $\Gamma^2_{11} \neq 0$ (т. е. когда конгруэнция (K) пары M не является уницентральной) конгруэнция (K_1), образующая с конгруэнцией (K) пару, центроаффинно-расслояемую

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

в сторону от конгруэнции (K) к конгруэнции (K_1), определяется с произволом в одну функцию двух аргументов.

Замечание 1. В случае $\Gamma^2_{11} \neq 0$ плоскость $\{e_1, e_2\}$, т. е. плоскость, проходящая через центр пространства и луч K_1 конгруэнции (K_1), инвариантно связана с парой M, так как форма ω^1_2, управляющая выбором плоскости $\{e_3, e_2\}$, вполне определена (см. (6)).

Замечание 2. Конгруэнция (K_1) (в общем случае $\Gamma^2_{11} \neq 0$) обладает следующим свойством: линейчатая поверхность конгруэнции (K_1), присоединенная к первому центральному преобразованию поверхности (P) по направлению конгруэнции (K_1), соответствует линейчатой поверхности конгруэнции (K), присоединенной к поверхности (P). Действительно, из уравнений

$$x^1 = 0, \qquad \omega^1_2 x^2 + \omega^1_3 x^3 = 0, \tag{8}$$

определяющих характеристику плоскости, видно, что линейчатая поверхность $\omega^1_3 = 0$ является присоединенной к (P) линейчатой поверхностью конгруэнции (K_1). Прямая, параллельная касательной к линии $\omega^1_3 = 0$ поверхности (P) и проходящая через центр пространства, пересекает луч K_1 в точке

$$P'_1\left(0, \frac{1}{\Gamma^3_{32}}, 1\right).$$

Поверхность (P'_1), по определению (см. [2], стр. 115), является первым центральным преобразованием поверхности (P) по направлению конгруэнции (K_1). Из уравнений (8) получаем, что линейчатая поверхность $\omega^1_2 + \Gamma^3_{32}\omega^1_3 = 0$ является присоединенной к (P'_1) линейчатой поверхностью конгруэнции (K_1). С другой стороны, уравнение $\omega^2_3 = 0$ определяет присоединенную к (P) линейчатую поверхность конгруэнции (K) (см. (4)). Из равенства (6) заключаем, что формы $\omega^1_2 + \Gamma^3_{32}\omega^1_3$ и ω^2_3 пропорциональны. Таким образом, наше замечание верно.

Пусть теперь $\Gamma^2_{11} = 0$, т. е. конгруэнция (K) — уницентральная. В этом случае из системы (5) получаем

$$\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32} = 0, \tag{9}$$

$$[\omega^1_2 + \Gamma^3_{32}\omega^1_3, \omega^2_3] = 0. \tag{10}$$

Равенство (9) можно обеспечить за счет приведения к нулю вторичной формы π^1_2. Это следует из выражения

$$\delta(\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32}) = (\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32})(\pi^1_1 + \pi^2_2) + (\Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{31})\pi^1_2 \tag{11}$$

(при $\Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{31} \neq 0$), полученного на основании равенств (3). Сделаем указанный выбор вторичных параметров и выясним его геометрический смысл. Уравнение торсов конгруэнции (K) имеет вид

$$(\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{32})(\omega^2_3)^2 + (\Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{12}\Gamma^3_{31})\omega^1_3\omega^2_3 - \Gamma^2_{11}\Gamma^3_{31}(\omega^1_3)^2 = 0. \tag{12}$$

Выбрав вторичные параметры так, чтобы удовлетворялось равенство (9), мы (как это видно из уравнения (12)) совместим координатную поверхность $\omega^1_3 = 0$ с одним из торсов конгруэнции (K), исключив

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

при этом из рассмотрения случай, когда конгруэнция (K) параболическая. Теперь форма ω_2^1 стала главной и ее можно представить в виде

$$\omega_2^1 = \Gamma_{2i}^1 \omega_3^i. \tag{13}$$

Из (9) и (12) получаем

$$\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0. \tag{14}$$

В выбранном реперe функция $\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3$ является относительным инвариантом, так как при дифференцировании по вторичным параметрам имеет место равенство

$$\delta(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3) = (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3)\pi_2^2.$$

Класс пар M, определяемых равенствами $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$, существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Таким образом, только подкласс $\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$ пар M класса $\Gamma_{11}^2 = 0$ имеет конгруэнцию (K_1), образующую с конгруэнцией (K) центроаффинно-расслояемую пару в сторону от конгруэнции (K) к конгруэнции (K_1).

Выясним геометрическую характеристику пар M класса $\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$.

Прежде всего из (13) видим, что и в этом случае (т. е. когда $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$) плоскость $\{e_3, e_2\}$ инвариантно связана с парой M. Определим ее геометрически. В выбранном нами репере уравнение торсов (12) при $\Gamma_{11}^2 = 0$ принимает вид

$$\omega_3^1 \omega_3^2 = 0,$$

т. е. координатные линейчатые поверхности конгруэнции (K) являются торсами. При этом торс $\omega_3^1 = 0$ соответствует уницентру (т. е. общей центральной точке — см. [4]) конгруэнции (K). Действительно, фокус F_1 конгруэнции (K), соответствующий торсу $\omega_3^1 = 0$, имеет радиус-вектор

$$F_1 = e_3 - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} e_1. \tag{15}$$

Из уравнений (4) следует, что он совпадает с радиус-вектором уницентра конгруэнции (K). Найдем направляющий вектор касательной к линии $\omega_3^1 = 0$ поверхности (P)

$$(de)_{\omega_3^1 = 0} = \omega_3^2 (e_2 + \Gamma_{32}^3 e_3). \tag{16}$$

Таким образом, плоскость $\{e_2, e_3\}$ является плоскостью, проходящей через центр пространства и касательную к линии пересечения поверхности (P) с тем торсом конгруэнции (K), который соответствует уницентру конгруэнции (K).

Очевидно, что всякая прямая, проходящая через точку P и лежащая в плоскости $\{e_2, e_3\}$, описывает конгруэнцию, образующую с конгруэнцией (K) центроаффинно-расслояемую в одну сторону (от конгруэнции (K)) пару.

После того, как найдена геометрическая характеристика плоскости $\{e_2, e_3\}$ в классе $\Gamma_{11}^2 = 0$ пар M, легко охарактеризовать геометрически и подкласс $\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{32}^3 = 0$ этого класса. Характеристика плоскости $\{e_2, e_3\}$, определяемая уравнениями (8), вдоль торса $\omega_3^2 = 0$ (несоответствующего уницентру) параллельна вектору

$$e_2 - \Gamma_{21}^1 e_2. \tag{17}$$

Заказ 4901.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Векторы (16) и (17) колинеарны лишь тогда, когда $\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=0$. Отсюда заключаем, что подкласс $\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=0$ класса $\Gamma^2_{11}=0$ пар M характеризуется тем, что касательная к линии пересечения торса $\omega^1_3=0$, соответствующего уницентру конгруэнции (K), параллельна характеристике (вдоль торса $\omega^2_3=0$) плоскости, проходящей через эту касательную и центр пространства.

Конгруэнцию (K_1) к паре M класса $\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=0$, $\Gamma^2_{11}=0$ можно присоединить с произволом одной функции двух аргументов. Доказывается это так же, как и в общем случае.

Замечание. Из уравнения (8) и из характеристики класса $\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=0$ пар M следует, что для этого класса линейчатые поверхности $\omega^1_3=0$ и $\omega^2_3=0$ конгруэнции (K_1) являются присоединенными, соответственно, к поверхности (P) и ее первому центральному преобразованию по направлению конгруэнции (K_1).

В заключение рассмотрим следующую задачу: через точки поверхности (P) пары M провести прямые так, чтобы получилась конгруэнция (K_1), образующая с конгруэнцией (K) расслояемую пару.

Потребуем, чтобы конгруэнция (K_1), найденная в предыдущей задаче, образовывала с конгруэнцией (K) пару, центроаффинно-расслояемую в сторону от (K_1) к (K). Условиями такого расслоения являются уравнения

$$[\omega^1_3,\omega^2_1]+[\omega^3_3,\omega^2_3]=0, \qquad (18)$$
$$[\omega^1_2,\omega^2_1]+[\omega^3_2,\omega^2_3]=0.$$

Таким образом, условиями центроаффинной расслояемости конгруэнций (K) и (K_1) являются уравнения (5), (18).

Пусть $\Gamma^2_{11}\neq 0$. Подставляя выражения для ω^1_2 и ω^3_2 из (6) и (7) в (18), получаем

$$\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0, \qquad (19)$$
$$\omega^3_2=\Gamma^3_{12}\omega^1_3+\beta\omega^2_3. \qquad (20)$$

Из условия (19) видим, что пара M, допускающая указанное построение, принадлежит к классу $\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0$. Найдем геометрическую характеристику этого класса. Обозначим через (P') поверхность, являющуюся первым центральным преобразованием поверхности (P) по направлению конгруэнции (K). В выбранном нами репере точка P' поверхности (P') имеет координаты $\left(\frac{1}{\Gamma^3_{31}},\,0,\,1\right)$. Линейчатая поверхность конгруэнции (K), присоединенная к (P'), определяется уравнением

$$\omega^2_1+\Gamma^3_{31}\omega^2_3=0. \qquad (21)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению $\Gamma^2_{11}\omega^1_3+(\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31})\,\omega^2_3=0$. Направляющий вектор касательной к линии $\omega^2_1+\Gamma^3_{31}\omega^2_3=0$ поверхности (P) есть

$$(\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31})\,\boldsymbol{e}_1-\Gamma^2_{11}\boldsymbol{e}_2+\Gamma^2_{11}\{(\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31})\,\Gamma^3_{31}-\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32}\}\,\boldsymbol{e}_3.$$

Отсюда видно, что этот вектор параллелен плоскости $\{\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0$.

Следовательно, класс $\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0$ пар M характеризуется тем, что касательная к линии пересечения поверхности (P) с линейчатой поверхностью конгруэнции (K), присоединенной к поверхности (P'), лежит в плоскости, проходящей через центр пространства и луч K_1

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

конгруэнции (K_1), образующей с конгруэнцией (K) расслояемую в сторону от (K) к (K_1) пару. Класс $\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0$ определяется с произволом двух функций двух аргументов. Конгруэнция (K_1) для этого класса выбирается с произволом одной функции одного аргумента. Последнее становится очевидным, если продифференцировать внешним образом уравнение Пфаффа (20).

Рассмотрим теперь класс пар M, определяемых натуральными уравнениями $\Gamma^2_{11}=0$, $\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=0$. Как и в предыдущем случае, получаем

$$\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0,$$

$$\omega^3_2=\Gamma^3_{12}\omega^1_3+\beta\omega^2_3.$$

Класс пар M с натуральными уравнениями $\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0$ существует и определяется с произволом пяти функций одного аргумента, что легко подсчитать, если перейти к каноническому реперу пары M. Конгруэнция (K^1) для этого класса выбирается с произволом одной функции одного аргумента.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Только для двух классов пар M можно построить конгруэнцию (K_1), образующую с конгруэнцией (K) расслояемую пару. Эти классы пар M определяются уравнениями:

$$1)\ \Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0\ (\Gamma^2_{11}\neq 0),\ 2)\ \Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{32}=\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{31}=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Магазинников Л. И. Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций. Данный сборник, 43—56

2. Онищук Н. М. Пара, состоящая из конгруэнции и поверхности, в центроаффинном пространстве. Геометрический сборник, вып. 2 (Труды Томского ун-та, 161), 1962, 111—123.

3. Магазинников Л. И. К центроаффинной теории прямолинейных конгруэнций. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского ун-та, 168), 1963, 132—149.

4 Магазинников Л. И. Некоторые вопросы центроаффинной теории конгруэнций и комплексов прямых. Диссертация. Томск, 1964.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. В. СЛУХАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЭКВИАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Излучение геометрических свойств векторных полей представляет интерес не только для дифференциальной геометрии, но и для гидромеханики. Применяя метод внешних форм Картана, метрическую геометрию векторных полей изучали С. С. Бюшгенс [4], П. Делен [5] и другие геометры. Делен занимался также проективной теорией векторного поля. Я. С. Дубновым [3] изучались центроаффинные свойства векторных полей. Эквиафинной геометрии векторного поля посвящена работа Г. Георгиева [7].

В настоящей работе строится эквиаффинный канонический репер векторного поля, дается геометрическая характеристика элементов репера и исследуются некоторые классы векторных полей, которые можно рассматривать как поля скоростей различных потоков жидкости (сжимаемой, если $\operatorname{div} \boldsymbol{e}_3 \neq 0$, или несжимаемой, если $\operatorname{div} \boldsymbol{e}_3 = 0$).

§ 1. Абсолютная производная векторного поля. Уравнения гидродинамики

Векторное поле будет вполне определено, если в каждой точке A трехмерного пространства задать вектор $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$.

Точку A возьмем за начало эквиаффинного репера, деривационные формулы которого имеют вид:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \omega_k^i \boldsymbol{e}_i, \\ d\boldsymbol{e}_i &= \omega_i^k \boldsymbol{e}_k, \end{aligned} \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^j \omega_j^i], \\ D\omega_j^i &= [\omega_j^k \omega_k^i] \end{aligned} \tag{2}$$

и условию эквиаффинности $\omega_i^i = 0$. Все индексы принимают значения 1, 2, 3, кроме особо оговоренных случаев.

Так как $\delta A = 0$, то формы ω^i — главные, а поскольку точка A — любая точка трехмерного пространства, то они линейно независимы. Выберем их за базисные формы.

В этом репере $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i$, $d\boldsymbol{a} = \Delta a^i \boldsymbol{e}_i$, где $\Delta a^i = da^i + a^j \omega_j^i$. Полагая $da_i = a_{ik}^{\cdot} \omega^k$ и $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k$, получим

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$d\boldsymbol{a} = \nabla a_k^i \omega^k \boldsymbol{e}_i, \tag{3}$$

где $\nabla a_k^i = a_k^i + a^j \Gamma_{jk}^i$ — абсолютная производная [2] вектора $\boldsymbol{a}$, то есть аффинор, который вектору $d\boldsymbol{A} = \omega^i \boldsymbol{e}_i$ ставит в соответствие вектор $d\boldsymbol{a}$. След этого аффинора

$$\nabla a_k^k = \operatorname{div} \boldsymbol{a}. \tag{4}$$

Дивергенция векторного поля представляет собой отношение объемов [3], [4] и имеет поэтому в аффинной геометрии тот же смысл, что и в метрической.

Возьмем вектор $\boldsymbol{a}$ за вектор $\boldsymbol{e}_3$ подвижного репера. Тогда формы ω_3^i станут главными, поскольку $\delta \boldsymbol{e}_3 = 0$. Линии тока задаются теперь уравнением $\omega^1 = \omega^2 = 0$, так как при этом условии $d\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{e}_3$. Дифференцируя соотношения

$$\omega_3^i = \Gamma_{3k}^i \omega^k \tag{5}$$

внешним образом, получаем

$$[d\Gamma_{3k}^i - \Gamma_{3j}^i \omega_k^j + \Gamma_{3k}^j \omega_j^i, \omega^k] = 0.$$

При изменении вторичных параметров репера имеем

$$\delta \Gamma_{3k}^i = \Gamma_{3j}^i \pi_k^j - \Gamma_{3k}^j \pi_j^i, \tag{6}$$

причем $\pi^i = 0$, $\pi_3^i = 0$, $\pi_1^1 + \pi_2^2 = 0$. Из (6) видно, что Γ_{3k}^i — тензор [10]. Формула (4) принимает вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{e}_3 = \Gamma_{3k}^k.$$

Так как $\delta \Gamma_{33}^i = -\Gamma_{33}^s \pi_s^i (s,t = 1,2)$, то Γ_{33}^i и Γ_{33}^s — одновалентные тензоры [10]. Вектор $\boldsymbol{\tau} = \Gamma_{33}^i \boldsymbol{e}_i \parallel d\boldsymbol{e}_3|_{\omega^1 = \omega^2 = 0}$ указывает направление касательной к годографу вектора $\boldsymbol{e}_3$ при его движении вдоль линии тока. Геометрический смысл модуля вектора $\boldsymbol{\tau}$ будет выяснен в § 2. Если $\Gamma_{33}^s = 0$, то $\boldsymbol{\tau} \parallel \boldsymbol{e}_3$, линии тока — прямые, а их совокупность есть линейчатая конгруэнция. Если же $\Gamma_{33}^i = 0$, то $\boldsymbol{\tau} = 0$, и вектор $\boldsymbol{e}_3$ постоянен вдоль каждой прямой линии тока.

Линию, касающуюся направления $\boldsymbol{\tau}$, будем называть линией $\boldsymbol{\tau}$ векторного поля $\{\boldsymbol{e}_3\}$.

Линию, вдоль которой $d\boldsymbol{e}_3 \parallel \boldsymbol{e}_3$, будем называть s-линией векторного поля $\{\boldsymbol{e}_3\}$. Уравнения s-линий имеют вид: $\omega_3^1 = 0$, $\omega_3^2 = 0$, или:

$$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = -\begin{vmatrix} \Gamma_{33}^1 & \Gamma_{32}^1 \\ \Gamma_{33}^2 & \Gamma_{32}^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Gamma_{33}^1 & \Gamma_{31}^1 \\ \Gamma_{33}^2 & \Gamma_{31}^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \Gamma_{31}^1 & \Gamma_{32}^1 \\ \Gamma_{31}^2 & \Gamma_{32}^2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Вдоль s-линии линейчатая поверхность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{e}_3$ — цилиндр.

Если рассматривать векторное поле как поле скоростей стационарного потока жидкости, то есть считать $\boldsymbol{e}_3$ — скоростью в точке $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ (где t — время) и, следовательно, $dt = \omega^3|_{\omega^1 = \omega^2 = 0}$. Далее имеем $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\boldsymbol{e}_3}{dt}$, то есть вектор $\boldsymbol{\tau}$ является вектором ускорения в точке A.

Уравнения движения для потока жидкости имеют вид

$$\rho \boldsymbol{\tau} = \rho \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{T},$$

где ρ — плотность в точке A, $\boldsymbol{f}$ — равнодействующая внешних сил,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

действующих на жидкость в точке A, T—тензор напряжений. Следовательно, $\rho\tau$—результирующая всех сил, действующих на жидкость в данной точке. Из (7) видно, что уравнение неразрывности запишется в виде $\frac{d\rho}{dt} = \rho\Gamma^k_{3k}$, а для несжимаемой жидкости $\Gamma^k_{3k} = 0$.

§ 2. Канонический репер векторного поля. Ассоциированный линейчатый комплекс

В формулах (6) произведем следующую фиксацию: $\Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^3_{33} = 0$; $\Gamma^2_{33} = 1$; $\pi^1_2 = \pi^2_2 = \pi^3_2 = \pi^2_1 = \pi^3_1 = 0$.

При этом исключаются случаи: $\tau \parallel e_2$ и $\tau = 0$. Получается канонический репер векторного поля, характеризующийся соотношениями:

$$\omega^1_3 = \Gamma^1_{32}\omega^2, \quad \omega^2_3 = \Gamma^2_{32}\omega^2 + \omega^3,$$
$$\omega^3_3 = \Gamma^3_{31}\omega^1 + \Gamma^3_{32}\omega^2, \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\omega^k, \tag{9}$$

где Γ^i_{jk} связаны соотношениями:

$$\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^1_{21} = 0,$$
$$\Gamma^2_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{13} + 3\Gamma^2_{21} + 2\Gamma^1_{11} = 0, \tag{10}$$

возникающими при внешнем дифференцировании первых двух соотношений (9), и условием эквиаффинности

$$\Gamma^i_{ij} = 0. \tag{11}$$

Следовательно, деривационные формулы канонического репера векторного поля содержат 4 инварианта первого порядка и 13 инвариантов второго порядка.

Этот репер отличается от репера, построенного Г. Георгиевым [7], нормировкой вектора e_2 и направлением вектора e_1.

Из деривационных формул (9) с помощью уравнений структуры (2) получаем внешние дифференциалы базисных форм:

$$D\omega^i = K^i[\omega^1\omega^2] + \Lambda^i[\omega^1\omega^3] + M^i[\omega^2\omega^3], \tag{12}$$

где $K^i = \Gamma^i_{12} - \Gamma_{21}$, $\Lambda^i = \Gamma^i_{13} - \Gamma^i_{31}$, $M^i = \Gamma^i_{23} - \Gamma^i_{32}$

и 8 квадратичных уравнений (с учетом (11))

$$[d\Gamma^i_{jk}\omega^k] = K^i_j[\omega^1\omega^2] + \Lambda^i_j[\omega^1\omega^3] + M^i_j[\omega^2\omega^3]. \tag{13}$$

Здесь:
$$K^i_j = -\Gamma^i_{jk}K^k + \Gamma^k_{j1}\Gamma^i_{k2} - \Gamma^i_{k1}\Gamma^k_{j2},$$
$$\Lambda^i_j = -\Gamma^i_{jk}\Lambda^k + \Gamma^k_{j1}\Gamma^i_{k3} - \Gamma^i_{k1}\Gamma^k_{j3},$$
$$M^i_j = -\Gamma^i_{jk}M^k + \Gamma^k_{j2}\Gamma^i_{k3} - \Gamma^i_{k2}\Gamma^k_{j3},$$

причем из (10) следует, что $\Lambda^1_3 = 0$, $\Lambda^2_3 = 0$.

Дифференцируем (10) и полученные уравнения присоединяем к системе (13). В полученной системе внешних уравнений число неизвестных функций $r_1 = 17$, а число независимых квадратичных уравнений $s_1 = 8$. Определяя обычным путем второй характер, получим $s_2 = 6$, $s_3 = 17 - 8 - 6 = 3$. Число Картана $Q = 8 + 2\cdot 6 + 3\cdot 3 = 29$. Разрешая уравнения (13) по лемме Картана, получаем, что произвол существования наиболее общего интегрального элемента $N = 29$. Итак, $Q = N$, система (13), (10) — в инволюции и произвол решения—3 функции трех аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Выясним геометрическое значение элементов построенного репера. Плоскость $(R - A, e_2, e_3) = 0$ — соприкасающаяся плоскость линии тока. Линия τ определяется уравнениями $\omega^1 = \omega^3 = 0$, а вектор e_2 совпадает с вектором τ. Линия $\omega^2 = \omega^3 = 0$, как следует из (8), есть s-линия, а вектор e_1 касается s-линии и нормирован так, что $(e_1, e_2, e_3) = 1$.

Отсюда следует, что при построении репера был исключен случай, когда векторы a, τ и e_1 линейно зависимы. Кроме того, $\Gamma^1_{32} \neq 0$, так как если $\Gamma^1_{32} = 0$, то любая линия неголономной поверхности $\Gamma^2_{32}\omega^2 + \omega^3 = 0$ является s-линией.

Соотношение (7) запишется теперь в виде

$$\operatorname{div} e_3 = \Gamma^2_{32}. \tag{14}$$

Так как две точки (A и B) определяют прямую, то со всяким векторным полем можно ассоциировать линейчатый комплекс (который по условию задачи не может быть специальным и цилиндрическим).

Торс с ребром возврата в точке $A + te_3$ имеет уравнение

$$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = t^2\Gamma^1_{32} : -t : (1 + t\Gamma^2_{32}).$$

Главная корреляция комплекса имеет вид

$$A + te_3 \longleftrightarrow \{-t\Gamma^1_{32}e_1 + e_2,\ e_3\}.$$

Отсюда следует, что в комплексе уравнения $\omega^1 = \omega^2 = 0$ выделяют торс касательных к линии тока. Назовем его центральным торсом векторного поля. Уравнения $\omega^2 = \omega^3 = 0$ выделяют в комплексе цилиндр, а $(R - A, e_1, e_3) = 0$ — его касательная плоскость.

Основным цилиндроидом [8] комплекса называется цилиндроид, направляющая плоскость которого параллельна касательной плоскости цилиндра комплекса. Уравнение основного цилиндроида имеет вид $\omega^2_1 = 0$, $\omega^2_3 = 0$ или:

$$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = (\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{32}) : -\Gamma^2_{12} : \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{11}.$$

Корреляция Шаля для основного цилиндроида имеет вид:

$$A + te_3 \longleftrightarrow \left\{\left(-\frac{\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{32}}{\Gamma^2_{11}} + \Gamma^1_{32}t\right)e_1 + e_2,\ e_3\right\}.$$

Аффинный центр A^* комплекса [8], т. е. точка, в которой корреляция Шаля основного цилиндроида совпадает с главной корреляцией комплекса, определяется радиус-вектором:

$$A^* = A + \frac{\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{32}}{\Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{32} + 1)}e_3.$$

Рассмотрим линейчатую поверхность, у которой касательная плоскость в точке A совпадает с касательной плоскостью центрального торса, а асимптотическая плоскость совпадает с касательной плоскостью цилиндра. Ее уравнение:

$$\omega^1 : \omega^2 : \omega^3 = 0 : 1 : -\Gamma^2_{32}.$$

Назовем ее линейчатой T-поверхностью векторного поля, а линию, описываемую точкой A на этой линейчатой поверхности, T-линией векторного поля. Касательная к T-линии определяется вектором

$$m = e_2 - \Gamma^2_{32}e_3 = e_2 - (\operatorname{div} e_3)e_3.$$

Отсюда следует, что, если на ось касательной к T-линии спроектировать параллельно касательной к линии τ вектор $-(\operatorname{div} e_3)e_3$,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а затем полученный вектор спроектировать на ось, касательную к линии τ параллельно вектору e_3, то получится вектор, имеющий длину вектора $\tau = e_2$.

Если $\operatorname{div} e_3 = 0$ (соленоидальное векторное поле), то последнее рассуждение теряет силу, так как в этом случае T-линия совпадает с линией τ. Касательная к линии, описываемой точкой A на торсе с ребром возврата в точке $A - e_3$, определяется вектором $l = \Gamma^1_{32} e_1 + e_2 + e_3$.

Следовательно, если вектор e_3 спроектировать на направление вектора l параллельно плоскости $\{e_1 e_2\}$, а полученный вектор спроектировать на направление касательной к линии τ, то получим вектор, имеющий длину вектора $\tau = e_2$.

Если обозначить: $ds_1 = \omega^1/_{\omega^2=\omega^3=0}$, $\omega^2/_{\omega^1=\omega^3=0} = ds_2$, то легко получить геометрическую характеристику всех инвариантов репера. Например: $ds_2 = (e_1,\ dA/_{\omega^1=\omega^3=0},\ e_3), \Gamma^3_{12} = \left(e_1, e_2, \dfrac{de_1}{ds_2}\right)$ и т. д., аналогично тому, как это было сделано Г. Георгиевым в [7].

Остается заметить, что неголономная конгруэнция $\omega^1 = 0$ — параболическая, A—ее фокус. Неголономная конгруэнция $\omega^2 = 0$ — цилиндрическая, A—ее собственный фокус; неголономная конгруэнция $\omega^3 = 0$— также цилиндрическая, и ее собственный фокус находится в точке с радиус-вектором $A - \dfrac{1}{\Gamma^2_{32}} e_3$. Следовательно, в соленоидальном поле она—бицилиндрическая.

§3. Простейшие классы векторных полей

1) $\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{13}\Gamma^2_{32} = 0$. Точка A является центром ассоциированного комплекса, линейчатая T-поверхность—основной цилиндроид.

2) $\Gamma^1_{23} = \text{const}$. Параметр t отличается только постоянным множителем от аффинной длины дуги линии тока и e_2—главная аффинная нормаль линии тока. Это следует из того, что аффинная длина дуги линии тока определяется соотношением:

$$d\sigma = \left(\frac{dA}{dt}, \frac{d^2A}{dt^2}, \frac{d^3A}{dt^3}\right)^{\frac{1}{6}} dt.$$

При $\Gamma^1_{23} = \text{const}$ имеем: $\dfrac{dt}{d\sigma} = \text{const}$ и $e_2 \parallel \dfrac{d^2A}{d\sigma^2}$.

3) $\Gamma^1_{23} = 0$. Линии тока—плоские и лежат в плоскостях $x = 0$ подвижного репера. Это видно из того, что $\dfrac{d}{dt}\{e_2 e_3\} \parallel \{e_2 e_3\}$. Характеристики плоскостей $x = 0$ имеют уравнение:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(\Gamma^1_{21}\omega^1 + \Gamma^1_{22}\omega^2) + z\Gamma^1_{32}\omega^2 + \omega^1 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

из которого непосредственно следует, что: 1) эта характеристика для смещения по любой плоскости, проходящей через вектор e_3 (т. е. смещения $\omega^3 = 0$), одна и та же, 2) все характеристики образуют пучок с центром в точке с радиус-вектором

$$C = A - \frac{1}{\Gamma^1_{21}} e_2 - \frac{\Gamma^1_{22}}{\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{32}} e_3.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Ряд классов векторных полей можно выделить, пользуясь понятием параллелизма Миллера [6] и его обобщением на эквиаффинное пространство [7].

Векторное поле $\{I\}$ называется параллельным в смысле Миллера (параллельным (M)) относительно поля $\{J\}$ вдоль кривой Γ, если вдоль этой кривой $(I, dI, J) = 0$. Будем называть S-линии, линии τ и линии тока линиями A_1, A_2 и A_3 — соответственно.

4) $\Gamma^i_{jk} = 0$ $(i \neq j)$. Векторное поле (e_j) параллельно (M) относительно поля $\{e_l\}$ $(l \neq i, j)$ вдоль кривой A_k.

Произвол существования каждого из классов 1—5 составляет две функции трех аргументов.

5) $\Gamma^2_{32} = 0$. Это соленоидальное векторное поле $(\operatorname{div} e_3 = 0)$. В этом случае из (13) получается еще 2 конечных соотношения: $K^2_3 = 0$ и $M^2_3 = 0$. Некоторые геометрические свойства такого векторного поля отмечены в § 2.

6) $\Gamma^1_{22} = \Gamma^3_{22} = 0$. Линии τ—прямые, так как $\dfrac{de_2}{ds_2} \parallel e_2$.

7) $\Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = 0$. В этом поле s-линии прямые $\left(\dfrac{de_1}{ds_1} \parallel e_1\right)$.

8) $\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0$. Линии тока являются линиями τ векторного поля $\{e_2\}$.

9) $\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{23} = 0$. Линии тока—плоские, а вектор e_2 направлен по аффинной нормали линии тока. Инвариант Γ^3_{23} равен аффинной кривизне линии тока.

Произвол существования каждого из классов 5—9 и 12—одна функция трех аргументов.

10) $\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{23} = 0$, $\Gamma^3_{23} = \text{const}$. Линии тока суть кривые второго порядка, так как они плоские и аффинная кривизна их постоянна.

11) $\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{23} = 0$. Линии тока—параболы, лежащие в плоскости $x^1 = 0$ репера, вектор e_2 направлен по аффинной нормали параболы. Таким образом, если вектор ускорения постоянен вдоль линии тока, то линия тока—парабола, а вектор ускорения направлен по ее аффинной нормали.

12) $\Gamma^2_{32} = 0$, $\Gamma^2_{11} = 0$. Частный случай соленоидального векторного поля. Соприкасающаяся плоскость s-линии совпадает с касательной плоскостью цилиндра ассоциированного комплекса. Цилиндр этот вырождается в плоскость, s-линии—плоские. Из (13) и (14) получаем, что поверхность $\omega^2 = 0$ — голономна.

Произвол существования каждого из классов 10—11 шесть функций двух аргументов.

§ 4. Некоторые частные классы векторных полей, линии тока которых — параболы

Присоединим к натуральным уравнениям

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{23} = 0, \tag{16}$$

характеризующим класс векторных полей, у которых линии тока суть параболы, а векторы e_2 направлены по их аффинным нормалям, условие $\Gamma^1_{21} = 0$. Как следует из (16), в этом случае все характеристики плоскости $x = 0$ репера образуют пучок параллельных прямых. Исследуя систему (13), получим, что $\Gamma^2_{13} = 0$, $\Delta^1_3 = 0$ обращается в тождество, $r_1 = 13$, $s_1 = 8$, $r_2 = 5$, $r_3 = 0$, $s_2 = 5$, $Q = N = 18$. Следовательно, система (13) в инволюции, и произвол существования

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

рассматриваемого класса векторных полей равен пяти функциям двух аргументов. Из (12) получаем, что поверхность $\omega^2 = 0$ — голономна, а сеть $\omega^1\omega^3 = 0$ на этой поверхности—сопряженная. При этом линии $\omega^2 = \omega^3 = 0$ — цилиндрические [9], а радиус-вектор лучевой точки [9] линии $\omega^1 = \omega^2 = 0$ представляется в виде:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A} + \frac{1}{\Gamma^3_{13}}\boldsymbol{e}_1. \tag{17}$$

Натуральными уравнениями этого класса являются соотношения (16) и

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{13} = 0. \tag{18}$$

Если к соотношениям (16) и (18) присоединить

$$\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = 0, \tag{19}$$

то из (17) следует, что сеть $\omega^1\omega^3 = 0$ на поверхности $\omega^2 = 0$ становится сопряженной сетью цилиндрических линий, а, следовательно, поверхность $\omega^2 = 0$ является поверхностью переноса [9]. Линии $\omega^2 = \omega^3 = 0$ на ней—плоские, а вектор $\boldsymbol{e}_2$ направлен по аффинной нормали поверхности.

Таким образом, поверхность $\omega^2 = 0$ получается параллельным переносом произвольной плоской кривой вдоль параболы. Исследуя систему (13), получим: $r_1 = 9$ $s_1 = 8$, $r_2 = 1, r_3 = 0$, $s_2 = 1$, $Q = N = 10$. Следовательно, класс векторных полей, характеризующийся натуральными уравнениями (15), (18), (19), существует с произволом в одну функцию двух аргументов.

Пусть теперь $d\boldsymbol{e}_2 \equiv 0$, т. е. ускорение одно и то же в любой точке пространства. Отметим, что в этом случае векторные поля $\{\boldsymbol{e}_3\}$ и $\{\boldsymbol{e}_2\}$ имеют общие s-линии. Линии тока по-прежнему—параболы. В системе (13) уравнения $\binom{1}{2}$, $\binom{2}{2}$ и $\binom{3}{2}$ исчезают тождественно. Из (10) получаем:

$$\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13} = 0,\ \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{13} + 2\Gamma^1_{11} = 0. \tag{20}$$

Так как $\Gamma^1_{32} \neq 0$, то

$$\Gamma^2_{13} = 0,\ \Gamma^3_{13} = -2\Gamma^1_{11}.$$

В этом случае, как следует из предыдущего параграфа, все характеристики плоскостей $x = 0$ репера параллельны. Диаметры всех парабол также параллельны между собой. Произвол существования равен трем функциям двух аргументов.

§ 5. Векторные поля, s-линии которых образуют связку параллельных прямых

Если s-линии образуют связку параллельных прямых, то $d\boldsymbol{e}_1 \parallel \boldsymbol{l}_1$. В этом случае в системе (13) уравнения $\binom{2}{1}$ и $\binom{3}{1}$ тождественно исчезают, а из (10) получаем $\Gamma^1_{21} = 0$ и $3\Gamma^2_{21} + 2\Gamma^1_{11}$. Тогда: $r_1 = 11$, $s_1 = 6$, $r_2 = 5$, $r_3 = 1$, $s_2 = 4$, $s_3 = 1$, $Q = N = 17$. Следовательно, система (13) в инволюции и произвол решения равен одной функции трех аргументов. Поверхность $\omega^1 = 0$ голономна и является цилиндром, образующие которого—s-линии, а направляющая—линия тока.

Если $d\boldsymbol{e}_1 \equiv 0$, то $\Gamma^2_{21} = 0$ и $\Gamma^2_{23} = 0$, из $\Lambda^2_2 = 0$ получаем $\Gamma^3_{21} = 0$. В системе (13) остается 5 уравнений с семью неизвестными функциями. Поэтому: $r_1 = 7$, $s_1 = 5$, $r_2 = 2, r_3 = 0$, $s_2 = 2$, $Q = N = 9$. Произвол существования—две функции двух аргументов. Поверхность $\omega^3 =$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$= 0$ — голономна и является цилиндром, образующие которого—s-линии, а направляющая—линия τ.

Если векторное поле $de_1 \equiv 0$ является полем скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, причем равнодействующая всех сил (которая, как следует из § 1, параллельна e_2) направлена по главной аффинной нормали линии тока, то $\Gamma^1_{23} = 1$, $\Gamma^2_{32} = \operatorname{div} e_3$. Исследуя систему (13), получим из $M^2_3 = 0$, что $\Gamma^3_{23} = 0$, далее имеем: $r_1 = 4$, $s_1 = 4$, $r_2 = 0$, $s_2 = 0$, $Q = N = 14$. Следовательно, система (13), (10) в этом случае в инволюции, и произвол решения составляет четыре функции одного аргумента. Деривационные формулы репера линии тока принимают вид: $\frac{dA}{dt} = e_3$, $\frac{de}{dt} = e_2$, $\frac{de_2}{dt} = e_1$, $\frac{de_1}{dt} = 0$. Следовательно, дифференциал аффинной дуги равен dt.

Репер линии тока становится каноническим репером пространственной кривой [9]. Аффинные кривизны k_1 и k_2 равны нулю. Линии тока в этом случае являются кубическими параболами и имеют локальные уравнения

$$2y = x^2;\ 6z = x^3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, Москва—Ленинград. 1948.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд-во „Наука". Москва, 1964.
3. Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления. Т. 2, ГИТТЛ, Москва, 1952.
4. Бюшгенс С. С Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Известия АН СССР. Серия математическая. 12, 5, 1948, 481—512.
5. Delens P. Geometrie des congruences de courbes. Rend. Palermo. L VI, 1932, 289—320, 321—352.
6. Myller A. Le parallélisme au sens de Levi - Civita dans un sisteme de plans. Scrieri matematice. Ed. Acad. RPR, 1959.
7. Gheorghiev Gh. Observatia asupra geometrie affine differentiale a cimpurilor de vectori. Lu r. conf. de geom. si topolog. Iasi, 1958, 127—138.
8. Щербаков Р. Н. Основной цилиндроид линейчатого комплекса. Известия вузов СССР. Математика, 3(28) 1962, 177—188.
9. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.
10 Лаптев. Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского математического общества, 2, 1953, 275—382.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. П. ДОЛГОВЫХ

К ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Геометрия векторного поля в трехмерном пространстве уже неоднократно рассматривалась. P. Delens [1] построил геометрию векторного поля как теорию криволинейных конгруэнций. С. С. Бюшгенс [2] и Г. Георгиев [3] определяют геометрию единичного векторного поля при помощи геометрии неголономной поверхности, определяемой началом вектора и направлением вектора. Н. И. Кованцов [4] рассматривает единичные векторные поля, присоединенные к линейчатому комплексу. В данной работе векторное поле рассматривается как геометрический образ Φ_3 [5], элементом которого является пара точек A и B, дается геометрическая характеристика его инвариантов и объектов [6] при помощи изучения двух неголономных поверхностей и нормальных к ним неголономных конгруэнций, а также определяются различные линии и векторы, ассоциирующиеся с векторным полем. Рассмотрение ведется в евклидовом пространстве методом подвижного репера.

§ 1. Аппарат исследования

Поместим начало репера в данную точку A, центр поля, а единичный вектор $\boldsymbol{e}_3$ возьмем на прямой AB. Вторая данная точка B, удаленная на расстояние v от точки A, имеет радиус-вектор

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + v\boldsymbol{e}_3,$$

где v—заданная функция тех же трех аргументов, что и векторы $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\boldsymbol{e}_3$.

Из деривационных формул репера

$$d\boldsymbol{A} = \omega^i \boldsymbol{e}_i,$$

$$d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^k \boldsymbol{e}_k$$

$$\omega_i^k + \omega_k^i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

где ω_i, ω_i^κ — дифференциальные формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры евклидова пространства [7]

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \; D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k], \tag{1}$$

видно, что неподвижность точек A и B обеспечивается равенствами $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = dv = 0$. Следовательно, эти формы для данного

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

геометрического образа являются главными. Приняв за базисные формы ω^1, ω^2, ω^3, тем самым исключив из рассмотрения случай, когда множество точек $\{A\}$ двумерно, получим

$$\begin{cases} \omega_3^1 = q_i\omega^i \\ \omega_2^3 = p_i\omega^i \\ dv = v_i\omega^i. \end{cases} \tag{2}$$

Уравнения (2) являются уравнениями нашего геометрического образа. Пользуясь уравнениями структуры (1), в результате внешнего дифференцирования уравнений (2) получим

$$[dq_1 - (q_2 - p_1)\omega_1^2 + q_3\omega_3^1, \omega^1] + [dq_2 + (q_1 + p_2)\omega_1^2 - q_3\omega_2^3, \omega^2] +$$
$$+ [dq_3 + p_3\omega_1^2 - q_1\omega_3^1 + q_2\omega_2^3, \omega^3] = 0,$$
$$[dp_1 - (q_1 + p_2)\omega_1^2 + p_3\omega_3^1, \omega^1] + [dp_2 + (p_1 - q_2)\omega_1^2 - p_3\omega_2^3, \omega^2] +$$
$$+ [dp_3 - q_3\omega_1^2 - p_1\omega_3^1 + p_2\omega_2^3, \omega^3] = 0,$$
$$[dv_1 - v_2\omega_1^2 + v_3\omega_3^1, \omega^1] + [dv_2 + v_1\omega_1^2 - v_3\omega_2^3, \omega^2] +$$
$$+ [dv_3 - v_1\omega_3^1 + v_2\omega_2^3, \omega^3] = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} &\delta q_1 = (q_2 - p_1)\pi_1^2, \quad \delta p_1 = (q_1 + p_2)\pi_1^2, \quad \delta v_1 = v_2\pi_1^2, \\ &\delta q_2 = -(q_1 + p_2)\pi_1^2, \quad \delta p_2 = (q_2 - p_1)\pi_1^2, \quad \delta v_2 = -v_1\pi_1^2, \\ &\delta q_3 = -p_3\pi_1^2, \quad \delta p_3 = q_3\pi_1^2, \quad \delta v_3 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

гд δ и π_1^2—символ дифференцирования и дифференциальная форма, соответствующие вторичным параметрам, причем $\pi^1 = \pi^2 = \pi^3 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = \delta v = 0$ в силу выбора начала репера и единичного вектора e_3.

Из системы соотношений (3) находятся следующие независимые абсолютные инварианты векторного поля:

$$i_1 = p_1 + q_2, \quad i_2 = p_2 - q_1, \quad i_3 = p_1q_2 - q_1p_2, \quad i_4 = p_3^2 + q_3^2,$$
$$i_5 = v_1p_3 + v_2q_3, \quad i_6 = v_1q_3 - v_2p_3, \quad i_7 = v_1^2 + v_2^2, \quad i_8 = v_3.$$

Так как наш репер зависит от одной вторичной формы, то инварианты $i_\alpha (\alpha = 1,2,...,8)$ образуют полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности элемента нашего образа.

Из системы соотношений (3), согласно [6], заключаем, что совокупность величин (q_i, p_i, v_i) образует основной фундаментальный объект векторного поля, причем этот объект является тензором. Тензор T, образованный совокупностью величин (q_i, p_i), и его подтензоры рассмотрены в работе [8].

§ 2. Геометрический смысл некоторых абсолютных инвариантов

Одно не вполне интегрируемое уравнение $\omega = 0$ относительно координат точки трехмерного пространства определяет в каждой точке P пространства плоскость π, касающуюся всех интегральных кривых уравнения $\omega = 0$ и проходящих через точку P. Составное многообразие, элементом которого является нульпара $\{P, \pi\}$, называется неголономной поверхностью [9].

Неголономную поверхность, элементом которой являются центр поля A и проходящая через нее плоскость, ортогональная вектору e_3, назовем неголономной поверхностью $\{A_3\}$. Она задается уравне-

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

нием $\omega^3 = 0$. Абсолютные инварианты i_1, i_2, i_3, i_4 имеют следующий геометрический смысл [2], [10]: если инвариант i_1 равен нулю, то поверхность $\{A_3\}$ голономная; инвариант i_2 равен средней кривизне неголономной поверхности $\{A_3\}$; инвариант i_3 равен гауссовой кривизне неголономной поверхности $\{A_3\}$; инвариант i_4 равен квадрату проекции вектора Дарбу на плоскость $\{e_1 e_2\}$.

Неголономную поверхность, элементом которой являются точка B и проходящая через нее плоскость, ортогональная вектору e_3, назовем неголономной поверхностью $\{B_3\}$. Дифференциальное уравнение неголономной поверхности $\{B_3\}$ имеет вид

$$\omega^3 + dv = 0$$

или, учитывая соотношения (2),

$$v_1 \omega^1 + v_2 \omega^2 + (1 + i_8)\omega^3 = 0.$$

Поверхность $\{B_3\}$ будет голономной, если выполняется соотношение

$$i_1 (1 + i_8) - i_5 = 0.$$

Неголономная поверхность $\{B_3\}$ вырождается в двупараметрическое многообразие, если $[\omega^1 + v\omega_3^1, \omega^2 + v\omega_3^2, \omega^3 + dv] = 0$, т. е.

$$v^2 (bc - ad) - v(d - a) + 1 = 0, \tag{4}$$

где $$a = \frac{q_1 (1 + i_8) - q_3 v_1}{1 + i_8}, \quad b = \frac{q_2 (1 + i_8) - q_3 v_2}{1 + i_8},$$

$$c = \frac{p_1 (1 + i_8) - p_3 v_1}{1 + i_8}, \quad d = \frac{p_2 (1 + i_8) - p_3 v_2}{1 + i_8}.$$

Определение. Векторное поле назовем дважды голономным, если поверхности $\{A_3\}$ и $\{B_3\}$ одновременно голономны. Дважды голономное векторное поле характеризуется соотношениями

$$i_1 = 0, \quad i_5 = 0.$$

Гауссова кривизна неголономной поверхности $\{B_3\}$, вычисляемая как отношение элемента площади сферического отображения к элементу площади поверхности [10], равна

$$K_h = \frac{bc - ad}{v^2 (bc - ad) - v(d - a) + 1}. \tag{5}$$

Линией кривизны II рода неголономной поверхности называется линия, вдоль которой нормали образуют торс. Их дифференциальное уравнение для неголономной поверхности $\{B_3\}$ имеет вид

$$c(\omega^1)^2 + (a + d)\omega^1\omega^2 + b(\omega^2)^2 = 1.$$

Если выполняется соотношение

$$(d - a)^2 - 4(bc - ad) = 0,$$

то линии кривизны II рода неголономной поверхности $\{B_3\}$ совпадают.

Линии кривизны I рода неголономной поверхности характеризуются тем, что в каждой точке касательная направлена по одному из главных направлений в этих точках [10]. Их дифференциальное уравнение для неголономной поверхности $\{B_3\}$ имеет вид

$$[c - b - 2v(ab + cd) - v^2 \{a^2 (b + c) - c^2 (b - c) + 2acd\}](\omega^1)^2 +$$
$$+ 2[a + d + v(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - v^2 \{a(b^2 + d^2) + d(a^2 + c^2)\}]\omega^1\omega^2 -$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$-[c-b-2v(ab+cd)+v^2\{d^2(b+c)+b^2(b-c)+2abd\}](\omega^2)^2=0.$$

Нормальная кривизна кривой $\omega^2=\alpha\omega^1$ неголономной поверхности $\{B_3\}$ равна

$$k_n=\frac{\alpha^2[d-v(b^2+d^2)]+\alpha[c-b-2v(ab+cd)]-a-v(a^2+c^2)c^2}{\alpha^2[(1-vd)^2+v^2b^2]+2\alpha v[b-c+v(ab+cd)]+(1+va)^2+v^2c^2}.$$

Уравнение, корнями которого являются главные кривизны I рода неголономной поверхности $\{B_3\}$, имеет вид

$$k_n^2+k_n\frac{2v(bc-ad)-(d-a)}{v^2(bc-ad)-v(d-a)+1}+$$
$$+\frac{4(bc-ad)[v^2(bc-ad)-v(d-a)+1]-(c+b)^2}{4[v^2(bc-ad)-v(d-a)+1]^2}=0.$$

Из этого уравнения найдем среднюю и полную кривизны неголономной поверхности $\{B_3\}$

$$H=-\frac{2v(bc-ad)-(d-a)}{v^2(bc-ad)-v(d-a)+1},$$

$$K=4\frac{(bc-ad)[v^2(bc-ad)-v(d-a)+1]-(c+b)^2}{4[v^2(bc-ad)-v(d-a)+1]^2}$$

или, учитывая уравнение (5),

$$H=-2vK_h+\frac{d-a}{v^2(bc-ad)-v(d-a)+1}, \qquad (6)$$

$$K=K_h-\frac{(c+b)^2}{4[v^2(bc-ad)-v(d-a)+1]^2}.$$

Отсюда видим, что у неголономной поверхности $\{B_3\}$ с нулевой гауссовой кривизной полная кривизна всегда отрицательная. Между средней и полной кривизной неголономной поверхности $\{B_3\}$ имеется следующая зависимость

$$H=-2vK-v\frac{(c+b)^2}{2[v^2(bc-ad)-v(d-a)+1]^2}+$$
$$+\frac{(d-a)}{v^2(bc-ad)-v(d-a)+1}.$$

При этом из рассмотрения исключается случай, когда множество точек $\{B\}$ двумерно.

Совокупность всех нормалей некоторой неголономной поверхности есть линейчатый комплекс. Каждая интегральная кривая уравнения $\omega=0$, определяющего неголономную поверхность, выделяет из комплекса линейчатую поверхность, проходящую через данный луч комплекса, а совокупность таких поверхностей есть неголономная конгруэнция [11]. На неголономные конгруэнции, как известно, могут быть распространены все понятия теории конгруэнций, определяемые дифференциальной окрестностью первого порядка луча конгруэнции.

Совокупность линейчатых поверхностей, выделенных интегральными кривыми уравнения $\omega^3=0$ в комплексе нормалей неголономной поверхности $\{A_3\}$, назовем неголономной конгруэнцией (l_3). Фокусы, граничные точки и главные параметры распределения неголономной конгруэнции (l_3) определяются соответственно уравнениями:

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\lambda^2 i_3 - \lambda i_2 + 1 = 0,$$
$$4\lambda_r^2 i_3^2 - 4\lambda_r i_2 i_3 + 4 i_3 - i_1^2 = 0,$$
$$4P^2 i_3^2 - 4P i_1 i_3 - 4 i_3 - i_2^2 = 0,$$

Совокупность линейчатых поверхностей, выделенных интегральными кривыми уравнения $\omega^3 + dv = 0$ в комплексе нормалей неголономной поверхности $\{B_3\}$, назовем неголономной конгруэнцией (m_3). Фокусы, граничные точки и главные параметры распределения неголономной конгруэнции (m_3) определяется соответственно уравнениями:

$$\lambda^2 (bc - ad) - \lambda (d - a) + 1 = 0, \tag{7}$$
$$4\lambda_r^2 (bc - ad)^2 - 4\lambda_r (d - a)(bc - ad) + 4(bc - ad) - (b + c)^2 = 0,$$
$$4P^2 (bc - ad)^2 - 4P(b + c)(bc - ad) + 4(bc - ad) - (d - a)^2 = 0.$$

Уравнения $i_2 = 0$, $i_6 = 0$ характеризуют векторное поле, у которого центр поля и центры лучей неголономных конгруэнций (l_3) и (m_3) совпадают

Из соотношений (6) и (7) следует, что если центр луча неголономной конгруэнции (m_3) совпадает с центром поля, то средняя кривизна неголономной поверхности $\{B_3\}$ отличается только знаком от удвоенного произведения гауссовой кривизны неголономной поверхности $\{B_3\}$ на координату точки B.

Из соотношений (4) и (7) вытекает, что если точка B является фокусом неголономной конгруэнции (m_3), то неголономная поверхность $\{B_3\}$ вырождается в двупараметрическое многообразие.

§ 3. Кинематические элементы векторного поля

Пусть вектор $V = \overline{AB}$ есть вектор скорости потока идеальной несжимаемой жидкости, частица которой совпадает с точкой A. Дифференциальное уравнение линий тока векторного поля $\overline{AB}$ имеет вид

$$\begin{cases} \omega^1 = 0 \\ \omega^2 = 0 \end{cases}.$$

Так как вдоль линии тока имеем

$$\left.\frac{dA}{\omega^3}\right|_{\omega_1 = \omega_2 = 0} = e_3,$$

а ve_3 есть вектор скорости, то дифференциал времени выразится так

$$dt = \left.\frac{\omega^3}{v}\right|_{\omega^1 = \omega^2 = 0.}$$

Вектор ускорения равен

$$W = \frac{dV}{dt} = v^2 (q_3 e_1 - p v_3 e_2) + v i_8 e_3.$$

Уравнение $i_8 = 0$ характеризует векторное поле, в котором вектор ускорения ортогонален вектору поля.

Соленоидальное векторное поле, т. е. поле, для которого $\operatorname{div} V = 0$ в наших терминах характеризуется условием

$$i_8 = v i_2.$$

Если выполняются два из свойств: 1) вектор ускорения векторного поля ортогонален вектору поля ($i_8 = 0$), 2) единичное векторное

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

поле e_3 минимальное ($i_2 = 0$), 3) векторное поле соленоидальное ($i_8 = vi_2$), то имеет место и третье.

Вектор вихря векторного поля равен

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = (v_2 - vp_3)\, e_1 - (v_1 + vq_3)\, e_2 - vi_1 e_3.$$

Градиент скалярного поля v равен

$$\operatorname{grad} v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3.$$

Модули векторов ускорения, вихря и градиента скалярного поля v выражаются через инварианты поля следующим образом:

$$|\boldsymbol{W}| = \pm v \sqrt{v^2 i_4 + i_8^2},$$

$$|\operatorname{rot} \boldsymbol{V}| = \sqrt{v^2 (i_1^2 + i_4) + 2vi_6 + i_7},$$

$$|\operatorname{grad} v| = \sqrt{i_7 + i_8^2}.$$

Уравнение $i_8 = 0$ характеризует векторное поле, для которого градиент скалярного поля v и вектор ускорения лежат в плоскости, ортогональной вектору поля.

Уравнение $vi_6 + i_8^2 = 0$ характеризует векторное поле, для которого градиент скалярного поля v ортогонален вектору ускорения.

Уравнение $i_1 i_8 - i_5 = 0$ характеризует векторное поле, для которого вектор ускорения и градиент скалярного поля v лежат в плоскости, ортогональной вектору вихря.

Введем в рассмотрение вектор

$$\boldsymbol{n} = [e_3, d^2 A]_{\omega^1 = \omega^2 = 0} \parallel p_3 e_1 + q_3 e_2,$$

который перпендикулярен плоскости α, соответствующей центру поля в главной корреляции [12] комплекса, образованного прямыми AB.

Уравнение $i_5 = 0$ характеризует векторное поле, для которого вектор поля, вектор ускорения и градиент скалярного поля v лежат в плоскости α.

В механике часто встречается вектор

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{V}, \operatorname{rot} \boldsymbol{V}] = v\{(v_1 + vq_3) e_1 + (v_2 - vp_3) e_2\}.$$

Так как $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W} + v \operatorname{grad} v - 2i_8 \boldsymbol{V}$, то при $i_5 = 0$ и этот вектор лежит в плоскости α.

Уравнения $i_5 = 0$, $i_8 = 0$ характеризуют векторное поле, для которого вектор ускорения, градиент скалярного поля v и вектор $\boldsymbol{H}$ параллельны и лежат в плоскости α.

Уравнение $i_6 + vi_4 = 0$ характеризует векторное поле, для которого вектор поля, вектор ускорения и вектор вихря лежат в плоскости α, а вектор $\boldsymbol{H}$ ортогонален этой плоскости.

Уравнение $i_6 = 0$, $i_8 = 0$ характеризуют векторное поле, для которого градиент скалярного поля v параллелен вектору $\boldsymbol{n}$.

Обычным путем [7] устанавливается, что произвол векторного поля в общем случае равен трем функциям трех аргументов. Указанные в работе классы векторных полей, выделенные одним натуральным уравнением (например, $i_2 = 0$), определяются с произволом в 2 функции трех аргументов; классы же векторных полей, выделенные двумя натуральными уравнениями, определяются с произволом в одну функцию трех аргументов.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Delens P. Geometrie des congruences de courbes. Rend. cir. matemat. Palermo, LVI, 1932, 289—320, 321—352.

2. Бюшгенс С. С. Геометрия векторного поля. Известия АН СССР, 10, 1946, 73—96.

3. Георгиев Г. О дифференциальной геометрии векторных полей и о некоторых ее приложениях. Известия математ. ин-та Болгарской Академии Наук, IV, 1, 1959, 107—118.

4. Кованцов Н. И. О векторных полях, присоединенных к линейчатому комплексу. Укр. матем. журнал, 10, № 1, 1958, 37—58.

5. Щербаков Р. Н. О методе репеража многообразий. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского университета, 163), 1963, 5—11.

6. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. матем. общества, 2, 1953, 275—382.

7. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

8. Долговых В. П. О некоторых геометрических объектах векторного поля. Геометрический сборник, вып. 4 (Труды Томского ун-та, 176), 1964, 112—116.

9. Щербаков Р. Н. и Рахула М. О. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геометрический сборник, вып. 1 (Труды Томского университета, 160), 1962, 82—89.

10. Кованцов Н. И Приложение идей неголономной геометрии к линейчатому комплексу. Укр. матем. журнал, 6, № 3, 1954, 270—281.

11. Кованцов Н. И. Два предложения о граничных точках и фокусах неголономной конгруэнции. Усп. матем. наук, 10, № 1 (63), 1955, 113—116.

12. Щербаков Р. Н. Построение метрической теории комплекса прямых при помощи репеража линейчатых подмногообразий. Вопросы математики (Труды Томского ун-та, 155), 1961, 3—24.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

Л. А. ЗЕРНЫШКИНА

ОБ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Рассматривается геометрический образ: однопараметрическое семейство произвольных кривых. Элементом [1] его является линия семейства. На данном образе выделяются некоторые трансверсальные линии, точки которых геометрически связаны с элементами. Эти линии называются „секущими". Затем рассматривается однопараметрическое семейство винтовых линий. Если на его элементе имеются точки секущих линий, то они являются точками пересечения элемента и некоторых поверхностей: гиперболических параболоидов и плоскостей. Исследуется связь этих поверхностей с элементом.

§ 1. Семейство произвольных линий, зависящих от одного параметра

Уравнение рассматриваемого образа—однопараметрического семейства произвольных кривых—задается в виде

$$\overline{r} = \overline{r}(t,\ u),$$

где u и t — параметры, задающие соответственно элемент и точку элемента.

На данном образе было уже определено несколько секущих линий [3]. Они были названы линиями I—VII. На этом же образе можно найти еще ряд секущих линий.

Если заданы два однопараметрических семейства секущих линий

$$\varphi_1(t,\ u)\,dt + \varphi_2(t,\ u)\,du = 0,$$

$$f_1(t, u)\,dt + f_2(t,\ u)\,du = 0,$$

то линия

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = 0$$

„ассоциирована" и первому и второму семейству. Таким путем, отправляясь от линий I—VII, можно определить еще несколько секущих линий, которые назовем VIII—XVI.

Обозначим s, k, $\varkappa$, $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$, $\overline{b} = \dfrac{\varkappa\overline{E}_3 - k\overline{E}_1}{\sqrt{\varkappa^2 + k^2}}$, $\overline{a} = \dfrac{\varkappa\overline{E}_1 + k\overline{E}_3}{\sqrt{\varkappa^2 + k^2}}$

соответственно, длину дуги, кривизну, кручение и единичные векторы, параллельные касательной, главной нормали, бинормали, касательной

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

к сферическому изображению главных нормалей, вектору Дарбу (вектору мгновенной угловой скорости) элемента в некоторой точке M. Ясно, что вектор $d\overline{E}_i$ есть касательная к сферическому изображению вектора $\overline{E}_i$ при движении вдоль линии $dt = \lambda du$. Будем предполагать, что начало репера $(\overline{M}, \overline{E}_i)$ всегда расположено на рассматриваемой секущей линии.

Запишем деривационные формулы в виде

$$\overline{M}_u = a^i\overline{E}_i, \quad \overline{E}_{iu} = a_i^k\overline{E}_k. \tag{1}$$

Секущие линии VIII—XVI соответственно определяются из следующих уравнений:

линия VIII $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{E}_1) = a^1du + ds = 0, \\ (d\overline{E}_1\cdot\overline{E}_2) = a_1^2du + \kappa ds = 0, \end{cases}$

линия IX $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{E}_1) = 0, \\ (d\overline{E}_2\cdot\overline{E}_3) = 0, \end{cases}$

линия X $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{E}_1) = 0, \\ (d\overline{E}_2\cdot\overline{b}) = 0, \end{cases}$

линия XI $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{a}) = 0, \\ (d\overline{E}_1\cdot\overline{E}_2) = 0, \end{cases}$

линия XII $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{a}) = 0, \\ (d\overline{E}_2\cdot\overline{E}_3) = 0, \end{cases}$

линия XIII $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{a}) = 0, \\ (d\overline{E}_2\cdot\overline{b}) = 0, \end{cases}$

линия XIV $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{a}) = 0, \\ (dE_3\cdot b) = 0, \end{cases}$

линия XV $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{b}) = 0, \\ (d\overline{E}_2\cdot\overline{E}_3) = 0, \end{cases}$

линия XVI $\begin{cases} (d\overline{M}\cdot\overline{b}) = 0, \\ (d\overline{E}_2\cdot\overline{b}) = 0. \end{cases}$

Отсюда указанным выше способом получаются следующие конечные уравнения новых секущих линий:

$$a_1^2 - ka^1 = 0, \tag{VIII}$$

$$a_2^3 - \varkappa a^1 = 0, \tag{IX}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$ka_1^2 + \varkappa a^3 - a^1(k^2 + \varkappa^2) = 0, \tag{X}$$

$$\varkappa a_1^2 - k(a^1\varkappa + ka^3) = 0, \tag{XI}$$

$$a_2^3 - \varkappa(ka^3 + \varkappa a^1) = 0, \tag{XII}$$

$$\varkappa(ka_1^2 + \varkappa a_2^3) - (k^2 + \varkappa^2)\ (ka^3 + \varkappa a^1) = 0, \tag{XIII}$$

$$a_1^2 - a^1 k + \varkappa a^3 = 0, \tag{XIV}$$

$$ka_2^3 + \varkappa(\varkappa a^3 - a^1 k) = 0, \tag{XV}$$

$$k(ka_1^2 + \varkappa a_2^3) + (k^2 + \varkappa^2)\ (\varkappa a^3 - a^1 k) = 0. \tag{XVI}$$

Отметим несколько свойств секущей линии VIII.

1) В точках линии VIII касательная к элементу параллельна соответствующей нормали к поверхности, являющейся геометрическим местом центров кривизны элементов.

Доказательство. Центр кривизны элемента в точке M определяется по формуле

$$\bar{C} = \bar{M} + \frac{1}{k}\bar{E}_2,$$

а следовательно, нормаль к искомой поверхности параллельна вектору

$$[\bar{C}_u\bar{C}_s] = \left(a^1 - \frac{a_1^2}{k}\right)\cdot\left\{-\left(\frac{1}{k}\right)_s\bar{E}_3 - \frac{\varkappa}{k}\bar{E}_2\right\} +$$

$$+ \bar{E}_1\left\{\frac{\varkappa}{k}\left[a^2 + \left(\frac{1}{k}\right)_u\right] + \left(\frac{1}{k}\right)_s\left(a^3 + \frac{a_2^3}{k}\right)\right\}.$$

При $a^1\varkappa - a_1^2 = 0$ нормаль параллельна касательной к элементу в точке M.

2) Пусть точка M движется по секущей линии m, касательная которой параллельна единичному вектору $\bar{a}$ и ортогональна к единичному вектору касательной $\bar{E}_1$ к элементу, со скоростью $\bar{a}$. Тогда мгновенный „вращательный вектор“ $\bar{\delta}$ определяется по формуле $\frac{d\bar{E}_1}{du} = [\bar{\delta}, \bar{E}_1]$, где u — длина дуги линии m. Вектором наклона [2] $\bar{g}$ для линейного элемента $(M, \bar{a})$ называется компонента вращательного вектора $\bar{\delta}$, нормальная к $\bar{E}_1$. Вектор наклона выражается через вектор $\bar{E}_1$ по формуле

$$\bar{g} = \left[\bar{E}_1, \frac{d\bar{E}_1}{du}\right].$$

Проекции вектора $\bar{g}$ на направления векторов $\bar{a}$ и $\bar{b} = [\bar{E}_1\ \bar{a}]$ называют “*Schrankung*“ и “*Spreisung*“ [2]. В репере (1) направление, ортогональное касательной E_1 к элементу, определяется так:

$$a^1 du + ds = 0.$$

Если за параметр u примем длину дуги линии m, то вектор наклона $\bar{g}$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выражаются формулами:

$$\bar{g} = (-a^1 k + a_1^2)\bar{E}_3 - a_1^3\bar{E}_2,$$

$$\bar{a} = a^2\bar{E}_2 + a^3\bar{E}_3, \quad \bar{b} = a^2\bar{E}_3 - a^3\bar{E}_2, \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

откуда вытекает характеристическое свойство секущей линии VIII: только вдоль линии VIII вектор наклона параллелен вектору главной нормали элемента.

Заметим, что так как секущая линия V [3] в репере (1) характеризуется равенством $a_1^3 = 0$, то из (2) следует, что вдоль этой линии вектор наклона параллелен бинормали элемента.

Далее отметим, что некоторые ранее рассмотренные секущие линии [3] можно определить аналогично линиям VIII—XVI. Так, линия VI [3] определится, как линия $ka_2^3 - \varkappa a_1^2 = 0$, одновременно ассоциированная двум из семейств линий:

$$\begin{cases} (d\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2) = 0, \\ (d\bar{E}_2 \cdot \bar{E}_3) = 0. \end{cases}$$

Аналогично линия VII определится из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (d\bar{E}_2 \cdot \bar{b}) = 0, \\ (d\bar{a} \cdot \bar{E}_1) = 0 \end{cases}$$

уравнением

$$(k^2 + \varkappa^2)\left(\frac{k_u \varkappa - k\varkappa_u}{k^2 + \varkappa^2} + a_1^3\right) + (k^2 a_1^2 + \varkappa a_2^3)\frac{k_s \varkappa - k\varkappa_s}{k^2 + \varkappa^2} = 0.$$

Отметим еще свойства линий III и IV: вдоль линии III и IV, соответственно, „*Schränkung*“ и „*Spreisung*“ обращаются в нуль. Действительно, из (2) следует, что вдоль линии III и IV соответственно соблюдаются условия: вектор наклона $\bar{g}$ параллелен вектору $\bar{b}$ и вектор $\bar{g}$ параллелен $\bar{a}$.

§ 2. Однопараметрическое семейство винтовых линий

Уравнение однопараметрического семейства винтовых линий задается в виде

$$\bar{r} = \bar{M}(u) + \alpha(u)\{\bar{e}_1(u)\cos t + \bar{e}_2(u)\sin t\} + \beta(u)\, te_3(u),$$

где M — некоторая фиксированная точка на оси винтовой линии, векторы $\bar{e}_3$ и $\bar{e}_1$ — единичные векторы, параллельные соответственно оси и главной нормали винтовой линии в точке, соответствующей M; α и β, соответственно, радиус цилиндра и шаг винта.

Пусть деривационные формулы репера $(M, \bar{e}_i)$, ассоциированного с элементом (винтовой линией), будут

$$\bar{M}_u = a^i \bar{e}_i, \quad \bar{e}_{iu} = a_i^k \bar{e}_k. \tag{3}$$

Тогда уравнения для определения линий V, VI, VII [3], соответственно запишутся в виде:

$$\begin{gathered} \beta\alpha_u - \alpha\beta_u + (\alpha^2 + \beta^2)(a_1^3 \sin t + a_2^3 \cos t) = 0, \\ \cos t a_1^3 + \sin t a_2^3 = 0, \\ a_1^3 \sin t - a_2^3 \cos t = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Уравнения элемента относительно репера имеют вид:

$$\cos t = \frac{x}{\alpha}, \qquad \sin t = \frac{y}{\alpha}, \quad t = \frac{z}{\beta}. \tag{5}$$

Подставляя выражения $\cos t$, $\sin t$, t из (5) в уравнения (4), получим:

$$\begin{gathered} \alpha(\beta\alpha_u - \alpha\beta_u) + (\alpha^2 + \beta^2)(a_1^3 y - a_2^3 x) = 0, \\ a_1^3 x + a_2^3 y = 0, \\ a_1^3 y - a_2^3 x = 0. \end{gathered} \tag{4'}$$

Следовательно, точки пересечения элемента с секущими линиями V, VI, VII суть точки пересечения этой же винтовой линии с плоскостями, задаваемыми уравнениями (4′). Назовем эти плоскости соответственно плоскостями V, VI, VII. Из (4′) следует, что все три плоскости параллельны оси винтовой линии, причем плоскости VI и VII перпендикулярны и проходят через ось винтовой линии, плоскость V параллельна плоскости VII.

Если исключить из рассмотрения случай, когда оси винтовых линий образуют цилиндр, то, полагая $a_1^3 = 0$, $a_2^3 = 1$, получим репер, начало которого помещено в точку оси, соответствующую на элементе точке секущей линии VI, причем все элементы и инварианты, за исключением a^2 и a^3, имеют тот же геометрический смысл, что и в каноническом репере линейчатой поверхности осей. Инвариант a^2 есть абсцисса горловой точки на луче линейчатой поверхности осей. В этом репере уравнения плоскостей VI и VII примут вид $y = 0$, $x = 0$.

Уравнения секущих линий I, II [3], VIII—XVI в отличие от предыдущих будут не тригонометрическими, так что вопрос о существовании точек пересечения (хотя бы мнимых) винтовой линии с линиями I, II, VIII—XVI остается нерешенным. Но если эти точки существуют, то они суть точки пересечения данной винтовой линии и некоторых поверхностей: гиперболических параболоидов и плоскостей.

Действительно, внося (5) в уравнения для определения линий I, II, VIII—XVI, получим уравнения следующих поверхностей:

$$\begin{aligned}
&\text{I: } \alpha\alpha_u + a^1 x + a^2 y - a_1^3 xz - a_2^3 yz = 0, \\
&\text{II: } -\beta a^2 a_1^3 + \alpha^2 a^3 + x(-\beta a^2 + \alpha^2 a_1^3) + y(\beta a^1 + \alpha^2 a_2^3) + \\
&\qquad + \alpha \frac{d}{du} \ln \beta z + \beta a_2^3 xz - \beta a_1^3 yz = 0, \\
&\text{VIII: } \alpha^2\beta(a^3 + \alpha a^3 - \alpha a_1^3) + x(\alpha^2 a^2 - \beta^3 a_1^3) + y(-\alpha^2 a^1 - \\
&\qquad - \beta^3 a_2^3) + \alpha^2 \beta_u z + \alpha^2 a_1^3 yz - \alpha^2 a_2^3 xz = 0, \\
&\text{IX: } \beta^2(a^3 + 2\alpha a_1^3) + x(\beta a^2 + \alpha^2 a_1^3) + y(-\beta a^1 + \alpha^2 a_2^3) + \\
&\qquad + \beta\beta_u z + \beta a_1^3 yz - \beta a_2^3 xz = 0, \\
&\text{X: } \beta(a^3 + 2\alpha a_1^3 - \beta a_1^3) + x(a^2 + \beta a_1^3) + y(\beta a_2^3 - a^1) + \\
&\qquad + a_1^3 yz - a_2^3 xz = 0, \\
&\text{XI: } \alpha^2 a^3 - \alpha^2 \beta a_1^3 + (\alpha^2 - \beta^2)(a_1^3 x + a_2^3 y) + \frac{\alpha^2 \beta_u}{\beta} z = 0, \\
&\text{XII: } a^3 - \beta a_1^3 + \frac{\beta_u}{\beta} z + 2(a_1^3 x + a_2^3 y) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\text{XIII: } \alpha(a^3-\beta a_1^2)+\frac{\alpha\beta_u}{\beta}z+(\alpha-\beta)\ (a_1^3x+a_2^3y)=0,$$

$$\text{XIV: } y(a^1+\beta a_3^2)-x(a^2-\beta a_1^3)-yza_1^3+xza_2^3=0,$$

$$\text{XV: } y(\beta a^1-\alpha^2 a_2^3)+x(\alpha a_1^3-\beta a^2)-yz\beta a_1^3+xz\beta a_2^3=0,$$

$$\text{XVI: } ya^1-xa^2-yza_1^3+xza_2^3=0.$$

Из уравнений (6) видим, что точки пересечения элемента (винтовой линии) и секущих линий XI, XII, XIII суть точки пересечения винтовой линии и плоскостей XI, XII, XIII, параллельных главной нормали элемента в точке линии VI и пересекающихся по прямой, лежащей в плоскости VI, а точки пересечения элемента и остальных секущих линий суть точки пересечения винтовой линии соответствующих гиперболических параболоидов.

Уравнения параболоидов II, VIII, IX, X можно записать в виде (заметим, что начало репера помещено в произвольную точку оси):

$$A+2Bx+2Cy+2Dz+2a_2^3xz-2a_1^3yz=0. \qquad (7)$$

Из этого уравнения следует, что одна серия прямолинейных образующих каждого из них перпендикулярна оси винтовой линии, так как в сечении поверхности плоскостью $z=0$ получаем прямую. Линия пересечения параболоида с плоскостью $x=0$, т. е. с любой плоскостью, проходящей через ось, есть либо гипербола, либо (при $a_1^3=0$) пара прямых.

Помещая начало в точку оси, соответствующую точке линии VI ($a_1^3=0$), и полагая $a_2^3=1$, непосредственными вычислениями получим что: 1) одно из главных направлений параболоида параллельно вектору $\bar{e}_2$, т. е. главной нормали элемента в точке линии VII, два других главных направления параллельны векторам, лежащим в плоскости VI и составляющим с осью винтовой линии углы по 45°; 2) вершина параболоида имеет координаты $x=-D$, $y=\dfrac{-A-2DB}{2C}$, $z=-B$; 3) вторая серия прямолинейных образующих перпендикулярна вектору $\bar{e}_1$, т. е. главной нормали элемента в точке линии VI.

Уравнения параболоидов XIV, XV, XVI отличаются от уравнения (7) отсутствием члена z в первой степени и свободного члена, т. е. их уравнения имеют вид

$$Bx+Cy+a_2^3xz-a_1^3yz=0. \qquad (8)$$

Эти параболоиды, кроме свойств, указанных выше, обладают еще следующими: 1) поверхности (8) принадлежит ось винтовой линии, 2) плоскость $x=0$ пересекает параболоид по двум прямым.

Полагая $a_1^3=0$, $a_2^3=1$, т. е. помещая начало в точку, соответствующую точке линии VI, получим, что ось параболоида (8) параллельна главной нормали в точке линии VII и лежит в плоскости VII; вершина параболоида лежит на оси винтовой линии и есть точка пересечения оси параболоида и плоскости VI. Действительно, уравнение оси параболоида имеет вид

$$\begin{cases} z+\beta=0, \\ x=0, \end{cases}$$

и координаты вершины параболоида суть

$$x=0,\quad y=0,\quad z=-B. \qquad (9)$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Мы упоминали, что при $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = 0$ коэффициент a^2 есть абсцисса горловой точки линейчатой поверхности осей винтовых линий. При условиях $a_2^3 = 1$, $a_1^3 = 0$ уравнения параболоидов XIV, XV, XVI принимают вид $-xa^2 + 2Cy + xz = 0$, т. е. $B = -a^2$. Из (9) следует, что вершина параболоида является горловой точкой линейчатой поверхности осей винтовых линий.

Параболоид XVI обладает еще одним свойством: одна из серий его прямолинейных образующих параллельна векторному произведению векторов оси элемента и нормали к линейчатой поверхности осей винтовых линий в соответствующей точке. Эти прямолинейные образующие суть линии пересечения параболоида и плоскости $z = 0$:

$$\begin{cases} z = 0, \\ ya^1 - xa^2 = 0. \end{cases}$$

Направляющим вектором этой прямой является вектор $a^1\bar{e}_1 + a^2\bar{e}_3 = [\bar{e}_3, a^1\bar{e}_2 - a^2\bar{e}_1]$, где $a^1\bar{e}_2 - a^2\bar{e}_1$ — нормаль к линейчатой поверхности осей винтовых линий в точке, лежащей в плоскости $z = 0$. Заметим, что, так как начало репера не фиксировано, то плоскость $z = 0$ есть произвольная плоскость, перпендикулярная оси винтовой линии.

Приведем некоторые свойства параболоида I

$$\alpha\alpha_u + a^1x + a^2y - a_1^3xz - a_2^3yz = 0.$$

Одна из серий его прямолинейных образующих параллельна нормалям к линейчатой поверхности осей винтовых линий в точках, лежащих в плоскостях $z = 0$ (плоскостях, ортогональных оси винтовой линии). В пучке плоскостей, проходящих через ось, только плоскость VI пересекает поверхность I по сдвоенной прямой.

Помещая начало в точку оси винтовой линии, соответствующую точке линии VII ($a_2^3 = 0$), и полагая $a_1^3 = 1$, получим следующие результаты: 1) вторая серия прямолинейных образующих параболоида I перпендикулярна главной нормали элемента в точке линии VII; 2) одно из главных направлений параболоида I параллельно главной нормали элемента в точке линии VI, два других расположены в плоскости VII и составляют с осью винтовой линии углы по 45°; 3) ось параболоида I задается уравнениями $x = 0$, $z = a^1$, т. е. расположена в плоскости VI и проходит через горловую точку линейчатой поверхности осей винтовых линий; 4) ось параболоида I пересекает сдвоенную прямую пересечения плоскости VII и параболоида I в вершине параболоида. Действительно, уравнения сдвоенной прямой имеют вид:

$$x = 0, \quad \alpha\alpha_u + a^2y = 0,$$

а координаты вершины параболоида суть:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{\alpha\alpha_u}{a^2}, \qquad z = a^1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков Р. Н. О методе репереажа подмногообразий. Геометрический сборник, 3 (Труды Томского ун-та, 168) 1963, 5—11.

2. F.L öbell, Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen, Math. Zeitschr., B. 55, H 2, 1952, s. 208—218.

3. Зернышкина Л. А. О криволинейных конгруэнциях. Геометрический сборник. вып. 4 (Труды Томского ун-та. 176), 1964. 91-101.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

Л. А. ЗЕРНЫШКИНА

НЕКОТОРЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОНГРУЭНЦИИ ВИНТОВЫХ ЛИНИЙ

Рассматриваются некоторые подмногообразия [1] конгруэнции винтовых линий и некоторые трансверсальные поверхности [2], [3], исследуются свойства подмногообразий и их связь с прямолинейной конгруэнцией осей винтовых линий.

Конгруэнция винтовых линией задается уравнением

$$r = A(u, v) + \alpha(u, v)\ [e_1(u, v)\cos t + e_2(u, v)\sin t] +$$

$$+ \beta(u, v)\, t e_3(u, v),$$

где A — некоторая фиксированная точка оси, единичные векторы e_3 и e_1 параллельны соответственно оси и главной нормали винтовой линии в точке, соответствующей точке A, α и β, соответственно, радиус цилиндра и шаг винта. Деривационные формулы репера (A, e_i), ассоциированного с винтовой линией, имеют вид:

$$dA = (a^i du + b^i dv)e_i, \quad de_i = (a_i^k du + b_i^k dv)e_k; \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

Аналогично тому, как конгруэнция прямых расслаивается двумя способами на торсы, главные поверхности и т. д. [4], постараемся разложить конгруэнцию винтовых линий на соответствующие подмногообразия.

В [5] были получены поверхности A, B, C, которые определялись как трансверсальные поверхности, через каждую точку которых проходила линия, являющаяся одновременно соответственно линией V и VII, линией V и VI, линией I и VI для соответствующего подмногообразия конгруэнции, определяемого этими линиями. Уравнения для определения этих поверхностей имеют тригонометрический вид.

Найдем подмногообразия конгруэнции, вдоль которых: а) линия V является одновременно линией VII, б) линия V совпадает с линией VI, в) линия I является одновременно линией VI. Назовем эти подмногообразия соответственно a, b, c. Направления, соответствующие подмногообразиям a, b, c, будем также обозначать a, b, c.

Для данного направления $du:dv = \mu$ уравнения для определения линий V, VI, VII, I имеют соответственно вид:

$$\beta\alpha_u - \alpha\beta_u + (\alpha^2 + \beta^2)\ (a_1^3 \sin t - a_2^3 \cos t) + \mu[\beta\alpha_v - \tag{1}$$

$$- \alpha\beta_v + (\alpha^2 + \beta^2)]\ (b_1^3 \sin t - b_2^3 \cos t) = 0,$$

$$a_2^3 \sin t + a_1^3 \cos t + \mu(b_2^3 \sin t + b_1^3 \cos t) = 0, \tag{2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$a_1^3 \sin t - a_2^3 \cos t + \mu (b_1^3 \sin t - b_2^3 \cos t) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &a^1 \cos t + a^2 \sin t - \alpha_u \cos t - \alpha a_1^3 \sin t + \alpha_u - \beta t a_1^3 \cos t - \\ &- \beta t a_2^3 \sin t + \mu (b^1 \cos t + b^2 \sin t - \alpha_v \cos t - \alpha b_1^3 \sin t + \\ &+ \alpha_v - \beta t b_1^3 \cos t - \beta t b_2^3 \sin t) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Исключая ρ последовательно из уравнений (1) и (3), (1) и (2), (2) и (4) получим соответственно уравнения для определения поверхностей A, B, C [5]. Исключая t последовательно из уравнений ( ) и (3), (1) и (2), (2) и (4), получим соответственно направления a, b, c:

$$\begin{aligned} &\rho = \frac{\alpha\beta_u - \beta\alpha_u}{\alpha\beta_v - \beta\alpha_v}, \\ &\rho^2 \{(\alpha^2 + \beta^2)^2 \ [(b_1^3)^2 + (b_2^3)^2] - (\gamma_2)^2\} + \\ &+ 2\mu \{(a^2 + \beta^2) \ (a_1^3 b_1^3 + a_2^3 b_2^3) - \gamma_1 \gamma_2\} + \\ &+ (\alpha^2 + \beta^2)^2 \ [(a_1^3)^2 + (a_2^3)^2] - (\gamma_1)^2 = 0, \\ &A\mu^4 + B\mu^3 + C\mu^2 + D\mu + E = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где A, B, C, D, E зависят только от коэффициентов деривационных формул репера, функций α и β и их производных, а

$$\gamma_1 = \beta\alpha_u - \alpha\beta_u, \quad \gamma_2 = \beta\alpha_v - \alpha\beta_v. \tag{5'}$$

Заметим, что при выводе второго уравнения из (5) мы предположили, что конгруэнция осей винтовых нецилиндрическая, а следовательно, выполняется неравенство

$$(a_1^3 + \rho a_2^3)^2 + (b_1^3 + \mu b_2^3)^2 \neq 0, \tag{6}$$

что будем предполагать и в дальнейшем.

Из уравнений (5) следует, что произвольная конгруэнция винтовых линий расслаивается одним способом на однопараметрическое семейство подмногообразий a, двумя и четырьмя способами на однопараметрическое семейство подмногообразий b и c соответственно.

В произвольном подмногообразии $dv = \mu du$ в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ имеется две линии V.

Действительно, уравнение (1), определяющее линию V, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \left\{ - (\alpha^2 + \beta^2) a_2^3 + \gamma_1 + \mu [- (\alpha^2 + \beta^2) b_2^3 + \gamma_2] \right\} + \\ &+ 2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \ (a_1^3 + \mu b_1^3) + \\ &+ (\alpha^2 + \beta^2) a_1^3 + \gamma_1 + \mu [(\alpha^2 + \beta^2) b_2^3 + \gamma_2] = 0, \end{aligned} \tag{1'}$$

где γ_1, γ_2 определяются из (5').

Теорема 1. Подмногообразия b суть те подмногообразия конгруэнции, вдоль которых две линии V сливаются в одну в промежутке $0 \leqslant t < 2\pi$.

Доказательство. Приравнивая дискриминант уравнения (1') к нулю, получим квадратное уравнение относительно μ

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\mu^2\{(\alpha^2+\beta^2)^2\ [(b_1^3)^2+(b_2^3)^2]+(\gamma_2)^2\}+ \quad (7)$$
$$+2\mu\{(\alpha^2+\beta^2)^2\ (a_1^3b_1^3+a_2^3b_2^3)-\gamma_1\gamma_2\}+$$
$$+(\alpha^2+\beta^2)^2[(a_1^3)^2+(a_2^3)^2]-(\gamma_1)^2=0,$$

совпадающее со вторым уравнением из (5).

Теорема 2. В любой точке винтовой линии, за исключением точек поверхности B, четыре направления: два направления b, направления линий V и VI, проходящих через эту точку, образуют гармоническую четверку.

Доказательство. Было показано в [5], что через каждую точку произвольной трансверсальной поверхности проходит по одной линии V и по одной линии VI. Начало репера помещаем в точку оси, соответствующей данной точке винтовой линии, а за линии $du=0$ и $dv=0$ примем линии V и VI. Тогда имеют место равенства $\gamma_2=(\alpha^2+\beta^2)b_2^3$, $a_1^3=0$. При этих условиях уравнение (7) примет вид

$$\mu^2[(\alpha^2+\beta^2)b_1^3]^2+(\alpha^2+\beta^2)^2\ (a_2^3)^2-(\gamma_1)^2=0.$$

Коэффициент при первой степени μ равен нулю, что и доказывает утверждение.

В точках же поверхности B линии V и VI совпадают.

Найдем еще несколько трансверсальных поверхностей, для которых соответствующие уравнения для определения t будут тригонометрическими. Для этого используем результаты предыдущей работы [8]. Запишем уравнения для определения линий XIV, XV, XVI [8] и VII на произвольном подмногообразии $dv=\mu du$:

$$\sin t\,(a^1+\beta a_2^3)+\cos t\,(-a^2+\beta a_1^3)+$$
$$+\beta t\,(a_2^3\cos t-a_1^3\sin t)+\mu[\sin t\,(b^1+\beta b_2^3)+$$
$$+\cos t\,(-b^2+\beta b_1^3)+\beta t\,(b_2^3\cos t-b_1^3\sin t)]=0, \quad (8)$$

$$\sin t\,(\beta a^1-\alpha^2a_2^3)+\cos t\,(-\beta a^2-\alpha^2a_1^3)+$$
$$+\beta^2t(a_2^3\cos t-a_1^3\sin t)+\mu\,[\sin t\,(\beta b^1-\alpha^2b_2^3)+ \quad (9)$$
$$+\cos t\,(-\beta b^2-\alpha^2b_1^3)+\beta^2t\,(b_2^3\cos t-b_1^3\sin t)]=0,$$

$$a^1\sin t-a^2\cos t+\beta t(a_2^3\cos t-a_1^3\sin t)+ \quad (10)$$
$$+\mu\,[b^1\sin t-b^2\cos t+\beta t\,(b_2^3\cos t-b_1^3\sin t)]=0,$$

$$a_2^3\cos t-a_1^3\sin t+\mu(b_2^3\cos t-b_1^3\sin t)=0. \quad (11)$$

Назовем подмногообразиями d, e, f подмногообразия, у которых, соответственно, линия XIV совпадает с линией VII, линия XV совпадает с линией VII, линия XVI совпадает с линией VII, а трансверсальные поверхности, через каждую точку которых проходит соответственно линия, являющаяся одновременно линией XIV и VII, или линией XV и VII, или линией XVI и VII, назовем поверхностями D, E, F.

Исключая μ из уравнений (8) и (11) найдем уравнение для определения поверхности D

$$\sin^2t\,(-b_1^3a^1-\beta b_1^3a_2^3+b^1a_1^3+\beta a_1^3b_1^3)+$$
$$+\sin t\cos t\,(a^1b_2^3+a^2b_1^3-b^1a_2^3-b^2a_2^3)+$$
$$+\cos^2t\,(a^2b_2^3+\beta a_1^3b_1^3+b^2a_2^3-\beta b_1^3a_2^3)=0.$$

Исключая из этих же уравнений параметр t, получим уравнения

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

для определения подмногообразия d:

$$du^2[a^1a_2^3+\beta(a_2^3)^2-a^2a_1^3+\beta(a_1^3)^2]+$$
$$+dudv[a^1b_2^3+2\beta a_2^3b_2^3+b^1a_2^3-a^2b_1^3+2\beta a_1^3b_1^3-b^2a_1^3)+$$
$$+dv^2[b^1a_2^3+\beta(b_2^3)^2-b^2b_1^3+\beta(b_1^3)^2]=0.$$

Аналогично из (9) и (11) получим уравнения поверхности E и подмногообразия e:

$$\sin^2t(-\beta a^1b_1^3+\alpha^2a_2^3b_1^3+\beta b^1a_1^3)+\sin t\cos t(\beta a^1b_2^3+$$
$$+\beta a^2b_1^3-\beta b^1a_2^3-\beta b^2a_1^3)+\cos^2t(-\beta a^2b_2^3-\alpha^2a_1^3b_2^3+\beta b^2a_2^3+\alpha^2b_1^3a_2^3)=0,$$
$$du^2[\beta a^1a_2^3-\alpha^2(a_2^3)^2-\beta a^2a_1^3-\alpha^2(a_1^3)^2]+$$
$$+dudv[\beta a^1b_2^3-2\alpha^2a_2^3b_2^3+\beta b^1a_2^3-\beta a^2b_1^3-2\alpha^2a_1^3b_1^3-\beta a_1^3b^2)+$$
$$+dv^2[\beta b^1b_2^3-\alpha^2(b_2^3)^2-\beta b^2b_1^3-\alpha^2(b_1^3)^2=0.$$

Уравнения для определения поверхности F и подмногообразия f имеют вид:

$$\sin^2t(-a^1b_1^3+b^1a_1^3)+\cos^2t(-a^2b_2^3+b^2a_2^3)+$$
$$+\sin t\cos t(a^1b_2^3+a^2b_1^3-b^1a_2^3-b^2a_1^3)=0,$$
$$du^2(a^1a_2^3+a^2a_1^3)+dudv(a^1b_2^3+b^1a_2^3-a^2b_1^3-b^2a_1^3)+$$
$$+dv^2(b^1b_2^3-b^2b_1^3)=0.$$

Из уравнений для определения подмногообразий, d, e, f следует, что произвольная конгруэнция расслаивается двумя способами на однопараметрические семейства подмногообразий d, e, f.

Заменяя $\sin t$, $\cos t$ и t в уравнениях для определения поверхностей D, E, F их значениями, найденными из уравнения элемента (т. е. винтовой линии)

$$\sin t=\frac{y}{\alpha},\quad \cos t=\frac{x}{\alpha},\quad \sin t=\frac{z}{\beta},$$

получим:

$$y^2(-a^1b_1^3-\beta b_1^3a_2^3+b^1a_1^3+\beta a_1^3b_2^3)+$$
$$+xy(a^1b_2^3-\beta b_1^3a_2^3+b^1a_2^3-b^2a_1^3)+$$
$$+x^2(-a^2b_2^3+\beta a_1^3b_2^3-\beta b_1^3a_2^3)=0, \tag{12}$$
$$y^2(-\beta a^1b_1^3+\alpha^2a_2^3b_1^3+\beta b^1a_1^3-\alpha^2b_2^3a_1^3)+$$
$$+x^2(-\beta a^2b_2^3-\alpha^2a_1^3b_2^3+\beta b^2a_2^3+\alpha^2b_1^3a_2^3)+$$
$$+xy\beta(a^1b_2^3+a^2b_1^3-b^1a_2^3-b^2a_1^3)=0, \tag{13}$$
$$y^2(-a^1b_1^3+b^1a_1^3)+x^2(-a^2b_2^3+b^2a_2^3)+$$
$$+xy(a^1b_2^3+a^2b_1^3-b^1a_2^3-b^2a_1^3)=0. \tag{14}$$

Из этих уравнений следует, что точки пересечения винтовой линии и каждой из поверхностей D, E, F суть точки пересечения винтовой линии и пары плоскостей, задаваемых уравнениями (12—14). Все эти плоскости проходят через ось винтовой линии.

Для исследования полученных образов выберем за направления $du=0$ или $dv=0$ направления линий VI и VII в точке винтовой линии, соответствующей началу репера, тогда

$$a_2^3=b_1^3=0. \tag{15}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В этом случае главная нормаль в точке, соответствующей началу, параллельна горловой нормали линейчатой поверхности осей винтовых линий $dv = 0$ и горловой касательной линейчатой поверхности осей $du = 0$.

Тогда, учитывая (15), получим уравнения для определения поверхностей D, E, F и подмногообразий d, e, f в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sin^2 t(b^1a_1^3 + \beta a_1^3 b_2^3) + \sin t\cos t(a^1b_2^3 - b^2a_1^3) + \\ + \cos^2 t(-a^2b_2^3 + \beta a_1^3 b_2^3) = 0, \\ \sin^2 t(\beta b^1 a_1^3 - \alpha^2 b_2^3 a_1^3) - \cos^2 t(\beta a^2 b_2^3 + \alpha^2 b_1^3 a_2^3) + \\ + \sin t\cos t\,\beta(a^1b_2^3 - b^2a_1^3) = 0, \\ \sin^2 t\, b^1 a_1^3 - \cos^2 t a^2 b_2^3 + \sin t\cos t\,(a^1b_2^3 - b^2a_1^3) = 0;\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}du^2[-a^2a_1^3 + \beta(a_1^3)^2] + dv^2[b^1b_1^3 + \beta(b_2^3)^2] + dudv\,(a^1b_2^3 - b^2a_1^3) = 0, \\ du^2[-\beta a^2 a_1^3 - \alpha^2(a_1^3)^2] + dv^2[\beta b^1 b_2^3 - \alpha^2(b_2^3)^2] + \\ + dudv\,(\beta a^1 b_2^3 - \beta b^2 a_1^3) = 0, \\ -a^2a_2^3du^2 + b^1b_2^3dv^2 + dudv\,(a^1b_2^3 - b^2a_1^3) = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Последнее уравнение из (17) есть уравнение торсов прямолинейной конгруэнции осей, следовательно, подмногообразия f характеризуются тем, что соответствующие подмногообразия осей образуют торсы.

Заметим, что при условии (15) коэффициент a^2/a_1^3 является параметром распределения линейчатой поверхности осей $dv = 0$. Отсюда получаем, что подмногообразия d и e характеризуются свойствами: параметры распределения линейчатых поверхностей осей, соответствующих подмногообразиям d и e, соответственно равны $-\beta$ и $-\frac{\alpha^2}{\beta}$.

Из последнего следует, что сумма параметров распределения этих линейчатых поверхностей равна $-\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta} = -\frac{1}{\varkappa}$, где $\varkappa$ — кривизна винтовой линии.

Докажем еще два утверждения.

1. В любой точке винтовой линии два направления d (или e, или f) и направления, соответствующие распределительным поверхностям конгруэнции осей, образуют гармоническую четверку.

Действительно, направления, определяемые уравнениями

$$X_1du^2 + Y_1dudv + Z_1dv^2 = 0,$$

$$X_2du^2 + Y_2dudv + Z_2dv^2 = 0,$$

образуют гармоническую четверку, если

$$X_1Z_2 - \frac{1}{2}Y_1Y_2 + Z_1X_2 = 0. \tag{18}$$

Уравнение распределительных поверхностей конгруэнции осей винтовых линий имеет вид

$$(b^1 + a^2)dv^2 - 2(b^2 - a^1)\,dudv - (b^1 + a^2)du^2 = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения и уравнения для определения направления d (17) связаны соотношением (18). Для направлений e и f доказательство идет аналогично.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2. Два направления $d(e, f)$ и направления, соответствующие главным поверхностям конгруэнции осей, не могут образовывать гармоническую четверку.

Доказательство. При выполнении условия утверждения имеет место равенство $(a^2b_2^3 + b^1a_1^3)^2 + (b^2a_1^3 - a^1b_2^3)^2 = 0$. А это условие характеризует изотропную конгруэнцию осей, у которых главные поверхности неопределенны.

Отметим, что по аналогии с тем, как это было сделано в [5], при помощи линий I, II, V — XVI [8] можно получить ряд новых трансверсальных поверхностей для конгруэнции произвольных линий, характеризующихся тем, что через каждую точку этих поверхностей будет проходить одна из линий I, II, V—XVI, являющаяся одновременно другой из линий I, II, V—XVI для соответствующих подмногообразий.

Для конгруэнции винтовых линий только поверхности A, B, C, D, E, F задаются тригонометрическими уравнениями относительно t. Остальные же трансверсальные поверхности содержат тригонометрические и степенные функции от t.

В заключение рассмотрим трансверсальную поверхность T, которая характеризуется тем, что она состоит из однопараметрического семейства линий, которые являются одновременно линией V и VIII для соответствующего подмногообразия в конгруэнции произвольных линий. Предполагаем, что поверхность T не совпадает с фокальной [2], [3]. Тогда имеет место следующее предложение.

В точках поверхности T полная кривизна K_t [6] конгруэнции равна нулю.

Доказательство. Полная кривизна в точке определяется следующим образом. Пусть $d\boldsymbol{M}$, $\delta\boldsymbol{M}$ — два любых перемещения, перпендикулярные касательной E_1 к элементу (линии конгруэнции) в этой точке. Отношение объемов параллелепипедов, построенных на векторах $\{\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_1 + d\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_1 + \delta\boldsymbol{E}_1\}$, $\{\boldsymbol{E}_1\, d\boldsymbol{M}, \delta\boldsymbol{M}\}$, называется полной кривизной поля в точке.

Если начало репера $(M, \boldsymbol{E}_i)$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$\boldsymbol{M}_u = a^i\boldsymbol{E}_i, \qquad \boldsymbol{E}_{iu} = a_i^k\boldsymbol{E}_k$$
$$\boldsymbol{M}_v = b^i\boldsymbol{E}_i, \quad \boldsymbol{E}_{iv} = b_i^k\boldsymbol{E}_k, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ — элементы репера Френе линии конгруэнции в точке M, поместить в точку этой поверхности, то на коэффициенты накладывается условие

$$a_1^3(b_1^2 - kb^1) - b_1^3(a_1^3 - ka^1) = 0 \tag{20}$$

(k — кривизна линий конгруэнции в точке M).

Правая часть равенства (20) входит в числитель формулы для определения полной кривизны, если за направления $d\boldsymbol{M}$ и $\delta\boldsymbol{M}$ выберем координатные направления

$$k_t = \frac{b_1^3(a_1^2 - ka^1) - a_1^3(b_1^2 - kb^1)}{a^1b^3 - b^2a^3}.$$

Это свойство можно сформулировать в иной форме.

Мерой наклона N [7] конгруэнции в точке M называется инвариант конгруэнции, определяемый по формуле

$$N = (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2),$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

где E_1 — единичный вектор касательной к линии конгруэнции в точке M, g_1 и g_2 — векторы наклона для линейных элементов (M, a_1), (M, a_2); a_1, a_2, E_1 образуют ортогональную тройку единичных векторов. Наклон для линейного элемента (M, a) вычисляется по формуле

$$g = \left[E_1, \frac{dE_1}{du} \right],$$

где du — дифференциал длины дуги кривой, имеющей касательный вектор a.

Помещая начало репера (19) в точку M и выбирая в качестве векторов a_1 и a_2 векторы $a^2E_2 + a^3E_3$, $b^2E_2 + b^3E_3$,

$$((a^2)^2 + (a^3)^2 = (b^1)^2 + (b^2)^2 = 1, \quad a^2b^2 + a^3b^3 = 0),$$

получим, что g_1 и g_2 имеют вид:

$$g_1 = (a_1^2 - ka^1)E_3 - a_1^3E_2, \qquad g_2 = (b_1^2 - kb^1)E_3 - b_1E_2.$$

Тогда

$$N = -a_1^3(-b^1k + b_1^2) + b_1^3(-a^1k + a_1^2).$$

Заметим, что в этом случае $K_i = N$.

Таким образом, в точках трансверсальной поверхности, где линия V совпадает с линией VIII, мера наклона конгруэнции равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков Р. Н. О методе репеража подмногообразий. Геометрический сборник, вып. 3 (Труды Томского Государственного Университета) 1963, 5—11.

2. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces, deuxieme partie, Paris, 1889.

3. Eisenhart L. P. Congruences of curves, Trans. of American math. soc., 4, 1903, 470—488.

4. Фиников С. П. Теория конгруэнций. ГИИТЛ, 1950.

5. Зернышкина Л. А. О криволинейных конгруэнциях, Геометрический сборник, вып. 4 (Труды Томского Государственного Университета, 176), 1964, 91—101.

6. Бюшгенс С. С. Геометрия векторного поля ИАН, т. 10, № 1, 1946, 73—96.

7. Löbell F. Naturliche geometrie der Kurvenkongruenzen, Math. Zeitschrift. B. 56, H. 2, 1952, 208—218.

8. Зернышкина Л. А. Об однопараметрическом семействе кривых линий. Данный сборник, 83—89.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. Р. РЮТИН

НОРМАЛЬНЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНИК

В настоящей статье методом внешних форм [1] найдены все нормальные конгруэнции центральных коник, отличных от окружностей. Нормальным конгруэнциям парабол посвящены работы Клобучека [2] и автора [3]. Конгруэнции окружностей хорошо изучены в конформной геометрии.

С каждым положением ортонормированного подвижного репера $\{F_1, e_1, e_2, e_3\}$ ассоциируем центральную конику, расположенную так, чтобы плоскость ее совпадала с плоскостью (F_1, e_1, e_2) репера, один из фокусов коники совпадал с началом репера F_1, а вершина, ближайшая к F_1, лежала на луче (F_1e_1). Если репер описывает двупараметрическое многообразие, то эти коники образуют конгруэнцию. Полярное уравнение коники, если полюс совпадает с началом репера, а полярная ось совмещена с осью (F_1e_1), имеет вид

$$\rho = \frac{\lambda}{1 + e\cos\varphi},$$

где λ — параметр коники, e — эксцентриситет. Каждая точка $M = F_1 + \rho(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2)$ коники, принадлежащей нормальной конгруэнции, должна описывать поверхность, ортогональную к конике в точке M.

Отсюда для dM получим условие

$$(dM, \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon = -\sin\varphi e_1 + (e + \cos\varphi)\, e_2$$

— вектор касательной к конике в точке M. Подставляя в (1) значение dM, получим

$$\Theta \equiv \lambda(1 + 2e\cos\varphi + e^2)\, d\varphi - (1 + e\cos\varphi)^2 [\sin\varphi\omega_0^1 - (e + \cos\varphi)\,\omega_0^2 + \lambda\omega_2^1] + e\sin\varphi\,[(1 + e\cos\varphi)\, d\lambda - \lambda\cos\varphi de] = 0. \tag{2}$$

Так как для нормальных конгруэнций коник существует ∞^1 поверхностей, ортогональных к коникам, то уравнение (2) должно быть вполне интегрируемым, т. е.

$$[D\Theta, \Theta] = 0.$$

Это приводит к уравнению шестой степени относительно $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Из того,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

что это уравнение есть тождество относительно $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ при $e \neq 1$, $e \neq 0$ (исключаются конгруэнции парабол и окружностей), следует:

$$[d\lambda de] = 0, \tag{3_1}$$

$$[d\lambda\omega_0^1] - \lambda\,[\omega_0^3\omega_3^1] = 0, \tag{3_2}$$

$$\left[de - \frac{e}{\lambda}d\lambda,\ \omega_0^1\right] - e\,[\omega_0^2\omega_2^1] = 0, \tag{3_3}$$

$$3\,[de\omega_0^2] - [3\lambda ede - 2(e^2-1)\,d\lambda,\ \omega_2^1] + \lambda(e^2-1)[\omega_2^3\omega_3^1] = 0, \tag{3_4}$$

$$[d\lambda\omega_0^2] + \frac{3}{2}e\,[\omega_0^1\omega_0^2] - \lambda\,[\omega_0^3\omega_3^2] = 0, \tag{3_5}$$

$$\left[\frac{e}{\lambda}d\lambda - de,\ \omega_0^2\right] - e\,[\omega_0^1\omega_2^1] + \frac{e^2}{\lambda}\,[\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \tag{3_6}$$

$$(1+e^2)[de\omega_0^2] + [(e^2-1)\,d\lambda - 2\lambda ede,\ \omega_2^1] + \frac{1}{2\lambda}(1-e^2)^2[\omega_0^1\omega_0^2] = 0. \tag{3_7}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $[\omega_0^1\omega_0^2] \neq 0$. Принимая формы Пфаффа ω_0^1, ω_0^2 за независимые первичные формы и используя в уравнениях (3_3), (3_6) лемму Картана, найдем

$$\omega_2^1 = -B\omega_0^1 + (A-q)\,\omega_0^2, \tag{4_1}$$

$$dq = -q\,(A\omega_0^1 + B\omega_0^2), \tag{4_2}$$

где

$$q = -\frac{e}{\lambda}.$$

Результат применения леммы Картана к уравнению (3_1) при условии $e \neq \text{const}$, $\frac{e}{\lambda} \neq \text{const}$, можно представить в виде

$$d\lambda = \alpha dq. \tag{5}$$

Тогда уравнение (3_7) дает конечное соотношение

$$\left\{2e^2\lambda - \alpha\frac{e}{\lambda}(1+e^2)\right\}(A^2+B^2) + eA(e^2-1) + \frac{1}{2\lambda}(1-e^2)^2 = 0. \tag{6}$$

Из уравнений (3_2), (3_4), (3_5) получаем:

$$\omega_\alpha^3 = \Gamma_{\alpha\beta'}\,\omega_0^{\beta'}, \tag{7}$$

$$\Gamma_{01}\Gamma_{12} - \Gamma_{02}\Gamma_{11} = \frac{\alpha e}{\lambda^2}B,\quad \Gamma_{01}\Gamma_{22} - \Gamma_{02}\Gamma_{21} = -\frac{e}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\lambda}A + \frac{3}{2}\right), \tag{8}$$

$$\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21} = \frac{1}{\lambda^3(e^2-1)}\{\lambda e\,(\alpha(e^2+2) - 3\lambda^2 e)\,(A^2+B^2) + eA(1-e^2)(3\lambda^2 - \alpha e)\}.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4), (5), (7), получим:

$$[dA\omega_0^2] - [dB\omega_0^1] + m\,[\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \tag{9_1}$$

$$[dA\omega_0^1] + \left[dB + \frac{e}{2\lambda}B\omega_0^1,\ \omega_0^2\right] = 0, \tag{9_2}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$[ndA + kdB,\ A\omega_0^1 + B\omega_0^2] = 0, \tag{9_3}$$

$$[d\Gamma_{\alpha\beta'} - \Gamma_{\gamma'\beta'}\omega_\alpha^{\gamma'} - \Gamma_{\alpha\alpha'}\Gamma_{0\gamma'}\Gamma_{\alpha'\beta'}\omega_0^{\gamma'} - \Gamma_{\alpha\gamma'}\omega_{\beta'}^{\gamma'},\ \omega_0^{\beta'}] = 0 \tag{9_4}$$

(по α', расположенным на одном уровне, не суммировать!). Здесь обозначено:

$$m = \frac{\lambda^2(2e^2+1) - 3\alpha e}{\lambda^2(e^2-1)}(A^2+B^2) + \frac{e(3A\lambda+e)}{2\lambda^2},$$

$$n = A(1-e^2) + \lambda e(B^2-A^2),\ k = B(1-2A\lambda e - e^2).$$

Три из функций $\Gamma_{\alpha\beta'}$ b (9) исключаются с помощью соотношений (8). Из уравнения (9) по лемме Картана имеем:

$$\begin{aligned} dA &= t\omega_0^1 + r\omega_0^2, \\ dB &= \left(r - \frac{e}{2\lambda}B\right)\omega_0^1 + s\omega_0^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения же (9_1), (9_3) дают два конечных соотношения

$$m + t + s = 0, \tag{11_1}$$

$$n(Bt - Ar) + k\left(B\left(r - \frac{e}{2\lambda}B\right) - As\right) = 0. \tag{11_2}$$

При

$$ts - r^2 + \frac{re}{2\lambda}B \neq 0$$

можно выразить ω_0^1 и ω_0^2 через $d\lambda$ и dA. Дифференцируя (10) и внося в них упомянутые выражения ω_0^1 и ω_0^2, придем к ряду соотношений, из которых получится $de = 0$, что противоречит принятому условию $e \neq \text{const}$. Итак, при

$$e \neq \text{const},\ \frac{e}{\lambda} \neq \text{const},\ Bt - Ar \neq 0,\ [\omega_0^1\omega_0^2] \neq 0 \tag{12}$$

система уравнений (3) решения не имеет.

Исследуем исключенные случаи.

1. Пусть из четырех условий (12) не выполняется третье, т. е.:

$$Bt - Ar = 0,\ e \neq \text{const},\ \frac{e}{\lambda} \neq \text{const},\ [\omega_0^1\omega_0^2] \neq 0. \tag{13}$$

Тогда из соотношения (11_2) вытекают три возможности:

$$B = 0, \tag{14}$$

$$1 - 2\lambda eB - e^2 = 0, \tag{15}$$

$$B\left(r - \frac{e}{2\lambda}B\right) - As = 0. \tag{16}$$

При выполнении условий (13), (14) система уравнений (3) сводится к трем уравнениям относительно трех функций и, следовательно, имеет решение, которое определяется с произволом трех функций одного аргумента. Условие (15) приводит соотношение (6) к двум возможностям

$$\alpha(1+e^2) - 2e\lambda^2 = 0 \tag{17_1}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

или

$$A^2 + B^2 = 0. \qquad (17_2)$$

Если имеет место (17_1), то, исключая из первого и второго уравнений (9) с помощью (15), (17_1) A и α, найдем

$$dB = \frac{1}{1+e^2}\left\{\frac{B}{2\lambda e}(1-3e^2)\,\omega_0^1 - \left(\frac{1}{\lambda^2} + (2e^2-1)\,B^2\right)\omega_0^2\right\}.$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом, получим

$$B^2 = \frac{2(1-e^2-e^4-3e^6)}{\lambda^2 e^2(1+3e^2+6e^4)}.$$

Результат дифференцирования этого соотношения убеждает в отсутствии решения в рассматриваемом случае.

Из уравнения (17_2) следует, что $B = \pm Ai$. После замены в (9_1), (9_2) dA и dB их выражениями получим

$$3 - e^2 = 0, \quad e^2 - 1 = 0,$$

что указывает на отсутствие решения и в случае (17_2).

При выполнении условий (13), (16) система уравнений (3) в инволюции, и решение определяется с произволом трех функций одного аргумента.

2. При $e = \text{const}$ $(e \neq 1)$ и выполнении остальных условий (12) система уравнений (3) принимает вид:

$$\left[\frac{d\lambda}{\lambda}\omega_0^1\right] + [\omega_0^2\omega_2^1] = 0, \quad [\omega_0^2\omega_2^1] + [\omega_0^3\omega_3^1] = 0, \quad 2[d\lambda\omega_2^1] - \lambda[\omega_3^2\omega_3^1] = 0,$$

$$\left[\frac{d\lambda}{\lambda}\omega_0^2\right] - [\omega_0^1\omega_2^1] + \frac{e}{\lambda}[\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \quad 2\lambda[d\lambda\omega_2^1] + (e^2-1)[\omega_0^1\omega_0^2] = 0,$$

$$\left[\frac{d\lambda}{\lambda}\omega_0^2\right] + \frac{3e}{2\lambda}[\omega_0^1\omega_0^2] - [\omega_0^3\omega_3^2] = 0. \qquad (18)$$

Из первого, четвертого и пятого уравнений этой системы имеем:

$$\lambda\omega_2^1 = A_1\omega_0^1 + B_1\omega_0^2, \qquad (19)$$

$$d\lambda = (B_1 - e)\,\omega_0^1 - A_1\omega_0^2,$$

$$B_1^2 + A_1^2 - eB_1 + \frac{e^2-1}{2} = 0. \qquad (20)$$

Результат внешнего дифференцирования уравнений (19) приводится к виду:

$$A_1[dB_1\omega_0^1] - \left(\frac{e}{2} - B_1\right)[dB_1\omega_0^2] - \frac{1}{2}\frac{e}{\lambda}A_1^2[\omega_0^1\omega_0^2] = 0,$$

$$\left(\frac{e}{2} - B_1\right)[dB_1\omega_0^1] + A_1[(dB_1\omega_0^2] + \frac{A_1}{\lambda}\left(B_1^2 + A_1^2 - \frac{1}{2}eB_1\right)[\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \qquad (21)$$

а из конечного соотношения (20) получается

$$A_1 dA_1 = \left(\frac{e}{2} - B_1\right)dB_1.$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

При $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq \frac{e}{2}$ уравнения (21) преобразуются к виду:

$$\left(A_1^2 + \left(\frac{e}{2} - B_1\right)^2\right)\left([dB_1\omega_0^1] - \frac{A_1 B_1}{\lambda}\omega_0^1\omega_0^2]\right) = 0,$$

$$\left(A_1^2 + \left(\frac{e}{2} - B_1\right)^2\right)\left([dB_1\omega_0^2] + \frac{1}{\lambda}A_1^2\,[\omega_0^1\omega_0^2]\right) = 0.$$

Если $A_1 \neq \pm i\left(\frac{e}{2} - B_1\right)$, то из последних уравнений имеем

$$dB_1 = -\frac{A_1}{\lambda}(A_1\omega_0^1 + B_1\omega_0^2).$$

После внешнего дифференцирования этого уравнения получаем конечное соотношение $e^2 - 1 = 0$, которое противоречит условию $e \neq 1$. Следовательно, в этом случае система (18) решения не имеет. Остается возможность $A_1 = \pm i\left(\frac{e}{2} - B_1\right)$. В этом случае система (18) сводится к трем уравнениям относительно трех функций и имеет решение, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента. Так как теперь в силу (20) $e = \sqrt{2}$, то получается нормальная конгруэнция равнобочных гипербол.

При $A_1 = 0$ приходим к двум конечным соотношениям

$$2B_1^2 - 2eB_1 + e^2 - 1 = 0, \qquad B_1 - \frac{1}{2}e = 0,$$

из которых $B_1 = \frac{e}{2}$, $e = \sqrt{2}$. В данном случае имеем также нормальную конгруэнцию равнобочных гипербол — подкласс предыдущего класса. Это же решение получается и при $B_1 = \frac{e}{2}$.

3. Рассмотрим случай, когда $\frac{e}{\lambda} = \text{const}$. Из (3_3), (3_6) имеем

$$\omega_2^1 = \frac{e}{\lambda}\omega_0^2. \tag{22}$$

Уравнение (3_7), при этом приводится к виду

$$\frac{1}{2\lambda}(1 - e^2)^2\,[\omega_0^1\omega_0^2] = 0.$$

Так как $1 - e^2 \neq 0$, то должно быть $[\omega_0^1\omega_0^2] = 0$. Приходим к конгруэнции, определяющейся квадратичными уравнениями:

$$\left[\omega_3^2,\ \omega_0^3 - \frac{\lambda}{e}\omega_3^1\right] = 0, \qquad [\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \tag{23}$$

$$[d\lambda\omega_0^1] - \lambda\,[\omega_0^3\omega_3^1] = 0, \qquad [d\lambda\omega_2^1] + \lambda\,[\omega_3^2\omega_3^1] = 0.$$

Решение, очевидно, зависит от четырех произвольных функций одного аргумента.

Рассмотрим поверхность, описываемую точкой

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F}_1 + \frac{\lambda}{e}\boldsymbol{e}_1$$

плоскости коники этой конгруэнции.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Так как

$$d\boldsymbol{L} = \omega_0^1 \boldsymbol{e}_1 + \left(\omega_0^3 - \frac{\lambda}{e}\omega_3^1\right)\boldsymbol{e}_3, \tag{24}$$

то поверхность (L) является огибающей плоскостей, проходящих через фокальные оси коник конгруэнции перпендикулярно их плоскостям.

Из (23), (24), а также из формулы

$$d\boldsymbol{e}_2 = \omega_2^1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2^3 \boldsymbol{e}_3$$

следует, что линиями кривизны на поверхности (L) являются линии $\omega_2^1 = 0$ и $\omega_0^3 - \frac{\lambda}{e}\omega_3^1 = 0$. Отметим интересный частный случай. Если

$$\omega_0^1 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_0^3 - \frac{\lambda}{e}\omega_3^1 = 0,$$

то поверхность (F_1) является сферой с центром в точке, в которую вырождается поверхность (L).

4. Рассмотрим далее случай $[\omega_0^1 \omega_0^2] = 0$. Тогда $\omega_0^2 = H\omega_0^1$. Из уравнения (3_1) получаем

$$de = g d\lambda. \tag{25}$$

Уравнения (3_3), (3_6) принимают вид

$$\left(g - \frac{e}{\lambda}\right)[d\lambda\omega_0^1] - He\,[\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \quad H\left(\frac{e}{\lambda} - g\right)[d\lambda\omega_0^1] - e\,[\omega_0^1\omega_2^1] = 0.$$

При $H \neq 0$ из этих уравнений при помощи вычитания получим

$$(1 + H^2)\left(\frac{e}{\lambda} - g\right)[d\lambda\omega_0^1] = 0. \tag{26}$$

Если $1 + H^2 = 0$, т. е. $H = \pm i$, то после двухкратного продолжения системы (3) убеждаемся в существовании решения с произволом трех функций одного аргумента.

Если $[d\lambda\omega_0^1] = 0$, то система уравнений, определяющая конгруэнции, принимает вид:

$$\begin{aligned} &[ded\lambda] = 0, && [d\lambda\omega_0^1] = 0, && [\omega_0^1\omega_0^2] = 0, \\ &[\omega_0^1\omega_2^1] = 0, && [\omega_0^3\omega_3^1] = 0, && [\omega_3^2\omega_3^1] = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

и решается с произволом в шесть функций одного аргумента.

Так как $D\omega_2^1 = 0$, то можно положить $\omega_2^1 = du$. Из уравнений (27) тогда следует, что вектор $\boldsymbol{e}_3$ репера касается линий семейства $u = \text{const}$, принадлежащих поверхности (F_1). Следовательно, коники конгруэнции принадлежат нормальным плоскостям линий $u = \text{const}$. Вдоль каждой из этих линий оси коники остаются неизменными. Двумя семействами линий кривизны на поверхности (F_1) являются линии $u = \text{const}$, $\omega_3^1 = 0$, причем последние плоские. Если, наконец, $g = \frac{e}{\lambda}$, то $de = \frac{e}{\lambda} d\lambda$ и $\frac{e}{\lambda} = \text{const}$. Эти конгруэнции принадлежат только что рассмотренному классу конгруэнций. Полагая $H = 0$, получим еще один подкласс тех же конгруэнций. В конгруэнции этого подкласса единичным вектором нормали к поверхности (F_1) является вектор $\boldsymbol{e}_2$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П. Метод внешних форм, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

2. J. Klobucek. Sur les congruences des paraboles que admettent un systeme ∞^1 des surfaces normales. Bull. Int., 16, 207—213 1911.

3. Рютин В. Р. Об одном классе конгруэнций парабол в евклидовом пространстве. Ученые записки Иркутского педагогического института, 20, 1964.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. И. МАШАНОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Канонический репер однопараметрического семейства плоскостей

Точка пространства S_ε кривизны $\varepsilon = -1, 0, 1$ задается вейерштрассовыми или (в S_0) декартовыми координатами, удовлетворяющими условию

$$x^{0^2} + \varepsilon(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) = 1. \tag{1}$$

Пусть дано уравнение $v_i x^i = 0$ некоторой плоскости пространства S_ε. Вектор $V(v_0, v_1, v_2, v_3)$ будем называть „плоскостью V“, а вектор $\bar{V}(\varepsilon v_0, v_1, v_2, v_3)$ — нормальным вектором плоскости V. При $\bar{V}^2 = (\bar{V}, \bar{V}) = 1$ будем называть вектор $\bar{V}$ единичным нормальным вектором плоскости. В дальнейшем будем считать, что $\bar{V}^2 = 1$.

Плоскость $V(t_0)$ однопараметрического семейства $V(t)$ будем называть эллиптической, параболической или гиперболической в зависимости от того, пересекается, параллельна или расходится она со смежной плоскостью семейства.

Пусть нам дано семейство плоскостей пространства S_ε. Совместим плоскость $\bar{A}_3$ репера $\{\bar{A}_i\}$ с плоскостью семейства, ось $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1\}$ — с ее характеристикой и вершину $\bar{A}_0$ — с точкой возврата (в S_{-1} рассматриваем эллиптическое семейство с пересекающимися смежными характеристиками, см. ниже). Деривационные формулы получающегося канонического репера имеют вид:

$$\frac{d\bar{A}_0}{d\varphi} = -\omega\bar{A}_1, \quad \frac{d\bar{A}_1}{d\varphi} = \varepsilon\omega\bar{A}_0 - w\bar{A}_2,$$

$$\frac{d\bar{A}_2}{d\varphi} = w\bar{A}_1 - \bar{A}_3, \quad \frac{d\bar{A}_3}{d\varphi} = \bar{A}_2, \tag{2}$$

где инварианты φ, w, ω имеют вычислительные формулы

$$d\varphi^2 = d\bar{V}^2, \quad w = \sqrt{\left(\frac{d^2\bar{V}}{d\varphi^2}\right)^2 - 1},$$

$$\varepsilon\omega = det\left|\bar{V}, \frac{d\bar{V}}{d\varphi}, \frac{d^2\bar{V}}{d\varphi^2}, \frac{d^3\bar{V}}{d\varphi^3}\right| : w^2. \tag{3}$$

Пусть $d\psi$ — угол между смежными характеристиками и $d\sigma$ — расстояние между смежными точками возврата. Тогда (см. [1], (8) и [2], (20)

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$w = \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{d\psi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\varphi} = k : \varkappa,$$
$$\omega = \frac{d\sigma}{d\varphi} = 1 : \varkappa, \tag{4}$$

где $d\varphi$ — угол между смежными плоскостями семейства, а k и $\varkappa$ — кривизна и кручение ребра возврата $\bar{A}_0(\varphi)$. Так как характеристика и точка возврата определяются как элементы соответственно первой и второй дифференциальных окрестностей данной плоскости семейства, то предел отношения угла между смежными характеристиками к углу между смежными плоскостями (инвариант w) будем называть кривизной, а предел отношения расстояния между смежными точками возврата к углу между соответствующими плоскостями — кручением семейства плоскостей. Кручение ω не может быть вычислено в S_0 по формуле (3). Для нахождения величины $d\sigma$, эквивалентной, с точностью до бесконечно малых второго порядка, длине отрезка характеристики между плоскостями, проходящими через смежные точки возврата ортогонально этой характеристике, ищем нормальные векторы этих плоскостей в виде $\alpha\bar{V} + \beta\bar{V}' + \gamma\bar{V}''$ и $\lambda(\bar{V} + d\bar{V}) + \mu(\bar{V}' + d\bar{V}') + \nu(\bar{V}'' + d\bar{V}'')$. Условия ортогональности этих векторов векторам $\bar{V}$ и $\bar{V}'$ в силу соотношений $\bar{V}^2 = \bar{V}'^2 = 1$, $(\bar{V}, \bar{V}') = (\bar{V}', \bar{V}'') = 0$ (штрихами обозначены производные по φ) дают нам решения $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 0 : 1$, $\lambda : \mu : \nu = 1 : (\bar{V}''^2 - 1)\,d\varphi : 1$. Используя их, получаем

$$\omega = \frac{(v_0'\bar{V}''^2 - v_0'')\,w^2 - (v_0 + v_0'')(\bar{V}'', \bar{V}''')}{w^3}. \tag{5}$$

Очевидно, что семейство плоскостей пространства S_6 при $\omega = 0$ огибает конус, при $w = \text{const}$ имеет ребром возврата линию откоса, при $w : \omega = \text{const}$ имеет ребром возврата косую окружность (при $w^2 : \omega^2 = 1$ ребро возврата в S_{-1} является косым орициклом, а при $w^2 : \omega^2 < 1$ — косым гиперциклом), при $w = \text{const}$, $\omega = \text{const}$ имеет ребром возврата винтовую линию, при $Aw + B\omega + C = 0$ имеет ребром возврата кривую Бертрана ($Ak + C\varkappa + B = 0$).

Теорема. Условие $w = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы торс характеристик был цилиндром. При $w^2 > 0$ указанный торс в S_{-1} имеет ребро возврата, а при $w^2 < 0$ — семейство базисных плоскостей смежных лучей.

Доказательство. Для того, чтобы линейчатая поверхность $\{U, W\}$ $(\bar{U}^2 = \bar{W}^2 = 1, (\bar{U}, \bar{W}) = 0)$ была цилиндром, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (см. [1], теор. 2, [3], теор. 1)

$$ds^4 \equiv (d\bar{U}^2 - d\bar{W}^2)^2 + 4(d\bar{U}, d\bar{W})^2 = 0.$$

Так как $\bar{V}^2 = \bar{V}'^2 = 1$, $(\bar{V}, \bar{V}') = 0$, то, применяя указанную формулу, получаем $ds^2 = \pm(\bar{V}''^2 - 1)\,d\varphi^2$. Первая часть теоремы становится очевидной. Для доказательства второй части подсчитаем параметр распределения $p : q$ $(q^2 - \varepsilon p^2 = 1)$ из соотношения (см. [3], (19))

$$(q^2 + \varepsilon p^2)\,ds^2 = d\bar{U}^2 + d\bar{W}^2 - 2(d\bar{U}, \bar{W})^2.$$

Используя полученное для ds значение, получаем $q^2 + \varepsilon p^2 = \pm 1$. Отсюда следует, например, что при $w^2 \equiv \bar{V}''^2 - 1 > 0$ получаем $p = 0$, и торс имеет ребро возврата (см. [3], § 3).

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Следствие. Условие $w = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы семейство плоскостей пространства S_1 вырождалось в пучок.

Действительно, цилиндр Клиффорда имеет скрещивающиеся образующие, а торс — пересекающиеся, следовательно, торс характеристик вырождается в неподвижную прямую.

Следующие два предложения можно считать очевидными.

Теорема. Для того, чтобы торс характеристик семейства плоскостей пространства S_0 был цилиндром, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $det|\bar{V},\ \bar{V}',\ \bar{V}''| = 0$.

Теорема. Для того, чтобы семейство плоскостей пространства S_2 вырождалось в пучок, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rang}\|V,\ V',\ V''\| = 2$.

Очевидно, что при $w = 0$ семейство плоскостей не имеет канонического репера. При $w^2 < 0$ в S_{-1} совместим луч $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1\}$ с характеристикой, а плоскость A_1 — с базисной плоскостью смежных характеристик семейства плоскостей $A_3(\varphi)$ (будем называть ее плоскостью возврата, соответствующей данной плоскости семейства). Записав деривационные формулы в виде

$$\frac{d\bar{A}_0}{d\varphi} = -\omega^*\bar{A}_1 + w^*\bar{A}_2,\quad \frac{d\bar{A}_1}{d\varphi} = -\omega^*\bar{A}^0,$$

$$\frac{d\bar{A}_2}{d\varphi} = w^*\bar{A}_0 - \bar{A}_3,\quad \frac{d\bar{A}_3}{d\varphi} = \bar{A}_2, \tag{6}$$

получаем, что w^* и ω^* вычисляются по формулам (3) при условии, что инвариант w^*, который назовем сверхкривизной эллиптического семейства, связан с кривизной w соотношением

$$w^* = w : i = \frac{d\psi}{id\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{d\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \bar{w} : \bar{\omega}, \tag{7}$$

где $dr = d\psi : i$ — расстояние между смежными плоскостями возврата, а $\bar{w}$ и $\bar{\omega}$ — кривизна и кручение гиперболического семейства плоскостей возврата (см. ниже). Аналогично

$$\omega^* = \frac{d\rho}{d\varphi} = 1 : \bar{\omega}.$$

Рассмотрим гиперболическое семейство плоскостей. Общий перпендикуляр двух смежных плоскостей назовем гиперболической характеристикой данной плоскости семейства, а плоскость двух смежных характеристик — плоскостью возврата. Совместим плоскость $\bar{A}_3$ с данной плоскостью, ось $\{\bar{A}_0, \bar{A}_3\}$ — с характеристикой и плоскость $\bar{A}_2$ — с плоскостью возврата рассматриваемого семейства. Деривационные формулы построенного репера имеют вид

$$\frac{d\bar{A}_0}{d\rho} = \bar{w}\bar{A}_1 + \bar{A}_3,\quad \frac{d\bar{A}_2}{d\rho} = \bar{\omega}\bar{A}_1,$$

$$\frac{d\bar{A}_1}{d\rho} = \bar{w}\bar{A}_0 - \omega A_2,\quad \frac{d\bar{A}_3}{d\rho} = \bar{A}_0. \tag{9}$$

Инварианты вычисляются по формулам (3) с учетом соотношения $id\rho = d\varphi$, где $d\rho$ — действительное (в отличие от угла $d\varphi$) расстояние

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

между смежными плоскостями семейства. Пусть dr — расстояние между смежными характеристиками, а $d\alpha$ — угол между смежными плоскостями возврата. Тогда

$$\bar{w} = \frac{dr}{d\rho} = \frac{d\bar{r}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\rho} = w^* : \omega^*, \qquad (10)$$

$$\bar{\omega} = \frac{d\alpha}{d\rho} = 1 : \omega^*,$$

где w^* и ω^* — сверхкривизна и кручение эллиптического семейства плоскостей с расходящимися характеристиками (плоскостей возврата).

При $\omega^* = 0$ огибаемый эллиптическим семейством торс является цилиндром с расходящимися образующими (при $|w^*| = \text{const} < 1$ он основан на окружности, при $|w^*| = 1$ — на орицикле и при $|w^*| = \text{const} > 1$ — на гиперцикле); при таком же условии гиперболическое семейство огибает торс, вырождающийся в плоскость (вырождается в совокупность прямых, секущих при $w = \operatorname{tg}(k\rho + c)$ под постоянным углом горловую плоскую линию кривизны $k = \text{const}$ и лежащих в плоскости этой линии; при $w = \text{const}$ горловая линия вырождается в прямую).

§ 2. Соприкасающееся семейство плоскостей

Рассмотрим задачу, двойственную задаче о соприкасающейся сфере кривой. Двупараметрическое семейство плоскостей, образующих один и тот же угол с некоторой плоскостью $P(p^i)$, будем называть квазисферическим. Найдем соприкасающееся с данным однопараметрическим семейством квазисферическое семейство. Дифференцируя три раза по φ уравнение

$$(\bar{P},\ \bar{A}_3(\varphi)) = \cos\alpha, \qquad (11)$$

получаем систему

$$p^2 = 0,\ wp^1 - p^3 = 0,$$

$$\varepsilon^2\omega w p^0 - w' p^1 - (w^2 + 1)\,p^2 = 0.$$

Отсюда следует, что единичный нормальный вектор плоскости имеет вид

$$\bar{P} = \left\{\bar{A}_3 + \frac{1}{w}\bar{A}_1 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{w}\right)'\frac{1}{\omega}\bar{A}_0\right\} : \sqrt{1 + \frac{1}{w^2} + \varepsilon\left[\left(\frac{1}{w}\right)'\frac{1}{\omega}\right]^2}, \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{w^2} + \varepsilon\left[\left(\frac{1}{w}\right)'\frac{1}{\omega}\right]^2.$$

Из системы следует также, что в S_0 только семейство плоскостей класса $w = \text{const}$ допускает существование направления P, образующего один и тот же угол с четырьмя плоскостями семейства. Нетрудно доказать, что в этом случае все плоскости семейства образуют один и тот же угол с направлением P. Но тогда и все характеристики образуют один и тот же угол с направлением $\bar{P}$, то есть направление $\bar{P}$ является инвариантным направлением, связанным с ребром возврата, являющимся линией откоса.

Найдем точку $\bar{Z}$, равноудаленную от четырех смежных плоскостей данного семейства. Записав уравнение плоскости A_3 в виде

$$(\bar{X} - \bar{A}_0,\ \bar{A}_3) = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

приравняв к нулю три производные по φ вспомогательной функции

$$f(d) = (\bar{Z} - \bar{A}_0,\ \bar{A}_3)$$

и решая получающуюся систему, имеем:

$$\bar{Z} = \left\{ \bar{A}_0 - \frac{\omega w}{w'} \bar{A}_1 - \frac{\omega w^2}{w'} \bar{A}_3 \right\} : \sqrt{1 + \varepsilon \left\{ \frac{\omega^2 w^2}{w'^2} + \frac{\omega^2 w^4}{w'^2} \right\}}$$

$$\left\{ \frac{f'(d)}{f(d)} \right\}^2 = \frac{\varepsilon}{w^2} + \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 . \tag{13}$$

Определяющуюся центром Z и радиусом d сферу будем называть соприкасающейся. Сравнивая соотношения (12) и (13), получаем следующее предложение.

Теорема. Плоскость P пространства S_1, секущая данную плоскость однопараметрического семейства и три смежные плоскости под одним и тем же углом α, является полярой центра $\bar{Z}$ соприкасающейся сферы, а угол α в сумме с радиусом сферы составляют полупрямую ($\alpha + d = \pi/2$).

Теорема. При $\frac{\varepsilon}{w^2} + \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 = \text{const}$ соприкасающаяся сфера семейства плоскостей пространства S_ε является неизменной.

Следствие. Кривые класса $\varepsilon \left(\frac{\varkappa}{\kappa} \right)^2 + \left[\left(\frac{\varkappa}{\kappa} \right)' \varkappa \right]^2 = \text{const}$ пространства S_ε характеризуются тем, что соприкасающиеся плоскости их описывают сферические семейства.

Сферическим здесь названо однопараметрическое семейство плоскостей, касательных к некоторой сфере.

Для доказательства последней теоремы достаточно проверки соотношения $\bar{Z}' = 0$ при наложенном условии. Эта теорема, однако, требует уточнения в S_{-1}. Сравнивая соотношения (12), (13), получаем, что плоскость P действительна при $1 + \frac{1}{w^2} - \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 > 0$, то есть, когда точка $\bar{Z}$ мнима. При $\frac{1}{w^2} - \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 > 0$ плоскости соприкасающегося квазисферического семейства пересекают плоскость P под углом α (см. (11)). При $\frac{1}{w^2} - \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 = 0$ плоскости соприкасающегося семейства параллельны плоскости P; это соприкасающееся семейство назовем квазиорисферическим. При $0 > \frac{1}{w^2} - \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 > -1$ плоскости соприкасающегося семейства расходятся на расстояние d с плоскостью P, такое, что $\operatorname{th}^2 d = \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 - \frac{1}{w^2}$; соприкасающееся семейство является совокупностью касательных плоскостей гиперсферы и будет называться гиперсферическим. При $1 + \frac{1}{w^2} - \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 < 0$ точка $\bar{Z}$ действительна. Соприкасающееся семейство является совокупностью касательных плоскостей к сфере. При $1 + \frac{1}{w^2} - \left[\left(\frac{1}{w} \right)' \frac{1}{\omega} \right]^2 = 0$ точка $\bar{Z}$ является несобственной, то

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

есть данной плоскости исходного семейства соответствует соприкасающаяся орисфера, а соприкасающееся двупараметрическое семейство плоскостей (будем называть его орисферическим) является совокупностью касательных плоскостей орисферы.

При $\frac{\varepsilon}{w^2}+\left[\left(\frac{1}{w}\right)'\frac{1}{\omega}\right]^2=\text{const}$ точка $\bar{Z}$ (плоскость P в $S_{\pm 1}$) и расстояние d (угол α в $S_{\pm 1}$) являются неизменными. Исходное семейство в S_ε будем называть в этом случае сферическим (в S_1 — квазисферическим, в S_{-1} — квазисферическим, квазиорисферическим и т. д., соответственно перечисленным выше случаям). Пользуясь соотношениями (4), можно выделить новые классы кривых. Так, кривые класса $\varepsilon\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2+\left[\left(\frac{\varkappa}{k}\right)'\varkappa\right]^2=\text{const}$ характеризуются тем, что семейства соприкасающихся плоскостей их являются сферическими, $\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2-\left[\left(\frac{\varkappa}{k}\right)'\varkappa\right]=0$ — семейства соприкасающихся плоскостей являются квазиорисферическими в S_{-1} и т. д.

§ 3. Соприкасающееся квазициклическое семейство

Аналогом соприкасающейся окружности, соответствующей данной точке кривой, для однопараметрического семейства плоскостей является соприкасающееся с этим семейством однопараметрическое семейство плоскостей (будем называть его квазициклическим или квазициклом), инцидентных точке возврата рассматриваемой плоскости семейства и образующих один и тот же угол β с некоторой плоскостью Q, также инцидентной точке возврата. Аналогично предыдущему получаем

$$\bar{Q}=\left(\bar{A}_3+\frac{1}{w}\bar{A}_1\right):\sqrt{1+\frac{1}{w^2}},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{w}. \tag{14}$$

Плоскости квазицикла огибают, очевидно, прямой круговой конус с вершиной в точке возврата и осью, являющейся перпендикуляром, восставленным из точки возврата к плоскости Q. Этот конус назовем конусом кривизны, его ось — осью кривизны, плоскость Q — плоскостью кривизны и угол β — углом кривизны данной плоскости рассматриваемого семейства. При $w=\text{const}$ семейство плоскостей будем называть косым квазициклом. Оно характеризуется тем, что огибает семейство конгруэнтных конусов кривизны. В S_0 при $w=\text{const}$ получаем инвариантное направление Q, неизменно связанное с репером семейства, то есть кривая с семейством соприкасающихся плоскостей класса $w=\text{const}$ является линией откоса.

§ 4. Соприкасающиеся элеметны эллиптического семейства с расходящимися характеристиками и гиперболического семейства

Для эллиптического семейства с расходящимися смежными характеристиками получаем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\bar{P}=\left\{\bar{A}_3-\frac{1}{w^*}\bar{A}_0-\left(\frac{1}{w^*}\right)'\frac{1}{\omega^*}\bar{A}_1\right\}:\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{w^*}\right)'\frac{1}{\omega^*}\right]^2-\frac{1}{w^{*2}}},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\left[\left(\frac{1}{w^*}\right)'\frac{1}{\omega^*}\right]^2-\frac{1}{w^{*2}}, \tag{15}$$

$$\bar{Z}=i\bar{P},\ \operatorname{th} d=i\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда следует, что при $\operatorname{tg}^2\alpha>0$ семейство имеет соприкасающееся квазисферическое, при $\operatorname{tg}^2\alpha=0$ — квазиорисферическое, при $0>\operatorname{tg}^2\alpha>-1$ гиперсферическое, при $\operatorname{tg}^2\alpha=-1$ — орисферическое и при $\operatorname{tg}^2\alpha<-1$ — сферическое соприкасающееся семейство. При

$$\left[\left(\frac{1}{w^*}\right)'\frac{1}{\omega^*}\right]'\frac{1}{\omega^*}-\frac{1}{w^*}=0$$

имеем $\bar{P}=\text{const}$, $\alpha=\text{const}$. ($\bar{Z}=\text{const}$, $\alpha=\text{const}$). Исходное однопараметрическое семейство плоскостей пространства S_{-1} будем называть так же, как соответствующие семейства в § 3. Соприкасающееся квазициклическое семейство состоит из плоскостей, ортогональных плоскости возврата и удаленных на одно и то же расстояние d

$$\operatorname{th} d=\frac{1}{w^*} \tag{16}$$

от точки

$$\bar{Y}=(\bar{A}_0-w^*\bar{A}_3):\sqrt{1-w^{*2}}, \tag{17}$$

которую будем называть центром кривизны семейства. Это семейство огибает цилиндр с расходящимися образующими с базисной плоскостью — плоскостью возврата, основанный на окружности радиуса d с центром в точке Y. При $|w^*|=1$ имеем несобственный центр $\bar{Y}_\infty=\bar{A}_0\pm\bar{A}_3$, следовательно, цилиндр в этом случае основан на орицикле. При $|w|<1$ квазициклическое семейство состоит из плоскостей, ортогональных плоскости возврата и равноудаленных на расстояние d

$$\operatorname{th} d=w^* \tag{18}$$

от плоскости

$$\bar{Q}=(\bar{A}_0-w^*\bar{A}_3):\sqrt{w^{*2}-1}, \tag{19}$$

которую будем называть плоскостью кривизны. Это семейство огибает цилиндр с расходящимися образующими, основанный на эквидистанте параметра d. При $w^*=\text{const}$ исходное семейство огибает семейство конгруэнтных цилиндров. Такое семейство при $|w^*|>1$, $|w^*|=1$ и $|w^*|<1$ будем называть косым квазициклом, косым квазиорициклом и косым квазигиперциклом соответственно.

Для гиперболического семейства получаем

$$\bar{P}=\left\{\bar{A}_3-\frac{1}{\bar{w}}\bar{A}_1+\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)'\frac{1}{\bar{\omega}}\bar{A}_2\right\}:\sqrt{1+\frac{1}{\bar{w}^2}+\left[\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)'\frac{1}{\bar{\omega}}\right]^2},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\bar{w}^2}+\left[\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)'\frac{1}{\bar{\omega}}\right]^2. \tag{20}$$

Соприкасающееся однопараметрическое семейство состоит из плоскостей, ортогональных плоскости возврата и образующих один и тот же угол β

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\overline{\overline{w}}} \tag{21}$$

с плоскостью

$$\bar{Q} = \left(\bar{A}_3 - \frac{1}{\overline{\overline{w}}}\bar{A}_1\right) : \sqrt{1 + \frac{1}{\overline{\overline{w}}^2}}. \tag{22}$$

При $w = \text{const}$ исходное семейство огибает совокупность конгруэнтных квазициклических семейств.

§ 5. Параболическое семейство

Пусть $d\varphi^2 \equiv d\bar{V}^2 = 0$, то есть смежные плоскости $\bar{V}$ и $\bar{V} + d\bar{V}$ параллельны. В этом случае может быть вычислен угол ψ плоскости $\bar{V}$ с плоскостью $\bar{V} + d\bar{V} + d^2\bar{V}$ по формуле

$$\psi = d^2\bar{V}^2,$$

следовательно, в общем случае параболическое семейство плоскостей в параболический пучок не вырождается. Так как $\bar{V}'^2 = 0$, то соприкасающийся параболический пучок (пучок параллельных плоскостей) может быть записан в виде

$$\bar{P} = \bar{V} + \lambda\bar{V}'. \tag{23}$$

Теорема. Условия $\bar{V}'^2 = \bar{V}''^2 = 0$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы семейство плоскостей пространства S_{-1} вырождалось в параболический пучок.

Доказательство. В силу соотношений $\bar{V}^2 = 1$, $\bar{V}'^2 = 0$ и их дифференциальных следствий имеем

$$(\bar{V}'' - \lambda\bar{V}')^2 = \bar{V}''^2.$$

Положим λ таким, чтобы $(v^0)'' - \lambda(v^0)' = 0$. Тогда

$$\bar{V}''^2 = \sum_{i=1}^{3}[(v^i)'' - \lambda(v^i)']^2 \geqslant 0,$$

причем при $\bar{V}''^2 = 0$ получаем $\bar{V}'' = \lambda\bar{V}'$, $\bar{V}''' = (\lambda' + \lambda^2)\bar{V}' = \rho\bar{V}'$, $\bar{V}^{IV} = (\rho' + \mu^2)\bar{V}'$ и т. д., то есть семейство плоскостей вырождается в пучок. Обратно, если $\bar{V}''' = \lambda\bar{V}'$, то $\bar{V}'''^2 = 0$. Теорема доказана.

Пусть дано семейство плоскостей, не вырождающееся в пучок. Нетрудно видеть, что в силу соотношений $\bar{V}^2 = 1$, $\bar{V}'^2 = 0$ и их следствий семейство плоскостей

$$\bar{Q} = \frac{\bar{V}''}{\sqrt{\bar{V}''^2}} + \rho\bar{V}' \tag{24}$$

есть пучок параллельных плоскостей, секущих ортогонально плоскости соприкасающегося пучка (23). При $\bar{V}'^2 = \bar{V}''^2 = 0$, то есть когда исходное семейство вырождается в параболический пучок, выражение (24) перепишется в виде $\bar{Q} = \bar{R} + \mu\bar{V}'$, где $\bar{R}$ — нормальный вектор некоторой плоскости из пучка параллельных плоскостей, секущих ортогонально плоскости исходного пучка.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

§ 6. Полярные кривые пространства Римана

В S_1 заданное семейство $V(t)$ определяет линию полюсов $\bar{V}(t)$ его плоскостей, причем инварианты φ, w, ω являются длиной дуги, кривизной и кручением этой линии. Эти инварианты связаны с инвариантами ребра возврата соотношениями (4). Таким образом, каждой кривой пространства Римана ставится в соответствие вторая кривая — ребро возврата семейства полярных плоскостей. Кривые такой пары назовем полярными. Свойства семейств плоскостей могут быть теперь перефразированы соответствующим образом. Например, для того, чтобы данная кривая была кривой Бертрана ($Aw + B\omega + C = 0$), необходимо и достаточно, чтобы и полярная ей кривая была кривой Бертрана ($Ak + C\varkappa + B = 0$). Из деривационных формул далее следует, что соответствующие точки полярных кривых ортогональны (удалены на расстояние $\pi/2$ друг от друга), касательные (главные нормали) их абсолютно полярны, а бинормали их совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машанов В. И. К дифференциальной геометрии линейчатых поверхностей пространства Римана. Геометрический сборник, в. 2, Труды Томского ун-та, т. 161, 1962, 140—153.

2. Машанов В. И. Некоторые вопросы аналитической геометрии пространства Лобачевского. Труды Томского ун-та, т. 163, 1963, 94—105.

3. Машанов В. И. Инварианты линейчатых поверхностей пространства Лобачевского. Геометрический сборник, в 2. Труды Томского ун-та, т. 161, 131—139.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

ТРУДЫ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Том 181 Серия механико-математическая

В. И. МАШАНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Теории кривых пространств Лобачевского и Римана посвящено значительное число работ, выполненных различными методами, в различных интерпретациях и в различных координатах (вейерштрассовых, бельтрамиевых и даже в предельных). В данной работе поставлено целью изложить основные результаты теории кривых пространств Евклида, Лобачевского и Римана в единой аналитической схеме.

§ 1. Репер Френе и геометрическая характеристика инвариантов кривой

Таблица коэффициентов репера Френе кривой пространства S кривизны $\varepsilon = -1, 0, 1$ имеет вид (ср. [1], § 40, [2], (2, 4), [3], (3, 4)).

	$\overline{A}_0$	$\overline{A}_1$	$\overline{A}_2$	$\overline{A}_3$
$d\overline{A}_0/d\sigma$	0	1	0	0
$d\overline{A}_1/d\sigma$	$-\varepsilon$	0	k	0
$d\overline{A}_2/d\sigma$	0	$-k$	0	$\varkappa$
$d\overline{A}_3/d\sigma$	0	0	$-\varkappa$	0

(1)

Нормальная и соприкасающаяся плоскости кривой имеют уравнения

$$(\overline{Z} - \overline{X}(t),\ \overline{X}'(t)) = 0,$$
$$\det|\overline{Z}, \overline{X}, \overline{X}', \overline{X}''| = 0. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ — единичные направляющие векторы касательной, главной нормали и бинормали.

Назовем кривизной по касательной (главной нормали, бинормали) или по нормальной (спрямляющей, соприкасающейся) плоскости предел отношения угла между касательными (главными нормалями, бинормалями) или нормальными (спрямляющими, соприкасающимися) плоскостями в смежных точках к длине дуги между этими точками.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема. Инвариант k есть кривизна по касательной в любом S_ε.

Для доказательства найдем угол между касательными $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1\}$ и $\{\bar{A}_0 + \Delta\bar{A}_0, \bar{A}_1 + \Delta\bar{A}_1\}$. Пронормируем координаты вектора $\{\bar{A}_1 + \Delta\bar{A}_1\}$ так, чтобы для получающегося вектора $\bar{A}_1^*$ выполнялось условие $(\bar{A}_1^*)^2 = 1 + [n]$, а координаты вектора $\bar{A}_0 + \Delta\bar{A}_0$ так, чтобы для получающегося вектора $\bar{A}_0^*$ выполнялось условие (4) с точностью до слагаемых порядка n по сравнению с $\Delta\sigma$, $n \geqslant 3$. К получающимся векторам $\bar{A}_0^*(1 - \varepsilon\Delta\sigma^2/2, \Delta\sigma, 0, 0)$, $\bar{A}_1^*(-\varepsilon\Delta\sigma, 1 - (k^2 + \varepsilon)\Delta\sigma^2/2, k\Delta\sigma, 0)$ применимы формулы

$$f'(d) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{D + 2\Delta} + \sqrt{D - 2\Delta}\right),$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{D + 2\Delta} - \sqrt{D - 2\Delta}\right), \tag{3}$$

$$f(d)\sin\varphi = \pm \det|\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2|,$$

$$D = f'^2(d) + \cos^2\varphi = (\bar{X}_1, \bar{X}_2)^{2\varepsilon^2} + (\bar{V}_1, \bar{V}_2)^2 + \varepsilon(\bar{X}_1, \bar{V}_2)^2 + \varepsilon(\bar{X}_2, \bar{V}_1)^2,$$

$$\Delta = f'(d)\cos\varphi = (\bar{X}_1, \bar{X}_2)^{\varepsilon^2}(\bar{V}_1, \bar{V}_2) - \varepsilon^2(\bar{X}_1, \bar{V}_2)(\bar{X}_2, \bar{V}_1),$$

где d и φ — расстояние и угол между прямыми $\{\bar{X}_1, \bar{V}_1\}$ и $\{\bar{X}_2, \bar{V}_2\}$, причем координаты векторов $\bar{X}_{1,2}$ и $\bar{V}_{1,2}$ удовлетворяют условиям*)

$$x^{0^2} + \varepsilon(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) = 1, \tag{4}$$

$\bar{V}_{1,2}^2 = 1$ и при $\varepsilon \neq 0$ $(\bar{X}_1, \bar{V}_1) = (\bar{X}_2, \bar{V}_2) = 0$ (ср. [4], (8)). Получаем $\sin\varphi = |k|\Delta\sigma + [3]$, следовательно,

$$|k| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin\varphi}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\varphi}{\Delta\sigma}.$$

Если кривизну по нормальной плоскости обозначим k_n, то теорему Мордухай-Болтовского (см. [5], § 2) можно обобщить следующим образом.

Теорема. Квадрат кривизны кривой по нормальной плоскости равен квадрату кривизны по касательной, сложенному с кривизной пространства

$$k_n^2 = k^2 + \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство. Подсчитывая угол Θ между плоскостями $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_1 + \Delta\bar{A}_1$, получаем $\sin\Theta = \sqrt{k^2 + \varepsilon}\,\Delta\sigma + [3]$; следовательно,

$$k_n = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Theta}{\Delta\sigma} = \sqrt{k^2 + \varepsilon}.$$

Следствие. При $k_n^2 \equiv k^2 - 1 > 0$ смежные нормальные плоскости кривой пространства S_{-1} пересекают я, при $k_n = 0$ — параллельны- и при k_n мнимом расходятся на расстояние

$$\delta = i\Theta = \sqrt{1 - k^2}\,\Delta\sigma + [3].$$

*) В силу соотношения (4) координаты точек являются декартовыми в S_0 и вейерштрассовыми в $S_{\pm 1}$.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

В последнем случае действительна сверхкривизна (см. [5], § 3)

$$k_n^* = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\delta}{\Delta\sigma} = \sqrt{1-k^2}\,.$$

Инвариант $\varkappa$ называется кручением, а кривизна по спрямляющей плоскости—полной кривизной. Имеют место следующие предложения, доказательства которых не отличаются от приведенных выше.

Теорема. Кручение кривой пространства S_ε есть ее кривизна по соприкасающейся плоскости и по бинормали.

Теорема Ланкре. Квадрат полной кривизны равен сумме квадратов кривизны и кручения

$$\chi^2 = k^2 + \varkappa^2. \tag{7}$$

Теорема. Кривизна по главной нормали имеет выражение

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + k^2 + \varkappa^2) + \sqrt{(\varepsilon - k^2 - \varkappa^2)^2 + 4\varepsilon k^2}}.$$

Вычислительные формулы имеют вид (ср. [1], § 41, [2], II, § 3), [3], II, § 4)

$$d\sigma^2 = d\bar{X}^2, \quad k = \sqrt{\left(\frac{d^2\bar{X}}{d\sigma^2}\right)^2 - \varepsilon},$$

$$k_n = \sqrt{\left(\frac{d^2\bar{X}}{d\sigma^2}\right)^2}, \quad \varkappa = \det\left|\bar{X}, \frac{d\bar{X}}{d\sigma}, \frac{d^2\bar{X}}{d\sigma^2}, \frac{d^3\bar{X}}{d\sigma^3}\right| : k^2. \tag{8}$$

§ 2. Плоские кривые

Натуральное уравнение — $\varkappa = 0$. Уравнение соприкасающейся окружности ищем в виде

$$\varepsilon(\bar{C}, \bar{Z}) - f'(\rho) = 0, \quad \varepsilon \neq 0.$$

Приравнивая к нулю производные вспомогательной функции

$$f(\sigma) = \varepsilon(\bar{C}, \bar{A}_0(\sigma)) - f'(\rho)$$

и подставляя в получающиеся уравнения $\bar{C} = c^i\bar{A}_i$, $i = 0, 1, 2$, получаем

$$c^1 = 0, \quad -\varepsilon^2 c^0 + kc^2 = 0,$$

следовательно,

$$\bar{C} = \left(\bar{A}_0 + \frac{1}{k}\bar{A}_2\right) : \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{k^2}}. \tag{9}$$

Здесь координаты нормированы так, чтобы выполнялось условие (4). Нетрудно видеть, что полученное соотношение справедливо и для S_0, и

$$\frac{f(\rho)}{f'(\rho)} = \frac{1}{k}, \tag{10}$$

где ρ — радиус соприкасающейся окружности. При $k = 1$ или, что то же самое, при $k_n^2 \equiv k^2 - 1 = 0$ кривая плоскости Лобачевского имеет соприкасающийся орицикл. При $k_n^2 < 0$ вместо соприкасающейся окружности имеем соприкасающийся гиперцикл с базой, имеющей уравнение

$$(\bar{P}, \bar{Z}) = 0, \quad \bar{P} = (k\bar{A}_0 + \bar{A}_2) : \sqrt{1-k^2}. \tag{11}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

База соприкасающейся эквидистанты (гиперцикла) называется осью сверхкривизны кривой, а точка пересечения нормали с осью сверхкривизны—центром сверхкривизны (см. 6). Центр сверхкривизны имеет выражение

$$\overline{C}^* = (\overline{A}_0 + k\overline{A}_2) : \sqrt{1-k^2}. \tag{12}$$

Далее, координаты точки $\overline{Z}$ пересечения смежных нормалей кривой S_ε находятся из системы

$$Z' = 0, \quad -Z^0\Delta\sigma + Z^1 + Z^2 k\Delta\sigma = 0;$$

следовательно, огибающая семейства нормалей есть геометрическое место центров кривизны (эволюта) кривой. Подсчитывая угол Θ между смежными нормалями, получаем

$$\sin\Theta = \sqrt{k^2+\varepsilon}\ \Delta\sigma + [3] = k_n\Delta\sigma + [3].$$

При k_n мнимом смежные нормали кривой плоскости S_{-1} расходятся на расстояние $\delta = i\Theta$. В этом случае действительна сверхкривизна (ср. (6))

$$k_n^* = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\delta}{\Delta\sigma} = \sqrt{1-k^2}. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что ось сверхкривизны есть в этом случае общий перпендикуляр расходящихся смежных нормалей. Расстояние ρ^* между точкой кривой и центром сверхкривизны называется радиусом сверхкривизны и находится из соотношения (см. [6])

$$\operatorname{ch}\rho^* = \frac{1}{k_n^*}. \tag{14}$$

Обозначим длину дуги эволюты кривой пространства S_ε буквой s. Получаем (см. (8), (9))

$$ds^2 = d\overline{C}^2 = d\rho^2.$$

Имеют место следующие предложения.

Теорема. Геометрическое место центров кривизны плоской кривой пространства S_ε есть огибающая семейства ее нормалей.

Теорема. Семейство осей сверхкривизны плоской кривой пространства S_{-1} есть семейство общих перпендикуляров расходящихся смежных нормалей.

Теорема. Приращение радиуса кривизны кривой равно приращению длины дуги эволюты.

Теорема. Приращение радиуса сверхкривизны кривой пространства S_{-1} равно расстоянию между смежными осями сверхкривизны.

Докажем последнее предложение. Подсчитывая угол $d\varphi$ между смежными осями сверхкривизны P и $P+dP$ (см. (11)), получаем

$$\sin d\varphi = ik'd\sigma : (1-k^2) + [3].$$

Положив $d\varphi = id\eta$, где $d\eta$ — расстояние между смежными осями сверхкривизны, получаем (см. (14)) $d\eta = d\rho^*$.

Следствие. Смежные оси сверхкривизны расходятся.

Для кривой пространства Римана может быть сформулирована аналогичная последней теорема, если за оси сверхкривизны взять абсолютные поляры центров кривизны.

При $k = 1$ кривая плоскости Лобачевского имеет несобственный центр

$$\overline{C}_\infty = \overline{A}_0 + \overline{A}_2. \tag{15}$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Уравнение $(\overline{C}_\infty, \overline{V}) = 0$ определяет множество прямых (определяющихся уравнениями $(V, \overline{Z}) = 0$), проходящих через несобственную точку $\overline{C}_\infty$, то есть множество осей соприкасающегося орицикла.

§ 3. Каноническое представление кривой

Если потребовать, чтобы смежная точка $\overline{A}_0^*$ кривой определялась относительно репера в данной точке $\overline{A}_0$ координатами, удовлетворяющими с точностью до бесконечно малых 4-го порядка по сравнению с $\Delta\sigma = s = \smile \overline{A}_0\overline{A}_0^*$ условию (4), то получим следующее представление

$$\overline{A}_0^* = \left\{1 - \frac{\varepsilon s^2}{2} + [4]\right\}\overline{A}_0 + \{s + [3]\}\,\overline{A}_1 + \left\{\frac{ks^2}{2} + [3]\right\}\overline{A}_2 + \left\{\frac{k\varkappa s^3}{3!} + [4]\right\}\overline{A}_3.$$

Отсюда следует, что кривизна пространственной кривой равна кривизне ее ортогональной проекции на соприкасающуюся плоскость в данной точке.

§ 4. Винтовые линии

Винтовой линией назовем траекторию точки перпендикуляра к неподвижной прямой (оси винтовой линии), двигающегося так, что смещение основания его пропорционально углу поворота вокруг указанной прямой.

Если за ось взять прямую $\{\overline{B}_0, \overline{B}_3\}$ неподвижной системы координат $\{\overline{B}_i\}$, то уравнение винтовой линии можно записать в виде

$$\overline{X} = \{\overline{B}_0 f'(bt) + \overline{B}_3 f(bt)\} f'(a) + \{\overline{B}_1 \cos t + \overline{B}_2 \sin t\} f(a). \qquad (16)$$

Применяя формулы (8), получаем

$$k = \frac{f'(a) f(a)(1 - \varepsilon b^2)}{f'^2(a) b^2 + f^2(a)} = \text{const},$$

$$\varkappa = \frac{b}{f'^2(a) b^2 + f^2(a)} = \text{const}.$$

Теорема. При $b = \pm 1$ винтовая линия пространства S_1 вырождается в прямую, право- или лево-параллельную в смысле Клиффорда ее оси.

Доказательство. При $b^2 = 1$ имеем $k = 0$, то есть винтовая линия вырождается в прямую. Для доказательства второй части достаточно применить формулы (6) работы [4]. Очевидно также, что абсолютная поляра оси $(a = \pi/2)$ есть также ось винтовой линии.

§ 5. Соприкасающаяся сфера. Сферические кривые

Уравнение соприкасающейся сферы при $\varepsilon \neq 0$ ищем в виде

$$\varepsilon(\overline{C}, \overline{X}) - f'(d) = 0.$$

Составляя вспомогательную функцию

$$\varphi(\sigma) = \varepsilon(\overline{C}, \overline{A}_0(\sigma)) - f'(d),$$

приравнивая ее к нулю вместе с тремя ее производными по σ и требуя, чтобы для координат центра сферы выполнялось условие (4), получаем

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

$$\bar{C}=\left\{\bar{A}_0+\frac{1}{k}\bar{A}_2+\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right\}:\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{k^2}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]^2},$$
$$\left\{\frac{f(d)}{f'(d)}\right\}^2=\frac{1}{k^2}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]^2. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что получившиеся соотношения справедливы и при $\varepsilon=0$. Натуральное уравнение сферических кривых имеет обычный вид (см. [1])

$$\frac{1}{k}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]'\frac{1}{\varkappa}=0. \tag{18}$$

При $\frac{1}{k^2}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]^2=1$ в S_{-1} имеем несобственную точку $\bar{C}=\bar{A}_0+\frac{1}{k}\bar{A}_2+\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\bar{A}_3$ $(\bar{C}^2=0)$, то есть вместо соприкасающейся сферы в данной точке имеем соприкасающуюся орисферу. При $\frac{1}{k^2}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]^2>1$ получаем плоскость

$$\bar{P}=\left\{\bar{A}_0+\frac{1}{k}\bar{A}_2+\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right\}:\sqrt{\frac{1}{k^2}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]^2-1}; \tag{19}$$

следовательно, в данной точке кривая имеет соприкасающуюся гиперсферу. Кривые пространства S_{-1} класса $\frac{1}{k^2}+\left[\left(\frac{1}{k}\right)'\frac{1}{\varkappa}\right]^2=\text{const}\geqslant 1$ будем называть орисферическими и гиперсферическими.

Для центра соприкасающейся окружности и радиуса кривизны ρ имеем соотношения

$$\bar{X}=\left\{\bar{A}_0+\frac{1}{k}\bar{A}_2\right\}:\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{k^2}},$$
$$\frac{f(\rho)}{f'(\rho)}=\frac{1}{k}; \tag{20}$$

следовательно, в S_{-1} при $k^2=1$ и $k^2<1$ имеем соответственно соприкасающийся орицикл и соприкасающийся гиперцикл. В последнем случае плоскость

$$\bar{Q}=\left(\bar{A}_0+\frac{1}{k}\bar{A}_2\right):\sqrt{\frac{1}{k^2}-1} \tag{21}$$

будем называть плоскостью сверхкривизны, а точку

$$\bar{Y}=(\bar{A}_0+k\bar{A}_2):\sqrt{k^2-1} \tag{22}$$

пересечения ее с главной нормалью — центром сверхкривизны. Линия пересечения плоскости сверхкривизны с соприкасающейся плоскостью является базой соприкасающейся эквидистанты и называется осью сверхкривизны.

Прямую, соединяющую центры соприкасающейся сферы и соприкасающейся окружности, назовем осью кривизны (ср. [1], § 43). Ее

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

параметрическое уравнение имеет вид

$$\bar{Z} = \bar{X} f'(r) + \bar{A}_3 f(r), \tag{23}$$

где r — расстояние от центра кривизны $\bar{X}$ до текущей точки $\bar{Z}$.

Теорема. Геометрическое место центров соприкасающихся сфер есть ребро возврата, а ось кривизны—характеристика семейства нормальных плоскостей.

Для доказательства продифференцируем дважды уравнение $(\bar{Z} - \bar{A}_0, \bar{A}_1) = 0$ нормальной плоскости и подставим $\bar{Z} = z^i A_i$. Получим систему:

$$\begin{gathered} z^1 = 0, \\ \varepsilon^2 - \varepsilon^2 z^0 - 1 + kz^2 = 0, \\ k' z^2 + k\varkappa z^3 = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Учитывая, что $\varepsilon^2 - \varepsilon^2 z^0 - 1 = -z^0$ при любом ε, получаем ребро возврата $\bar{C}(\sigma)$ (см. (17)). Так как координаты точек $\bar{C}$ и $\bar{X}$ удовлетворяют первым двум уравнениям системы, то доказана и вторая часть теоремы. Однако необходимо рассмотреть аналоги этой теоремы для кривых пространства Лобачевского, имеющих соприкасающиеся орисферы (гиперсферы). Возможны следующие случаи.

1) $\dfrac{1}{k^2} + \left[\left(\dfrac{1}{k}\right)' \dfrac{1}{\varkappa}\right]^2 = 1$, $k^2 > 1$. Осью кривизны назовем ось соприкасающейся орисферы, проходящую через центр соприкасающейся окружности.

2) $\dfrac{1}{k^2} + \left[\left(\dfrac{1}{k}\right)' \dfrac{1}{\varkappa}\right]^2 > 1$, $k^2 > 1$. Осью кривизны назовем ось соприкасающейся гиперсферы, инцидентную центру соприкасающейся окружности.

3) $k^2 < 1$. Плоскость сверхкривизны и плоскость соприкасающейся гиперсферы пересекаются. Уравнение определяемого ими пучка можно записать в виде

$$\bar{U} = \bar{A}_3 + \lambda\left(\bar{A}_0 + \frac{1}{k} A_2\right). \tag{25}$$

Ось этого пучка, то есть прямую пересечения плоскости сверхкривизны с соприкасающейся плоскостью, назовем осью сверхкривизны. Ее уравнение имеет вид (см. 22))

$$\bar{Z} = Y \operatorname{ch} r + \bar{A}_1 \operatorname{sh} r. \tag{26}$$

4) $\dfrac{1}{k^2} + \left[\left(\dfrac{1}{k}\right)' \dfrac{1}{\varkappa}\right]^2 = 1$, $k^2 = 1$, что эквивалентно условиям $k = \pm 1$, $k' = 0$. Уравнение оси кривизны (23), которое, употребляя ненормированные координаты центра кривизны $\bar{X}$, можно записать в виде

$$\bar{Z} = \bar{A}_3 + \lambda\left(\bar{A}_0 + \frac{1}{k}\bar{A}_2\right),$$

при $k \to \pm 1$ превращается в уравнение

$$\bar{U} = \bar{A}_3 + \lambda(\bar{A}_0 \pm \bar{A}_2) \tag{27}$$

пучка параллельных плоскостей, который будем называть пучком

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

кривизны. Аналогично при $k \to \pm 1$ уравнение оси сверхкривизны (26) переходит в уравнение пучка

$$\overline{W} = \overline{A}_1 + \rho(\overline{A}_0 \pm \overline{A}_2) \tag{28}$$

параллельных плоскостей, который будем называть пучком сверхкривизны. Нетрудно видеть, что плоскости пучков кривизны и сверхкривизны ортогональны. В итоге доказана

Теорема. Ось кривизны (пучок кривизны, ось сверхкривизны) кривой пространства Лобачевского является эллиптической (параболической, гиперболической) характеристикой, а центр соприкасающейся сферы (орисферы, базисной плоскости гиперсферы) точкой возврата (несобственной точкой возврата, плоскостью возврата) ее эллиптического (параболического, гиперболического) семейства нормальных плоскостей.

Имеют место следующие предложения.

Теорема. Характеристикой семейства соприкасающихся плоскостей является касательная, а ребром возврата — сама исходная кривая.

Теорема. Характеристика спрямляющих плоскостей есть прямая $\{\overline{A}_0, \overline{\Omega}\}$, где $\overline{\Omega} = \varkappa \overline{A}_1 + k\overline{A}_3$.

Вектор $\overline{\Omega}$ будем называть вектором Дарбу. В S_0 он определяет направление оси вращения репера Френе.

§ 6. Кривые Бертрана

Рассмотрим пару кривых $\overline{A}_0(\sigma)$ и $\overline{B}_0(\sigma^*)$ с неизменно связанными каноническими реперами $\{\overline{A}_i\}$ и $\{\overline{B}_j\}$:

$$\overline{B}_j = b_j^i \overline{A}_i, \; b_j^i = \text{const}. \tag{29}$$

На векторы $\overline{B}_j$ должны быть наложены условия (см. (1))

$$(\overline{B}_0', B_2) = (\overline{B}_0', \overline{B}_3) = (\overline{B}_3', B_1) = 0. \tag{30}$$

Аналогичные соотношения $\varepsilon(\overline{B}_2', \overline{B}_0) = \varepsilon(\overline{B}_3', \overline{B}_0) = (\overline{B}_1', \overline{B}_3) = 0$ являются следствиями тождественных соотношений, накладываемых на векторы $\overline{B}_j$ в силу их ортогональности и соотношений (30). Учитывая соотношения

$$\xi_{31}^{01} = \pm \varepsilon \xi_{02}^{23}, \quad \xi_{31}^{02} = \pm \varepsilon \xi_{02}^{31}, \quad \xi_{31}^{03} = \pm \varepsilon \xi_{02}^{12},$$

$$\xi_{31}^{12} = \pm \xi_{02}^{03}, \quad \xi_{31}^{31} = \pm \xi_{02}^{02}, \quad \xi_{31}^{23} = \pm \xi_{02}^{01},$$

связывающие плюккеровы координаты пучка плоскостей $\{\overline{B}_3, \overline{B}_1\}$ с плюккеровыми координатами оси $\{\overline{B}_0, \overline{B}_2\}$ этого пучка, и используя соотношения (29), приводим систему (30) к виду

$$\begin{aligned}
(\overline{B}_0', \overline{B}_2) &\equiv \xi_{02}^{12} k + \xi_{02}^{23} \varkappa + \xi_{02}^{01} = 0, \\
(\overline{B}_0'', \overline{B}_3) &\equiv \xi_{03}^{12} k + \xi_{03}^{23} \varkappa + \xi_{03}^{01} = 0, \\
(\overline{B}_3', \overline{B}_1) &\equiv \xi_{02}^{03} k + \xi_{02}^{01} \varkappa + \varepsilon \xi_{02}^{23} = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Условие совместности системы есть условие обращения в нуль определителя третьего порядка из всех коэффициентов. Если ранг этого определителя равен двум, то из системы получаем $k = \text{const}$, $\varkappa = \text{const}$, то есть линия $\overline{A}_0(\sigma)$ является винтовой. Пусть ранг системы равен единице.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Тогда

$$\frac{\xi_{02}^{12}}{\xi_{02}^{03}} = \frac{\xi_{02}^{23}}{\xi_{02}^{01}} = \frac{\xi_{02}^{01}}{\varepsilon\xi_{02}^{23}}. \tag{32}$$

Выполнение этих условий при $k \neq 0$ (то есть для линии, невырождающейся в прямую) возможно лишь при (в S_0 исключаются еще линии откоса)

$$\xi_{02}^{01} = \xi_{02}^{03} = \xi_{02}^{12} = \xi_{02}^{23} = 0. \tag{33}$$

Полученные условия суть условия ортогонального пересечения главной нормали $\{\bar{B}_0, \bar{B}_2\}$ присоединенной кривой $\bar{B}_0$ с касательной и бинормалью исходной, то есть условия совпадения главных нормалей. Положим

$$\begin{gathered}\bar{B}_0 = \bar{A}_0 f'(r) + \bar{A}_2 f(r), \quad \pm \bar{B}_2 = -\varepsilon f(r)\bar{A}_0 + \bar{A}_2 f'(r), \\ \bar{B}_1 = \bar{A}_1 \cos\varphi + \bar{A}_3 \sin\varphi, \quad \bar{B}_3 = -\bar{A}_1 \sin\varphi + \bar{A}_3 \cos\varphi,\end{gathered} \tag{34}$$

где r и φ — расстояние и угол между касательными $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1\}$ и $\{\bar{B}_0, \bar{B}_1\}$ рассматриваемых кривых, причем знак „плюс“ при $\bar{B}_2$ соответствует совпадению направлений главных нормалей. Дифференцируя эти соотношения, получаем $dr = d\varphi = 0$, то есть совпадения главных нормалей достаточно для того, чтобы канонические реперы кривых были неизменно связаны. Второе условие (31) принимает вид

$$(\bar{B}_0, \bar{B}_3) \equiv kf(r)\sin\varphi + \varkappa f(r)\cos\varphi - f'(r)\sin\varphi = 0 \tag{35}$$

или

$$Ak + B\varkappa + C = 0. \tag{35}$$

Полученное уравнение является натуральным уравнением класса кривых, допускающих присоединение второй кривой с неизменной связью их канонических реперов (ср. [1], § 44, [9], [10]). Кривые этого класса называются кривыми Бертрана. На кривую $\bar{B}_0$ наложено, очевидно, условие

$$(\bar{A}_0', \bar{A}_3) \equiv \pm k^* f \sin\varphi \mp \varkappa^* f \cos\varphi + f' \sin\varphi = 0 \tag{36}$$

или

$$Ak^* + B\varkappa^* \pm C = 0.$$

Нетрудно видеть, что для данной кривой класса (35) всегда можно подобрать $r = \text{const}$ так, что соответствующая точка главной нормали опишет вторую кривую пары кривых Бертрана.

Рассмотрим частный случай кривых Бертрана, когда $B = 0$ или, что то же самое, $f(r)\cos\varphi = 0$. Исключая случай совпадения кривых, получаем $\varphi = \pi/2$. Из (35) находим

$$\frac{f(r)}{f'(r)} = \frac{1}{k} = \text{const}. \tag{37}$$

Кривые этого класса ($k = \text{const}$) назовем, как в S_0, косыми окружностями (см. [1], § 44). Сравнивая (20) и (37), получаем, что присоединенная кривая $\bar{B}_0$ является линией центров кривизны исходной кривой $\bar{A}_0$. Из (36) следует, что

$$\frac{f(r)}{f'(r)} = \mp\frac{1}{k^*} = \text{const},$$

из чего можно заключить, что следующее предложение распространяется и на пространства ненулевой кривизны.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Теорема. Косая окружность есть линия центров кривизны своей линии центров кривизны.

Кривые класса $|k| = \text{const} = 1$ назовем косыми орициклами, а класса $|k| = \text{const} < 1$ — косыми гиперциклами. Необходимо рассмотреть для этих кривых аналоги последней теоремы.

Теорема. Косой орицикл есть линия центров кривизны несобственной линии ее центров кривизны.

Для доказательства достаточно подсчитать координаты центра кривизны несобственной кривой $\bar{X}_\infty = \bar{A}_0 + \bar{A}_2$, не изменяя ее нормировки (см. § 7).

С косым гиперциклом связано однопараметрическое эллиптическое семейство его плоскостей сверхкривизны. Аналогом соприкасающейся окружности для этого семейства является соприкасающееся однопараметрическое семейство плоскостей, ортогональных плоскости возврата (плоскости, секущей ортогонально три смежные плоскости) семейства плоскостей сверхкривизны и равноудаленных от точки, инцидентной плоскости возврата. Указанную точку назовем центром кривизны семейства плоскостей сверхкривизны. На этом пути доказывается

Теорема. Косой гиперцикл есть линия центров кривизны семейства его плоскостей сверхкривизны.

§ 7. Несобственные кривые

Будем говорить, что вектор $\bar{X}(x^i)$ определяет несобственную точку $\bar{X}_\infty(x^0 : x^1 : x^2 : x^3)$, если координаты его уовлетворяют условию

$$x^{0^2} + \varepsilon\,(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) = 0.$$

Очевидно, в S_1 нет несобственных точек. Несобственные точки пространства Евклида образуют плоскость Римана. Подсчитав кривизны кривых $\bar{A}_1(\sigma), \bar{A}_2(\sigma), \bar{A}_3(\sigma)$, как кривых плоскости Римана, получаем

$$k_1 = \frac{\varkappa}{k}, \quad k_2 = \left(\operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{k}\right)', \quad k_3 = \frac{k}{\varkappa}.$$

Очевидны следующие предложения.

Теорема. Общему центру соприкасающихся окружностей кривых, описываемых несобственными точками касательной и бинормали кривой пространства Евклида, соответствует вектор Дарбу. Кривизна кривой, описываемой несобственной точкой главной нормали, равна производной угла между касательной исходной кривой и ее вектором Дарбу по дуге исходной кривой.

Теорема. Для того, чтобы кривая пространства Евклида была линией откоса, необходимо и достаточно одного из следующих условий:

1) несобственная точка касательной или бинормали описывает окружность,

2) несобственная точка главной нормали описывает прямую.

Учитывая, что несобственная плоскость, как плоскость Римана, вполне интерпретируется на полусфере, получаем

Следствие. Для того, чтобы кривая пространства Евклида была линией откоса, необходимо и достаточно выполнения одного из утверждений:

1) сферическая индикатриса касательных или бинормалей является окружностью,

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

2) сферическая индикатриса главных нормалей является окружностью большого круга.

Несобственную кривую пространства S_1 можно задать уравнением

$$\bar{X} = \bar{X}(t), \quad \bar{X}^2 = 0. \tag{38}$$

В силу второго соотношения нормировка неопределенна, и ту же кривую можно задать уравнением

$$\bar{Y} = \lambda(t)\,\bar{X}(t). \tag{39}$$

Параметр σ, вычисляющийся по формуле

$$d\sigma^2 = d\bar{X}^2, \tag{40}$$

будем называть длиной дуги кривой $\bar{X}(\sigma)$. В силу (38)

$$(\bar{X}, \bar{X}') = 0. \tag{41}$$

Учитывая это, из соотношения

$$d\bar{Y} = d\lambda\bar{X} + \lambda d\bar{X} \tag{42}$$

получаем

$$d\sigma_y = \lambda d\sigma_x. \tag{43}$$

Из соотношения (41) следует $\bar{X}'^2 > 0$; следовательно,

$$\left(\frac{d\bar{X}}{d\sigma_x}\right)^2 = 1. \tag{44}$$

В дальнейшем будем считать, что $t = \sigma_x$, то есть нам дана кривая $\bar{X}(\sigma_x)$, так что $\bar{X}'^2 = 1$. Плоскость X' будем называть нормальной плоскостью кривой $\bar{X}(\sigma_x)$. Из (42) получаем

$$\frac{dY}{d\sigma_y} = \bar{X}' + \frac{\lambda'}{\lambda}\bar{X},$$

то есть, изменяя нормировку, можно получить, что кривая имеет пучок параллельных плоскостей $\{\bar{X}', \bar{X}\}$, являющихся нормальными плоскостями кривой. В силу этого и кривизна кривой по нормальной плоскости теряет смысл. Соприкасающаяся плоскость $[\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'']$ несобственной кривой не зависит от нормировки, то есть

$$[\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}''] = \left[\bar{Y}, \frac{d\bar{Y}}{d\sigma_y}, \frac{d^2\bar{Y}}{d\sigma_y^2}\right].$$

Подсчитывая угол ψ между смежными соприкасающимися плоскостями $[\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'']$ и $[\bar{X} + \bar{X}'d\sigma_x, \bar{X}' + \bar{X}''d\sigma_x, \bar{X}'' + \bar{X}'''d\sigma_x]$ с учетом соотношения

$$([\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}], [\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}]) = \varepsilon \begin{vmatrix} (\bar{P}, \bar{U}) & (\bar{P}, \bar{V}) & (\bar{P}, \bar{W}) \\ (\bar{Q}, \bar{U}) & (\bar{Q}, \bar{V}) & (\bar{Q}, \bar{W}) \\ (\bar{R}, \bar{U}) & (\bar{R}, \bar{V}) & (\bar{R}, \bar{W}) \end{vmatrix}, \tag{45}$$

получаем

$$\psi = 0 \cdot d\sigma_x + \sqrt{\bar{X}''^4 - \bar{X}'''^2}\, d\sigma_x^2 + [3] = i \det|\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'', \bar{X}'''|\, d\sigma_x^2 + [3].$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Отсюда следует, что с точностью до бесконечно малых второго порядка смежные плоскости параллельны. Если же вести рассмотрение с точностью до бесконечно малых третьего порядка, то плоскости являются расходящимися. Предел отношения расстояния между смежными соприкасающимися плоскостями к квадрату длины дуги между соответствующими точками назовем кручением $\varkappa$ несобственной кривой. Очевидно

$$\varkappa = \frac{r}{d\sigma^2} = \det|\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'', \bar{X}'''| = \sqrt{\bar{X}'''^2 - \bar{X}''^4}.$$

Учитывая, что

$$\det|\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'', \bar{X}'''|\, d\sigma_x^2 = \det\left|\bar{Y}, \frac{d\bar{Y}}{d\sigma_y}, \frac{d^2\bar{Y}}{d\sigma_y^2}, \frac{d^3\bar{Y}}{d\sigma_y^3}\right| d\sigma_y^2,$$

получаем, что расстояние r есть дифференциальный инвариант и что

$$\varkappa_x = \lambda^2 \varkappa_y.$$

При $\varkappa = 0$ несобственная кривая является плоской. Соприкасающаяся плоскость $[\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'']$ и несобственная точка $\bar{X}$ определяют пучок $\{[\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}''], \bar{X}\}$ параллельных плоскостей, секущих ортогонально пучок нормальных плоскостей. Связку параллельных прямых пересечения плоскостей указанных пучков назовем связкой нормалей несобственной кривой. Из них линию пересечения соприкасающейся плоскости с соответствующей данной нормировке нормальной плоскостью назовем главной нормалью. Характеристику нормальной плоскости назовем осью кривизны, а точку пересечения последней с соприкасающейся плоскостью — центром кривизны. Орисферу, определенную несобственной точкой $\bar{X}$ и центром кривизны, назовем соприкасающейся, а линию пересечения ее с соприкасающейся плоскостью назовем соприкасающимся орициклом. Все указанные элементы зависят, очевидно, от нормировки. Если нормировка кривой задана, то ее центр кривизны может быть задан ковариантным ненормированным вектором

$$C = [\bar{X}', \bar{X}'', [\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'']].$$

Используя тождество (45), получаем

$$C^2 = -\bar{X}''^2,$$

следовательно, при $\bar{X}''^2 = 0$ центром кривизны несобственной кривой является вторая несобственная точка главной нормали (условие $\bar{C} = \bar{X}$ невозможно в силу соотношений $((\bar{C}, \bar{X}) = 0, (\bar{X}, \bar{X}'') = -\bar{X}'^2 = -1)$. Соприкасающейся поверхностью второго порядка является, очевидно, все множество несобственных точек пространства Лобачевского. Уравнение сферы с центром в точке $\bar{C}$, заданным ненормированными координатами, можно записать в виде

$$\left|\left(\bar{Z}, \frac{\bar{C}}{\sqrt{-\bar{C}^2}}\right)\right| = \operatorname{ch} r.$$

Обозначим через $\bar{P}$ предельное положение центра, когда он стремится к некоторой несобственной точке. Тогда

$$\bar{P}^2 = \lim\left(\frac{\bar{C}}{\sqrt{-\bar{C}^2}\operatorname{ch} r}\right)^2 = \lim\frac{1}{\operatorname{ch}^2 r} = 0,$$

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

а уравнение пучка предельных поверхностей с несобственным центром $\bar{P}$ принимает вид

$$(\bar{Z}, \bar{P})^2 = 1.$$

Семейство плоскостей $\bar{V}$, равноудаленных от данной плоскости $\bar{W}$, можно записать в виде

$$\left|\left(\bar{V}, \frac{\bar{W}}{\sqrt{\bar{W}^2 \operatorname{ch} r}}\right)\right| = 1.$$

Это семейство является, очевидно, семейством касательных плоскостей гиперсферы, поэтому его назовем гиперсферическим. Аналогично вышеизложенному, при стремлении плоскости $\bar{W}$ к некоторой несобственной точке получаем уравнение

$$(\bar{V}, \bar{P})^2 = 1$$

орисферического семейства плоскостей. При $\bar{X}^{n2} < 0$ (см. (46), (47)) имеем плоскость $\bar{C}$, которую будем называть плоскостью сверхкривизны, и соприкасающееся орисферическое семейство

$$(\bar{V}, \bar{X})^2 = 1,$$

включающее в себя плоскость сверхкривизны. Огибаемую этим семейством орисферу назовем соприкасающейся, а линию пересечения ее с соприкасающейся плоскостью—орициклом сверхкривизны несобственной кривой. Точку пересечения орисферы с главной нормалью назовем центром сверхкривизны несобственной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. ГИТТЛ, 1956.
2. Тутаев Л. К. К дифференциальной геометрии пространства Лобачевского двух и трех измерений в проективной модели. Учен. зап. Белорусского ун-та, 32 (1957), 33—57.
3. Тутаев Л. К. К дифференциальной геометрии пространства Римана. Минск. Учен. зап. пед. ин-та, 5 (1956), 65—77.
4. Машанов В. И. К дифференциальной геометрии линейчатых поверхностей пространства Римана. Труды Томского ун-та, т. 161 (1962), 140—153.
5. Мордухай-Болтовской Д. Д. О кривизне пространственных кривых в пространстве Лобачевского. Матем. сб., 30 (72) (1952), 483—508.
6. Мордухай-Болтовской Д. Д. О кривизне на плоскости Лобачевского. Ростов-на-Д., Учен. зап. НИИ матем. и физ. ун-та, 4 (1940), 29—30.
7. Gönenc. Problemi connessione colle curve di Bertrand. Istanbul üniv. fen. fak. mecm., A—20, N 3—4, 1 55, 141—147.
8. Бродский М. С. Конгруэнции прямых эллиптического пространства. Изд. „Советская наука", 1941.
9. Мордухай-Болтовской Д. Д. Кривые Бертрана в пространстве Лобачевского. ДАН, 69 (1949), 729—730.
10. Rosca R. Transformations asimptotique des courbes de lèspace elliptique. Courbes de Bertrand. Journ. des math. pures et appl., 18, 167—215.

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

Геометрический семинар Н. Г. Туганова в Томском университете

В предыдущем «Геометрическом сборнике» освещена работа семинара до 23 мая 1963 г. Ниже приводятся перечень докладов, заслушанных в течение следующего года.

12.IX.1963 г. В. В. Васенин. Репераж подмногообразий параболической неголономной поверхности.

19.IX.1963 г. Л. А. Зернышкина. О некоторых геометрических объектах конгруэнции винтовых линий.

3.X.1963 г. В. Р. Рютин. Инвариантное построение геометрии конгруэнций коник в трехмерном евклидовом пространстве.

10.X.1963 г. В. П. Долговых. О некоторых геометрических объектах и инвариантах векторного поля.

24.X.1963 г. В. С. Малаховский. Многообразия геометрических объектов в n-мерном однородном пространстве.

28.XI.1963 г. В. С. Малаховский. Многообразия индуцирующих фигур.

4.XII.1963 г. В. С. Малаховский. Многообразия p-мерных квадрик в P_n.

2.I.1964 г. В. Р. Рютин. Абсолютные метрические инварианты конгруэнции центральных коник.

16.I.1964 г. В. В. Слухаев. Некоторые вопросы эквиаффинной дифференциальной геометрии векторного поля.

20.II.1964 г. Л. И. Магазинников. Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций.

27.II.1964 г. В. С. Малаховский. Пространства геометрических элементов с фундаментально групповой связностью.

19.III.1964 г. В. В. Слухаев. Векторное поле, все линии тока которого — параболы.

9.IV.1964 г. В. С. Малаховский. Группы преобразований, порожденные фигурами.

16.IV. 1964г. В. Р. Рютин. Об инвариантом построении дифференциальной геометрии многообразий коник в евклидовом пространстве.

23.IV.1964 г. В. М. Финкельштейн. Четырехпараметрическое поле направлений в евклидовом пространстве.

6—11.V.1964 г. Г. Ф. Лаптев (Москва). Цикл докладов «Дифференциальная геометрия расслоенных многообразий». В. В. Рыжков (Москва). Цикл докладов «Теория точечных отображений».

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

От редакторов 3
В. С. Малаховский. О многообразиях алгебраических фигур . . . 5
В. В. Рыжков. Об отображениях евклидовых пространств, обобщающих конформные 15
В. В. Рыжков. Об одном классе соответствий между аффинными пространствами 19
Р. Н. Щербаков, Г. П. Бочилло. К проективно-дифференциальной геометрии комплекса прямых 24
В. В. Гавел, И. Клапка. Сопряженные сети и осевые системы кривых на поверхности с проективной связностью 34
Л. И. Магазинников. Центроаффинно-расслояемые пары конгруэнций . 43
Н. М. Онищук. К вопросу о центроаффинной расслояемости пар линейчатых конгруэнций 57
В. В. Слухаев. Некоторые вопросы эквиаффинной геометрии векторного поля 68
В. П. Долговых. К геометрии векторного поля 76
Л. А. Зернышкина. Об однопараметрическом семействе кривых линий . 83
Л. А. Зернышкина. Некоторые подмногообразия конгруэнции винтовых линий 90
В. Р. Рютин. Нормальные конгруэнции центральных коник 97
В. И. Машанов. О дифференциальной геометрии однопараметрических семейств плоскостей пространств постоянной кривизны 104
В. И. Машанов. Дифференциальная геометрия кривых пространства постоянной кривизны 113
Геометрический семинар Н. Г. Туганова в Томском университете . . . 126

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК, ВЫП. 5

Томск, Изд. ТГУ, 1965 г., 126 с.

Редактор издательства **Л. Г. Мордовина**
Технический редактор **А. С. Бобренок**
Корректор **Т. В. Звягина**

КЗ01647. Сдано в набор 5/VII-65 г. Подписано к печати 23/X-65 г.
Формат 70×108 1/16, печ. л. 7,87, усл.-печ. л. 10,78, уч.-изд. л. 10,8
Заказ 4901. Тираж 700. Цена 76 коп.

Томск, издательство ТГУ, проспект Ленина, 34
Областная типография № 1 Управления по печати, ул. Советская, 47

Электронная библиотека (репозиторий)
Томского государственного университета
http://vital.lib.tsu.ru

864426

Цена 76 коп.

Томский госуниверситет 1878
Научная библиотека 00949772