

УДК 532.516.5

DOI 10.17223/19988621/40/10

М.А. Пономарева, М.П. Филина, В.А. Якутенок

ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ОДНОШНЕКОВОГО ЭКСТРУДЕРА¹

Определены отношения ширины к глубине канала шнека экструдера, при котором является обоснованным предположение об отсутствии влияния боковых стенок на профиль скорости циркуляционного течения в срединном сечении канала, который считается прямоугольным. Приводится методика получения решения для профиля вектора скорости псевдопластичной жидкости без учета влияния боковых стенок. Достоверность результатов подтверждается сравнением с данными, представленными в литературе. Для численного решения с учетом влияния боковых стенок используется непрямой метод граничных элементов. Определено отношение ширины к глубине канала шнека, при котором допустимо пренебрегать влиянием боковых стенок на течение в середине канала.

Ключевые слова: одношнековый экструдер, неньютоновская жидкость, непрямой метод граничных элементов, течение в камере.

Одним из важнейших направлений современной промышленности является переработка высоковязких полимерных материалов. В настоящее время широко распространены экструзионные методы переработки. Основными преимуществами таких методов являются возможность их совмещения с другими технологическими процессами и непрерывность процесса переработки. Наиболее широкое применение среди экструзионных машин для переработки полимеров нашли одношнековые экструдеры. Их роль в современной промышленности сложно переоценить, поскольку часто только они способны перерабатывать высоковязкие материалы. В связи с этим, большое внимание уделяется созданию математических и численных моделей процесса экструзии [1–5], а также разработке рекомендаций по оптимизации определяющих параметров одношнековых машин [6, 7].

Частицы вещества, находящегося в шнековом канале, совершают сложное движение, поэтому в реальных условиях описать течение продукта в шнеке очень сложно, поскольку помимо течения вдоль канала шнека имеет место циркуляционное течение в поперечном к оси канала направлении и переток вещества через гребень шнека за счет зазоров между гребнем и корпусом.

Течение расплавленного полимерного вещества в зоне дозирования принято представлять как сумму двух независимых движений: поступательного течения вдоль оси шнека и циркуляционного течения в поперечном к оси канала направлении, которое и будет рассмотрено в настоящей работе. При построении математических моделей процесса течения в зоне дозирования, где полимерное вещество находится в расплавленном состоянии, вводится ряд упрощающих предположе-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол_а.

ний: рассматривается стационарный процесс с заданным массовым расходом, шнековый канал разворачивается на плоскость и используется принцип обращенного движения, пренебрегается массовыми силами и перетоками жидкости через зазоры [8]. Кроме того, при построении плоской модели канала считается, что глубина канала шнека много меньше его ширины. Таким образом, полагается, что отсутствует влияние боковых стенок на скорость течения в середине канала. Это позволяет представить циркуляционное течение как течение в бесконечно длинном прямоугольном канале, верхняя стенка которого движется с постоянной скоростью в своей плоскости. В связи с этим возникает вопрос, при какой величине отношения ширины канала к его глубине является допустимым предположение об отсутствии влияния боковых стенок. Этот вопрос и рассматривается в настоящей работе.

Основные уравнения

Поскольку в зоне дозирования существует только жидкая фаза, расплав можно считать неньютоновской жидкостью. Основными уравнениями для описания двумерного течения неньютоновской жидкости при малых числах Рейнольдса ($Re \ll 1$) являются уравнения Стокса:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ – компоненты полного тензора напряжений, p – давление, δ_{ij} – символ Кронекера, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, x_j – декартовы координаты.

В качестве реологической модели, описывающей неньютоновское поведение жидкости, используется степенной закон, характеризующий зависимость вязкости от скорости сдвига:

$$\tau_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij}, \quad (2)$$

где $\eta = \dot{\gamma}^{n-1}$ – коэффициент эффективной вязкости, n – индекс течения (показатель нелинейности), $\dot{\gamma} = (2\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ji})^{1/2}$ – интенсивность скоростей деформаций, $\dot{e}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ – компоненты тензора скоростей деформаций, u_i – компоненты вектора скорости.

Систему (1) необходимо дополнить уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

и граничными условиями, которые состоят в задании компонент скорости на стенках канала: на верхней подвижной стенке

$$u_1 = 1, u_2 = 0 \quad (4)$$

и на остальных стенках

$$u_i = 0. \quad (5)$$

Все уравнения записаны в безразмерных переменных. В качестве характерного размера выбрана глубина канала H , в качестве характерной скорости – скорость

движения верхней стенки канала u_0 . Давление обезразмерено к величине $k\left(\frac{u_0}{H}\right)^n$, где k – коэффициент консистенции. На рис. 1 представлена область решения.

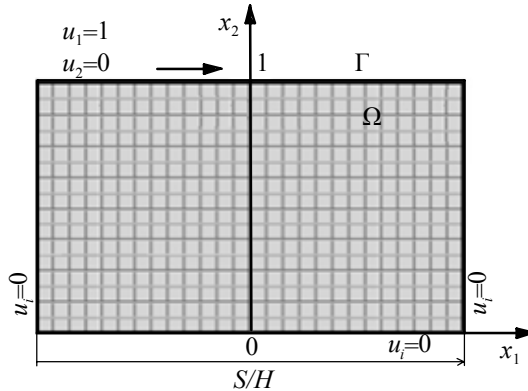


Рис. 1. Область решения (S – ширина, H – глубина)

В такой постановке задача фактически сводится к задаче о течении степенной жидкости в прямоугольной камере с верхней движущейся стенкой [9].

Решение задачи без учета влияния боковых стенок

Предполагается, что $H \ll S$. Тогда постановка задачи о циркуляционном течении неньютоновской жидкости в канале шнека экструдера при отсутствии влияния боковых стенок на профиль скорости в сечении $x_1 = 0$ (рис. 1) и с учетом указанных выше допущений сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2), \\ p &= p(x_1), \\ \frac{dp}{dx_1} &= \frac{d\tau_{12}}{dx_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Граничные условия (4) и (5) остаются прежними. Левая часть уравнения (6) не зависит от x_2 , значит, и правая часть не может зависеть от x_2 , следовательно, обе части уравнения равны постоянной величине. Введем обозначение $\frac{dp}{dx_1} = A$.

В результате интегрирования уравнения (6) получим

$$\tau_{12} = Ax_2 - AC_1, \tag{7}$$

где постоянную интегрирования для удобства дальнейших вычислений выберем в виде $-AC_1$. С учетом соотношений для η и $\dot{\gamma}$ выражение (7) запишем следующим образом:

$$\left(\frac{du_1}{dx_2}\right)^n = A(x_2 - C_1). \tag{8}$$

Уравнение (8) преобразуем к виду

$$\frac{du_1}{dx_2} = \frac{(x_2 - C_1)}{\alpha}, \quad (9)$$

где $\alpha = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n}}$. Интегрируя выражение (9) с учетом граничного условия на нижней стенке, получим

$$u_1(x_2) = \frac{1}{\alpha} \frac{n}{n+1} \left[|x_2 - C_1|^{\frac{n+1}{n}} - C_1^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (10)$$

Для нахождения неизвестных постоянных C_1 , A используем граничное условие на движущейся стенке и тот факт, что расход поперек канала должен быть равен нулю. В результате получаем систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{n}{(n+1)} \left[|1 - C_1|^{\frac{n+1}{n}} - C_1^{\frac{n+1}{n}} \right] - 1 = 0, \\ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{n}{(2n+1)} \left(|1 - C_1|^{\frac{2n+1}{n}} - C_1^{\frac{2n+1}{n}} \right) - C_1^{\frac{n+1}{n}} \right] = 0, \end{cases} \quad (11)$$

которая решается методом Ньютона для определения значений C_1 и A при различных значениях n . После этого по формуле (10) можно рассчитать профиль скорости.

Решение задачи с учетом влияния боковых стенок

Для численного решения задачи с учетом влияния боковых стенок используется непрямой метод граничных элементов [11]. Представим (1) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^N}{\partial x_j} = \Psi_i, \quad (12)$$

где $\sigma_{ij}^N = -p\delta_{ij} + 2\dot{e}_{ij}$ – линейная часть тензора напряжений, $\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1-\eta)\dot{e}_{ij}] = -\frac{\partial \tau_{ij}^{NN}}{\partial x_j}$ – нелинейная векторная функция, которую будем рассматривать как

плотность источников, распределенных по области течения Ω . Тогда, в соответствии с положениями непрямого метода граничных элементов [12], можно записать

$$u_i(x) = \int_{\Gamma} G_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi) + \int_{\Omega} G_{ij}(x, z) \Psi_j(z) d\Omega(z), \quad (13)$$

где $\phi_j(\xi)$ – плотность фиктивных источников, распределенных по границе области течения Γ . Функция G_{ij} является фундаментальным решением уравнений

Стокса и определяется формулой [13]

$$G_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \left(\delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + \frac{y_i y_j}{r^2} \right), \quad (14)$$

где $y_i = x_i - \xi_i$, $r = (y_i y_i)^{\frac{1}{2}}$. Если на границе области течения Γ заданы значения скорости, то уравнения (13) позволяют получить значения неизвестных граничных сил $\phi_j(\xi)$ ($\xi \in \Gamma$). Это возможно сделать при известной функции $\Psi_j(z)$ ($z \in \Omega$). Так как эта функция заранее не известна, то возникает необходимость организации итерационного процесса.

Для численного решения уравнений (13) используются постоянные элементы и постоянные ячейки. Граница области течения Γ разбивается на N элементов. Функция $\phi_j(\xi)$ считается постоянной на каждом элементе. Область течения разбивается на N^2 ячеек. Функция $\Psi_j(z)$ считается постоянной внутри ячейки. Тогда уравнения (13) в дискретной форме приобретут вид

$$u_i(x^p) = \sum_{q=1}^N \phi_j^q \Delta G_{ij}^{pq} + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \Psi_j^{km} \Delta G_{ij}^{pkm}, \quad (15)$$

где $\Delta G_{ij}^{pq} = \int_{\Delta\Gamma^q} G_{ij}(x^p, \xi) d\Gamma(\xi)$, $\Delta G_{ij}^{pkm} = \int_{\Delta\Omega^{km}} G_{ij}(x^p, z) d\Omega(z)$, x^p – середина элемента p (узел).

Для вычисления $2N$ неизвестных ϕ_j^q берутся $2N$ уравнений (15), соответствующие N элементам, на которых заданы $u_i(x^p)$. Коэффициенты получаемой системы линейных алгебраических уравнений ΔG_{ij}^{pq} в случае постоянных элементов можно вычислить аналитически. Технология вычисления изложена в [14].

Для вычисления интегралов по области ΔG_{ij}^{pqm} используются стандартные квадратурные формулы Гаусса, без выделения особенностей. Особенности в этих интегралах имеют вид $\ln(1/r)$. Следовательно, при интегрировании по области эти интегралы существуют в обычном смысле. Такой подход значительно упрощает алгоритм решения. При проведении расчетов использовалась квадратурная формула с 64 узлами. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (15) относительно ϕ_j^q применялся метод простой итерации. На первой итерации использовались значения Ψ_i^{km} , определенные по ньютоновскому полю течения. Для решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений использовался метод Гаусса. Далее использовались значения Ψ_i^{km} , рассчитанные в соответствии с полем течения, полученным на предыдущей итерации. Функции Ψ_i^{km} в центре ячейки (k, m) вычислялись конечно-разностным способом с использованием рассчитанных $(\tau_{ij}^{NN})^{km}$ в вершинах ячеек (узлах сетки).

Значения $(\tau_{ij}^{NN})^{km}$ полностью определяются производными $(\partial u_i / x_j)^{km}$, значения которых находились с использованием центральных разностей во внутренних узлах и односторонних разностей в приграничных узлах в соответствии со значениями u_i^{km} , вычисленными в узлах сетки.

Анализ полученных результатов

Расчеты были проведены в диапазоне изменения параметра нелинейности n от 0.4 до 1.0. Результаты вычислений представлены на рис. 2 – 5 и табл. 1 и 2.

В результате решения системы уравнений (11) методом Ньютона, были получены значения C_1 и A , которые представлены в табл. 1. Постоянная C_1 представляет собой значение координаты x_2 , где касательное напряжение τ_{12} обращается в ноль. Полученные профили представлены на рис. 2. В случае $n = 0.5$ найденный профиль скорости согласуется с результатом, представленным в [10]. Это согласование показано на рис. 3.

Таблица 1

Значения C_1, A

n	C_1	A
0.4	0.37	3.41
0.6	0.35	4.10
0.8	0.34	4.96
1.0	0.33	6.00

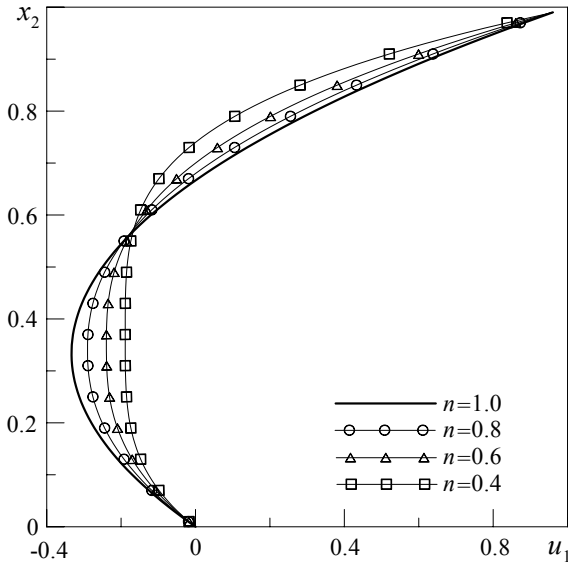


Рис. 2. Профили составляющей скорости $u_1(x_1 = 0)$ для $n = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4$

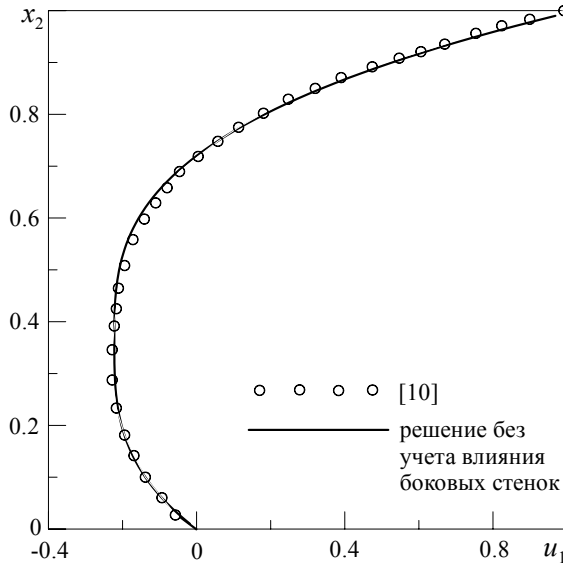


Рис. 3. Сравнение профиля составляющей скорости u_1 ($x_1 = 0$) с данными [10] для $n = 0.5$

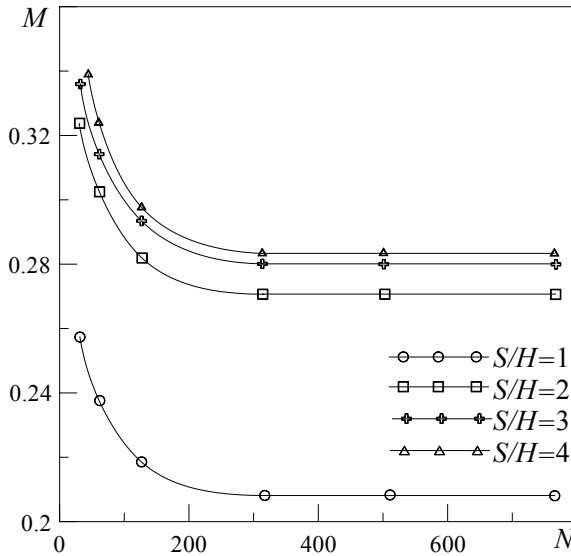


Рис. 4. Зависимость нормы скорости M от числа элементов N при $n = 0.4$ для $S/H = 1, 2, 3, 4$

Для решения задачи о циркуляционном течении степенной жидкости в шнековом канале с учетом влияния боковых стенок был использован непрямой метод граничных элементов, описанный выше и успешно примененный для решения задачи о течении степенной жидкости в квадратной каверне [9]. Для исследования

аппроксимационной сходимости метода использовалась величина M , которая является нормой L_2 профиля скорости в сечении $x_1 = 0$:

$$M = \|u_1^{cm}(x_2)\| = \frac{1}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^K (u_i^{cm})^2}, \quad K = 100, \quad (16)$$

где $u_1^{cm}(x_2)$ – профиль скорости, полученный при помощи МГЭ.

Рис. 4 иллюстрирует зависимость значения нормы профиля скорости от числа граничных элементов N при различных значениях отношения S/H для случая $n = 0.4$. Норма профиля скорости не изменяет своего значения, начиная с $N = 320$. Представленные далее расчеты были проведены при $N = 512$. Профили составляющей скорости $u_1(x_2)$, полученные с учетом влияния боковых стенок, показаны на рис. 5.

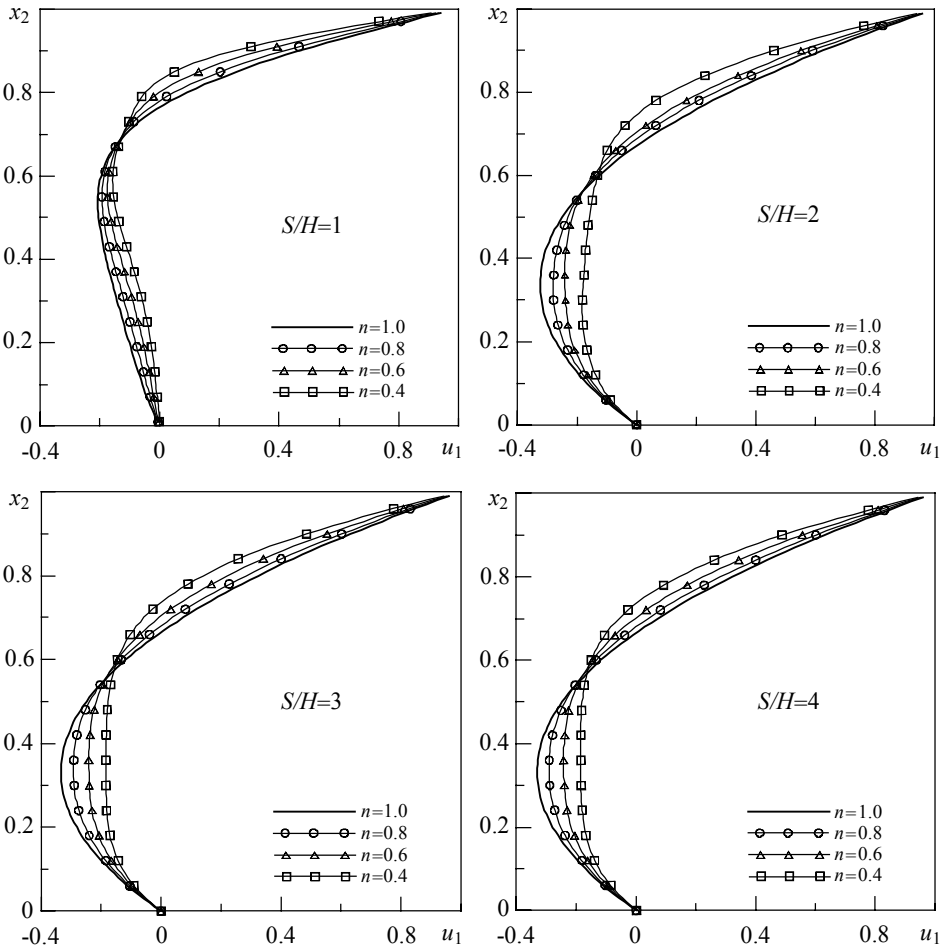


Рис. 5. Профили составляющей скорости u_1 вдоль линии $x_1 = 0$ для $0.4 \leq n \leq 1.0$

Относительное отклонение E решений, полученных с учетом влияния боковых стенок и без него, рассчитано в норме L_2 по формуле

$$E = \frac{\|u_1\| - \|u_1^{cm}\|}{\|u_1\|} \cdot 100 \%, \quad (17)$$

где $\|u_1\|$ – норма скорости без учета влияния боковых стенок. Результаты приведены в табл. 2. Видно, что для всех n отклонение составляет менее 1 % при $S/H = 3$ и более. Таким образом, можно сказать, что при моделировании течения в канале одношнекового экструдера можно не учитывать влияние боковых стенок на циркуляционное течение при $S/H \geq 3$. При этом относительное отклонение E будет гарантированно менее 1 % в указанном диапазоне значений показателя нелинейности.

Таблица 2

Относительное отклонение решений, рассчитанное в норме L_2

	$n = 1.0$				$n = 0.8$			
S/H	1	2	3	4	1	2	3	4
$E, \%$	24	1	0.2	0.08	24.7	1.9	0.07	0.03
	$n = 0.6$				$n = 0.4$			
S/H	1	2	3	4	1	2	3	4
$E, \%$	26	3.5	0.67	0.2	25.4	3.8	0.6	0.05

Заключение

Рассмотрен вопрос о том, при какой величине отношения ширины шнекового канала экструдера к его глубине является допустимым предположение об отсутствии влияния боковых стенок на профиль скорости циркуляционного течения в середине канала. Предложена методика получения решения для профиля вектора скорости псевдопластичной жидкости без учета влияния боковых стенок. Согласно проведенному исследованию, влиянием боковых стенок на циркуляционное течение в середине канала можно пренебречь для $S/H > 3$, поскольку относительное отклонение решений, полученных с учетом влияния боковых стенок и без него, в этом случае составляет менее 1 % в диапазоне изменения показателя нелинейности n от 0.4 до 1.0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микулёнок И.О. К вопросу моделирования процесса червячной экструзии // Известия высших учебных заведений. Химия и химическая технология. 2011. Т. 54. № 12. С. 96–100.
2. Остриков А.Н., Абрамов О.В. Математическая модель процесса экструзии при неизотермическом течении вязкой среды в одношнековых экструдерах // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. 1999. № 1. С. 49–52.
3. Сагиров С.Н. Исследование и моделирование процесса движения полимера в одношнековом экструдере // Технические науки. Фундаментальные исследования. 2011. № 12. С. 179–183.
4. Хаметова М.Г. Описание стационарного, неизотермического течения неньютоновской жидкости в одношнековом экструдере // Вестник СГТУ. Проблемы естественных наук. 2012. № 1(64). С. 15–19.

5. Covas J.A., Costa P.A. A miniature extrusion line for small scale processing studies // Polymer Testing. 2004. No. 23. С. 763–773.
6. Соколов М.В., Клинков А.С., Ефремов О.В. Автоматизированное проектирование и расчет шнековых машин. М.: Машиностроение-1, 2004.
7. Керженцев В.А., Курсеитов С.И., Курсеитова Э.С. Выбор геометрии канала шнека для продвижения массы в шнековом экструдере // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий: сб. науч. тр. Керченского морского технологического института. Керчь: Изд-во КМТИ, 2006. Вып. 7. С. 130–136.
8. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1984.
9. Пономарева М.А., Филина М.П., Якутенок В.А. Течение неньютоновской жидкости в квадратной камере при малых числах Рейнольдса // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 90–100.
10. Янков В.И., Боярченко В.И., Первадчук В.П. Переработка волокнообразующих полимеров. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. Т. 2.
11. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 57. P. 289–304. DOI: 10.2495/BE370241.
12. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
13. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
14. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Мат. моделирование. 1992. Т. 4. № 10. С. 62–70.

Статья поступила 19.02.2016 г.

Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. CIRCULATORY HIGH-VISCOSITY NON-NEWTONIAN FLUID FLOW IN A SINGLE-SCREW EXTRUDER CHANNEL

DOI 10.17223/19988621/40/10

This paper is devoted to definition of a width-to-depth ratio of a single-screw extruder channel when sidewalls do not affect the velocity profiles of circulatory high-viscosity non-Newtonian fluid flow at the mid of the channel. The channel has a rectangular cross-section. Power-law model is used to describe fluid behavior. The indirect boundary element method is used for numerical solution taking into account of sidewalls. Comparing of obtained velocity profiles with the known results showed a good agreement. Research is performed in the range of power-law index from 0.4 to 1.0. The method for obtaining the velocity component profiles for the case of shear-thinning fluid flow without considering influence of sidewalls is presented. The width-to-depth ratio of a single-screw extruder channel when it is acceptable to neglect influence of sidewalls on flow at the mid of the channel is defined.

Keywords: single-screw extruder, non-Newtonian fluid, Indirect Boundary Element Method, flow in lid-driven cavity.

PONOMAREVA Maria Andreevna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: pma@ftf.tsu.ru

FILINA Maria Petrovna (Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: filina.mari@mail.ru

YAKUTENOK Vladimir Albertovich (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: yva@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Mikulionok I.O. (2011) K voprosu modelirovaniya protsessa chervyachnoy ekstruzii [On modelling of worm extrusion]. *Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya – Chemistry and Chemical Technology*. 54(12).
2. Ostrikov A.N., Abramov O.V. (1999) Matematicheskaya model' protsessa ekstruzii pri neizotermicheskom techenii vyazkoy sredy v odnoshnekovykh ekstruderakh [Mathematical model of the extrusion process at non-isothermal viscous flow in a single-screw extruder]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Pishchevaya tekhnologiya – Food technology*. 1. pp. 49–52.
3. Sagiroy S.N. (2011) Issledovanie i modelirovanie protsessa dvizheniya polimera v odnoshnekovom ekstrudere [Analysis and modeling of polymers motion in a single screw extruder.]. *Tekhnicheskie nauki. Fundamental'nye issledovaniya – Technical science. Fundamental research*. 12. pp. 179–183.
4. Khametova M.G. (2012) Opisaniye statsionarnogo, neizotermicheskogo techeniya nen'yutonovskoy zhidkosti v odnoshnekovom ekstrudere [Description of steady-state, nonisothermal flow of a non-Newtonian fluid in a single-screw extruder]. *Vestnik SGTU. Problemy estestvennykh nauk – SSTU Journal of Natural Sciences Problems*. 1(64). pp. 15–19.
5. Covas J.A., Costa P.A. (2004) A miniature extrusion line for small scale processing studies. *Polymer Testing*. 23. pp. 763–773.
6. Sokolov M.V., Klinkov A.S., Efremov O.V. (2004) *Avtomatizirovannoe proektirovanie i raschet shnekovykh mashin* [Computer-aided design of screw extruders]. Moscow: Mashinostroenie-1.
7. Kerzhentsev V.A., Kurseitov S.I., Kurseitova E.S. (2006) Vybory geometrii kanala shneka dlya prodvizheniya massy v shnekovom ekstrudere [Choosing the screw channel geometry for mass extrusion in a screw extruder]. In: *Mekhanizatsiya proizvodstvennykh protsessov rybnogo khozyaystva, promyshlennykh i agrarnykh predpriyatiy* [Production Process Mechanization of Fish Farm, Industrial, and Agrarian Enterprises]. Kerch: KMIT publishing house. Iss. 7. pp. 130–136.
8. Tadmor Z., Gogos C.G. (1979) *Principles of polymer processing*. New York: John Wiley & Sons.
9. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. (2015) Techenie nen'yutonovskoy zhidkosti v kvadratnoy kaverne pri malykh chislakh Reynol'dsa [Non-Newtonian fluid flow in a lid-driven cavity at low Reynolds numbers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 90–100.
10. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchuk V.P. (2005) *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov* [Fiber-forming polymer processing]. Vol. 2. Moscow, Izhevsk: R&C Dynamics.
11. Ponomareva M.A., Filina M.P., Yakutenok V.A. (2014) The indirect boundary element method for the two-dimensional pressure- and gravity-driven free surface Stokes flow. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 57. pp. 289–304.
12. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. Berlin, Heidelberg New York: Springer-Verlag.
13. Ladyzhenskaya O.A. (1963) *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach.
14. Yakutenok V.A. (1992) Chislennoye modelirovanie medlennykh techeniy vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu metodom granichnykh elementov [Numerical simulation of viscous, free-surface, creeping flow with boundary element method]. *Mat. modelirovanie – Mathematical Models*. 4(10). pp. 62–70.